

Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet Geometria Tanszék

Szakdolgozat

A képtárprobléma előőrökkel

Készítette: Torma Zsolt
Matematika BSc

Témavezető: Dr. Fodor Ferenc

2013

Tartalomjegyzék

1. Történeti áttekintés és bevezetés	2
2. Fogalmak és jelölések	3
3. Konvex particionálás	6
4. Kombinatorikus korlát	12
Irodalomjegyzék	16
Nyilatkozat	17

1. fejezet

Történeti áttekintés és bevezetés

1973-ban Klee vetette fel azt a meghatározó problémát, hogy hány őr elegendő egy n -csúcsú képtár belsejének megfigyeléséhez. A problémára először Chvátal [1] adott megoldást 1975-ben, ami „Chvátal’s Art Gallery theorem”-ként vált ismerté. A tétel kimondja, hogy $\lfloor n/3 \rfloor$ őr néha szükséges és mindig elegendő az n -csúcsú sokszög lefedéséhez. 1978-ban Fisk [3] egy rendkívül egyszerű bizonyítást adott Chvátal tételére. Az eredeti képtár problémának azóta számos változata született, azonban mindegyik változatban van egy közös tényező, ami nem más mint a sokszögnek valamilyen módon történő particionálása. A dolgozatban azt az esetet vizsgáljuk, amikor az őrök a sokszögnek az élei. Először 1981-ben Toussaint tette fel azt a kérdést, hogy minimum hány élőr szükséges bármely n csúcsú sokszög megfigyeléséhez. Toussaint azt sejtette, hogy néhány kivételtől eltekintve, $\lfloor n/4 \rfloor$ élőr néha szükséges és mindig elegendő bármely n csúcsú sokszög megfigyeléséhez. Az első pozitív eredmény O’Rourke-tól [4] származik, ugyanis bebizonyította, hogy $\lfloor n/4 \rfloor$ mobilőr néha szükséges és mindig elegendő bármely n csúcsú sokszöghöz.

A dolgozatban megmutatjuk, hogy bármely sokszög, melyben nincsen kettő konkáv csúcs egymás mellett, megfigyelhető $\lfloor 2n/7 \rfloor$ élőrrel, lásd 3. tétel. Maga a 3. tétel és a bizonyítás alapötlete Vígh Viktortól [9] származik, és a gondolatmenetben felhasználunk egy Tóth Csabától (Calgary Egyetem, Kanada) [7] származó tételt (2. tétel), amelynek egy speciális esetét magunk is megpróbáltuk bizonyítani. Ezt a gondolatmenetet is leírjuk, bár a bizonyításunk erre a speciális esetre sem teljes, de a használt módszereket jól illusztrálja.

További információ található a probléma történetéről és korábbi eredményekről Urrutia [8] 2000-ben megjelent áttekintő cikkében.

