

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

Legrövidebb út keresése szabályos hatszögek elhelyezéseiben

SZAKDOLGOZAT

Készítette
Keller Dorina
matematika szakos BSc hallgató

Témavezető
dr. Fodor Ferenc
egyetemi docens

2018

Tartalomjegyzék

Tartalmi összefoglaló	2
1. Történeti bevezető	5
2. A szabályos hatszög esete	9
Irodalomjegyzék	20
Nyilatkozat	22

Tartalmi összefoglaló

Dolgozatomban egy olyan diszkrét geometriai probléma egy változatát vizsgáljuk meg, melynek alapjai Fejes Tóth Lászlótól származnak. Az eredeti kérdést 1968-ban fogalmazta meg Fejes Tóth László [FT68] cikkében, amely rétegek átjárhatósági problémájáról szól a következőképpen. Legyen adott a síkban két, egymástól w távolságra fekvő párhuzamos egyenes, melyek által határolt sávban páronként diszjunkt nyílt (korlátos) tartományok helyezkednek el egy ún. réteget alkotva. Olyan görbék vizsgálunk, melyek a sáv egyik határoló egyenesét kötik össze a másik határoló egyenesével és diszjunktak a réteg alkotóelemeitől, azaz a tartományoktól. A

$$p = \frac{w}{\inf l}$$

hányadost a réteg permeabilitásának, átjárhatóságának nevezzük, ahol $\inf l$ a fentebb definiált görbék infimumát jelöli. A cél meghatározni olyan rétegek permeabilitását, melyeket egybevágó, homotetikus, vagy esetleg azonos méretű, de nem egyállású háromszögek, négyzetek, körlapok, stb. alkotnak.

Fejes Tóth László [FT68] cikkében nyílt körlapok alkotta rétegek esetén ad a permeabilitásukra alsó korlátot, [FT78] cikkében pedig a nyílt négyzetekből, paralelogrammákból és rombuszokból álló rétegek permeabilitását becsüli meg. Fejes Tóth László felfedezett egy jelentős különbséget a körlapok és a négyzetek viselkedése között. Míg a körlapoknál a permeabilitás csökkenhet, ha megengedjük, hogy azok különböző méretűek legyenek, addig a négyzetek esetén a réteg átjárhatósága változatlan marad, függetlenül attól, hogy azok egybevágóak-e. Ez az észrevétel motiválta Florian és Groemer [FG85] cikkének egy részét, melyben megállapították, hogy a körhöz hasonlóan viselkednek azok a szabályos n -szögek, melyekre $n \geq 39$, továbbá rávilágítottak arra, hogy amennyiben $n < 39$, akkor nem tudjuk megmondani, számít-e a méretük, mikor az általuk alkotott réteg permeabilitását vizsgáljuk. Így többek között a szabályos hatszög esete is máig nyitott probléma.

Dolgozatomban rétegek permeabilitási problémája helyett egy nagyon hasonló kérdést vizsgálunk, amely szintén Fejes Tóth Lászlótól származik. Legyen adott a síkon nyílt (korlátos) páronként diszjunkt tartományok egy elhelyezése ("pakolása"), és két, egymástól d távolságra lévő, a tartományokon kívül eső pont, melyeket olyan görbével szeretnénk összekötni, amely a lehető legrövidebb úgy, hogy az diszjunkt a tartományoktól. Fejes Tóth László két, a probléma felvetése kapcsán megfogalmazódott (körlapokra és négyzetekre vonatkozó) sejtését Fejes Tóth Gábor igazolta [FT78] cikkében. Pach János [Pac77] cikkében a négyzetek esetét vizsgálva keresett választ Fejes Tóth László ezen felvetett problémájára, belátta, hogy ha páronként diszjunkt, nyílt, legfeljebb 1-oldalhosszú négyzeteket tekintünk és két, a négyzeteken kívül eső, egymástól d távolságra lévő pontot, akkor azok összeköthetők egy legfeljebb $\frac{3}{2}d + 4\sqrt{d} + 1$ hosszú görbével, elkerülve az összes négyzetet.

A Pach-féle gondolatmenetet felhasználva megvizsgáljuk, milyen eredmény mondható, ha négyzetek helyett szabályos hatszögek egy elhelyezését tekintjük. Vegyünk olyan szabályos hatszögeket, melyek nyíltak és legfeljebb egység oldalhosszúak. Továbbá tegyük fel, hogy közülük semelyik kettőnek nincs közös belső pontja, valamint, hogy tetszőleges kompakt halmaz csak véges sok hatszöget metsz (tehát sehol sem torlódnak). Viszont amíg a hatszögek ezen megkötéseknek eleget tesznek, irányuk és méretük szabadon változhat. Belátjuk, hogy ekkor bármely két, a hatszögeken kívül eső, egymástól d távolságra lévő pont összeköthető egy legfeljebb

$$\frac{7}{3\sqrt{3}}d + 2\sqrt{d} + 1$$

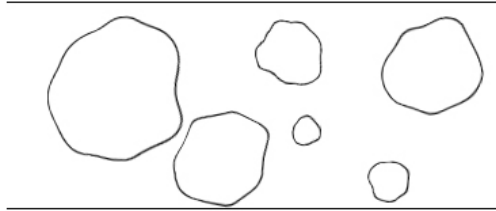
hosszú görbével, elkerülve az összes hatszöget. Eredményünk egy felső becslés, amelyben a Pach-féle gondolatmenet jellegéből adódóan szerepel a $\sqrt{d}$ tag. Úgy gondoljuk, hogy ez valószínűleg egy másféle eljárással el lehet távolítani. Az viszont, hogy a hatszögek esetén számít-e, hogy azok milyen méretűek és irányúak (azaz változik-e eredményünkben a d tag együtthatója) továbbra is nyitott probléma.

1. fejezet

Történeti bevezető

A diszkrét geometriai permeabilitási probléma a neves magyar géométertől, Fejes Tóth Lászlótól származik, aki ezt először [FT66] cikkében fogalmazta meg.

Az eredeti kérdés, amelyet Fejes Tóth László feltett a következően hangzott. Tegyük fel, hogy a síkban két párhuzamos egyenes által határolt sávban páronként diszjunkt nyílt (korlátos) tartományok helyezkednek el, egy ún. réteget alkotva. A két egyenes w távolságát a sáv szélességének nevezzük, és feltesszük, hogy ez a lehető legkisebb. A sáv egyik határoló egyenesének pontjaiból kiinduló olyan görbéket vizsgálunk, amelyek diszjunktak a tartományoktól és a sáv másik határoló egyenesében végződnek. Jelölje $\inf l$ az ilyen görbék hosszának infimumát. Ekkor a $w/\inf l$ hányadost a réteg permeabilitásának (magyarul "átjárhatóságának") nevezzük, és p -vel jelöljük. Határozzuk meg egy olyan réteg permeabilitását, amelyben egybevágó (vagy homotetikus, vagy esetleg hasonló, de nem egy állású) háromszögek, négyzetek, körlemezek stb. vannak.



