

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR

BOLYAI INTÉZET
GEOMERIA TANSZÉK

Konvex testekkel való elhelyezések és fedések sűrűségének tulajdonságai

Borzási Henrietta
Matematika BSc hallgató

Témavezető:
Dr. Fodor Ferenc
egyetemi docens

SZEGED, 2017

Tartalomjegyzék

1. Tartalmi összefoglaló	2
2. A sűrűség fogalom bevezetése és néhány alaptulajdonsága	3
2.1. Jelölések és definíciók	3
2.2. Legsűrűbb pakolás, és legritkább fedés létezése: Groemer bizonyítása .	9
3. Gömbelhelyezések	15

1. fejezet

Tartalmi összefoglaló

Szakdolgozatom témája a diszkrét geometria témakörébe tartozik, ezen belül a fedések és elhelyezések elméletébe. Ennek a témának erős magyar iskolája van. A terület neves alapító nagyjai közé tartozik például Fejes Tóth László, akitől a téma sok alapvető tétele és módszere származik. A dolgozat aktuális motivációját az a nevezetes esemény adta, hogy M. Viazovska 2016-ban bebizonyította, hogy a nyolc dimenziós euklideszi térben a legsűrűbb egységgömbelhelyezés sűrűsége megegyezik az ún. E_8 rács által generált rácsszerű elhelyezés sűrűségével. Röviddel Viazovska bejelentése után, Cohn, Kumar, Miller, Radchenko és Viazovska (2016) kiterjesztették a módszert a 24-dimenziós térre és megmutatták, hogy ott a nevezetes Leech rács adja a legsűrűbb gömbelhelyezést.

Ebben a dolgozatban először bevezetjük az elrendezés, elhelyezés és fedés fogalmakat, majd definiáljuk a sűrűséget korlátos és nem korlátos tartomány esetén. Ezután megvizsgálunk néhány alapvető tulajdonságot, amelyek közül a legfontosabb, hogy konvex test egybevágó példányaiból álló legsűrűbb elhelyezés, illetve legritkébb fedés mindig létezik. Erre az állításra Groemer [Gro86] 1986-os cikkben megjelent bizonyításának egy némileg egyszerűsített változatát ismertetjük. Végül az utolsó fejezetben egy kis történeti áttekintés után bemutatjuk az E_8 rács néhány egyszerű tulajdonságát és kiszámoljuk az általa meghatározott sűrűséget. A Viazovska-féle bizonyítás részleteit ebben a dolgozatban nem tárgyaljuk, mivel az meghaladná a dolgozatnak a kereteit.

2. fejezet

A sűrűség fogalom bevezetése és néhány alaptulajdonsága

2.1. Jelölések és definíciók

Az $\mathbb{R}^n$ n -dimenziós euklideszi térben egy halmazt konvex testnek nevezünk, ha kompakt, és belseje nem üres.

Legyen K egy konvex test az n -dimenziós euklideszi térben. A K egybevágó példányainak egy $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots\}$ megszámlálható családját, amelyre teljesül, hogy tetszőleges kompakt halmaz a család legfeljebb véges sok elemét metszi *elrendezésnek* nevezzük.

Alakzatot olyan $\mathbb{R}^n$ -beli halmazt értünk, amely homeomorf az n -dimenziós egység-gömbbel és amely Jordan-mérhető.

Az elrendezés fogalmának léteznek általánosabb változatai is. Például egy konkrét rögzített K konvex test helyett használhatunk többféle testet is, vagy akár mindegyik lehet páronként különböző. Sőt, az elrendezésben szereplő alakzatoknak nem kell feltétlenül konvexnek lenniük ahhoz, hogy a sűrűség fogalmát definiálhassuk.

Speciálisan, mi ebben a dolgozatban feltesszük, hogy a K_i halmazok $\mathbb{R}^n$ -beli konvex testek, illetve azt is, hogy a K_i -k mind egybevágóak egy rögzített K konvex testtel.

Az elrendezések között kiemelkedően fontos szerepet játszanak az ún. *elhelyezések* és *fedések*, amelyeket az alábbi módon definiálunk.

2.1.1. Definíció. A fenti jelölések értelmében azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ a K konvex test egybevágó példányainak egy *elhelyezése* (*pakolása*), ha $\text{int}K_i \cap \text{int}K_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ pozitív egész szám esetén, ahol $\text{int}K_i$ a K_i konvex test belsejét jelöli, továbbá K_i -k egybevágóak K -val.

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ zárt tartomány vagy a teljes $\mathbb{R}^n$ tér.

2.1.2. Definíció. Legyen a $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots\}$ konvex testek egy családja $\mathbb{R}^n$ -ben, amelyre $\bigcup_i K_i \supseteq D$. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ a D egy *fedése*. Speciálisan, ha minden K_i egybevágó egy K konvex testtel, akkor $\mathcal{K}$ a D tartomány K egybevágó példányaival való fedése. Ha $D = \mathbb{R}^n$, akkor az n -dimenziós tér fedéséről beszélünk.

Most bevezetjük a dolgozat legfontosabb fogalmát, a *sűrűséget*. Ez egyszerű abban az esetben, ha egy D zárt, korlátos tartományra definiáljuk, de lényegesen bonyolultabb abban az esetben, ha a teljes $\mathbb{R}^n$ teret tekintjük. Megjegyezzük, hogy ebben a dolgozatban felhasználjuk G. Fejes Tóth - W. Kuperberg [FTK93] áttekintő cikkét, amelyben részletes bevezetés található a fedések és elhelyezések elméletébe.

A továbbiakban jelölje V a térfogatot $\mathbb{R}^n$ -ben.

2.1.3. Definíció. Legyen D egy zárt, korlátos tartomány $\mathbb{R}^n$ -ben, és legyen $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots\}$ egy elrendezés. A $\mathcal{K}$ elrendezés D tartományra vonatkozó $\delta(\mathcal{K}, D)$ *sűrűségét* a következő módon definiáljuk

$$\delta(\mathcal{K}, D) := \frac{\sum_i V(K_i \cap D)}{V(D)}.$$

Jól látható, hogy a $\delta(\mathcal{K}, D)$ jóldefiniált az elrendezés tulajdonságai alapján, ugyanis $V(K_i \cap D)$ nemnulla csak véges sok esetben lesz.

