

EUKLIDESZI TÉRIZOMETRIÁK ÉS TOPOLÓGIÁJUK

MATEMATIKA BSC SZAKDOLGOZAT

Szerző:
Bezdány Dániel

Témavezető:
Dr. Kincses János

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI INTÉZET

2018

Tartalomjegyzék

1. $O(3)$ és a kvaterniók	2
1.1. Izometriák és az ortogonális csoport	2
1.2. A kvaterniók tere	2
1.3. Kvaterniók kapcsolata $O(3)$ -al	3
1.4. Két forgatás kompozíciója kvaterniókkal	6
2. $SO(3)$ fundamentális csoportja	7
2.1. A fundamentális csoport	7
2.2. Szimpliciális komplexus	7
2.3. A Seifert-van Kampen tétel	11
2.4. Fedőtér	12
2.5. Egy szemléletes magyarázat	14
3. Az izometriák fundamentális csoportja	16

Bevezető

A síkbeli forgatásokkal, és más izometriákkal gyakran előkerülnek, és kellemesen kezelhetők például a komplex számok használatával, amik igencsak megkönnyítik a vizualizációjukat. A továbbiakban ezek térbeli megfelelőihez adunk egy geometriai képet arról, ezeket hogyan lehet elképzelni, hasonló módon mint ahogy a síkon a komplex számok nyújtanak segítséget, valamint megállapítunk topológiai tulajdonságát a tartalmazó térnek.

1. $O(3)$ és a kvaterniók

1.1. Izometriák és az ortogonális csoport

A tér izometriái olyan $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvények amelyek megőrzik a távolságot, ezek halmaza Φ , ami csoportot alkot, a kompozíció műveletével. Nem minden Φ -beli függvény rendelkezik fixponttal, viszont mindegyik felírható egy origót fixen hagyó transzformáció és egy eltolás összegeként.

$$\forall \varphi \in \Phi : \varphi(\mathbf{x}) = (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0})) + \varphi(\mathbf{0}) = \hat{\varphi}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_0$$

Ezzel a felírással minden izometriát egyértelműen meghatároz egy ilyen pár, és fordítva is. Az origót fixen hagyó izometriák halmazát $O(3)$ jelöli, az eltolások pedig természetes módon megfeleltethetők $\mathbb{R}^3$ -el, emiatt topológiailag úgy tekintünk Φ -re, mint $O(3) \times \mathbb{R}^3$. Mivel $\mathbb{R}^3$ topológiája ismert, $O(3)$ -al foglalkozunk.

Az $O(3)$ csoport megegyezik a lineáris algebrából ismert ortogonális csoporttal, azaz $O(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : AA^T = I\}$, ahol I az egységmátrix. Ezen mátrixok oszlop-, és sorvektorai egység hosszúak, és merőlegesek egymásra, determinánsuk pedig ± 1 . Az 1 determinánsú, forgatásoknak megfelelő mátrixok kiemelt részcsoporthoz tartoznak, $SO(3)$ -t, ami normálosztó $O(3)$ -ban, a -1 determinánsú, a tükrözéseknek megfelelő mátrixok halmazát $O^-(3)$ jelöli. Mivel 3 dimenzióban $\det -A = -\det A$, valójában, $O^-(3) = -SO(3)$, megkaptuk hogy $O(3)$ topológiailag megegyezik $SO(3)$ két másolatával, elegendő $SO(3)$ -t vizsgálnunk.

$SO(3)$ elemei 3×3 -as mátrixok, így természetes módon megfeleltethetők $\mathbb{R}^9$ -beli pontokkal, amin az euklideszi távolság által indukált topológiából származtatjuk $SO(3)$ topológiáját.

1.2. A kvaterniók tere

Ahogy a síkbeli forgatások vizsgálatához sok segítséget nyújt a komplex számok teste, hasonlóan, a kvaterniók ferde-teste is hasznos lesz számunkra a térbeli forgatások kezeléséhez.

1.1. Definíció. A kvaterniók ferde-teste $\mathbb{H}$, az $\mathbb{R}^4$ valós vektortér, ahol az összeadás és skalárral való szorzás a szokásos, a kvaterniók közti szorzás pedig a következő módon definiált.

$$\forall \mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T :$$

$$L_x = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}, R_x = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 \\ x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 \\ x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 \end{pmatrix}$$

Legyen $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = L_x \mathbf{y}$, és $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = R_x \mathbf{y}$.

A mátrixműveletek tulajdonságaiból következően, ez a művelet jól definiált, disztributív, és asszociatív. Megmutatható, hogy ez az egyetlen szorzás amellyel $\mathbb{R}^4$ ferde-testet alkot és kielégíti az

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$$

egyenleteket, ahol $1 = (1, 0, 0, 0)^T$, $\mathbf{i} = (0, 1, 0, 0)^T$, $\mathbf{j} = (0, 0, 1, 0)^T$, $\mathbf{k} = (0, 0, 0, 1)^T$ a kanonikus bázis.

Ahogy a komplex számoknál, itt is hasznos azonosítani az $\mathbb{R}(1, 0, 0, 0)$ alteret a valós számegyenessel, a $(0, \alpha, \beta, \gamma)$ alakú kvaterniókat pedig tiszta kvaternióknak nevezzük, és $\mathbb{R}^3$ -el azonosítjuk. A kényelem érdekében, a továbbiakban elhagyjuk a szorzás jelölését, egyszerűen $\mathbf{xy}$ -t írunk $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ helyett.

Adott kvaterniónak $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$ a kanonikus alakja, $\Re \mathbf{q} = q_0 \in \mathbb{R}$ a valós része, $\Im \mathbf{q} = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ a képzetes része, $\bar{\mathbf{q}} = \Re \mathbf{q} - \Im \mathbf{q}$ pedig a konjugáltja.

Adott $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{t}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ esetén egy ekvivalens definíció a szorzásra az

$$(\alpha + \mathbf{t})(\beta + \mathbf{r}) = \alpha\beta - \langle \mathbf{t}, \mathbf{r} \rangle + \alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{t} + \mathbf{t} \times \mathbf{r}. \quad (1.1)$$

A fenti definícióból kiolvashatóak, hogy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{y}}\mathbf{x})$, azaz $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} = \sqrt{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}}$. Találtunk tehát egy természetes előállítását a szokásos euklideszi operátoroknak, amikből látszik, hogy $\|\mathbf{qr}\| = \|\mathbf{q}\|\|\mathbf{r}\|$, valamint $\frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2}\mathbf{q} = \frac{\|\mathbf{q}\|^2}{\|\mathbf{q}\|^2} = 1$, létezik az inverz $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2}$ minden nem nulla kvaternióhoz, $\mathbb{H}$ tényleg ferde-test, topológiáját a norma által indukált távolságból származtatjuk. Ezen felül, megemlítjük, hogy ha $\mathbf{t}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ merőlegesek egymásra, akkor $\mathbf{tr} = \mathbf{t} \times \mathbf{r}$ a vektoriális szorzat.