1.1. ábra. Réteg

Tehát, ha adott egy réteg, akkor annak permeabilitása

$$p = \frac{w}{\inf l},$$

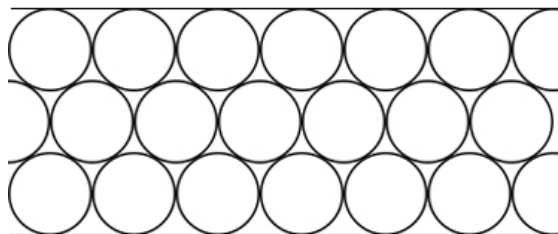
ahol az infimumot minden lehetséges l görbére értjük, amely a sáv felső és alsó határoló egyenesét összeköti. Nyilvánvalóan $0 < p \leq 1$, illetve ha p kicsi akkor $\inf l$ nagy szám, tehát hosszabb görbe szükséges ahhoz, hogy "áthataljunk" a rétegen.

Fejes Tóth László eredeti cikkében egybevágó körök által alkotott réteg permeabilitását vizsgálja. Megmutatja, hogy azonos méretű körökből álló réteg átjárhatósága nagyobb, mint $\sqrt{27}/2\pi$, és ez az érték tetszőlegesen megközelíthető alkalmas réteg választásával. Fejes Tóth László ugyanezen cikkében azonban ismerteti egy

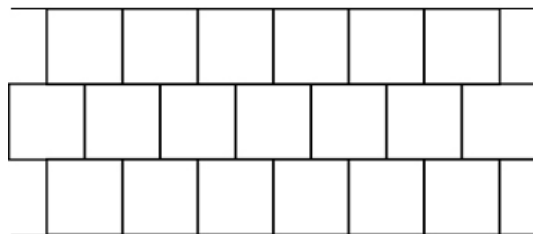
olyan elrendezését a köröknek, melyben nem tesszük fel, hogy a körök egybevágóak. Ezen speciális esetben a réteg permeabilitása biztosan kisebb lesz, mint $\sqrt{27}/2\pi \approx 0.823225$, de sosem kisebb, mint $2/\pi \approx 0.6366$.

Később Fejes Tóth László [FT68] cikkében a témát tovább vizsgálva megmutatja, hogy négyzetekből álló rétegek esete jelentősen eltér a körlapok esetétől, ugyanis, míg körök esetén a permeabilitás különböző a körök méretének változtatásával, addig a négyzetek alkotta rétegek átjárhatósága mindig legalább $2/3$, és ez nem változik a négyzetek méretének és irányának változtatásával. Általánosabban kimondva, olyan rétegek permeabilitása mindig legalább $2/(2+r)$, amelyeket legfeljebb r oldalarányú téglalapok alkotnak. Olyan rombuszokból alkotott rétegek esetén pedig, melyek belső szöge nem nagyobb, mint $\arccos 1/3$, de nem kisebb α -nál a permeabilitás mindig legalább $\sin \alpha/2$.

Ez tehát azt jelenti, hogy rétegek permeabilitását vizsgálva a körök és a négyszögek esete különbséget mutat, így felmerül a kérdés, hogyan viselkedik a többi szabályos n -szög. Florian és Groemer [FG85, Theorem 1, 260. o.] cikkében megmutatja, hogy ha olyan homotetikus (esetleg különböző méretű, azonban mindenképpen egyállású) szabályos n -szögeket véve a réteg alkotóelemeinek, melyre $n \geq 39$, akkor ezen esetben ugyanolyan eredményt kapunk, mint a körlapok esetén, tehát a réteg permeabilitása csökkenhet, ha sokszögek nem egyforma méretűek. A cikkben azonban Florian és Groemer rávilágít, hogy az olyan n -szögekre, melyekre $n < 39$ (ez alól természetesen kivételt képez az $n = 4$ eset) nem tudjuk megmondani, számít-e az általuk alkotott réteg átjárhatóságában a sokszögek mérete és iránya. Így a szakirodalom jelen állása szerint nyitott probléma többek között a háromszögek és a hatszögek esete is.



1.2. ábra. Körök alkotta réteg



1.3. ábra. Négyzetek alkotta réteg

A permeabilitási problémát felvető Fejes Tóth László, bár elsőként mutatott alsó korlátot mind a körök, mind paralelogrammák alkotta rétegek permeabilitására, eredményei nem voltak optimálisak, így cikkei hatására több olyan további eredmény is született, mely igyekszik a permeabilitásokra optimális alsó határt adni. Elsőként Bollobás Béla élesítette a paralelogrammák alkotta rétegek permeabilitását [Bol68].

Ezen felül Fejes Tóth László a permeabilitási problémához hasonlóan újabb problémát fogalmazott meg: vegyünk a síkon páronként diszjunkt nyílt (korlátos) tartományok egy elhelyezését (pakolását), illetve két, a tartományokon kívül eső, egymástól d távolságra eső pontot. A kérdés hasonló, mint a permeabilitási probléma esetén. Olyan görbéket vizsgálunk, melyek az egyik általunk kijelölt pontban kezdődnek és a másikban végződnek, diszjunktak a tartományoktól és a lehető legrövidebbek. Ezen probléma kapcsán Fejes Tóth László megfogalmazott két olyan sejtést, melyek további kutatást indokoltak a témában. Ezek a következők voltak. Páron-

ként diszjunkt, nyílt egység-négyzetek akármelyik pakolásában a síkon két, egymástól d távolságra lévő, a négyzeteken kívül eső pont összeköthető egy legfeljebb $\frac{3}{2}d + \frac{1}{2}$ hosszú úttal, kikerülve az összes négyzetet. Hasonlóan, ha vesszük a síkon páronként diszjunkt, nyílt egység-körlapok egy tetszőleges pakolását, akkor két, a körlapokon kívül eső, egymástól d távolságra lévő pont összeköthető egy úttal, amely nem érint egy körlapot sem és legfeljebb $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}(d-2) + \pi$ hosszú [FT78]. Fejes Tóth László sejtései helyesnek bizonyultak, a fenti számok végtelen sok d értékre éles alsó határok, melyet később Fejes Tóth Gábor igazolt [FT78] cikkében.

Pach János [Pac77] cikkében Fejes Tóth László sejtésénél némileg gyengébb megállapítást tett, belátta, hogy páronként diszjunkt, nyílt, legfeljebb 1-oldalhosszú négyzetek esetén két, a négyzeteken kívül eső, egymástól d távolságra lévő pont összeköthető egy legfeljebb $\frac{3}{2}d + 4\sqrt{d} + 1$ hosszú görbével elkerülve az összes négyzetet, lásd [Pac77] Theorem 2, 220. oldal. Dolgozatomban Pach János módszerét ismételjük meg a szabályos hatszögek esetét vizsgálva. Ennek segítségével felső korlátot kapunk arra, hogy a síkban legfeljebb egység oldalhosszúságú nyílt szabályos hatszögek egy elhelyezésében két d távolságra lévő pont milyen hosszú, a hatszögektől diszjunkt görbével köthető össze. Dolgozatom fő eredménye a következő állítás.