Vezessük be a sűrűség következő változatait.

2.1.4. Definíció. Tekintsük a $\mathcal{K}$ elrendezést. Ekkor a $\mathcal{K}$ elrendezés D tartományra vonatkozó *belső/külső sűrűségét* a következő módon definiáljuk:

$$\delta_-(\mathcal{K}, D) := \frac{\sum_{K_i \subset D} V(K_i)}{V(D)},$$

$$\delta_+(\mathcal{K}, D) := \frac{\sum_{K_i \cap D \neq \emptyset} V(K_i)}{V(D)}.$$

Itt is megjegyezzük, hogy az elrendezés tulajdonságai garantálják, hogy a fenti definíciók értelmesek, azaz a $\mathcal{K}$ elrendezés D -re vonatkozó *belső/külső sűrűsége* létezik.

Most definiálni fogjuk a sűrűséget az egész $\mathbb{R}^n$ térre. Ehhez először lerögzítünk egy D korlátos, zárt tartományt, és még rögzítünk egy o pontot a D belsejében. A D tartomány az o ponttal együtt a "mérőeszköz" szerepét játssza. Gondolhatunk rá úgy is, hogy ez egy "ablak", amelyen keresztül szemléljük a $\mathcal{K}$ elrendezést.

Tetszőleges $\lambda \geq 0$ valós szám és $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz esetén, legyen a

$$\lambda H := \{\lambda h : h \in H\}$$

halmaz. Ez azt jelenti, hogy a λH -t úgy kapjuk a H halmazból, hogy arra az o pontból egy λ arányú középpontos hasonlóságot alkalmazunk.

2.1.5. Definíció. A $\mathcal{K}$ elrendezés (teljes $\mathbb{R}^n$ térre vonatkozó) *alsó sűrűségét* a *belső sűrűségek limesz inferiorjaként*, a *felső sűrűségét*, a *külső sűrűségek limesz superiorjaként* definiáljuk, azaz

$$\underline{\delta}(\mathcal{K}, D, o) = \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \delta_-(\mathcal{K}, \lambda D)$$

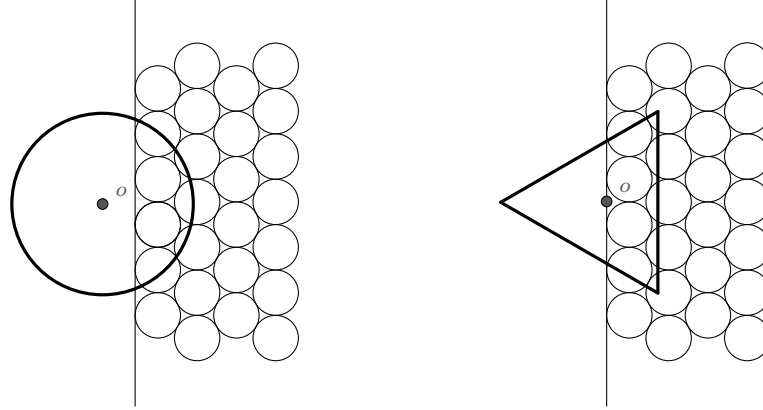
$$\overline{\delta}(\mathcal{K}, D, o) = \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \delta_+(\mathcal{K}, \lambda D).$$

Ha $\underline{\delta}(\mathcal{K}, D, o) = \overline{\delta}(\mathcal{K}, D, o)$, akkor ezt az értéket a $\mathcal{K}$ elrendezés ($\mathbb{R}^n$ -beli) *sűrűségének* nevezzük, és $\delta(\mathcal{K}, D, o)$ -val jelöljük.

Ebben a dolgozatban azzal az egyszerűsítő feltevessel élünk, hogy a D tartomány konvex. Ez különben nem volna szükségszerű, de a gondolatmenetekben a technikai nehézségeket lényegesen redukálja. Az irodalomban jellemzően az n -dimenziós B^n egységgömb, vagy a C^n egységkocka játssza a D szerepét.

Természetesen felmerül a kérdés, vajon számít-e, hogy milyen "mérőeszközt", azaz D tartományt és o pontot használunk. A kérdésre a válasz igen, azaz nem túl nehéz olyan elhelyezést, és hozzá két különböző D tartományt találni, hogy a fenti módon számított sűrűségek különbözőek legyenek.

A következő példa ezt jól szemlélteti. Vegyünk egy félsíkot, és az egyik felére pakoljunk egység sugarú egybevágó köröket a lehető legsűrűbben. A. Thue bebizonyította, hogy a legsűrűbb pakolást a szabályos hatszögrácson való elhelyezés adja, vagyis esetünkben ez a következőképp teljesül: az első körlemez úgy tegyük le, hogy érintse a síkot felező egyenest, a következőt oly módon, hogy érintse az egyenest, és a korábban lerakott körlemez is, és így tovább. A többi sort aszerint kapjuk, hogy minden körlemez az előző sor két elemét érintse (lásd 2.1 ábra). Ezt követően a választott mérőeszközt úgy helyezzük el, hogy a síkot felező egyenes metssze azt (áthaladjon rajta), továbbá lerögzítjük az origót is. Később be fogjuk látni, hogy ezt tetszőlegesen megtehetjük (lásd 2.1.1 tétel).



2.1. ábra.

Tudjuk, hogy a legsűrűbb körelhelyezés sűrűsége $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$, ezért a sűrűségek értéke rendre: $\frac{\pi}{2\sqrt{12}}$; $\frac{5\pi}{9\sqrt{12}}$.

Ennek értelmében látható, hogy ugyanannak az elrendezésnek a sűrűségére kaphatunk különböző értékeket, ha különböző D tartományt használunk.