1.3. Kvaterniók kapcsolata $O(3)$ -al

Létezik egy nagyon természetes kapcsolat $O(3)$ és a kvaterniók között, ugyanis a szorzás definíciójából következik, hogy $L_x R_y = R_y L_x$, speciálisan $L_q R_{q^{-1}} = R_{q^{-1}} L_q$. Ha megvizsgáljuk ezt a mátrixot, azt látjuk, hogy $0 \neq \mathbf{q}$ -ra

$$(L_q R_{q^{-1}})(L_q R_{q^{-1}})^T = Id_{\mathbb{R}^4}.$$

Tehát $\pm L_q R_{q^{-1}}$ ortonormált mátrixok, sőt, $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ alakúak, ahol

nyilván $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ maga is ortonormált mátrix $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ -ban, és minden eleme

a $\mathbf{q}$ koordinátáinak folytonos függvényeként áll elő. Máris találtunk egy kapcsolatot az ortogonális csoporthoz, aminek geometriai értelmezéséhez felírjuk másképpen ezt a transzformációt.

Mivel $L_q R_{q^{-1}} \mathbf{x} = \mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{q}^{-1}$, ebben a formában vizsgálva rögtön megkapjuk, hogy

$$\mathbf{q}(\lambda \mathbf{q} + \beta) \mathbf{q}^{-1} = \lambda \mathbf{q} \mathbf{q} \mathbf{q}^{-1} + \beta \mathbf{q} \mathbf{q}^{-1} = \lambda \mathbf{q} + \beta.$$

Vagyis $\lambda \mathbf{q} + \beta$ fix tengelyek, speciálisan a $\Im \mathbf{q}$ és $\mathbb{R}$ tengelyek is fixek, így csak $\mathbb{R}^3$ -beli elemekre való hatását vizsgáljuk, amihez írjuk át vektoriális formába az adott kvaterniót, legyen $\mathbf{q} = \alpha + \mathbf{t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$.

Ha $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ merőleges $\mathbf{t}$ -re, akkor $0 = \langle \mathbf{r}, \mathbf{t} \rangle = \bar{\mathbf{r}} \mathbf{t} + \bar{\mathbf{t}} \mathbf{r}$, tehát $\mathbf{r} \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t} \mathbf{r}$, amiből

$$\begin{aligned} (\alpha + \mathbf{t}) \mathbf{r} (\alpha + \mathbf{t})^{-1} &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{r} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{t} \mathbf{r} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{r} \bar{\mathbf{t}} + \frac{1}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{t} \mathbf{r} \bar{\mathbf{t}} \\ &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{r} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{t} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{t} \bar{\mathbf{t}}}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{r} \\ &= \frac{\alpha^2 - \|\mathbf{t}\|^2}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{r} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{t} \mathbf{r} \\ &= \frac{\alpha^2 - \|\mathbf{t}\|^2}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{r} + \frac{2\alpha \|\mathbf{t}\|}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} \times \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Ha $\mathbf{r}$ egység hosszú, akkor $\mathbf{t}' = \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|}$, $\mathbf{r}, \mathbf{t}' \mathbf{r}$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^3$ -ban, tekintsük az ezekben a koordinátákban felírt tetszőleges vektort.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x_1 \mathbf{t}' + x_2 \mathbf{r} + x_3 \mathbf{t}' \mathbf{r}) \mathbf{q}^{-1} &= x_1 \mathbf{t}' + x_2 \frac{\alpha^2 - \|\mathbf{t}\|^2}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{r}' + x_2 \frac{2\alpha \|\mathbf{t}\|}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{t}' \mathbf{r}' \\ &\quad + x_3 \frac{\alpha^2 - \|\mathbf{t}\|^2}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{t}' \mathbf{r}' - x_3 \frac{2\alpha \|\mathbf{t}\|}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{r}' \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2 - \|\mathbf{t}\|^2}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} & -\frac{2\alpha \|\mathbf{t}\|}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \\ 0 & \frac{2\alpha \|\mathbf{t}\|}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} & \frac{\alpha^2 - \|\mathbf{t}\|^2}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A fenti mátrix ortonormált és determinánsa 1, azaz egy forgatásmátrix a $\mathbf{t}$ tengely körül. Jelölje a forgatás szögét θ , az (1.7) egyenletből $\sin \theta = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2}$, $\cos \theta = \frac{\alpha^2 - \|\mathbf{t}\|^2}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2}$, amiből $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ha $\alpha = \pm \|\mathbf{t}\|$, különben

$$\tan 2\frac{\theta}{2} = \tan \theta = \frac{\frac{2\alpha \|\mathbf{t}\|}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2}}{\frac{\alpha^2 - \|\mathbf{t}\|^2}{\alpha^2 + \|\mathbf{t}\|^2}} = \frac{2\alpha \|\mathbf{t}\|}{\alpha^2 - \|\mathbf{t}\|^2} = \frac{2 \frac{\|\mathbf{t}\|}{\alpha}}{1 - \frac{\|\mathbf{t}\|^2}{\alpha^2}} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Azaz $\theta = 2 \arctan \frac{\|\mathbf{t}\|}{\alpha}$, ha $\alpha \neq 0$, különben $\theta = \pi$.

Mivel $(\lambda \mathbf{q}) \mathbf{x} (\lambda \mathbf{q})^{-1} = \mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{q}^{-1}$, feltehető, hogy $\|\mathbf{q}\| = 1$. Az egység hosszú kvaterniók csoportját S^3 -al jelöljük.

1.2. Definíció. Adott $\mathbf{q} \in S^3$ -hoz, legyen $\varrho'_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{q}^{-1}$, ennek $\mathbb{R}^3$ -ra való korlátozása $\varrho_q = \varrho'_q|_{\mathbb{R}^3}$, és ϱ az a függvény, amire $\varrho(\mathbf{q}) = \varrho_q$.

Természetesen $\varrho_1 = Id_{\mathbb{R}^3}$, $\varrho_x \varrho_y = \varrho_{xy}$, és $\varrho_q^{-1} = \varrho_{q^{-1}}$, vagyis ϱ egy homomorfizmus S^3 -ról $SO(3)$ -ra. A magja $\varrho^{-1}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \{\mathbf{q} \in S^3 : \mathbf{q} \mathbf{t} = \mathbf{t} \mathbf{q}\} = \{1, -1\}$, mert

csak a skalár elemekkel kommutatív a szorzás. Ha van két $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^3 : \varrho_x = \varrho_y$, akkor $\varrho_x^{-1} \varrho_y = \varrho_{x^{-1}y} = Id$, tehát $x = \pm y$ hiszen csak a tisztán skalár elemekhez tartozik identitás leképezés. Ha tehát megfeleltetünk minden elemet a -1 -szeresével, $S^3/\{1, -1\}$ -en a ϱ leképezés injektív lesz.