1. Tétel. *Legyen $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots\}$ legfeljebb 1 oldalhosszúságú szabályos nyílt hatszögek olyan családja az euklideszi síkon, amelyre $H_i \cap H_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ esetén, illetve amelyre teljesül, hogy tetszőleges kompakt halmaz csak véges sok elemét metszi $\mathcal{H}$ -nak. Ekkor bármely két $\mathcal{H}$ -n kívüli egymástól d távolságra lévő pont összeköthető olyan görbével, amelynek hosszúsága legfeljebb $\frac{7}{3\sqrt{3}}d + 2\sqrt{d} + 1$ és amely diszjunkt $\mathcal{H}$ -tól.*

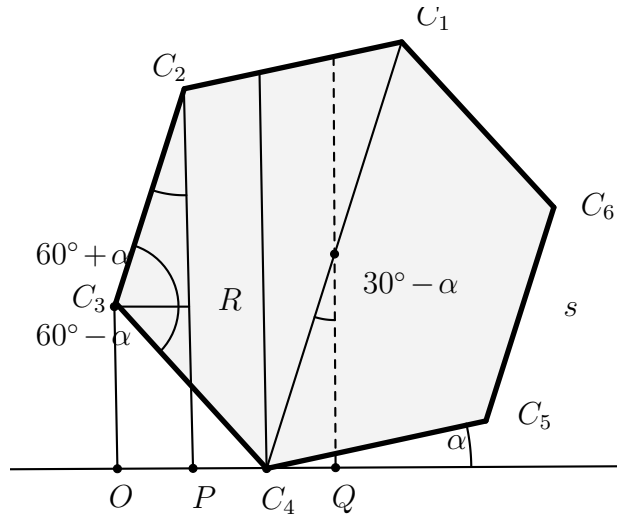
A fenti tétel egy felső becslés. Azt azonban nem tudjuk, hogy mi lehet az optimális állítás, ezért sejtés kimondásába nem bocsátkozunk. A Pach-féle gondolatmenetből következik, hogy a fenti becslésben benne maradt a $\sqrt{d}$ tag. Ezt lehet, hogy egy másik módszerrel el lehet tüntetni. A $7/(3\sqrt{3})$ szorzója d -nek viszont valószínűleg közel van az optimálishoz, ugyanis Florian [Flo79] cikkében megmutatta, hogy egy rögzített hatszög eltoltjaiból álló réteg p permeabilitása nagyobb mint $3/4$, pontosabban, $p \geq 3w/(4w-2)$, ha $w \geq 13/4$. Florian azt is megjegyzi, hogy $3/4$ -nél jobbat nem lehet mondani a szabályos hatszögrács miatt. Ez a mi problémánk esetén azt mutatja, hogy $4d/3$ -nél rövidebb görbére nem számíthatunk. Ha összehasonlítjuk a $4/3 = 1,33\dots$ és a $7/(3\sqrt{3}) = 1,347\dots$ számokat, akkor azt látjuk, hogy a kettő rendkívül közel van egymáshoz. Az azonban továbbra sem tisztázott, hogy a szabályos hatszögek esetén számít-e az, hogy megengedünk homotetikus, illetve nem egyállású példányokat.

Bár dolgozatomban csak a két-dimenziós esetben vizsgáljuk meg a hatszögek esetét, a történeti bevezető részeként röviden összefoglalok néhány hasonló jellegű magasabb-dimenziós eredményt. Bezdek András [Bez99] cikkében a következő problémát vizsgálta: adott diszjunkt, nyílt, legfeljebb 1-oldalhosszú kockák egy véges elrendezése a 3-dimenziós euklideszi térben, továbbá adott két, a kockákon kívül eső pont, legyenek ezek S és T . Egy olyan görbét keresünk, melyen át eljuthatunk az S pontból a T pontba elkerülve az összes kockát, úgy, hogy a kockák helyzete és mérete ismeretlen marad mindaddig, míg a görbén haladva el nem érünk egyet. Bezdek András ad egy algoritmust, mellyel olyan, a fenti feltételeknek megfelelő görbét tud konstruálni, melynek hosszúsága kisebb, mint $\frac{3}{2}d + 3\sqrt{3} \log d + 5$, ahol $d > 3\sqrt{3}$ az

$|ST|$ távolságot jelöli. Fejes Tóth Gábor [FT13] cikkében a gömbök esetét vizsgálja magasabb dimenzióban: vegyünk korlátos sugarú, nyílt gömböket az n -dimenziós euklideszi-térben, és két, egymástól d távolságra lévő pontot a gömbökön kívül. Ekkor a legrövidebb görbe hossza, mellyel összeköthető e két pont elkerülve az összes gömböt $d + O(d/n)$, ha n és d végtelenbe tart.

2. fejezet

A szabályos hatszög esete



2.1. ábra. Szabályos hatszög α szöggel elforgatva

Dolgozatom ezen fejezetében megismétljük a Pach-féle gondolatmenetet [Pac77, lásd 421.-423. oldal] szabályos hatszögekre, és az ott használt jelölések egy részét is alkalmazzuk. Legyen $\mathcal{H}$ a legfeljebb 1-oldalú szabályos, nyílt H_i hatszögek olyan elhelyezése, melyben közülük semelyik kettő nem metsz egymásba (azaz nincs közös belső pontjuk), és tetszőleges körlemez csak véges sok hatszöget metsz. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\mathcal{H}$ elemei nem "torlódnak". Tekintsünk ekkor egy olyan R téglalapot, amelynek csúcsai $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, 4$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az R téglalap P_1P_2 oldala vízszintes, és P_1 az R bal alsó csúcsa. Legyen az R szélessége $a = |P_1P_2|$, magassága $b = |P_2P_3|$. Most legyen az $P(x, y_3)$ egy pont az R téglalap P_3P_4 oldalán, azaz $x_4 \leq x \leq x_3$. Továbbá legyen $Q(x, y_1)$ az a pont az R téglalap P_1P_2 oldalán, amely pontosan P alatt van. Nyilván akkor $|PQ| = b$. Jelölje $\Pi(P) = \Pi(x)$ azt a töröttvonalat, amely P -ben kezdődik, Q -ban végződik, és amely kikerüli az R -ben lévő H_i hatszögeket úgy, hogy függőlegesen halad Q felé mindaddig, míg eléri egy H_i határát, ekkor annak rövidebbik ívén halad tovább amíg el nem éri a másik metszéspontot, ott elhagyja a H_i hatszög határát és ismét függőlegesen halad tovább Q felé. Jelölje $l(x)$ a $\Pi(x)$ töröttvonal hosszúságát.

Ekkor állításunk a következő.

1. Lemma.

$$\int_{x_1}^{x_2} (l(x) - b) dx = \frac{7}{3\sqrt{3}} T(R),$$

ahol $T(R)$ az R területét jelenti.