Az alábbiakban megmutatjuk az alsó/felső sűrűség eltolástól való függetlenségét abban az esetben, ha $D = B^n$, o a gömb középpontja és amikor a $\mathcal{K}$ elrendezés egy rögzített K konvex test egybevágó példányaiból áll. A tétel bizonyítása után utalunk arra, hogy a gondolatmenetet hogyan lehet kiterjeszteni arra az esetre, amikor a D mérőablak tetszőleges konvex test (nem feltétlenül gömb vagy kocka), illetve amikor az elrendezés elemei nem egybevágók, de átmérőjük korlátos. Az alábbi bizonyítás síkbeli változatának rövid leírása megtalálható pl. Fejes Tóth László [FT64] könyvének 161-162. oldalán. Mi lényegében ezt a bizonyítást ismertetjük az n -dimenziós esetben.

2.1.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{K}$ a $K \subset \mathbb{R}^n$ rögzített konvex test egybevágó példányaiból egy tetszőleges elrendezése, ekkor a $\mathcal{K}$ elrendezés B^n -re vonatkozó alsó és felső sűrűsége független a gömb középpontjának választásától.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a sűrűség függ az o pont választásától, ezért vizsgáljuk a külön-külön az alsó és felső sűrűséget o_1 -ből és o_2 -ből nézve. Tehát adott egy $\mathcal{K}$ elrendezés, és egy D tartomány, amely a mérőeszköz szerepét tölti be (mi most az r sugarú n -dimenziós gömböt választjuk), továbbá legyen az $o_1 \neq o_2$ két pont.

Jól ismert, hogy az n -dimenziós o középpontú B^n egységgömb térfogata:

$$\kappa_n = V(B^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)},$$

ahol $\Gamma(x)$, $x > 0$ az Euler-féle gamma függvény, lásd pl. [FT64] 129–130. oldal. Jelölje rB^n az o középpontú, r sugarú n -dimenziós gömböt. Ennek térfogata:

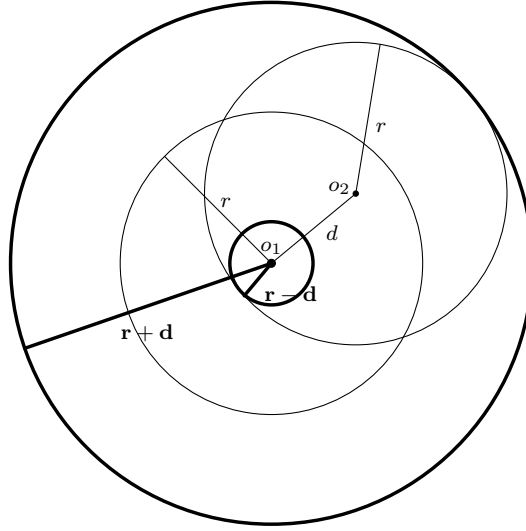
$$V_n(rB^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} r^n = \kappa_n r^n.$$

Ekkor a fenti jelölések, és a 2.1.5 definíció alapján írjuk fel először az alsó sűrűséget az o_1 és az o_2 középpontú gömbökre vonatkozóan:

$$\underline{\delta}(\mathcal{K}, B^n + o_1) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa_n r^n} \sum_{K_i \subset rB^n + o_1} V(K_i), \text{ és}$$

$$\underline{\delta}(\mathcal{K}, B^n + o_2) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa_n r^n} \sum_{K_i \subset rB^n + o_2} V(K_i).$$

Legyen $d = |o_1 o_2|$, ahol $|\cdot|$ az euklideszi távolságot jelöli. Becsüljük alulról és felülről is az o_2 középpontú r sugarú n -dimenziós gömbben vett elrendezés sűrűségét egy $r - d$ illetve egy $r + d$ sugarú gömbbel (lásd 2.2 ábra).



2.2. ábra.

Ha $K_i \subset rB^n + o_2$, akkor $K_i \subset (r + d)B^n + o_1$, hiszen úgy van megkonstruálva a $(r + d)B^n + o_1$ gömb, hogy a $rB^n + o_2$ gömb teljesen benne van az $(r + d)B^n + o_1$ gömbben. Tehát

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa_n r^n} \sum_{K_i \subset rB^n + o_2} V(K_i) &\leq \frac{1}{\kappa_n r^n} \sum_{K_i \subset (r+d)B^n + o_1} V(K_i) \\ &= \frac{1}{\kappa_n (r+d)^n} \left(1 + \frac{d}{r}\right)^n \sum_{K_i \subset (r+d)B^n + o_1} V(K_i). \end{aligned}$$

Hasonló összefüggés teljesül az alsó becslés esetében is, így ha $K_i \subset (r - d)B^n + o_1$, akkor $K_i \subset rB^n + o_2$, tehát

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\kappa_n r^n} \sum_{K_i \subset rB^n + o_2} V(K_i) &\geq \frac{1}{\kappa_n r^n} \sum_{K_i \subset (r-d)B^n + o_1} V(K_i) \\
&= \frac{1}{\kappa_n (r-d)^n} \left(1 - \frac{d}{r}\right)^n \sum_{K_i \subset (r-d)B^n + o_1} V(K_i).
\end{aligned}$$

Ezen becslések alapján az alsó sűrűségeket úgy kapjuk, hogy vesszük mindegyik érték liminf-jét:

$$\begin{aligned}
&\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa_n (r-d)^n} \left(1 - \frac{d}{r}\right)^n \sum_{K_i \subset (r-d)B^n + o_1} V(K_i) \\
&\leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa_n r^n} \sum_{K_i \subset rB^n + o_2} V(K_i) \\
&\leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa_n (r+d)^n} \left(1 + \frac{d}{r}\right)^n \sum_{K_i \subset (r+d)B^n + o_1} V(K_i),
\end{aligned}$$

amelyből a rendőr-elv segítségével következik, hogy $\underline{\delta}(\mathcal{K}, B^n + o_2)$ alsó sűrűség megegyezik $\underline{\delta}(\mathcal{K}, B^n + o_1)$ -el.