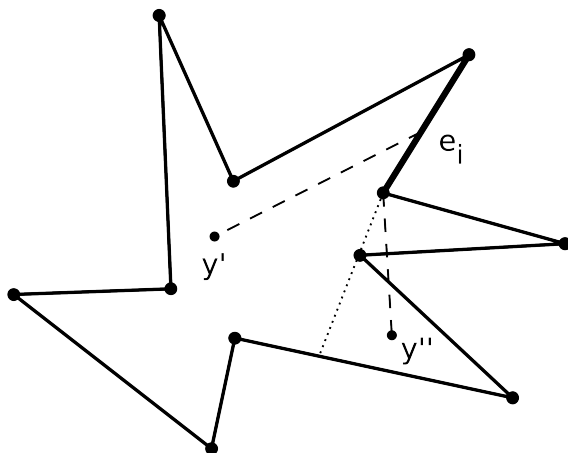
2. fejezet

Fogalmak és jelölések

A dolgozatban kizárólag euklideszi síkbeli problémával foglalkozunk. A síkon megadható egy O középpontú derékszögű koordináta rendszer, amelyben minden v_i pont felírható (x_i, y_i) koordinátákkal. Legyen $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ egy n pontú halmaz a síkon, és $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ pedig relatív belsejükben páronként diszjunkt szakaszok, úgy hogy e_i végpontjai rendre v_i és v_{i+1} legyenek, minden $i = 1, \dots, n-1$ esetén, és e_n -nek pedig v_n és v_1 . Az így definiált $P = (V, E)$ páros meghatároz egy egyszerű zárt törött vonalat a síkon, amit sokszögnek nevezünk. A $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ síkbeli pontok halmazát a sokszög csúcshalmazának nevezzük. Egy tetszőleges csúcsból kétféle irányban tudunk végighaladni a sokszög határa mentén és az óramutató járásával ellentétes irányt nevezzük pozitív körüljárási iránynak. A v_i és a v_k csúcsokat összekötő *szakaszt* jelölje: $\overline{v_i v_k}$. A v_i és a v_k csúcsokra illeszkedő *egyenes* jelölje: $v_i v_k$. Egy tetszőleges P sokszög két részre osztja a síkot, egy korlátos és egy nem korlátos tartományra. A korlátos tartományt a sokszög *belsejének*, míg a nem korlátosat a *külsejének* nevezzük. Egy P sokszög *konkáv* csúcsain azokat a csúcsokat értjük, melyeknél a belső szög nagyobb mint π , és *konvex* csúcsain pedig azokat, ahol a belső szög legfeljebb π . Ha két nem szomszédos csúcsot összekötő szakasz a végpontjai kivételével minden egyes pontja a sokszög relatív belsejében helyezkedik el, akkor ezt a szakaszt *átlónak* nevezzük. Egy P sokszöget (függőleges irányban) *monotonnak* nevezünk, ha bármely vízszintes $v'v''$ egyenesre $P \cap v'v''$ vagy üres halmaz, vagy egyetlen pont, vagy pedig egy szakasz. Egy P *monoton* sokszög csúcsait fel tudjuk sorolni növekvő sorrendben az y koordinátájuk szerint, és a legalsó csúcsból a legfelsőbe kettő útvonalon tudunk eljutni, és ezeket az útvonalakat *jobb* illetve *baloldali láncnak* nevezzük.

A következők folyamán olyan speciális P sokszögeket vizsgálunk, ahol valamely körüljárási irány szerint végighaladva a csúcsokon nincsen két konkáv csúcs egymás mellett.

Egy $x \in P$ pont látja az $y \in P$ pontot, ha $\overline{xy} \subset P$. A P sokszög e_i éle látja az $y \in P$ pontot, ha az e_i élnek létezik olyan $x \in e_i$ pontja, amely látja az y pontot, példaként tekintsük a 2.1. ábrát. *Őrnek* nevezzük a láthatóság vagy a megvilágítás forrását. *Pont-őrnek* nevezzük ha az *őr* a P sokszög egy pontja, illetve *Csúcsőrnek* ha az *őr* a P sokszög egy csúcsa. *Élőrnek* nevezzük ha a láthatóság forrása a P sokszög egy éle.

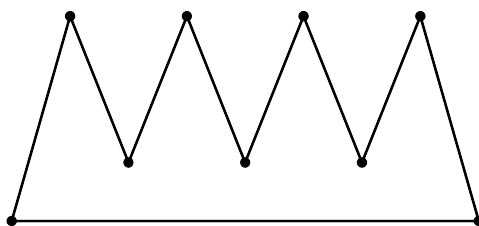


2.1. ábra.

Chvátal [1] bizonyította a következő tételt.

1. Tétel. $\lfloor n/3 \rfloor$ csúcsőr néha szükséges és mindig elegendő egy n csúcsú képtár belsejének megfigyeléséhez.

A 2.2. ábrán látható fésű alakú sokszög mutatja, hogy egy n csúcsú sokszöghöz bizonyos esetekben szükséges az $n/3$ csúcsőr.

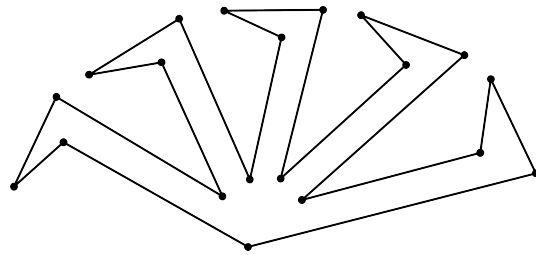


2.2. ábra.

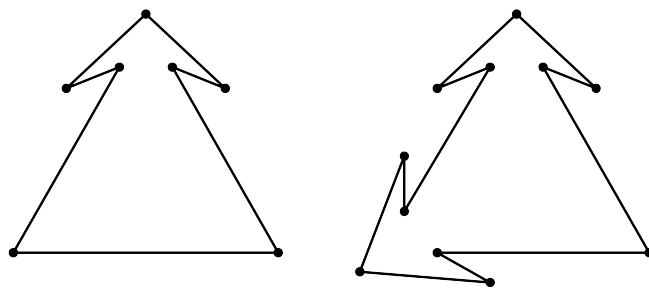
1. Sejtés (Toussaint (1981)). *Néhány kivételtől eltekintve, $\lfloor n/4 \rfloor$ élőr néha szükséges és mindig elegendő bármely n csúcsú sokszög megfigyeléséhez.*

A 2.3. ábrán látható egy tipikus sokszög, amelyhez szükséges $\lfloor n/4 \rfloor$ élőr.

A sejtésre csak két ellenpélda ismert, a Paige és Shermer-féle sokszögek, melyek a 2.4. ábrán láthatóak.