Bizonyítás. A bizonyításhoz most tekintsünk pontosan egy darab rögzített $H_i \subset R$ hatszöget. Egy rögzített P pont esetén legyen a PQ szakasz két metszéspontja H_i -vel rendre $V_i(x)$ és $W_i(x)$ úgy, hogy a P -hez közelebbi legyen $V_i(x)$. Jelölje $\lambda_i(x)$ a H_i határának $V_i(x)$ és $W_i(x)$ közé eső ívei közül a rövidebbik hosszát (ha ezek egyenlőek, akkor nem számít, melyiket választjuk). Továbbá, legyen $l_i(x)$ a teljes út hossza P -től Q -ig, mellyel elkerüljük H_i -t. Az $l_i(x) - b$ mennyiség tulajdonképpen annak a "kerülőnek" a hossza, amit meg kell tennünk, ahhoz képest, mintha a P -ből egyenes úton jutnánk el Q -ba, hiszen a megtett utunk egyenes P és $V_i(x)$, valamint $W_i(x)$ és Q között, $V_i(x)$ és $W_i(x)$ között pedig H_i rövidebbik élén haladunk.

A Pach-féle gondolatmenet alapján most becsülni fogjuk a

$$\int_{x_1}^{x_2} (l_i(x) - b) dx$$

integrált. Nyilván elég, ha az $[x_1, x_2]$ intervallum azon $[x'_1, x'_2]$ részintervallumán integrálunk, ahol PQ szakasz metszi H_i -t, mivel itt

$$\int_{x_1}^{x_2} (l_i(x) - b) dx = \int_{x'_1}^{x'_2} (\lambda_i(x) - |V_i(x)W_i(x)|) dx = \int_{x'_1}^{x'_2} \lambda_i(x) dx - T(H_i).$$

A $\int_{x'_1}^{x'_2} \lambda_i(x) dx$ integrált három darabban számoljuk ki, és szimmetriai okokból vesszük ennek a kétszeresét.

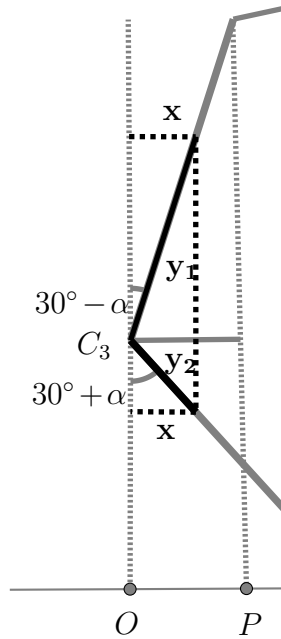
Mindenekelőtt feltesszük, hogy az $x=0$ függőleges egyenes bal oldali támaszegyenes H_i -nek. Legyen H_i oldalhosszúsága s . Ekkor a 1.1 ábrából leolvasható, hogy ha O az origó, akkor $|OP| = s \sin(\pi/6 - \alpha)$, $|OC_4| = s \sin(\pi/6 - \alpha)$, és $|C_4Q| = s \sin(\pi/6 - \alpha)$. Tehát

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{x'_1}^{x'_2} \lambda_i(x) dx \\ &= 2 \left(\int_0^{s \sin(\frac{\pi}{6} - \alpha)} \lambda_i(x) dx + \int_{s \sin(\frac{\pi}{6} - \alpha)}^{s \sin(\frac{\pi}{6} + \alpha)} \lambda_i(x) dx + \int_{s \sin(\frac{\pi}{6} + \alpha)}^{s \sin(\frac{\pi}{6} + \alpha) + s \sin(\frac{\pi}{6} - \alpha)} \lambda_i(x) dx \right) \\ &= 2(I_1(\alpha) + I_2(\alpha) + I_3(\alpha)). \end{aligned}$$

Az $I_1(\alpha)$, $I_2(\alpha)$ és $I_3(\alpha)$ integrálokat egyenként számítjuk ki az alábbiakban, ki-részletezve a számolást.

Az első integrálhoz tekintsünk egy függőleges egyenest, amely x távolságra fekszik az origótól és $x \in [0, s \sin(\frac{\pi}{6}) - \alpha]$. Ez az egyenes a C_2C_3 oldalból egy y_1 hosszúságú, a C_3C_4 oldalból pedig egy y_2 hosszúságú olyan szakaszt metsz le, amelynek egyik végpontja C_3 (lásd 2.2 ábra). Az ábrából leolvasható, hogy

$$y_1 = x \csc\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right),$$



2.2. ábra. Az első integrál

és

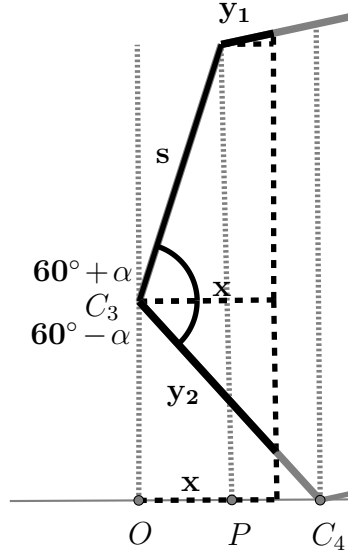
$$y_2 = x \csc \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right).$$

Tehát

$$\begin{aligned} I_1(\alpha) &= \int_0^{s \sin(\frac{\pi}{6} - \alpha)} (y_1 + y_2) dx \\ &= \int_0^{s \sin(\frac{\pi}{6} - \alpha)} x \left(\csc \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) + \csc \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} (\csc(\pi/6 - \alpha) + \csc(\pi/6 + \alpha)) \Big|_0^{s \sin(\pi/6 - \alpha)} \\ &= \frac{s^2}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) \left(\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6} - \alpha)} + \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6} + \alpha)} \right). \end{aligned}$$

A második integrál kiszámításához most tekintsünk egy olyan függőleges egyenest, amelynek origótól mért x távolságára teljesül, hogy $x \in [s \sin(\frac{\pi}{6} - \alpha), s \sin(\frac{\pi}{6} + \alpha)]$. Ekkor az egyenestől balra (azaz negatív irányban) lévő része H_i határának három szakasz uniója (az egyenestől pozitív körüljárás szerint felsorolva): a C_1C_2 oldalból levágott y_1 hosszúságú szakasz, a teljes C_2C_3 oldal, és végül a C_3C_4 oldalból levágott y_2 hosszúságú szakasz, lásd 2.3 ábra. Az ábrából ebben az esetben is könnyen látszik, hogy

$$\begin{aligned} y_1 &= \sec \alpha \left(x - s \sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) \right), \\ y_2 &= x \sec \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right). \end{aligned}$$



2.3. ábra. A második integrál

Tehát

$$\begin{aligned}
 I_2(\alpha) &= \int_{s \sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)}^{s \sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)} (y_1 + s + y_2) dx \\
 &= \int_{s \sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)}^{s \sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)} \sec \alpha \left(x - s \sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) \right) + s + x \sec \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) dx \\
 &= \sqrt{3} s^2 \sin \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \csc \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \cos \alpha + \frac{1}{2} - \sec \alpha \sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) \right)
 \end{aligned}$$