Belátjuk, hogy tetszőleges $\mathbf{t}$ tengely körüli $\theta \in (-\pi, \pi)$ szögű forgatáshoz létezik ős S^3 -ban. Ha $\theta = 0$, akkor a keresett kvaternió ± 1 , különben legyen egy ilyen elem $\alpha + \mathbf{t}'$, nyilván $\mathbf{t}' = \lambda \mathbf{t}$ valamilyen $\lambda > 0$ valós számra, és tegyük fel, hogy $\|\mathbf{t}\| = 1$, ekkor

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \|\mathbf{t}'\|^2 &= 1 \Rightarrow \alpha = \pm \sqrt{1 - \|\mathbf{t}'\|^2} \\ \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\|\mathbf{t}'\|}{\alpha} = \pm \frac{\|\mathbf{t}'\|}{\sqrt{1 - \|\mathbf{t}'\|^2}} = \pm \tan \arcsin \|\mathbf{t}'\| \\ \|\mathbf{t}'\| &= |\sin \frac{\theta}{2}|, \alpha = \pm \cos \frac{\theta}{2} \\ \pm (\alpha + \mathbf{t}') &= \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{|\tan \frac{\theta}{2}|} |\cos \frac{\theta}{2}| + |\sin \frac{\theta}{2}| \mathbf{t} \\ \pm (\alpha + \mathbf{t}') &= \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{t}\end{aligned}$$

ha $\theta \neq \pm\pi$, amikor pedig $\alpha + \mathbf{t}' = \pm \mathbf{t}$, azaz ϱ szürjektív. Tudjuk, hogy ϱ bijektív homomorfizmus, a folytonossága pedig nyilvánvaló, vizsgálva arra, hogy egy kvaternió képe

$$\varrho(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

aminek ismeretében egy mátrix inverzképe egyértelműen meghatározható. A nyom invariáns bázisátmenetre, ezért $\theta = \arccos(\frac{\text{tr}(A)-1}{2})$, az 1 sajátértékhez tartozó egy-ségnyi sajátvektorok a forgatástengelyt feszítik ki, aminek előjelét a ϱ szerinti képével való ellenőrzéssel megkapjuk.

1.3. Tétel. $\varrho : S^3/\{1, -1\} \rightarrow SO(3), \mathbf{q} \mapsto \varrho_{\mathbf{q}}$ bijektív, folytonos csoporthomomorfizmus, tehát $SO(3) \cong S^3/\{1, -1\}$.

Megjegyezzük, hogy ha S^3 -ra mint $\mathbb{R}^4$ -beli pontokra tekintünk, akkor $S^3/\{1, -1\} = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, a valós projektív tér.

1.4. Megjegyzés. Ahogyan azt várhattuk, könnyű belátni, hogy a $-\varrho_t$ alakú tükrözésekből megkapható az összes forgatás.

Válasszunk $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in S^2 \cap \mathbf{t}^\perp$ vektorokat, hogy $\mathbf{t}^\perp$ -ben $\mathbf{z}'$ pozitív irányba zár be $\frac{\varphi}{2}$ szöget $\mathbf{z}$ -vel. Ilyenkor

$$\begin{aligned}\mathbf{z}\mathbf{z}' &= \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} = \alpha + \mathbf{t}' \\ \theta &= 2 \arctan \frac{\|\mathbf{t}'\|}{\alpha} = 2 \arctan \tan \frac{\varphi}{2} = \varphi\end{aligned}$$

Azaz $(-\varrho_z)(-\varrho_{z'}) = \varrho_{zz'}$ egy φ szögű forgatás a $\mathbf{t}$ tengely körül minden ilyen $\mathbf{z}, \mathbf{z}'$ párra.

1.4. Két forgatás kompozíciója kvaterniókkal

Adott két forgatásmátrixra, nem feltétlen egyértelmű összetételük természete, de a kvaterniók segítségével ezt könnyen vizsgálhatjuk. A síkon jól ismert, hogy két forgatás kompozíciója, ha nem eltolás, akkor forgatás, és a középpontok és szögek által határozott háromszöggel szemléltethetően, szépen viselkedik. Reménykedhetünk, hogy ez a térben is hasonlóan történik.

Adott ϱ_x, ϱ_y forgatások, ezek a kompozíciója $\varrho_x \varrho_y = \varrho_{xy}$, $\mathbf{x}\mathbf{y} = (\alpha + \mathbf{t})(\beta + \mathbf{r})$ -t vizsgáljuk. Feltehető, hogy $\mathbf{r} \neq \lambda \mathbf{t}$, különben ugyanazon tengely körüli két forgatással van dolgunk, aminek szöge egyszerűen a két szög összege vagy különbsége. Továbbá, feltehető, hogy egyik skalár sem 0, ami esetben vagy ekvivalens lenne a feladat két síkra való tükrözés szorzatával, amit már tárgyaltunk, vagy egy tükrözés és egy forgatás szorzatával.

Korábban megmutattuk, hogy tetszőleges forgatás felírható két tükrözéssel. Válasszunk most ehhez megfelelő egységvektorokat $\mathbf{u}\mathbf{u}' = \mathbf{x}, \mathbf{v}\mathbf{v}' = \mathbf{y}$, hogy $\mathbf{t}, \mathbf{r} \in \mathbf{u}'^\perp = \mathbf{v}^\perp$. Amiatt, hogy így választottuk $\mathbf{u}'$ és $\mathbf{v}$ vektorokat, $\varrho_{xy} = \varrho_{uv'}$, tehát amit vizsgálnunk kell, az a $\mathbf{u}\mathbf{v}' = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}' \rangle + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$ vektor. Ha mindkét forgatás π szögű volt, akkor $\varrho_{u'v}$ tengelye $\mathbf{r} \times \mathbf{t}$, szöge pedig $\pi - \varphi$, ahol φ az eredeti két tengely által bezárt szög.

Különben a forgatás szöge nyilván $2 \arctan \frac{|\cos \psi|}{\sin \psi}$, ahol ψ a két egységvektor által bezárt szög, a tengely pedig $\mathbf{u} \times \mathbf{v}'$.

Ha feltesszük, hogy az eredeti két forgatás tengely $(1, 0, 0)^T, (\cos \xi, \sin \xi, 0)^T$, és a forgatások szöge rendre φ, ψ , akkor ezt konkrétan ki tudjuk számolni.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &= \mathbf{v} = (0, 0, 1)^T \\ \mathbf{u} &= (0, \sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2})^T \\ \mathbf{v}' &= (-\sin \xi \sin \frac{\psi}{2}, -\cos \xi \sin \frac{\psi}{2}, \cos \frac{\psi}{2})^T \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}' \rangle &= \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \xi\end{aligned}$$

Ezekből megkapjuk a bezárt szöget $\arccos \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}' \rangle$, amiből kiszámolható a forgatás szöge, $\theta = 2 \arctan \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}' \rangle|}{\sin \arccos \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}' \rangle}$, a tengely pedig

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v}' = (\cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \xi, -\cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \xi, \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \xi)^T.$$

Ezek az értékekből megkapható bármely két másik forgatás kompozíciója, de sajnos nem várhatunk sokkal rövidebb leírást az általános esetre, ugyanis itt lényegében gömbi háromszögben számoltunk szöget, amiben a gömbi felesleg is fontos.