2.3. ábra.



2.4. ábra.

3. fejezet

Konvex particionálás

Az alábbi tétel Tóth Csabától (Calgary Egyetem, Kanada) származik 2010-ből. A tétel bizonyítása tudomásunk szerint még nincs publikálva.

2. Tétel (Tóth Csaba [7]). *Bármely n csúcsú egyszerű sokszög, amelynek r konkáv csúcsa van, felbontható legfeljebb $r + 1$ konvex darabra úgy, hogy minden egyes darab legalább három csúcsot tartalmaz az eredeti sokszögből.*

Ebben a dolgozatban mi a fenti tételnek azt a speciális esetét használjuk, amikor a sokszög olyan tulajdonságú, hogy csúcsainak ciklikus felsorolásában nincs két konkáv csúcs egymás mellett.

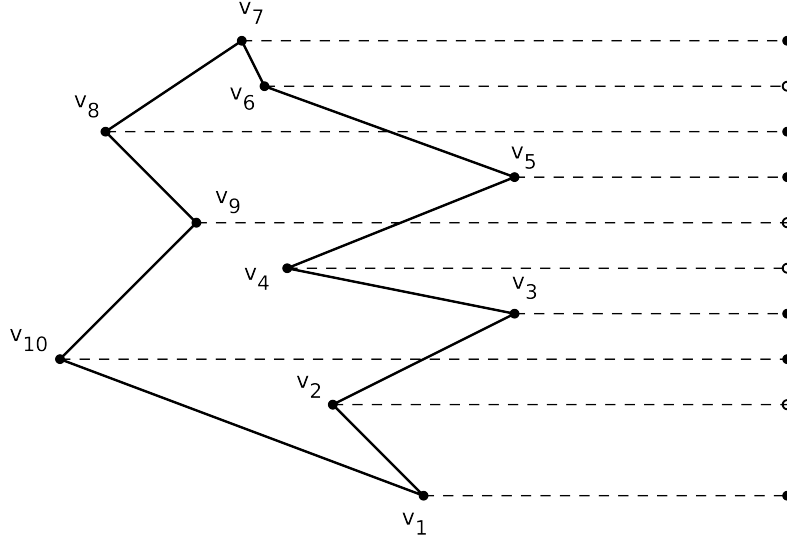
Nem ismervén a 2. tétel bizonyításának részleteit, megkíséreltük saját erőnkől bebizonyítani azt a speciális esetét, amire szükségünk van, azaz, amikor a sokszög olyan tulajdonságú, hogy nincs két egymás melletti konkáv szöge. Az alábbiakban részletesen ismertetjük gondolatmenetünket abban a még speciálisabb esetben, amikor a P sokszög függőleges irányban monoton is. Sajnos ez a gondolatmenet sem teljes, azaz nem bizonyítja a tételt a monoton esetben sem, de jól illusztrálja azokat az elemi módszereket, amelyek használhatók a probléma vizsgálatában.

Legyen a P sokszög monoton (függőleges irányban) és olyan tulajdonságú, hogy csúcsinak ciklikus felsorolásában nincs két konkáv csúcs egymás mellett. Tegyük fel, hogy P -nek r konkáv csúcsa van, és P y irányban (függőlegesen) monoton.

A P minden egyes konkáv csúcsából ki tudunk bocsájtani egy-egy vízszintes egyenes szakaszt. A kibocsájtott szakaszok a sokszöget $r + 1$ darabra, és minden egyes konkáv szöget két konvexre vágnak szét. Ebből egyértelműen következik, hogy minden egyes darab konvex, de az nem garantált, hogy minden egyes darabban legalább három csúcsa szerepel a P sokszögnek. A következőkben megmutatjuk, és egyben egy eljárást is adunk

arra, hogy lehetséges a kibocsájtott szakaszokat úgy forgatni, hogy minden egyes konvex darabban legalább három csúcsa szerepeljen a P sokszögnek.

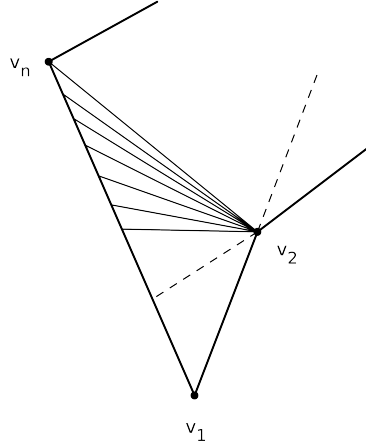
A monoton sokszög csúcsait soroljuk fel függőleges irányban felfelé és különböztessük meg a konkáv és a konvex csúcsokat. Példaként tekintsük a 3.1. ábrát, melyen a függőleges irány szerinti felsorolásban a konvex csúcsokat pont a konkáv csúcsokat pedig üres kör jelöli.