Felső sűrűségre teljesen hasonlóan történik a bizonyítás, így ennek köszönhetően beláttuk, hogy az alsó és felső sűrűség független az origó választásától.

□

A bizonyításban feltettük, hogy a D tartomány egy r sugarú n -dimenziós gömb, de a tétel teljesül tetszőleges konvex mérőeszköz esetén is. Ennek igazolásában többek között a D és K konvex testek Minkowski összegét és annak térfogatára vonatkozó formulát kellene használni, de ebben a dolgozatban nem célunk ezt belátni.

Legyen K egy rögzített konvex test. Ekkor K *elhelyezési (pakolási) sűrűségén* a következő mennyiséget értjük:

$$\delta(K) := \sup \bar{\delta}(\mathcal{K}, D, o),$$

ahol a szuprémumot a K egybevágó példányaiból álló összes elhelyezésre valamint az összes lehetséges D tartományra és o pontra értjük. Hasonló módon definiálható a K *fedési sűrűsége*, amely

$$\theta(K) := \inf \underline{\delta}(\mathcal{K}, D, o),$$

ahol az infimumot a K egybevágó példányaiból álló összes fedésre valamint az összes lehetséges D tartományra és o pontra értjük.

Ebben a dolgozatban azzal a feltevéssel fogunk élni, hogy $D = B^n$ és o a gömb középpontja. Ismert, hogy ez nem jelent érdemi megszorítást. Megjegyezzük, hogy a továbbiakban a $\delta(\mathcal{K})$ jelölést, a $\mathcal{K}$ elrendezés B^n -nel mért sűrűségének jelölésére fogjuk használni, ha az létezik, míg a $\delta(K)$, a K test elhelyezési sűrűségét jelöli.

A következő tételben be fogjuk látni azt a két, talán nyilvánvalónak látszó ténnyt, hogy $\delta(K) \leq 1$, és $\theta(K) \geq 1$. A [Rog64] könyv 23-24. oldalán megtalálható a bizonyítás eltolásokkal való pakolásra vonatkozó változata, amikor a mérőeszköz kocka, viszont mi most általánosságban bebizonyítjuk, azzal a különbséggel, hogy az n -dimenziós gömböt használjuk mérőeszközként.

2.1.2. Tétel. Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex test. Ekkor

i) $\delta(K) \leq 1$, és

ii) $\theta(K) \geq 1$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots\}$ a K egybevágó példányainak egy tetszőleges elhelyezése (pakolása), valamint legyen $R(K)$ a K test körülírt gömbjének sugara. Írjuk fel a $\mathcal{K}$ -k elhelyezés r sugarú n -dimenziós gömbre vonatkozó külső sűrűségét. Ezután becsüljük felülről ezt az értéket úgy, hogy az $r + 2R(K)$ sugarú gömbben teljesen benne levő K_i -ket vesszük (vagyis "kilógó darabokat" is beleszámoljuk), míg a tartomány térfogata (azaz amivel osztunk), továbbra is az r sugarú gömb. A második lépésben végezzünk el még egy felső becslést, mégpedig úgy, hogy az $r + 2R(K)$ sugarú gömbben levő K_i -k helyett vegyünk magát az $r + 2R(K)$ sugarú gömböt (az alap tartomány továbbra is az r sugarú gömb). κ_n -nel egyszerűsítve, és átrendezve a kifejezést, ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n \kappa_n} \sum_{K_i \cap rB^n \neq \emptyset} V(K_i) &\leq \frac{1}{r^n \kappa_n} \sum_{K_i \subset (r+2R(K))B^n} V(K_i) \\ &\leq \frac{1}{r^n \kappa_n} (r + 2R(K))^n \kappa_n = \left(1 + \frac{2R(K)}{r}\right)^n. \end{aligned}$$

Mindkét oldalnak véve a limsup-ját ($r \rightarrow \infty$ mellett), láthatjuk, hogy $\delta(K) \leq 1$. Ezzel beláttuk a állítás i) pontját.

Az ii) pontot hasonlóképpen bizonyítjuk. Legyen most $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots\}$ az $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges fedése a K egybevágó példányaival. Mivel fedésről van szó, ezért alsó becslést kell adnunk a K_i -k által meghatározott fedés belső sűrűségre. Az első becslésnél vegyünk az $r - 2R(K)$ sugarú gömbben levő K_i -k alkotta fedés külső sűrűségét, majd a második becslésnél az $r - 2R(K)$ sugarú gömbbel becsüljük alulról a fedési sűrűséget, és az i) pont bizonyításánál látott módon alakítsuk át a kifejezést:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n \kappa_n} \sum_{K_i \subset rB^n} V(K_i) &\geq \frac{1}{r^n \kappa_n} \sum_{K_i \cap (r-2R(K))B^n \neq \emptyset} V(K_i) \\ &\geq \frac{1}{r^n \kappa_n} (r - 2R(K))^n \kappa_n = \left(1 - \frac{2R(K)}{r}\right)^n. \end{aligned}$$

Itt most mindkét oldal liminf-jét véve ($r \rightarrow \infty$), kapjuk, hogy $\theta(K) \geq 1$, tehát igaz az ii) állítás. □

2.1.1. Következmény. Adott $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex test. Ekkor

$$\delta(K) \leq 1 \leq \theta(K).$$

Megjegyezzük, hogy $\delta(K) = 1 = \theta(K)$ pontosan akkor, ha K *parketta*, azaz a K egybevágó példányaival a tér le is fedhető úgy, hogy a fedés egyrétű, azaz a fedés semelyik két elemének nincs közös belső pontja. Ezt az állítást Schmidt [Sch61] bizonyította; a bizonyítás egy rövid áttekintése megtalálható pl. Fejes Tóth és Kuperberg [FTK93] áttekintő cikkének 805-806. oldalán.