2. $SO(3)$ fundamentális csoportja

A kvaterniók segítségével egy geometriai képet kaptunk a forgatások csoportjáról, a következőkben pedig $SO(3)$ topológiai struktúráját vizsgáljuk, nevezetesen a fundamentális csoportját fogjuk meghatározni többféle módon. A használt módszerek részletesebben megtalálhatók M.A. Armstrong [3] könyvében.

2.1. A fundamentális csoport

2.1. Definíció. X topologikus téren $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ zárt pálya, ha folytonos leképezés, és $\alpha(0) = \alpha(1)$. Az $\alpha(0)$ pont a zárt pálya alappontja.

Két azonos alappontú zárt pálya szorzata $\alpha.\beta$ a két pálya egymás után való végigjárása.

$$(\alpha.\beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{ha } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2s - 1) & \text{ha } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Nyilván $\alpha.\beta$ szintén zárt pálya. $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1 - s)$ az α zárt pálya inverze.

A fundamentális csoport az adott téren közös alappontú zárt pályákról ad információt, pontosabban azok homotópia osztályairól.

2.2. Definíció. Két közös alappontú zárt pálya, α és β , homotóp ekvivalensek, ha létezik $F(s, t) : [0, 1]^2 \rightarrow X : F(s, 0) = \alpha(s), F(s, 1) = \beta(s), F(0, t) = F(1, t) = \alpha(0)$ folytonos függvény.

Ez egy ekvivalencia reláció az adott alappontú zárt pályák halmazán, α zárt pálya ekvivalencia osztályát $\langle \alpha \rangle$ jelöli. Az X tér egy p pontján kezdődő összes zárt pályák halmazán ha tekintjük az ekvivalencia osztályokat, azok a $\langle \alpha \rangle.\langle \beta \rangle = \langle \alpha.\beta \rangle$ művelettel csoportot alkotnak, $\langle e \rangle$ egységelemmel, ahol $e(s) = p$, és $\langle \alpha \rangle^{-1} = \langle \alpha^{-1} \rangle$ inverzzel.

Ez X fundamentális csoportja a p pontban, $\pi_1(X, p)$. Megjegyezzük még, hogy ha X ívszerűen összefüggő, akkor $\forall p, q \in X : \pi_1(X, p) \cong \pi_1(X, q)$, ilyenkor beszélhetünk egyszerűen $\pi_1(X)$ -ről. A zárt pályák folytonos függvények, ezért jól viselkednek folytonos függvényekkel való kompozíciókor, minden $f : X \rightarrow Y$ folytonos függvény természetes módon indukál egy $f_*(\langle \alpha \rangle) = \langle f \circ \alpha \rangle$ homomorfizmust a két tér között, speciálisan ha két tér homeomorf egy h függvénnyel, akkor h_* oda-vissza homomorfizmus, ezért a két tér fundamentális csoportja izomorfak.

Egy adott tér fundamentális csoportjának kiszámolása általában nem könnyű, de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tulajdonságai lehetőséget adnak néhány egyszerű technika alkalmazására a fundamentális csoport számolásánál.

2.2. Szimpliciális komplexus

Egy általános módszer a fundamentális csoport számítására a szimpliciális komplexusok használata.

2.3. Definíció. Szimpliciális komplexusnak nevezünk olyan $\mathbb{E}^n$ -beli szimplexek együttesét, ahol bármelyik két szimplex vagy diszjunkt, vagy lapban metszik egymást.

Adott K szimpliciális komplexust, mint topologikus tér $\mathbb{E}^n$ -ben, $|K|$ jelöli, és poliédernek nevezzük.

2.4. Definíció. Egy X topologikus tér triangulációján egy K szimpliciális komplexust, és egy $h : |K| \rightarrow X$ homeomorfizmust értünk.

Egy triangulálható tér, bár rendelkezik triangulációval, az nem egyértelmű, mégis hasznos eszközök lehetnek ezek a konstrukciók a fundamentális csoport vizsgálatához. A következőkben sokszor egyszerűen komplexust használunk szimpliciális komplexus helyett.

2.5. Definíció. Egy K komplexus baricentrikus felbontásán azt értjük, hogy minden részszimplex súlypontját hozzá vesszük új csúcspontként, dimenzió mentén felfelé haladva, az összes szimplexet felbontjuk az eredeti lapjainak a szimplex súlypontjával vett kúpjaira. Ezen folyamat egymás után n -szeres elvégzésével kapjuk K^n -t, K n -edik baricentrikus felbontását.

Ha X egy triangulálható tér, akkor komplexusok használatával képesek vagyunk kifejezni X fundamentális csoportját. Tekintsünk egy adott $h : |K| \rightarrow X$ triangulációt, ekkor nyilván $\pi_1(X, h(p)) \cong \pi_1(|K|, p)$, viszont az utóbbi elemei reprezentálhatók K -beli élpályákkal.

2.6. Definíció. Egy K komplexuson egy élpálya egy olyan csúcs sorozat $v_0, v_1, \dots, v_k$, ahol minden v_i, v_{i+1} egy szimplexet definiál K -ban. Ha $v_0 = v_k = v$ akkor egy v alappontú zárt élpályáról beszélünk.

Hogy homotópiának megfelelő fogalmat kapjunk, két élpályát ekvivalensnek tekintünk, ha az egyik a másikból megkapható a következő módon. Ha a csúcsok u, v, w egy szimplex három csúcsai K -ban, akkor $v_0, v_1, \dots, u, v, w, \dots, v_k$ relációban áll $v_0, v_1, \dots, u, w, \dots, v_k$ -vel. Ez egy ekvivalencia reláció, ami egy osztályozást ad a K -beli v alappontú zárt pályákon. Adott $v_0, v_1, \dots, v_k$ élpálya ekvivalencia osztályát $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ jelöli, és a közös alappontú osztályok csoportot alkotnak az

$$\{v, v_1, \dots, v_{k-1}, v\} \cdot \{v, w_1, \dots, w_{k-1}, v\} = \{v, v_1, \dots, v_{k-1}, v, w_1, \dots, w_{k-1}, v\}$$

szorzással, $\{v\}$ egységelemmel és $\{v, v_1, \dots, v_{k-1}, v\}^{-1} = \{v, v_{k-1}, \dots, v_1, v\}$ inverzzel. Ez a csoport a K komplexus v alapú élcsoportja, jele $E(K, v)$

2.7. Tétel. $E(K, v) \cong \pi_1(|K|, v)$

Tehát elég az élcsoport v pontban való meghatározása, hogy megkapjuk az X tér fundamentális csoportját $h(v)$ -ben. Ehhez a következőt tesszük.