Végül, a harmadik integrálhoz vegyünk egy olyan függőleges egyenest, amelynek origótól mért x távolságára teljesül, hogy $x \in [s \sin(\frac{\pi}{6} + \alpha), s \sin(\frac{\pi}{6} + \alpha) + s \sin(\frac{\pi}{6} - \alpha)]$. Ekkor az egyenestől balra (negatív irányban) lévő darabja H_i határának négy szakaszra bomlik, amelyek pozitív irányban felsorolva rendre: a C_1C_2 oldalból levágott y_1 hosszúságú szakasz, a teljes C_2C_3 oldal, a teljes C_3C_4 oldal, és a C_4C_5 oldalból levágott y_2 hosszúságú szakasz, lásd 2.4 ábra. Az ábrából ebben az esetben is könnyen leolvasható, hogy

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \sec(\alpha) \left(x - s \sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) \right), \\
 y_2 &= \sec(\alpha) \left(x - s \sin \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \right).
 \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}
 I_3(\alpha) &= \int_{s \sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)}^{s \sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)+s \sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)} (y_1 + 2s + y_2) dx \\
 &= \int_{s \sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)}^{s \sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)+s \sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)} 2s + 2x \sec(\alpha) - s \sec(\alpha) \left(\sin \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) \right) dx
 \end{aligned}$$



Végezetül a három integrált összeadva majd az összeg kétszeresét véve $I(\alpha)$ -ra a következő eredményt kapjuk:

Ahhoz, hogy gondolatmenetünket folytathassuk, szükségünk van az $I(\alpha)$ függvény maximumára a $[0, \pi/6]$ intervallumon rögzített s mellett. Ezen maximum illusztrálására tekintsük az alábbi ábrát (2.5), amelyen a Mathematica program segítségével kirajzoltuk a $I(\alpha)$ gráfját. Ezen jól látható, hogy a függvénynek az intervallumban egy lokális minimuma van, és hogy maximumát a bal végpontban, azaz $\alpha = 0$ -ban veszi fel. A maximum meghatározása természetesen lehetséges az ábra felhasználása nélkül is, mégpedig a következő módon. Az $I(\alpha)$ függvény az intervallum belsejében differenciálható. Számoljuk ki az $I'(\alpha)$ deriváltat és határozzuk meg az $I(\alpha)$ kritikus pontjait, tehát azon α értékeket, melyekre teljesül, hogy $I'(\alpha) = 0$. Tekintettel azonban a derivált bonyolultságára, arra nincs esély, hogy a kritikus pontokat az egyenlet közvetlen megoldásával találjuk meg. Azonban, ha az $I'(\alpha)$ függvényben szereplő minden szögfüggvényt a $\sin(\alpha)$ és $\cos(\alpha)$ segítségével, addíciós formulákat használva kifejtünk, akkor a szinusz és koszinusz függvények egy racionális törtfüggvényét kapjuk. Ezt közös nevezőre hozva, mostantól feladatunk megkeresni, hogy

annak számlálója hol nulla. A számláló pedig a szinusz és koszinusz függvények egy polinomja:

$$\begin{aligned} & 3\sin^7(\alpha) + 15\sin^5(\alpha) - 15\sqrt{3}\cos^7(\alpha) + 18\cos^7(\alpha) - 9\sqrt{3}\cos^5(\alpha) + 6\cos^5(\alpha) + \\ & + 38\sqrt{3}\sin(\alpha)\cos^6(\alpha) - 93\sin(\alpha)\cos^6(\alpha) - 89\sqrt{3}\sin^2(\alpha)\cos^5(\alpha) + 60\sin^2(\alpha)\cos^5(\alpha) - \\ & - 12\sqrt{3}\sin^3(\alpha)\cos^4(\alpha) - 135\sin^3(\alpha)\cos^4(\alpha) + 10\sqrt{3}\sin(\alpha)\cos^4(\alpha) + 39\sin(\alpha)\cos^4(\alpha) - \\ & - 37\sqrt{3}\sin^4(\alpha)\cos^3(\alpha) - 54\sin^4(\alpha)\cos^3(\alpha) + 74\sqrt{3}\sin^2(\alpha)\cos^3(\alpha) + 6\sin^2(\alpha)\cos^3(\alpha) - \\ & - 18\sqrt{3}\sin^5(\alpha)\cos^2(\alpha) - 7\sin^5(\alpha)\cos^2(\alpha) - 6\sqrt{3}\sin^3(\alpha)\cos^2(\alpha) + 142\sin^3(\alpha)\cos^2(\alpha) + \\ & + 5\sqrt{3}\sin^6(\alpha)\cos(\alpha) + 43\sqrt{3}\sin^4(\alpha)\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Az $\alpha = \arcsin(x)$ (és nyilván ekkor $\cos x = \sqrt{1-x^2}$) helyettesítéssel egy olyan függvényt kapunk, amelyben x és $\sqrt{1-x^2}$ hatványai szerepelnek:

$$\begin{aligned} & -32\sqrt{3}x^7 - 32x^7 + 136\sqrt{3}x^5 - 104x^5 - 152\sqrt{3}x^3 + 208x^3 + \\ & + \sqrt{1-x^2} \left(-32\sqrt{3}x^6 + 96x^6 + 56\sqrt{3}x^4 - 120x^4 + 48\sqrt{3}x^2 - 24\sqrt{3} + 24 \right) + 48\sqrt{3}x - 54x. \end{aligned}$$

Ezt nullával egyenlővé téve és átrendezés után négyzetre emelve már az alábbi x -ben polinomiális egyenletet kapjuk.

$$\begin{aligned} & \left(4096\sqrt{3} - 16384 \right) x^{14} + \left(65536 - 22528\sqrt{3} \right) x^{12} + \left(54528\sqrt{3} - 130560 \right) x^{10} + \\ & + \left(162304 - 75136\sqrt{3} \right) x^8 + \left(61792\sqrt{3} - 130720 \right) x^6 + \left(66240 - 30240\sqrt{3} \right) x^4 + \\ & + \left(8640\sqrt{3} - 19044 \right) x^2 - 1152\sqrt{3} + 2304. \end{aligned}$$

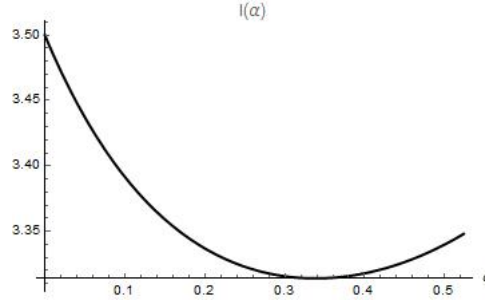
Ennek az egyenletnek a gyökeit a Mathematica program numerikus módszerekkel meg tudja határozni. A mi esetünkben egy x -ben 14-edfokú polinomról van szó, amelynek 14 páronként különböző gyöke van, amelyeket a Mathematica program a következőképpen ad meg:

$$\begin{aligned} & \{ \{x \rightarrow -0.957736 - 0.340263i\}, \{x \rightarrow -0.957736 + 0.340263i\}, \{x \rightarrow -0.953829\}, \\ & \{x \rightarrow -0.710197\}, \{x \rightarrow -0.569311 - 0.678648i\}, \{x \rightarrow -0.569311 + 0.678648i\}, \\ & \{x \rightarrow -0.33197\}, \{x \rightarrow 0.33197\}, \{x \rightarrow 0.569311 - 0.678648i\}, \{x \rightarrow 0.569311 + 0.678648i\}, \\ & \{x \rightarrow 0.710197\}, \{x \rightarrow 0.953829\}, \{x \rightarrow 0.957736 - 0.340263i\}, \{x \rightarrow 0.957736 + 0.340263i\} \} \end{aligned}$$