Az alsó és felső sűrűség, illetve a K test pakolási és fedési sűrűsége módosítható arra az esetre is, ha

- a) csak eltoltakat használunk (ezt transzlatív pakolásnak/fedésnek nevezzük), a transzlatív pakolási sűrűséget $\delta_T(K)$ -val, a fedési sűrűséget $\theta_T(K)$ -val jelöljük;
- b) csak rácsvektorokkal való eltolásokat használunk (ezt rácsszerű pakolásnak/fedésnek nevezzük), és $\delta_L(K)$ -val, illetve $\theta_L(K)$ -val jelöljük az ún. rácsszerű pakolási és fedési sűrűséget, ahol L a rácsra utal.

2.1.2. Következmény.

$$\delta_L(K) \leq \delta_T(K) \leq \delta(K) \leq 1 \leq \theta(K) \leq \theta_T(K) \leq \theta_L(K).$$

2.2. Legsűrűbb pakolás, és legritkább fedés létezése: Groemer bizonyítása

Ebben a fejezetben ismertetjük Groemer [Gro86] 1986-os egzisztencia tételének (lásd Existence Theorem, [Gro86] 186. oldal) egy olyan egyszerűsített változatát, amelyben megmutatjuk, hogy tetszőleges K konvex test esetén létezik a K egybevágó példányai-ból álló pakolás (fedés), amelynek felső (alsó) sűrűsége éppen $\delta(K)$ ($\theta(K)$). Valójában Groemer már korábbi német nyelvű cikkében [Gro63] igazolta ezt az állítást, illetve speciálisabb esetekben már ezt mások is megmutatták; további hivatkozásokért lásd például [FTK93]. A [Gro86]-beli tétel ennél lényegesen általánosabb, viszont tekintet-tel arra, hogy angol nyelven íródott, számunkra hozzáférhetőbb.

Most éljünk azzal az egyszerűsítő feltevéssel, hogy a K konvex test pakolási és fedési sűrűségét a B^n gömbbel mérjük és ezt a tételben is értsük így. A tétel bizonyítását is ennek megfelelően végezzük el, azonban a gondolatmenetből látszik, hogy valójában a gömb helyett más konvex test is használható.

2.2.1. Tétel. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex test. Ekkor létezik a K egybevágó példányainak olyan $\mathcal{K}$ elhelyezése, illetve az $\mathbb{R}^n$ tér K egybevágó példányai-val való olyan $\mathcal{K}'$ fedése, amelyre $\delta(\mathcal{K}) = \delta(K)$, illetve $\theta(\mathcal{K}') = \theta(K)$.*

Bizonyítás. A bizonyításban az elhelyezés esetére koncentrálnunk, de a gondolatmenet végén megmutatjuk, hogy mit kell módosítani, hogy az állítás fedésre vonatkozó részét is igazoljuk.

A bizonyításhoz kockákat fogunk használni. Legyen $s > 0$. Ekkor jelölje C_s az origó középpontú s oldalhosszúságú n -dimenziós kockát, amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, azaz

$$C_s := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : -s/2 \leq x_i \leq s/2, i = 1, \dots, n\}.$$

Szükségünk lesz még az egységkockarácsra, azaz $\mathbb{Z}^n$ -re, ahol

$$\mathbb{Z}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n\}.$$

Tetszőleges $s > 0$ esetén $s\mathbb{Z}^n$ fogja jelölni azt a kockarácsot, amelyet a $\mathbb{Z}^n$ -ből úgy kapunk, hogy azt az origóból s faktossal skálázzuk.

Legyen $C_s + s\mathbb{Z}^n$ azoknak a $C_s + z$ kockáknak a halmaza, amelyekre $z \in s\mathbb{Z}^n$. Ekkor $C_s + s\mathbb{Z}^n$ egy parkettázását adja a térnek.

Most definiáljuk az s_m és t_m ($m = 1, 2, \dots$) mennyiségeket:

$$s_m := 2^m,$$

$$t_m := 2^{m^2}.$$

Tekinteni fogjuk origó középpontú gömbök egy (elegendően gyorsan) növekvő sorozatát, melyek sugarai rendre $t_0, t_1, \dots$, azaz

$$B_{t_0} \subset B_{t_1} \subset B_{t_2} \subset \dots.$$

A következőkben vegyük azokat a kockákat a $C_{s_m} + s_m\mathbb{Z}^n$ parkettázásból, amelyek teljesen benne vannak a $B_{t_m} \setminus \text{int}B_{t_{m-1}}$ félig zárt, félig nyitott gömbgyűrűben (az int szimbólum egy halmaz belsejét jelöli). Jelöljük ezeket (valamilyen sorrendben) $Q_1^m, \dots, Q_{k_m}^m$ -el.

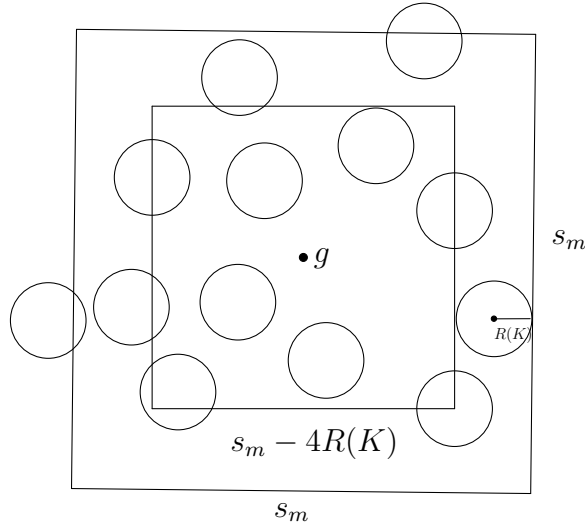
A bizonyítás lényege annak megmutatása, hogy minden Q_i^m esetén létezik K egybevágó példányainak olyan $K_{i,1}^m, K_{i,2}^m, \dots$ családja, amelyre teljesülnek a következők:

- i) $K_{i,j}^m \in Q_i^m$ minden j -re,
- ii) $\text{int}K_{i,j}^m \cap \text{int}K_{i,j'}^m = \emptyset$ ha $j \neq j'$ (azaz a $K_{i,j}^m$ -ek pakolást alkotnak Q_i^m -ben),
- iii) a $K_{i,j}^m$ testek Q_i^m -beli sűrűsége elegendően közel van $\delta(K)$ -hoz, azaz

$$\delta(\{K_{i,j}^m\}, Q_i^m) = \frac{1}{s_m^n} \sum_j V(K_{i,j}^m) \geq \left(\frac{s_m - 4R(K)}{s_m} \right)^n \left(\delta(K) - \frac{1}{m} \right) =: h_m,$$

ahol $R(K)$ a K körülírt gömbjének sugarát jelöli.