Legyen L egy részkomplexus ami K összes csúcsát tartalmazza, ívösszefüggő és egyszeresen összefüggő. Ilyen mindig létezik, ha K összefüggő, például az élgráf feszítőfája. Soroljuk fel a K összes csúcsát, $v_0 < v_1 < \dots < v_s$, és legyen $G(K, L)$ az a csoport amit a $g_{i,j}$ generátorok határoznak meg, minden v_i, v_j rendezett párra ami egy K -beli szimplexet fut be, azon relációkkal, hogy $g_{i,j} = 1$ ha a hozzá tartozó pár L -beli szimplexet fut be, és $g_{i,j}g_{j,k} = g_{i,k}$ ha v_i, v_j, v_k egy K -beli 2-szimplex csúcsai.

2.8. Tétel. $G(K, L) \cong E(K, v)$

2.9. Megjegyzés. Mivel minden L -beli él megfelel az egységelemnek, elegendő azon v_n csúcsok felsorolása és $g_{i,j}$ generátorok bevezetése, amikre $v_i < v_j$ egy L -en kívül eső élet fut be, és az egyedüli reláció amivel számolni kell a $g_{i,j}g_{j,k} = g_{i,k}$ amikor $v_i < v_j < v_k$ egy L -en kívül eső szimplex.

Ez az eljárás minden triangulálható tér fundamentális csoportjának számolásához felhasználható, ezért megvizsgáljuk $SO(3)$ triangulálható-e.

Ahogy korábban láttuk, $SO(3) \cong S^3/\{1, -1\}$, ezért a projektív tér triangulálhatóságát vizsgáljuk. $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ -t az egységgömbön ellentétes pontok megfeleltetésével kaptuk, ezért úgy gondolunk rá, mint $S^3_+ \cup (S^2/\{1, -1\})$, a skalár szerinti felső zárt félgömbfelszín, aminek $\mathbb{R}^\perp$ -beli pontjait megfeleltetjük a -1 -szeresükkal. Tekintsük a $\varphi: \mathbb{R}^3 \supset B^3 \rightarrow S^3 \subset \mathbb{H}$, $\varphi: \mathbf{q} \mapsto \sqrt{1 - \|\mathbf{q}\|^2} + \mathbf{q}$ leképezést, ami bijektíven képi a nyílt egységgömböt S^3_+ -ba, a gömbfelszínt pedig szürjektíven $S^2/\{1, -1\}$ -be, pontosan azokat a pontokat ugyanoda képezve, amik egymás ellentettjei. Ugyanakkor φ folytonos, ezzel beláttuk, $SO(3)$ homeomorf egy 3 dimenziós egységgömbbel, aminek felszínén minden pont azonosítva van az ellentétes ponttal.

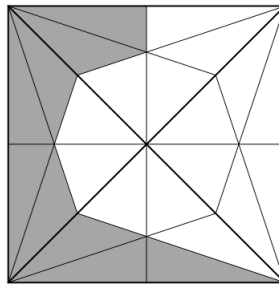
Az egységgömb nyilván triangulálható, például egy K_0 , a koordinátasíkokkal nyolc tetraéderbe osztott kanonikus elhelyezésű oktaéder komplexussal és egy

$$h(\mathbf{x}) = h((x_1, x_2, x_3)^T) = \frac{|x_1| + |x_2| + |x_3|}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x} \quad (2.1)$$

origóból való vetítéssel.

Ha nem az egységgömböt, hanem a korábban leírt halmazt tekintjük, akkor h szintén homeomorfizmus lesz arról a K tetraéderekből álló oktaéderről, aminek a felszínén lévő pontokat megfeleltetünk az ellentétes ponttal, viszont ez a K már nem komplexus, ugyanis két ellentétes tetraéder az oktaéder középpontjában, valamint a megfeleltetett felszíni oldalukon is érintkeznek. Szerencsére nem kell teljesen új komplexust keresnünk, ugyanis K^1 komplexus lesz a megfeleltetés után is, így K^1 és h triangulálja a vizsgált teret, vagyis K^1 és $\varrho \circ h$ egy triangulációja $SO(3)$ -nak. Mivel $SO(3)$ ívösszefüggő, keresünk egy L részkomplexust, amivel könnyen ki tudjuk számolni K^1 élcsoportját.

1. ábra. A felső határról elhagyott szimplexek

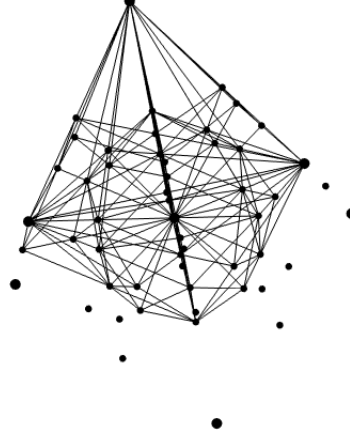


A részkomplexust, mellyel számolunk majd, több lépésben építjük fel, és a megfeleltetést csak a folyamat végén hajtjuk végre. L_0 tartalmazza az összes olyan, az oktaéder határán elhelyezkedő háromszöget, amelynek nincs negatív harmadik koordinátájú csúcsa, kivéve azokat, amelyek valamely pontja eleme az alábbi halmaznak.

$$\{(-1, 0, 0)^T, (0, -1, 0)^T, \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T, \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T\}$$

L_1 az összes olyan tetraéderből áll, aminek nincs olyan felszíni pontja, ami az L_0 -en kívül esne. Ez topológiailag megegyezik azzal, hogy az oktaéderből elhagyunk bizonyos olyan tetraédereket, amik a határ kijelölt részével érintkeznek. Ezen határra eső sáv elhagyásával az alakzat ívszerűen, és egyszeresen összefüggő marad.

2. ábra. L_1 oldalról nézve



L pontosan L_1 képe a megfeleltetés elvégzése után, ami ugyanaz, mint $L_1 \cup -L_0$. Mivel az ezzel a lépéssel valójában új pontokat nem vettünk hozzá L_1 -hez, az említett formában összefüggő marad. L alkalmas a számolásunkhoz, mert ezeken felül minden csúcsot tartalmaz, amiket a következő módon sorolunk fel.

$$v_0 = (0, 0, 0)^T, v_1 = (1, 0, 0)^T, v_2 = (0, 1, 0)^T, v_3 = (0, 0, 1)^T, v_{i+3} = -v_i, \hat{v}_j = \frac{1}{2}v_j$$

$$i < j, j - i \neq 3 : v_{i,j} = \frac{1}{2}(v_i + v_j), \hat{v}_{i,j} = \frac{1}{3}(v_i + v_j)$$

$$i < j < k, k - j, k - i, j - i \neq 3 : v_{i,j,k} = \frac{1}{3}(v_i + v_j + v_k), \hat{v}_{i,j,k} = \frac{1}{4}(v_i + v_j + v_k)$$

$$v_1 < v_2 < v_3 < v_4 < \dots < \hat{v}_6 < v_{1,2} < v_{1,3} < v_{1,5} < \dots$$

$$< \hat{v}_{5,6} < v_{1,2,3} < v_{1,2,6} < v_{1,3,5} < \dots < \hat{v}_{4,5,6}$$