Ezekből a gyökökből pontosan egy esik a kérdéses intervallumba (azaz a $\sin 0 = 0$ és a $\sin \pi/6 = 1/2$ közé), mégpedig az $x = 0.33197$ érték. Ezt megvizsgálva kiderül, hogy ott a függvénynek lokális minimuma van. Így már csak annyi a teendőnk, hogy összehasonlítjuk az intervallum végpontjaiban felvett értékeket, melyből megtudjuk, hogy az $I(\alpha)$ függvény maximumát a bal végpontban, azaz az $x = 0$ pontban veszi fel.

Így tehát az $I(\alpha)$ függvény maximumának értéke a $[0, \pi/6]$ intervallumon

$$I(0) = \frac{7}{2}.$$



2.5. ábra. Az $I(\alpha)$ függvény gráfja a $[0, \frac{\pi}{6}]$ intervallumon

Az $I(0)$ értéket felhasználva a következő eredményre jutunk:

$$\begin{aligned}
 \int_{x_1}^{x_2} l(x) dx - T(R) &= \int_{x_1}^{x_2} (l(x) - b) dx = \sum_{H_i \in R} \int_{x_1}^{x_2} (l_i(x) - b) dx = \\
 &= \sum_{H_i \in R} \int_{x_1}^{x_2} \lambda_i(x) dx - \sum_{H_i \in R} T(H_i) \\
 &\leq \sum_{H_i \in R} \left(\frac{7}{3\sqrt{3}} - 1 \right) T(H_i) \\
 &\leq \frac{7}{3\sqrt{3}} T(R) \approx 1.347 \dots T(R),
 \end{aligned}$$

ahol olyan i -kre összegzünk, melyekre $H_i \in R$. Tehát ezzel befejeztük az 1. Lemma bizonyítását. $\square$

Ahhoz, hogy főtételünket bizonyítani tudjuk, szükségünk lesz még a következő egyszerű becslésre.

2. Lemma. *Két, egymástól d távolságra lévő, a H_i hatszögeken kívül eső pont biztosan összeköthető egy olyan görbével, mely elkerüli a hatszögeket és hossza legfeljebb $\sqrt{3}d$.*

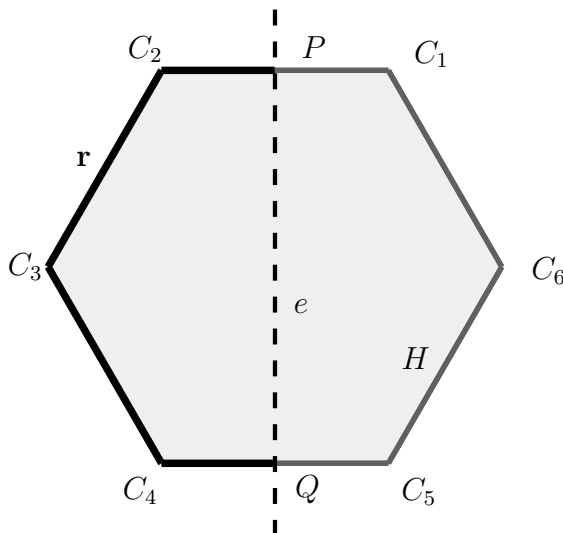
Bizonyítás. Tekintsünk egy s oldalhosszúságú H szabályos hatszöget, amelynek egyik oldala vízszintes (párhuzamos az x -tengellyel), és egy e irányított egyenest, amely metszi H -t. Az egyenes H határával való két metszéspontja legyen P és Q úgy, hogy P megelőzi Q -t az egyenes irányításában (P van előbb). Ekkor P és Q két részre osztja H határát. Legyen a rövidebbik kerületdarab hossza r (nyilvánvalóan r függ az e egyenestől). Arra vagyunk kíváncsiak, hogy mekkora lehet az $\frac{r}{|PQ|}$ hányados, azaz mekkora

$$M = \max_e \frac{r}{|PQ|},$$

ahol a maximumot az összes lehetséges e egyenesre tekintjük. (Nyilván itt e irányítása nem számít, így feltehetjük, hogy lefelé mutat.) A fenti maximum meghatározásához három különböző esetet kell vizsgálni attól függően, hogy az e egyenes H milyen éleit metszi: két szomszédos élt, két nem szomszédos, de nem is szemben lévő

A legegyszerűbb eset, amikor az e egyenes két párhuzamos élt metsz (lásd 2.6 ábra). Ebben az esetben $|PQ| \leq \sqrt{3}$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha e merőleges a metszett oldalakra. Továbbá, ha e illeszkedik H középpontjára, akkor $r = 3$, ami épp a terület fele. Tehát ebben az esetben

$$\frac{r}{|PQ|} \leq \sqrt{3} \approx 1.7321 \dots$$



Most tekintsük azt az esetet, amikor az e egyenes két szomszédos élt metsz, például a C_2C_3 és C_3C_4 élt (lásd 2.7 ábra). Tekintsük azt az e' egyenest, amely illeszkedik a C_4 csúcsra és párhuzamos e -vel. Legyen az e' és H C_4 -től különböző metszéspontja P' . Továbbá legyen a P' és C_4 által meghatározott rövidebbik kerületdarab hossza r' . Mivel a $PC_3Q\Delta$ hasonló a $P'C_3C_4\Delta$ háromszöghöz, így

$$\frac{r}{|PQ|} = \frac{r'}{|P'C_4|}.$$

$$\frac{r}{|PQ|} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1-2x\cos\frac{2\pi}{3}}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = f(x).$$
$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - (x+1)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{\sqrt{x^2+x+1}^2} = \frac{2(x^2+2x+1) - (x+1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}^3}$$

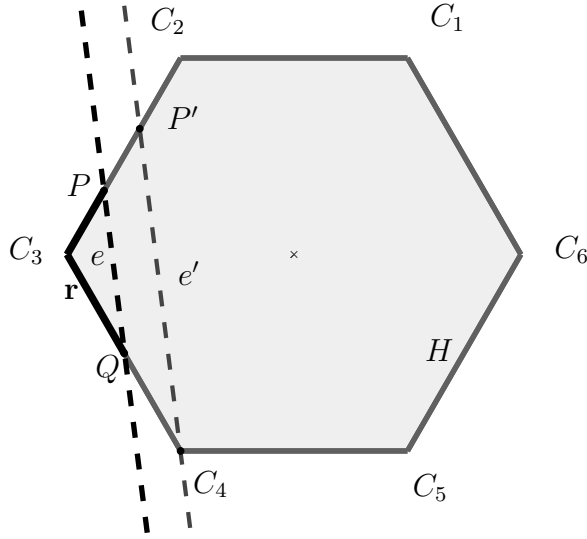
$$= \frac{-x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}^3} = 0$$

egyenlet pontosan akkor teljesül, ha $x = 1$. Az f' függvényt megvizsgálva könnyen látszik, hogy az $x = 1$ helyen f -nek lokális maximuma van és $f(1) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Így tehát ebben az esetben

$$\frac{r}{|PQ|} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547 \dots,$$

és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = 1$, azaz ha e párhuzamos a C_2C_4 egyenessel.