3.1. ábra.

Megfigyelhető, hogy a függőleges irány szerinti felsorolásban az első és az utolsó csúcs biztosan konvex, valamint legfeljebb két konkáv csúcs lehet egymás után. A második csúcs amely vagy a v_2 vagy a v_n , lehet konvex és konkáv is. Ha a második csúcs konkáv, és tegyük fel, hogy ez a második csúcs éppen a v_2 , amely a jobboldali láncon helyezkedik el, akkor bocsássunk ki belőle egy vízszintes szakaszt a baloldali láncre. Ekkor ez a szakasz két részre darabolja fel a sokszöget: egy konvex és egy monoton részre. A konvex rész a sokszög csúcsaiból csak kettőt fog tartalmazni. Ezután a v_2 csúcsból kibocsájtott szakaszt kezdjük el v_2 középponttal forgatni az óramutató járásával megegyező irányba, ameddig el nem érünk a baloldali láncre v_n csúcsába. Ha az így keletkezett $v_1v_2v_n$ háromszög a sokszög többi csúcsától diszjunkt, akkor egyszerűen levágjuk a $v_1v_2v_n$ háromszöget és a darabolási eljárást folytatjuk az $n - 1$ csúcsú monoton sokszögön, amely megtartja azt a tulajdonságát, hogy nincs két konkáv csúcsa egymás mellett, a csúcsainak tetszőleges körüljárási irány szerinti felsorolásában. Vegyük észre, hogy a konkáv csúcsok számát eggyel csökkentettük, és nem keletkezett új csúcs a $\overline{v_2v_n}$ szakasz kibocsájtása során. Példaként tekintsük a 3.2. ábrát.

Ha a $v_1v_2v_n$ háromszög a sokszög többi csúcsától nem diszjunkt, akkor azok a csúcsok

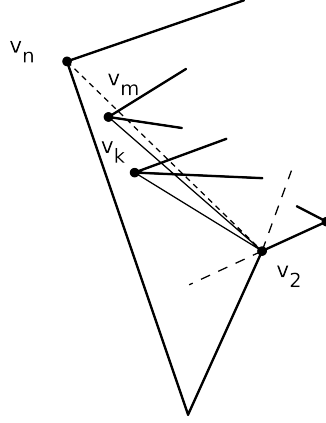


3.2. ábra.

melyek benne vannak a $v_1v_2v_n$ háromszögben, a jobboldali láncon helyezkednek el. A v_2 csúcsból minden ilyen csúcsba bocsássunk ki egy-egy szakaszt és ezek közül válasszuk azt, amelynek a meredeksége a legnagyobb. Legyen ez a szakasz a $\overline{v_2v_k}$ lásd a 3.3. ábrán. A $\overline{v_2v_k}$ szakaszra illeszkedő v_2v_k egyenes olyan tulajdonságú, hogy P minden v_1 -től különböző csúcsa az egyenes v_1 -el ellentétes zárt félsíkjában helyezkedik el, ezért a v_k csúcs biztosan konkáv. A $\overline{v_2v_k}$ szakasz két monoton részre darabolja a sokszöget, és az egyik darabban a legalsó kettő csúcs biztosan konvex, valamint mind a kettő monoton darab megtartja azt a tulajdonságát, hogy nincs két konkáv csúcsa egymás mellett, a csúcsainak tetszőleges körüljárási irány szerinti felsorolásában. Ekkor a konkáv csúcsok számát eggyel csökkentettük, és nem keletkezett új csúcs a $\overline{v_2v_k}$ szakasz kibocsájtása során. Ekkor a darabolási eljárást folytassuk külön-külön a két monoton sokszögön a 3.3. ábrán látható módon. Ha a darabolási eljárást már nem tudjuk folytatni semelyik monoton sokszögön, akkor a monoton sokszögek csúcsait soroljuk fel külön-külön függőleges irányban lefelé, és ismételjük meg a darabolási eljárást mindegyik monoton sokszögön felülről lefelé.

Ha ezt megtettük, akkor soroljuk fel ismét a monoton sokszögek csúcsait külön-külön, függőleges irányban felfelé. Megfigyelhető, hogy az így kapott felsorolásokban, az első és az utolsó kettő csúcs biztosan konvex.