Tetszőleges $m \geq 1$ pozitív egész esetén legyen $\mathcal{K}_m = \{K_m^1, K_m^2, \dots, K_m^l \dots\}$ a K egybevágó példányainak egy olyan pakolása, amelyre $\bar{\delta}(\mathcal{K}_m) = \bar{\delta}(\mathcal{K}_m, B^n) \geq \delta(K) - 1/(m+1)$. Ilyen biztosan létezik a $\delta(K)$ definíciója miatt.



2.3. ábra.

Tekintsük a $C_{s_m-4R(K)} + (s_m - 4R(K))\mathbb{Z}^n$ kockákat. Rögzített $\mathcal{K}_m$ esetén biztosan létezik legalább egy olyan $g \in (s_m - 4R(K))\mathbb{Z}^n$ középpontú kocka, melyre teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{(s_m - 4R(K))^n} \sum_l V(K_m^l \cap (C_{s_m-4R(K)} + g)) > \delta(K) - \frac{1}{m},$$

azaz a $\mathcal{K}_m$ pakolás $C_{s_m-4R(K)} + g$ tartományra vonatkozó sűrűsége nagyobb mint a K -val pakolási sűrűség mínusz $1/m$. Ilyen kockának léteznie kell, hiszen $\delta(K) - \frac{1}{m} < \delta(K) - \frac{1}{m+1} \leq \bar{\delta}(\mathcal{K}_m)$.

Ekkor az is igaz, hogy

$$\frac{1}{(s_m - 4R(K))^n} \sum_{K_m^l \subset C_{s_m}} V(K_m^l \cap (C_{s_m} + g)) > \delta(K) - \frac{1}{m}.$$

Ez abból adódik, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán a második tényezőt növeljük. Ehhez vegyük észre, hogy ha $K_m^l \cap (C_{s_m-4R(K)} + g) \neq \emptyset$, akkor $K_m^l \subset C_{s_m} + g$, tekintettel arra, hogy $R(K)$ a K körülírt gömbjének a sugara.

A következő lépésben vesszük a $\mathcal{K}_m$ elhelyezés azon elemeit, amelyek benne vannak a $C_{s_m} + g$ kockában, és ezek fogják alkotni azt a pakolást, amely kielégíti az i)-iii) feltételeket (a $\mathcal{K}_m$ pakolás ezen darabját mereven eltoljuk a Q_i^m kockába).

Tekintsük a K egybevágó példányainak egy olyan $\mathcal{K}$ elhelyezését a térben, amelyet úgy kapunk, hogy a fenti eljárás segítségével minden Q_i^m kockában konstruálunk egy, az i)-iii) feltételeket teljesítő pakolást.

Vegyük az összes Q_i^m kockát (minden m -re és i -re), és indexeljük őket k -val. A $\mathcal{K}$ pakolás k indexű kockában lévő elemeinek halmazát jelölje $\mathcal{K}_k$.

A következő lépésben be fogjuk látni, hogy

$$\underline{\delta}(\mathcal{K}) = \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{V(B_s)} \sum_k V(\mathcal{K}_k \cap B_s) \geq \delta(K). \quad (2.1)$$

Vegyük észre, hogy ha a fenti állítás igaz, akkor az azt jelenti, hogy

$$\underline{\delta}(\mathcal{K}, B^n) = \bar{\delta}(\mathcal{K}, B^n) = \delta(K),$$

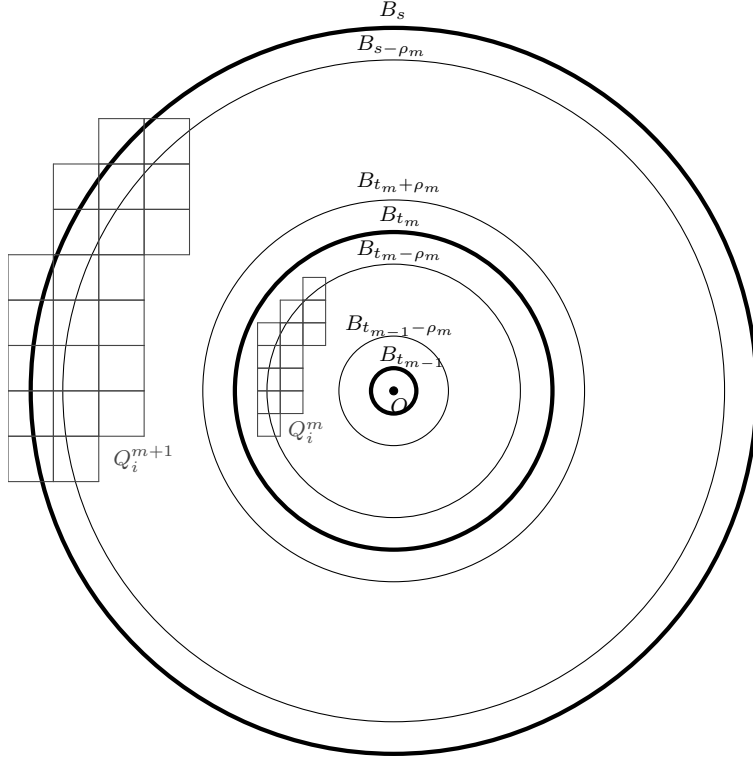
azaz a $\mathcal{K}$ -nak létezik sűrűsége, amely megegyezik a K test $\delta(K)$ elhelyezési sűrűségével. Tehát joggal nevezhetjük $\mathcal{K}$ -t a K egybevágó példányai egy legsűrűbb elhelyezésének.