2.7. ábra. Szomszédos oldalak esete

Végezetül tekintsük azt az esetet, mikor e két nem szomszédos, de nem is szemközti oldalt metsz. Legyenek ezek az oldalak C_2C_3 és C_4C_5 (lásd 2.8 ábra). Az $\frac{r}{|PQ|}$ hányados meghatározásához hosszabbítsuk meg a C_2C_3 és C_3C_4 oldalakat, és az oldalak meghosszabbításának metszéspontját nevezzük C^* -nak. Vegyünk egy e -vel párhuzamos e' egyenest, mely illeszkedik a C_2 csúcsra (ehhez fel kell tennünk, hogy $PC_3 < C_4P$). Legyen e' és H C_2 -től különböző metszéspontja Q' , továbbá jelöljük z -vel a $|QQ'|$ távolságot, x -szel pedig a $|Q'C_4|$ távolságot. Ekkor könnyen látszik, hogy $|C^*Q| = 1 + x - z$, illetve $|C^*Q'| = 1 + x$. Nyilván a $C_3C^*C_4\Delta$ egy egység oldalú szabályos háromszög. Mivel a $PC^*Q\Delta$ és a $C_2C^*Q'\Delta$ háromszögek hasonlóak, teljesül a következő egyenlőség:

$$\frac{PC^*}{C_2C^*} = \frac{1+x-z}{1+x},$$

és ezért

$$PC^* = 2 \left(\frac{1+x-z}{1+x} \right) = 2 \left(1 - \frac{z}{1+x} \right).$$

A koszinusz-tételt használva

$$|PQ| = \sqrt{2^2 + (1+x)^2 - 4(1+x) \cos \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1+x-z}{1+x}}$$

$$= \sqrt{3+x^2} \left(1 - \frac{z}{1+x} \right)$$

Így tehát a keresett hányadosra bevezetve az $f(x, z)$ jelölést

$$\begin{aligned} f(x, z) &= \frac{x - z + 2 \left(1 - \frac{z}{1+x} \right) - 1 + 1}{\sqrt{3+x^2} \left(1 - \frac{z}{1+x} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3+x^2}} \left(x + 3 - \frac{x+1}{x+1-z} \right). \end{aligned}$$

Az f függvény z -ben monoton nő, és csak egyetlen helyen szerepel. Mivel f maximumát szeretnénk meghatározni, z -t elhagyhatjuk, hiszen ezzel növeljük a függvényünket. Ezért mostantól elég a következő függvényt vizsgálni:

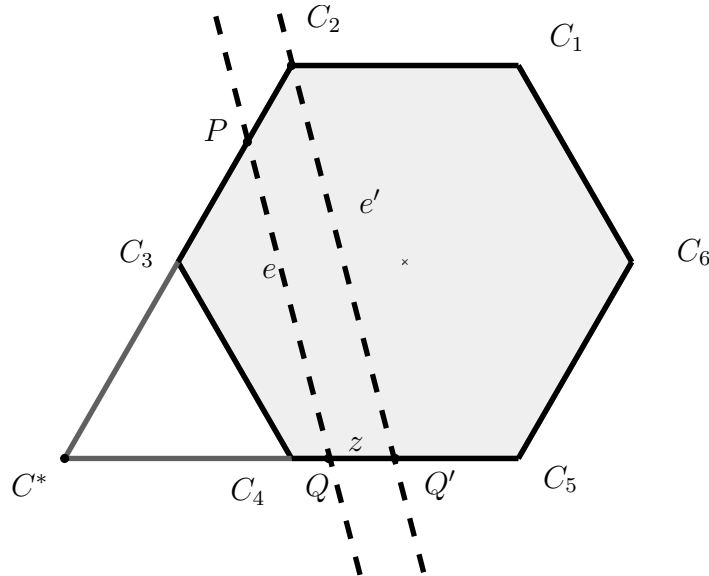
$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+3}},$$

melynek kritikus pontjait az $f'(x) = 0$ egyenlet segítségével határozzuk meg. A

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - (x+2) \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{\sqrt{x^2+3}^2} = \frac{3-2x}{\sqrt{x^2+3}^3} = 0$$

egyenlet akkor teljesül, ha $x = 3/2$. Az f' függvényt vizsgálva könnyen látszik, hogy $x = 3/2$ helyen f -nek lokális maximuma van. Ez azt jelenti, hogy az $x \in [0, 1]$ intervallumon f monoton növekvő, ezért maximumát $x = 1$ helyen veszi fel, és itt a felvett függvényérték $f(1) = 3/2$. Ezért a keresett hányadosra ebben az esetben a következő felső becslés adható:

$$\frac{r}{|PQ|} \leq \frac{3}{2} = 1,5.$$



2.8. ábra. Nem szomszédos, de nem szemközti oldalak esete

A három kapott értéket összehasonlítva kapjuk meg M értékét:

$$M = \max_e \frac{r}{|PQ|} = \max_e \left\{ \sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2} \right\} = \sqrt{3}.$$

Ezzel befejeztük a 2. Lemma bizonyítását. $\square$

A fenti gondolatmenetből a következő tény következik: A $\sqrt{3}d$ nyilvánvalóan triviális felső korlát a két d távolságra lévő pontot összekötő görbe hosszára. Ezt a következőkben javítani fogjuk a Pach-féle gondolatmenet segítségével, felhasználva az eddigi eredményeinket.

Az 1. Tétel bizonyítása. Tételünk bizonyításához a [Pac77] cikk 422–423. oldalán lévő gondolatmenetet követjük.