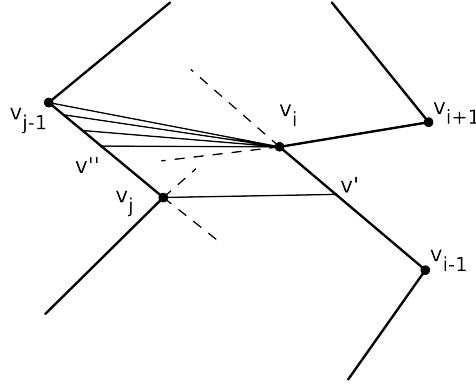
Most tekintsük az egyik ilyen monoton darabot. Haladjunk addig a csúcsokon a felsorolásban, ameddig egy v_j konkáv csúcsához nem érünk. Azt feltehetjük, hogy v_j a baloldali láncon helyezkedik el. Ha a függőleges irány szerinti felsorolásban rákövetkező v_i csúcs konvex, akkor elegendő v_j csúcsból egy vízszintes szakaszt kibocsájtani a jobboldali láncon v' pontjába, mely két darabra vágja a sokszöget: egy monotonra és egy konvexre. A monoton rész megtartja azt a tulajdonságát, hogy nincs két konkáv csúcsa egymás mellett, a csúcsainak tetszőleges körüljárási irány szerinti felsorolásában. A konkáv csúcsok szá-



3.3. ábra.

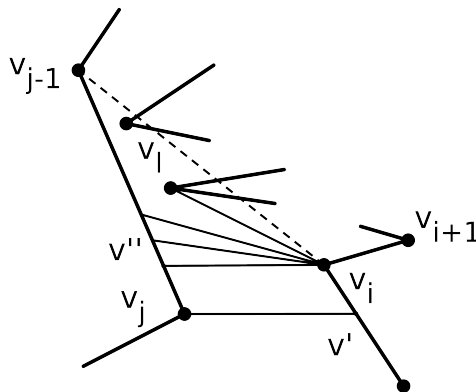
mát eggyel csökkentettük, de a $\overline{v_j v'}$ szakasz kibocsájtása során létrejött egy új v' konvex csúcs, amely a függőleges irány szerinti felsorolásban egybeesik a v_j -vel. Ekkor a monoton résznek legalább az első három csúcsa konvex (ebbe beleszámoltuk v' -t), a csúcsok függőleges irány szerinti felsorolásában, amelyek közül kettő v_j és v_i csúcs a P sokszögnek eredeti csúcsa. A konvex darab pedig legalább három csúcsot fog tartalmazni a P sokszögből. Ekkor a konvex darabot levágjuk és a fennmaradó monoton darabon folytatjuk az eljárást.

Most tegyük fel, hogy v_i csúcs konkáv. Akkor az csak úgy lehetséges, ha v_j és v_i különböző láncon helyezkedik el, és a csúcsok függőleges irány szerinti felsorolásában v_i csúcsra rákövetkező csúcs biztosan konvex. Ebben a helyzetben először vizsgáljuk meg azt, hogy a két konkáv csúcsot összekötő szakasz nem darabolja-e fel mindkét konkáv szöget konvex darabokra. Ha ez nem teljesül, akkor bocsássunk ki a v_j csúcsból a jobboldali lánc v' pontjába és a v_i csúcsból a baloldali lánc v'' pontjába egy-egy vízszintes szakaszt. A v_i csúcsból kiinduló szakaszt kezdjük el v_i középponttal forgatni az óramutató járásával megegyező irányba ameddig az a v_i csúcsnál lévő szöget két konvex részre osztja vagy egy csúcsba nem érünk. Ha a forgatással a v_{j-1} csúcsba értünk el, akkor a $\overline{v_j v'}$ és a $\overline{v_i v_{j-1}}$ szakaszok három darabra vágják a sokszöget: két konvex és egy monotonra, és a monoton rész megtartja azt a tulajdonságát, hogy nincs két konkáv csúcsa egymás mellett, a csúcsainak tetszőleges körüljárási irány szerinti felsorolásában. Ekkor a konkáv csúcsok számát kettővel csökkentettük, és a $\overline{v_j v'}$ szakasz kibocsájtásával keletkezett új v' csúcsot a fennmaradó monoton darab nem tartalmazza. A fennmaradó monoton darab első két csúcsa, a csúcsok függőleges irány szerinti felsorolásában biztosan konvex. Ekkor levágjuk a konvex részeket és a fennmaradó monoton sokszögon folytatjuk az eljárást, a 3.4. ábrán látható módon.



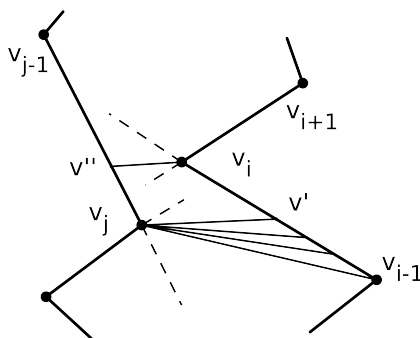
3.4. ábra.