Az $\{\mathcal{K}_k\}$ halmaz B_s -re vonatkozó sűrűségét felírhatjuk a "darabok" sűrűségének az összegeként, majd becsüljük ezt az értéket alulról a következőképp:

Adott $s > 1$ esetén legyen az $m = m(s)$ pozitív egész szám olyan, hogy $t_m < s \leq t_{m+1}$. A B_s gömböt három részre osztjuk: (az origóból kiindulva) a t_{m-1} sugarú gömbre, a $B_{t_m} \setminus B_{t_{m-1}}$ és a $B_s \setminus B_{t_m}$ gömbgyűrűkre, és ezekben a darabokban felírjuk az elhelyezés sűrűségét egyenként.

Az első lépésben külön-külön becsüljük alulról mindegyik "darabban" levő sűrűséget úgy, hogy az első darabot ($B_{t_{m-1}}$ -et) elhagyjuk (ezt megtehetjük, mivel m növekedésével a t_m nagyon gyorsan nő, így a t_{m-1} sugarú gömbben levő elhelyezés sűrűsége elhanyagolható lesz). A másik két rész esetében csak annyit tudunk, hogy a h_m , illetve a h_{m+1} biztosan nem nagyobb az $\mathcal{K}_k$ Q_i^m illetve Q_i^{m+1} -beli sűrűségénél, ezért az ezekkel való becslés helytálló.

Most becsüljük még egyszer alulról az előző két gömbgyűrűben levő sűrűséget. Tudjuk, hogy $h_m \leq h_{m+1}$, így a h_{m+1} helyett írjunk h_m -et, és emeljük ki a $h_m/V(B_s)$ -t. Jelölje az ρ_m az s_{m+1} oldalú n -dimenziós kocka átlójának hosszát, azaz $\rho_m = \sqrt{n}s_{m+1}$. Ekkor ha mindkét irányból ρ_m -mel csökkentett gömbgyűrűk térfogatát használjuk a kockáké helyett, akkor kisebb számokat kapunk, hiszen a kockák a kisebb gömbgyűrűket teljesen lefedik. Tehát most formulákkal leírva a fenti becsléseket kapjuk, hogy



2.4. ábra.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V(B_s)} \sum_k V(\mathcal{K}_k \cap B_s) &= \frac{1}{V(B_s)} \sum_k V(\mathcal{K}_k \cap B_{t_{m-1}}) \\
&+ \frac{1}{V(B_s)} \sum_k V(\mathcal{K}_k \cap (B_{t_m} \setminus B_{t_{m-1}})) \\
&+ \frac{1}{V(B_s)} \sum_k V(\mathcal{K}_k \cap (B_s \setminus B_{t_m})) \\
&\geq \frac{h_m}{V(B_s)} \sum_{Q_i^m \subset (B_{t_m} \setminus B_{t_{m-1}})} V(Q_i^m) \\
&+ \frac{h_{m+1}}{V(B_s)} \sum_{Q_i^{m+1} \subset (B_s \setminus B_{t_m})} V(Q_i^{m+1}) \\
&\geq \frac{h_m}{V(B_s)} (V(B_{t_m-\rho_m}) - V(B_{t_{m-1}+\rho_m})) \\
&+ V(B_{s-\rho_m}) - V(B_{t_m+\rho_m}) \\
&= h_m \left(1 - \frac{V(B_s) - V(B_{s-\rho_m})}{V(B_s)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{V(B_{t_m+\rho_m}) - V(B_{t_m-\rho_m})}{V(B_s)} - \frac{V(B_{t_{m-1}+\rho_m})}{V(B_s)} \right).
\end{aligned}$$

Mivel t_m és ρ_m is m -től függ, m pedig s -től, így az utolsó formulában mindhárom tört 0-hoz tart, ha $s \rightarrow \infty$. Tehát láthatjuk, hogy az egyenlőtlenség jobb oldala a

K -val való pakolási sűrűséghez tart, mivel korábban már láttuk, hogy $h_m \rightarrow \delta(K)$. Ezzel beláttuk a 2.1 állítást.

A $\delta(K)$ definíciójából tudjuk, hogy

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{V(B_s)} \sum_k V(\mathcal{K}_k \cap B_s) \leq \delta(K),$$

és most megmutattuk, hogy

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{V(B_s)} \sum_k V(\mathcal{K}_k \cap B_s) \geq \delta(K),$$

így a rendőrelvből következik, hogy $\delta(\mathcal{K}_k)$ létezik, és $\delta(\mathcal{K}_k) = \delta(K)$.

Ezzel az állítás elhelyezésekre vonatkozó részét beláttuk.

Némi változtatásokkal ez a bizonyítás átültethető fedésekre is:

Vegyünk az s_m oldalú Q_i^m kockákhoz tartozó $s_m + 4R(K)$ oldalú kockákat, ahol $R(K)$ a K körülírt gömbjének sugarát jelöli. Ahogyan az elhelyezés esetében már láttuk, minden Q_i^m -hez most is konstruálunk egy megfelelő sűrűségű fedést a következő feltételekkel:

- i) $Q_i^m \subset \cup_j K_{i,j}^m$, (tehát a $K_{i,j}^m$ testek a Q_i^m egy fedését adják)
- ii) A $K_{i,j}^m$ testek Q_i^m -beli sűrűsége elegendően közel van $\theta(K)$ -hoz, azaz

$$\theta(\{K_{i,j}^m\}, Q_i^m) = \frac{1}{s_m^n} \sum_j V(K_{i,j}^m) \geq \left(\frac{s_m + 4R(K)}{s_m} \right)^n \left(\theta(K) + \frac{1}{m} \right) =: h_m.$$

Megjegyezzük, hogy fedések esetén az elhelyezéseknél látott ii) feltételnek nincs értelme, ezért ezt elhagyjuk.