A megfeleltetés miatt, itt van több elem is, amit kétszer soroltunk fel, ez viszont csak azt jelenti hogy néhány generátor egyenlő lesz a csoportunkban.

$$g_{\{0\},i} = v_{\{0\}}\hat{v}_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$g_i = v_i\hat{v}_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$g_{i,j} = v_i v_j, i < j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\hat{g}_{i,j} = v_i \hat{v}_j, i < j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\check{g}_{i,j} = \hat{v}_i \hat{v}_j, i < j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ezek a generátorok azok, amikkel számolnunk kell. Rögtön megállapítjuk, hogy minden $g_{\{0\},i} = \check{g}_{i,j} = 1$, amiből látjuk, hogy

$$g_{\{6\}} = g_{\{6\}}1 = g_{\{6\}}\check{g}_{\{6\},\{5,6\}} = \hat{g}_{\{6\},\{5,6\}}$$

mert $v_{\{6\}}, \hat{v}_{\{6\}}, \hat{v}_{\{5,6\}}$ egy szimplex csúcsai K^1 -ben, valamint

$$\hat{g}_{\{6\},\{5,6\}} = g_{\{6\},\{5,6\}} g_{\{5,6\}} = g_{\{5,6\}}$$

mert $v_{\{6\}}, v_{\{5,6\}}, \hat{v}_{\{5,6\}}$ egy szimplex csúcsai, és $g_{\{6\},\{5,6\}} = 1$ mert $v_{\{6\}}, v_{\{5,6\}}$ élt futnak be L -ben.

$$g_{\{5,6\}} = g_{\{5,6\}} \check{g}_{\{5,6\},\{4,5,6\}} = \hat{g}_{\{5,6\},\{4,5,6\}}$$

mert $v_{\{5,6\}}, \hat{v}_{\{5,6\}}, \hat{v}_{\{4,5,6\}}$ szimplex csúcsai K^1 -ben, és

$$\hat{g}_{\{5,6\},\{4,5,6\}} = g_{\{5,6\},\{4,5,6\}} g_{\{4,5,6\}} = g_{\{4,5,6\}} = g_{\{6\},\{4,5,6\}} g_{\{4,5,6\}} = \hat{g}_{\{6\},\{4,5,6\}}$$

mert $v_{\{5,6\}}, v_{\{4,5,6\}}, \hat{v}_{\{4,5,6\}}$ és $v_{\{5,6\}}, v_{\{4,5,6\}}, \hat{v}_{\{4,5,6\}}$ szimplexek csúcsai.

Itt nem írjuk le a további számolásokat, de elvégzésükkel kapjuk, hogy az összes $-L_0$ -ból L_1 -be menő élhez valójában csak egy generátor tartozik, legyen ez g_1 , és hasonlóan minden L_1 -ből $-L_0$ -ba menő élhez is csak egy generátor tartozik, legyen ez g_2 . De K^1 felszínén tett megfeleltetést észben tartva

$$g_1 = g_{\{4\},\{2,4\}} = v_4 v_{2,4} = v_1 v_{1,5} = g_{\{1\},\{1,5\}} = g_2.$$

Azaz egyetlen generáló elemmel van dolgunk, legyen ez g , amire mivel $v_{\{1\}}, v_{\{1,6\}}, \hat{v}_{\{1,6\}}$ egy szimplex 3 csúcsai, $g_{\{1\},\{1,6\}} g_{\{1,6\}} = \hat{g}_{\{1\},\{1,6\}} = 1$ alapján $g^2 = 1$.

Tehát $\pi_1(SO(3)) \cong \pi_1(|K^1|) \cong G(K^1, L) = \langle g | g^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$, amiben a generáló osztály egy reprezentánsa például a $v_{\{1\}} \hat{v}_{\{1\}} v_{\{0\}} \hat{v}_{\{4\}} v_{\{4\}}$ zárt élpályának megfelelő $\varrho(\alpha(t)) = \varrho((1 - 2t, 2\sqrt{t - t^2}, 0, 0)^T)$ zárt pálya.

2.3. A Seifert-van Kampen tétel

A szimpliciális komplexusok már adtak egy módszert fundamentális csoport számolásra, viszont ez sokszor, például nem ideális részkomplexus választása miatt, olyan sok generátorú csoporthoz vezet, aminek kiszámolása hosszadalmas és kellemetlen, még ha maga a csoport kicsi is. Ezért gyakran hasznosak az olyan módszerek amik ezt a számolást lerövidítik, ilyen például a Seifert-van Kampen tétel használata.

Ha adott J és K komplexusok, amelyek $J \cap K$ komplexusban metszik egymást, és $|J|, |K|, |J \cap K|$ ívszerűen összefüggőek, akkor ezeknek a fundamentális csoportjaiból ki tudjuk számolni $|J \cup K|$ -ét. Legyen j, k rendre a metszetet természetes módon J -be, illetve K -ba képező függvény.

2.10. Tétel. $\pi_1(|J \cup K|, v)$ megkapható a $\pi_1(|J|, v) * \pi_1(|K|, v)$ szorzatcsoportból, úgy, hogy minden $z \in \pi_1(|J \cap K|, v)$ -re legyen $j_*(z) = k_*(z)$, ahol $f_*(\langle \alpha \rangle) = \langle f \circ \alpha \rangle$.

A tétel belátásához egyszerűen tekintsünk egy feszítőfát az unióban, ami feszítőfa a vizsgált részkomplexusokban is. Ez által generált csoport generátorai pedig természetes módon megfeleltethetők a felépítő terek generátoraival, pontosan a leírt relációval azonosítva azokat.

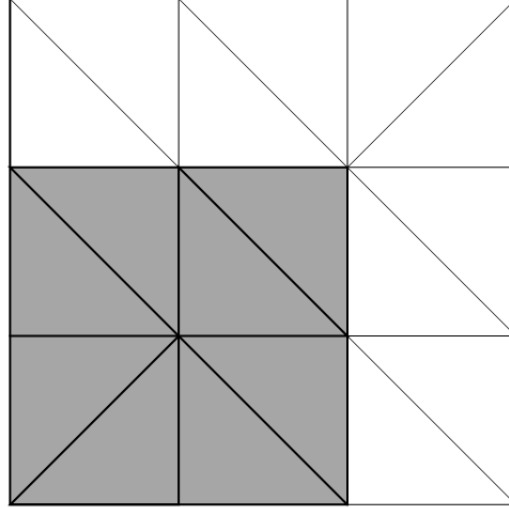
Ezen tétel használatával sok számolást tudunk megspórolni az $SO(3)$ vizsgálata során. Tekintsük a már használt K^1 oktaédert, ami triangulálja a forgatáscsoportot.