Ha a forgatással a jobboldali láncon egy v_l csúcsba értünk el, akkor v_l biztosan konkáv, mert $\overline{v_i v_l}$ szakaszra illeszkedő $v_i v_l$ egyenes a $v_i v_{j-1} v''$ háromszögben elhelyezkedő csúcsok támaszegyenese. A $\overline{v_j v'}$ és a $\overline{v_i v_l}$ szakasz három darabra vágja a sokszöget: egy konvexre és két monotonra. A két monoton darab metszete a $\overline{v_i v_l}$ szakasz, és mind a két monoton darab megtartja azt a tulajdonságát, hogy nincs két konkáv csúcsa egymás mellett, a csúcsainak tetszőleges körüljárási irány szerinti felsorolásában. A konkáv csúcsok számát kettővel csökkentettük. A $\overline{v_j v'}$ szakasz kibocsájtásával létrejött v' konvex csúcsot csak az egyik monoton darab tartalmazza. Az a monoton darab amelyik nem tartalmazza a v' csúcsot, a csúcsainak függőleges irányban történő felsorolásakor az első kettő csúcs biztosan konvex, és amelyik monoton darab a v' csúcsot tartalmazza, a csúcsainak függőleges irányban történő felsorolásakor az első három csúcs biztosan konvex, melyek közül kettő a P sokszögnek is a csúcsa. Ekkor levágjuk a konvex darabot és a eljárást folytassuk a monoton sokszögeken, a 3.4. ábrán látható módon



3.5. ábra.

Ha a forgatás során nem értünk el egyetlen csúcsba sem, akkor a v_i csúcsból kibocsájtott szakaszt hagyjuk vízszintesen, és a v_j csúcsból kibocsájtott $\overline{v_j v'}$ szakaszt kezdjük el forgatni v_j középponttal az óramutató járásával megegyező irányba, ameddig egy csúcs-hoz nem érünk. A monoton sokszög és a v_i illetve a v_j csúcsokra illeszkedő élek geometriai tulajdonságaiból egyértelműen adódik, hogy mindig el tudjuk forgatni a v_j csúcsból kibocsájtott szakaszt a v_i -t megelőző csúcsba (pozitív körüljárás szerint). Ha ez a v_i -t megelőző csúcs (pozitív körüljárás szerint) a v_{i-1} (azaz csúcsa P -nek), akkor a $\overline{v_i v''}$ és a $\overline{v_j v_{i-1}}$ szakaszok három darabra vágják a sokszöget egy monoton és két konvexre, a 3.6. ábrán látható módon. A monoton darab megtartja azt a tulajdonságát, hogy nincs két konkáv csúcsa egymás mellett, a csúcsainak tetszőleges körüljárási irány szerinti felsorolásában. A konkáv csúcsok számát kettővel csökkentettük, és a fennmaradó monoton darabnak az első három csúcsa biztosan konvex, a csúcsok függőleges irány szerinti felsorolásában, és ezek közül kettő a P sokszögnek is csúcsa. Ekkor levágjuk a konvex darabokat és a eljárást folytassuk a fennmaradó monoton sokszögön, a 3.6. ábrán látható módon



3.6. ábra.

Probléma akkor merülhet fel, ha a v_i -t megelőző csúcs nem csúcsa P -nek. Ezt az esetet jelenleg nem tudjuk kezelni, ezért bizonyításunk nem teljes.

4. fejezet

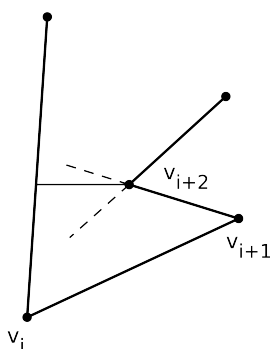
Kombinatorikus korlát

Ebben a fejezetben bebizonyítjuk a következő tételt, amely Vígh Viktortól [9] származik. A bizonyítás Vígh Viktor gondolatmenetét követi.

3. Tétel (Vígh Viktor 2011). *Legyen P olyan n csúcsú egyszerű sokszög, amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy csúcsainak ciklikus felsorolásában nincs két konkáv csúcs egymás mellett. Ekkor P megfigyeléséhez elegendő $\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor$ élőr.*

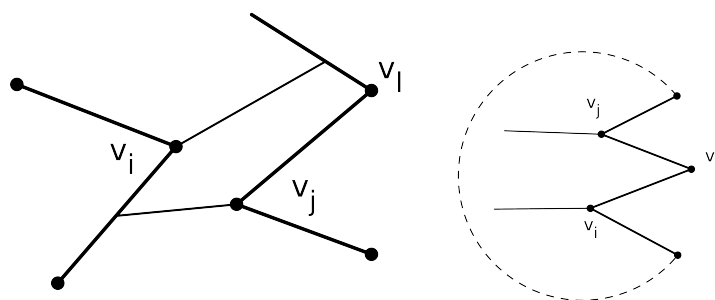
Ha P -nek r konkáv csúcsa van, akkor a 2. tétel garantálja, hogy P -t fel lehet darabolni $r + 1$ konvex darabra, úgy, hogy minden egyes konvex darab legalább három csúcsot tartalmaz P -ből. Ekkor minden egyes konvex darabhoz létezik a P sokszögnek legalább négy olyan éle, amelyekből belátható az egész konvex darab.