A $\frac{7}{3\sqrt{3}}d + 2\sqrt{d} + 1 = \sqrt{3}d$ egyenlet megoldása

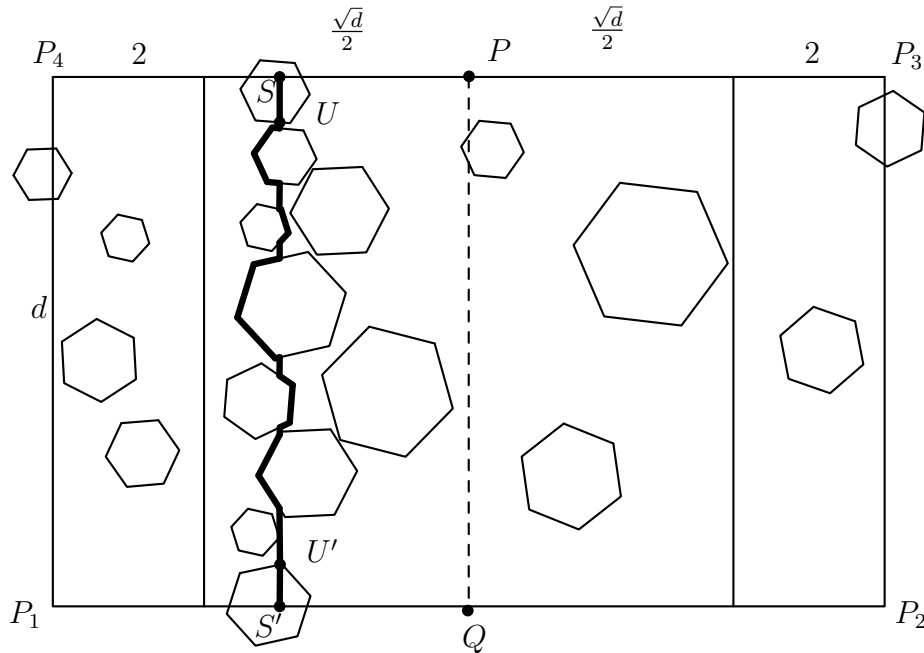
$$d = \frac{3}{2} \left(9 + \sqrt{3} + \sqrt{81 + 18\sqrt{3}} \right) \approx 31.98 \dots$$

Így, ha $d \leq 31$, akkor

$$\frac{7}{3\sqrt{3}}d + 2\sqrt{d} + 1 \geq \sqrt{3}d,$$

tehát ilyen d -kre az állítás nyilvánvalóan teljesül. Tehát feltehetjük, hogy $d > 31$.

Legyen P és Q két pont, amelyek a $\mathcal{H}$ elemein kívül helyezkednek el úgy, hogy $|PQ| = d$. Tekintsünk egy olyan R téglalapot, amely olyan, hogy két szembenlévő oldalának felezőpontja P és Q , illetve ezen oldalak merőlegesek PQ -ra és hosszuk $\sqrt{d} + 4$ (lásd 2.9 ábra).



2.9. ábra. Az R téglalap

Állításunk bizonyításához indirekt tegyük fel, hogy a P -t és Q -t összekötő olyan töröttvonalak hosszának minimuma nagyobb, mint $\frac{7}{3\sqrt{3}}d + 2\sqrt{d} + 1$, amelyek $\mathcal{H}$ elemein kívül haladnak. Ebből ellentmondásra fogunk jutni.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az R téglalap P -t tartalmazó oldala vízszintes, és a bal (jobb) végpontjának x -koordinátája x_4 (x_3). Tehát $x_3 - x_4 = \sqrt{d} + 4$. Tekintsünk egy S pontot az R téglalap P pontot tartalmazó oldalán, amelyre $|PS| \leq \sqrt{d}/2$. Legyen S' az a pont az R téglalap Q -t tartalmazó oldalán, amelynek x -koordinátája megegyezik S -ével (Tehát az a pont, mely pontosan S alatt van az R téglalap P_1P_2 oldalán). Legyen U (U') az S -hez (S' -höz) legközelebbi pontja az SS' szakasznak, amely nincs benne a nyílt hatszögekben. Ekkor világos, hogy $|SU| \leq 2$ ($|S'U'| \leq 2$), mert a hatszögek átmérője legfeljebb 2. A 2. Lemmából, hogy P -t és U -t (illetve Q -t és U' -t) össze tudjuk kötni olyan töröttvonallal, amely $\mathcal{H}$ -n kívül halad és hossza legfeljebb $\sqrt{3}|PU|$ ($\sqrt{3}|QU'|$). Így a P és Q összeköthető olyan $\mathcal{H}$ -n kívül haladó töröttvonallal, amelynek hossza legfeljebb

$$l(x) + \sqrt{3}(|PS| + |SU|) + \sqrt{3}(|U'S'| + |S'Q|) \leq l(x) + \sqrt{3}(\sqrt{d} + 4)$$

Az indirekt feltevés alapján

$$l(x) + \sqrt{3}(\sqrt{d} + 4) \geq \frac{7}{3\sqrt{3}}d + 2\sqrt{d} + 1,$$

tehát

$$l(x) \geq \frac{7}{3\sqrt{3}}d + (2 - \sqrt{3})\sqrt{d} + 1 - 4\sqrt{3},$$

ha $x \leq \sqrt{d}/2$. Ha $\sqrt{d}/2 \leq |PS| \leq \sqrt{d}/2 + 2$, akkor $l(x) \geq d$. Ebből integrálással adódik, hogy

$$\int_{x_1}^{x_2} l(x) dx \geq \sqrt{d} \left(\frac{7}{3\sqrt{3}}d + (2 - \sqrt{3})\sqrt{d} + 1 - 4\sqrt{3} \right) + 4d \quad (2.1)$$

Másrészt, az 1. Lemma alapján

$$\int_{x_1}^{x_2} l(x) dx \leq \frac{7}{3\sqrt{3}}d(\sqrt{d} + 4) \quad (2.2)$$

Mivel $2.1 \leq 2.2$, így némi számolás után az adódik, hogy

$$\frac{26}{3\sqrt{3}}\sqrt{d} \leq 4\sqrt{3} - 1,$$

ami nyilvánvalóan nem teljesül, ha $d > 31$. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát az indirekt feltevésünk helytelen volt.

Ezzel befejeztük főtételeink bizonyítását. □

Irodalomjegyzék

- [Bez99] A. Bezdek, *On optimal route planning evading cubes in the three space*, Beiträge Algebra Geom. **40** (1999), no. 1, 79–87.
- [Bol68] B. Bollobás, *Remarks to a paper of L. Fejes Tóth*, Studia Sci. Math. Hungar **3** (1968), 373–379.
- [FT78] G. Fejes Tóth, *Evading convex discs*, Studia Sci. Math. Hungar. **13** (1978), no. 3-4, 453–461 (1981).
- [FT13] G. Fejes Tóth, *Shortest path avoiding balls*, Studia Sci. Math. Hungar. **50** (2013), no. 4, 454–464.
- [FT66] L. Fejes Tóth, *On the permeability of a circle-layer*, Studia Sci. Math. Hungar. **1** (1966), 5–10.
- [FT68] L. Fejes Tóth, *On the permeability of a layer of parallelograms*, Studia Sci. Math. Hungar. **3** (1968), 195–200.
- [FT78] L. Fejes Tóth, *Research Problem No. 24*, Period. Math. Hungar. **9** (1978), 173–174.
- [Flo79] A. Florian, *Über die Durchlässigkeit gewisser Scheibenschichten*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II **188** (1979), no. 8-10, 417–427 (German).
- [FG85] A. Florian and H. Groemer, *Two remarks on the permeability of layers of convex bodies*, Studia Sci. Math. Hungar. **20** (1985), no. 1-4, 259–265.
- [Pac77] J. Pach, *On the permeability problem*, Studia Sci. Math. Hungar. **12** (1977), no. 3-4, 419–424.

Nyilatkozat

Alulírott Keller Dorina kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2018. május 18.

.....

aláírás