Legyen K_+^1 azon K^1 -beli részkomplexus, aminek minden tetraédere rendelkezik pozitív z -koordinátájú csúccsal, és hasonlóan definiáljuk K_-^1 -et. Ekkor $K_+^1 \cup K_-^1 = K^1$, $J = K_+^1 \cap K_-^1$ megegyezik a két komplexus határán lévő háromszögekkel, és mind a három ívszerűen összefüggő komplexus.

Megállapítjuk, hogy $|K_+^1| \cong |K_-^1| \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, hiszen a $z = 0$ síkba vetítés homotópia, aminek az eredménye egy körlap, határán egy ellentétes megfeleltetéssel, a projektív sík. J csak azon részét tekintve, ami az eredeti K^1 oktaéder határán helyezkedett el, ez megegyezik a projektív síkkal, valamint a $z = 0$ síkba eső része is, ugyanis mint poliéderek homeomorfak. Legyenek ezek rendre J_+ , J_- , amikre $J_+ \cup J_- = J$, $J_+ \cap J_- = L$, ahol L a projektív egyenes.

A projektív sík fundamentális csoportját könnyen ki tudjuk számolni, például szimpliciális komplexus használatával, amiből kapjuk, hogy $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$.

3. ábra. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ egy triangulációja



A projektív egyenes topológiailag egy kör, így fundamentális csoportja $\mathbb{Z}$.

A tétel szerint $\pi_1(|J|) \cong \pi_1(|J_+|) *_{\pi_1(|L|)} \pi_1(|J_-|)$, és L generáló eleme megegyezik a két tartalmazó térével, azaz

$$\pi_1(|J|) \cong \langle g_1, g_2 | g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_1 = g_2 \rangle \cong \langle g | g^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2.$$

A fenti gondolatmenethez hasonlóan, $\pi_1(|K^1|) \cong \pi_1(|K_+^1|) *_{\pi_1(|J|)} \pi_1(|K_-^1|)$, és $\pi_1(|J|)$ generátorának megfelelő pálya szintén generátor $|K_+^1|$ és $|K_-^1|$ fundamentális csoportjaiban, ezért $\pi_1(|K^1|) \cong \langle g_1, g_2 | g_1^2 = g_2^2 = 1, g_1 = g_2 \rangle \cong \langle g | g^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.

Ezzel megkaptuk, hogy $\pi_1(SO(3)) \cong \pi_1(|K^1|) \cong \mathbb{Z}_2$, anélkül, hogy több mint 80 generátorral kellett volna számolnunk.

2.4. Fedőtér

Egy még elegánsabb lehetőség is létezik $SO(3)$ fundamentális csoportjának számolásához, a fedőterek tulajdonságainak használata.

2.11. Definíció. Egy $p : \tilde{X} \rightarrow X$ folytonos leképezést fedőleképezésnek, $\tilde{X}$ tere fedőtérnek hívunk, ha minden $x \in X$ pontra létezik annak egy V környezete, hogy $p^{-1}(V)$ felbontható páronként diszjunkt halmazok $\{U_\alpha\}$ együttesére, úgy, hogy $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow V$ egy homeomorfizmus minden U_α esetén.

A projektív tér esetén S^3 egy természetes fedőtér, azzal a p fedőleképezéssel, ami átellenes $\mathbf{x}$, $-\mathbf{x}$ pontokat ugyanazon pontba viszi. Tényleg,

$$V_{p(x)} = \{p(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in S^3, \|x - \mathbf{y}\| < \frac{1}{2}\}$$

$p(\mathbf{x})$ egy környezete, és ennek ősképerre

$$p^{-1}(V_{p(\mathbf{x})}) = \{\mathbf{y} \in S^3 : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \frac{1}{2}\} \cup^* \{\mathbf{y} \in S^3 : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \frac{1}{2}\}$$

egy jó felbontás.

A fedőleképezés folytonossága miatt hasznos tulajdonságokkal rendelkezik amikor pályákat vizsgálunk.

2.12. Lemma. *Adott X -beli $p(q)$ alappontú α pályához létezik pontosan egy $\tilde{X}$ -beli q alappontú $\tilde{\alpha}$ pálya, amire $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.*

Ha $F : [0, 1]^2 \rightarrow X$ folytonos leképezés amire $F(0, t) = F(1, t) = p(q)$, létezik egy egyértelmű $\tilde{F} : [0, 1]^2 \rightarrow \tilde{X}$ amire $\tilde{F}(0, t) = q$ és $p \circ \tilde{F} = F$.

Ezeket az eredeti leképezések $\tilde{X}$ -re felemelésének hívjuk, és létezésük fontos következményt von maga után a két tér fundamentális csoportja közti kapcsolatra.

2.13. Tétel. *Az indukált $p_* : \pi_1(\tilde{X}, q) \rightarrow \pi_1(X, p(q))$, $\langle \tilde{\alpha} \rangle \mapsto \langle \alpha \rangle$ leképezés injektív homomorfizmus.*

2.14. Tétel. *Legyenek X térre nézve fedőterek $\tilde{X}_1$ és $\tilde{X}_2$, rendre a p_1, p_2 fedőleképezésekkel, és válasszunk ezekben rendre q_1, q_2 pontokat, hogy $p_1(q_1) = p_2(q_2)$. Ha $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, q_2)) \subseteq p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, q_1))$, létezik egy fedőleképezés $p : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$, amire $p(q_2) = q_1$ és $p_1 \circ p = p_2$.*

Ha két fedőtér fundamentális csoportjainak indukált képei megegyeznek, akkor a tétel használatával léteznek mindkét irányba h, g fedőleképezések, amiknek kompozícióját vizsgálva megkapjuk, hogy homeomorfizmusok. Ha létezik egy h homeomorfizmus két fedőtér között, amire $p_2 \circ p = p_1$, akkor azt mondjuk, hogy a két fedőtér ekvivalens.

Fedőtranszformációnak hívunk olyan $h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ fedőtéren értelmezett homeomorfizmusokat, amikre $p \circ h = p$, ahol p a fedőleképezés. Egy $\tilde{X}$ fedőtér fedőtranszformációinak halmaza egy K csoportot alkot a függvénykompozíció szorzással, $Id_{\tilde{X}}$ egységelemmel, és függvény inverzzel, valamint ez a csoport balról hat a fedőtéren.

2.15. Tétel. *Ha $p_*(\pi_1(\tilde{X}, q))$ normálosztó $\pi_1(X, p(q))$ -ban, akkor X homeomorf az $\tilde{X}/K$ pályatérrel, és K izomorf $\pi_1(X, p(q))/p_*(\pi_1(\tilde{X}, q))$ faktorcsoporthal.*

Ennek a tételnek ismeretével már könnyű dolgunk lesz $SO(3)$ fundamentális csoportjának meghatározásával.