1. lemma. *Azok a konvex darabok, amelyek a P sokszög pontosan négy éléből láthatók be, kettő konvex és egy konkáv csúcsot tartalmaznak a P sokszögből, és a 4.1. ábrán látható konfigurációt alkotják.*



4.1. ábra.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ha egy konvex darab a P sokszög legalább négy csúcsát tartalmazza, akkor ezt a konvex darabot a P legalább öt éle látja. Tehát feltehetjük, hogy a szóbanforgó konvex darab pontosan három csúcsot tartalmaz P -ből. A konstrukció miatt ezek között kell, hogy legyen konkáv csúcs. Ha mind a három csúcs konkáv, akkor a konvex darabot legalább hat él látja be, mert a konstrukció miatt a konkáv csúcsokra illeszkedő élek páronként különbözőek. Ha kettő konkáv v_i, v_j és egy konvex v_l csúcsot tartalmaz a konvex darab a P sokszögből, akkor a konvex darabot legalább öt él látja be, mert a két konkáv csúcsra illeszkedő négy él páronként különböző, és ha v_l csúcsra illeszkedő valamelyik él különbözik a v_i, v_j konkáv csúcsokra illeszkedő élektől, akkor készen vagyunk. Ha nem különbözik, akkor az csak úgy lehetséges, hogy a csúcsok körüljárási irány szerinti felsorolásában v_l csúcs v_i és v_j konkáv csúcsok között helyezkedik el. Ekkor kell lennie legalább még egy élnek a P sokszögben melyből belátható a konvex darab, mert v_i és v_j csúcsból kibocsájtott egyenes szakaszokra illeszkedő félegyenesek biztosan metszik a sokszög egy másik élet is, amelyből belátható a konvex darab. Példaként tekintsük a 4.2. ábrát. $\square$



4.2. ábra.

Jelöljük azoknak a konvex darabok számát k_4 -gyel, amelyeket a P sokszög pontosan négy éléből lehet belátni. Ekkor $k_4 \leq c - r$, ahol c a P sokszög konvex csúcsainak száma. De ha $n > 5$ akkor az nem lehetséges, hogy minden egyes konvex darab pontosan négy élből látható be. Ebből következik, hogy lennie kell olyan konvex daraboknak is amelyek legalább öt élből megfigyelhetők és a legrosszabb eset az amikor csak négy és öt élből megfigyelhető konvex darabok vannak. Legalább öt élből belátható konvex darabok számát jelöljük k_5 -tel. Ekkor $k_5 \geq 2r - c + 1$.

Egy $\mathcal{H}$ hipergráf egy $(V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$ páros, ahol minden $e \in E(\mathcal{H})$ esetén $e \subseteq V(\mathcal{H})$. Legyen $\mathcal{H}$ egy hipergráf, ekkor $A \subseteq V(\mathcal{H})$ lefogó ponthalmaz, ha minden $e \in E(\mathcal{H})$ esetén $A \cap e \neq \emptyset$. A minimális elemszámú lefogó ponthalmazok számosságát $\tau(\mathcal{H})$ -val jelöljük. Egy $\mathcal{H}$ hipergráf k -uniform, ha minden $e \in E(\mathcal{H})$ éle egy k elemű halmaz.

Konstruáljuk meg a $\mathcal{H}$ hipergráfot úgy, hogy a P sokszög élei legyenek a hipergráf csúcsai és a hiperélei pedig az egyes konvex darabokat belátó élek halmaza. Ekkor a $\mathcal{H}$ hipergráfnak k_4 darab negyedfokú és k_5 darab legalább ötödfokú éle van és n csúcsa. Célunk a $\tau(\mathcal{H})$ lefoglaló ponthalmazra egy megfelelő felső korlátot megadni.

Chvátal és McDiarmid bizonyították az alábbi felső korlátot k -uniform hipergráfok lefoglalási számára (lásd [2] 23. o. Theorem 6.1).

4. Tétel (Chvátal és McDiarmid [2]). *Legyen H egy k -uniform, n csúcsú hipergráf, amelynek m hiperéle van. Ekkor*

$$\tau(H) \leq \frac{\lfloor k/2 \rfloor m + n}{\lfloor 3k/2 \rfloor}.$$

Bizonyításunkban fel fogjuk használni a 4. tétel következő általánosítását, melynek ötlete Vígh Viktortól származik.

5. Tétel (Vígh Viktor [9]). *Legyen $\mathcal{H}$ egy n csúcsú és $r+1$ élű olyan hipergráf, amelynek k_4 negyedfokú és k_5 darab ötödfokú éle van. Ekkor*

$$\tau(\mathcal{H}) \leq \left\lfloor \frac{3k_4 + 2k_5 + n}{7} \right\rfloor.$$

A 5. tétel bizonyítása lényegében, kis módosítással, az eredeti Chvátal-McDiarmid gondolatmenetet követi, lásd [2] 23–24. o.

Bizonyítás. A bizonyítás n szerinti teljes indukcióval történik. Ha egy v csúcs legalább három élt fog le akkor az a legrosszabb eset ha mind a három él ötödfokú,

$$\tau(\mathcal{H} - v) \leq \left\lfloor \frac{3k_4 + 2(k_5 - 3) + n - 1}{7} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{3k_4 + 2k_5 + n}{7} \right\rfloor - 1$$

és kész is vagyunk mivel $\tau(\mathcal{H}) \leq 1 + \tau(\mathcal{H} - v)$. Ezért feltehetjük, hogy $\mathcal{H}$ minden csúcsa legfeljebb két élre illeszkedik. Ha a p a pontosan egy élre illeszkedő csúcsok száma és q s pontosan kettő élre illeszkedő csúcsok száma, akkor $p + q \leq n$, $p + 2q = 4k_4 + 5k_5$, és így

$$q \geq 4k_4 + 5k_5 - n.$$

Konstruáljuk meg a $\mathcal{G}$ gráfot, úgy hogy $\mathcal{H}$ hiperélei legyenek a csúcsai és élei pedig a q csúcsok, melyek kettő $\mathcal{H}$ -beli élre illeszkednek. Ha $\mathcal{H}$ egyik csúcsa e és f élekre illeszkedik, akkor egy megfelelő $\mathcal{G}$ -beli él illeszkedik $\mathcal{G}$ hipergráf e és f csúcsára. Shannon egy [5] tétele azt állítja, hogy minden hipergráf melynek foka maximum k , élei $\lfloor 3k/2 \rfloor$ színnel kiszínezhetőek. Esetünkben $\lfloor 3k/2 \rfloor = 7$, mert k_5 azon a hiperélek a száma melyek legalább ötödfokúak. Ebből az következik, hogy a $\mathcal{G}$ hipergráfra létezik egy olyan S párosítása, hogy

$$|S| \geq \frac{q}{7} \geq \frac{4k_4 + 5k_5 - n}{7}$$

Mivel S párosítás láthatóan $\mathcal{H}$ csúcsainak részhalmaza és ezekre a csúcsokra $2|S|$ darab $\mathcal{H}$ -beli él illeszkedik, ezért

$$\tau(\mathcal{H}) \leq |S| + (r + 1 - 2|S|) \leq r + 1 - \frac{4k_4 + 5k_5 - n}{7} = \frac{3k_4 + 2k_5 + n}{7}$$

□

Ha a 5. tétel állításába behelyettesítjük, hogy $k_4 \leq c - r$ illetve $k_5 \geq 2r - c + 1$, és figyelembe vesszük azt is, hogy $c + r = n$ akkor

$$\tau(\mathcal{H}) \leq \left\lfloor \frac{3(c - r) + 2(2r - c + 1) + n}{7} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{c + r + 2 + n}{7} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2n}{7} \right\rfloor.$$

Ezzel a 3. tétel bizonyítását befejeztük.

Irodalomjegyzék

- [1] Chvátal, V., *A combinatorial theorem in plane geometry*, Journal of Combinatorial Theory Series B **18** (1975), 39–41.
- [2] Chvátal, V., McDiarmid, C., *Small transversals in hypergraphs*, Combinatorica **12** (1992), No. 1, 19–26.
- [3] Fisk, S., *A short proof of Chvátal’s Watchman Theorem*, Journal of Combinatorial Theory Series B **24** (1978), 374.
- [4] O’Rourke, J., *Galleries need fewer mobile guards: a variation to Chvátal’s Theorem*, Geometriae Dedicata **14** (1983), 273–283.
- [5] Shannon, C.E., *A theorem on coloring the lines of a network*, Journal of Mathematics and Physics **27** (1949), 148–151.
- [6] Szabó, L., *Kombinatorikus Geometria és Geometriai Algoritmusok*, Polygon Kiadó, 2003.
- [7] Tóth Cs., *személyes közlés*, 2013.
- [8] Urrutia, J., *Art gallery and illumination problems. Handbook of computational geometry*, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 973–1027.
- [9] Vigh, V., *személyes közlés*, 2013.

Nyilatkozat

Alulírott Torma Zsolt kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2013. május. 18.

Torma Zsolt