Az S^3 fedőtér fedőtranszformációinak meghatározásához vegyük észre, hogy az Id_{S^3} és $-Id_{S^3} : \mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$ alkalmas homeomorfizmusok, hiszen $p(\mathbf{x}) = p(-\mathbf{x})$, és valójában ezek az egyetlenek, ugyanis ha h fedőtranszformáció, akkor adott S^3 -beli pontra $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ vagy $h(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$, tegyük fel, hogy az első esettel van dolgunk. Mivel h folytonos, az $\mathbf{x}$ pont egy V környezetére is $h|_V = Id_V$. Ha lenne olyan $\mathbf{y}$ amire $h(\mathbf{y}) = -\mathbf{y}$, akkor hasonlóan hozzá is létezik egy U környezet amin $h|_U = -Id_U$. Ekkor a $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ pontokat összekötő bármely pálya képében lenne legalább egy szakadás, tehát h nem lenne folytonos.

Ebből látszik, hogy K egy kételemű csoport. Az $\pi_1(S^3)$ a triviális csoport, ezért minden homomorfizmus az egységelembe viszi, vagyis

$$\pi_1(SO(3))/p_*(\pi_1(S^3)) \cong \pi_1(SO(3)) \cong K \cong \mathbb{Z}_2.$$

A generáló osztály is kiolvasható a fedőtér tulajdonságaiból, a K elemei miatt, egy reprezentáns pályának szimmetrikusnak kell lennie a $-Id_{S^3}$ homeomorfizmusra, egy ilyen zárt pálya például egy főkör, aminek képe $SO(3)$ -ban

$$\varrho(\sin \pi(2t - 1) + \cos \pi(2t - 1)t)$$

egy adott t tengely körüli forgatásokból álló pálya, ami az összeset pontosan egyszer tartalmazza.

2.16. Megjegyzés. A fedőterek használatával könnyen belátható továbbá, hogy $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$ minden $n > 1$ esetén.

2.5. Egy szemléletes magyarázat

Most már több módon is megbizonyosodtunk róla, hogy $SO(3)$ fundamentális csoportja $\mathbb{Z}_2$ -vel izomorf, de ezeknél lehet jobb képet ad a következő magyarázat, aminek tisztává tétele viszont nagyon nehéz lenne, ezért csak nagy vonalakban ismertetjük a gondolatmenetet.

Tekintsük a B^3 3 dimenziós teli gömböt, aminek határán megfeleltetjük az ellentétes pontokat, amiről korábban láttuk, hogy homeomorf a projektív térrel. Ezen a téren vizsgáljuk a zárt pályákat.

Amiért a szimpliciális komplexusok élcsoportjaival is elegendő volt számolnunk, elég véges sok szakaszból álló pályákkal, ezért nem fogunk egzotikus pályákra gondolni a magyarázat alatt.

Nyilván ha egy pálya egészében a nyílt teli gömbben fut, akkor egy pontra összehúzható, így minden két pont közti ilyen pálya ekvivalens az őket összekötő egyenessel. Ha adott egy zárt pálya, ami részben a nyílt egységgömbben fut, ezen szakaszok a gömbfelszínen való végpontokat összekötő egyenessel ekvivalensek, amik folytonosan ráképezhetők a rajtuk áthaladó felszíni főkörre. Csak olyan pályákkal foglalkozunk amik véges sok ilyen szakaszból állnak, ezért elegendő csak az egészükben felszínen futó pályákkal foglalkoznunk.



Tekintsünk egy főkört a felszínen, ekkor ha egy pálya egészében a főkör által határolt egyik nyílt félgömbre esik, akkor pontra összehúzható, hiszen S^3 egyszeresen összefüggő, ezért azok a pályák érdekesek, amik belemetszenek minden főkörbe. A

belső pályákhoz hasonlóan, ha kiválasztunk egy fix főkört a felszínen, azon kívül eső pályaszakasz beképezhető a két végpontját összekötő főkör szakaszba.

Tehát az egészükben a főkörre eső pályákkal kell foglalkoznunk. Ezek közül ha az alapponthoz arról ér vissza a pálya, amelyik irányból elindult, akkor a pályán alkalmazva olyan folytonos leképezés sorozatot, ami az érkezési irányba összehúzza a pályát, azok mutatják, hogy a pálya pontra összehúzható.



Ha a tekintett pálya a másik oldalról ér az alappontra, akkor tekintsük az egyirányú szakaszokat, ezek páratlan sokan vannak, így az utolsótól eltekintve állítsuk párokba az egymást követőket. Minden ilyen pár egyenként, mint nem feltétlen zárt pálya nyilván ekvivalens a pár két végpontját összekötő szakasszal. Ezt a műveletet alkalmazva minden párra, kapunk egy új pályát, ami szintén folytonos, és legfeljebb fele annyi egyirányú szakaszból áll, mint az eredeti, az utolsótól eltekintve. Mivel véges sok ilyen szakaszból áll az eredeti pálya, ezen lépésekkel eljutunk egy olyan szakaszba ami egyetlen szakaszból áll.

Az ilyen pályák úgy néznek ki, hogy n -szer tesz meg egy félkört a főkörön. Tekintsük az utolsó ilyen félkört, és a végpontokat helyben hagyva forgassuk át a félgömb mentén, ezzel kapunk egy ellentétes irányú szakaszt, amitől az előző módon megszabadulhatunk, és így a maradék pálya $n - 2$ félkört tesz meg, tehát ennek ismételt alkalmazásával eljutunk vagy egy konstans pályába, vagy abba a zárt pályába ami egyszer megy végig a félkörön.

Az utóbbi homotópia osztálya nem egyezik meg az identitással, minden másik osztályba tartozó pálya csak olyannal ekvivalens, amely páros sokszor megy végig a félkörön. Ez a gondolatmenet segíthet elképzelni, miért is $SO(3) \cong \mathbb{Z}_2$.

3. Az izometriák fundamentális csoportja

A forgatások topológiájának ismeretében meg tudjuk határozni az térizometriákat is.

Felidézzük, hogy $\Phi = O(3) \times \mathbb{R}^3$, ami nem összefüggő, hiszen $O(3)$ sem az, viszont a tér mindkét komponense topologikusan ekvivalensek.

$\pi_1(\mathbb{R}^3)$ a triviális csoport, ezért ha

$$\Phi^+ = SO(3) \times \mathbb{R}^3, \Phi^- = O^-(3) \times \mathbb{R}^3$$

az összefüggő komponensek, akkor

$$\pi_1(\Phi^+) \cong \pi_1(\Phi^-) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Ez a tény miatt tehát tudjuk, hogy ha térben valamit egyszer körbeforgatunk egy adott tengely körül, ezt a folyamatot mint idő függvénye, nem lehet folytonosan úgy változtatni, hogy az a helyben hagyással egyezzen meg, ahhoz páros sokszor kell körülfordatni.

Hivatkozások

- [1] Marcel Berger: *Geometry I*. Springer, 1987
- [2] Szabó Zoltán: *Bevezető fejezetek a geometriába*. JATE, Szeged, 1982
- [3] M. A. Armstrong: *Basic Topology*. Springer, 1983

Nyilatkozat

Alulírott Bezdány Dániel kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

2018. május 18.

Bezdány Dániel