Az i) és ii) feltételeket kielégítő $\mathcal{K}$ fedésre felírható a 2.1 állítás analógja:

$$\bar{\delta}(\mathcal{K}) = \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{V(B_s)} \sum_k V(\mathcal{K}_k \cap B_s) \leq \theta(K), \quad (2.2)$$

ahol az $\mathcal{K}_k$ a $\mathcal{K}$ fedés k indexű kockát lefedő elemeinek halmazát, valamint a $\theta(K)$ a K test fedési sűrűségét jelöli.

Ha a fenti állítás igaz, akkor az azt jelenti, hogy

$$\bar{\delta}(\mathcal{K}, B^n) = \underline{\delta}(\mathcal{K}, B^n) = \theta(K),$$

tehát a $\mathcal{K}$ -nak létezik sűrűsége, amely megegyezik a K test $\theta(K)$ fedési sűrűségével. Tehát joggal nevezhetjük $\mathcal{K}$ -t a K egybevágó példányai egy legritkább fedésének.

A 2.2 állítás belátásához felső becsléseket adunk ugyanolyan gondolatmenettel, mint elhelyezések esetén. A leginkább említésre méltó különbséget a

$$\frac{1}{V(B_s)} \sum_k V(\mathcal{K}_k \cap B_{t_{m-1}})$$

felső becslésénél találjuk, hiszen ebben az esetben ez a tag nem hagyható el, hanem helyette ezt írjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V(B_s)} \sum_k V(\mathcal{K}_k \cap B_{t_{m-1}}) &\leq \frac{1}{V(B_s)} \sum_{Q_i^k \cap B_{t_{m-1}} \neq \emptyset} h_m V(Q_i^k) \\
&\leq \frac{h_0}{V(B_s)} V(B_{t_{m-1}+\rho_m})
\end{aligned}$$

A t_m -re és ρ_m -re vonatkozó feltételek továbbra is fennállnak, ezért ha $s \rightarrow \infty$ akkor a $V(B_{t_{m-1}+\rho_m})/V(B_s) \rightarrow 0$, és így ez az egész feltétel tart a 0-hoz. Tehát a többi tag felső becslése után láthatjuk, hogy az egyenlőtlenség jobb oldala a K -val való fedési sűrűséghez fog tartani (mivel itt most $h_m \rightarrow \theta(K)$). Ezáltal igaz lesz a 2.2 állítás. Vagyis $\theta(\mathcal{K}_k)$ létezik, és $\theta(\mathcal{K}_k) = \theta(K)$. □

Megjegyezzük, hogy a fenti gondolatmenet hasonlóan megy, ha a B^n gömb helyett egy tetszőleges D konvex testet használunk a sűrűség mérésére. Ez azt mutatja, hogy bár egy konkrét elhelyezés (fedés) sűrűségének mérésénél számít az, hogy milyen D tartománnyal mérjük azt, viszont abban az esetben, ha az elhelyezés (fedés) maximális (minimális) sűrűségű, akkor nem. Mivel a fedések és elhelyezések elméletében az egyik központi kérdés az, hogy mekkora egy konvex test elhelyezési (fedési) sűrűsége, ezért ki tudjuk használni a "mérőeszköz" választásának szabadságát.

3. fejezet

Gömbelhelyezések

Az első fejezetekben megvizsgáltuk a sűrűség fogalom néhány tulajdonságát, illetve kicsit megismerkedtünk az elrendezés (pakolás, fedés) fogalmakkal. Az olvasóban felmerülhet a kérdés, vajon mi értelme van ezekkel (magasabb dimenzióban is) foglalkozni. A kérdés régi, a válasz viszont annál újabb.

Először nézzük meg, hogy mi a helyzet két dimenzióban. A síkot lefedő legritkább körrendszer problémáját R. Kershner oldotta meg először 1939-ben. Bebizonyította, hogy a legritkább körrendszert a szabályos hatszögrácson való fedés adja, és ekkor ennek sűrűsége $(2\pi)/\sqrt{27} \approx 1.21$. A lesűrűbb körelhelyezés sűrűségét, amelynek értéke $\pi/\sqrt{12}$ (kb. 90.69%), A. Thue bizonyította be 1892-ben. Az állítás szerint a szabályos hatszögrácson elhelyezett körlemezek adják a sík legsűrűbb pakolását (azaz minden egyes körlemez 6 másik érint). Erre az állításra Fejes Tóth László adott egy másik bizonyítást, amelynek alapja az, hogy a kör köré írható legkisebb területű hatszög a szabályos hatszög (amelyekkel a sík teljesen lefedhető), azaz ha a pakolást alkotó körök Voronoi-cellái szabályos hatszögek, akkor az a legsűrűbb elhelyezést adja. (Egy pakolásban szereplő kör Voronoi-cellája azon pontok halmaza a síkban, amelyek az adott kör középpontjához közelebb vannak mint a többi kör középpontjához). Ez a gondolatmenet három dimenzióra azért nem ültethető át, mert egy egységsgömb pakolásban a minimális térfogatú Voronoi-cella a gömb köré írt szabályos dodekaéder, viszont szabályos dodekaéderekkel nem lehet teljesen kitölteni a teret.

A három dimenziós tér gömbökkel való optimális kitöltése már régóta foglalkoztatja az emberiséget, hiszen ezzel a kérdéssel a hétköznapi életben is találkozhatunk, például a zöldségesnél, ahol bizonyára mindenki megfigyelte, ahogyan gúlába pakolják a gyümölcsöket. Ez nem véletlen. A sejtés, miszerint egybevágó gömbökkel a legnagyobb sűrűségű térkitöltés a lapcentrált kockarácsba (gúlába) való pakolás, Kepler nevéhez fűződik (1611), bár ő valószínűleg ágyúgolyók elhelyezését vizsgálta, nem pedig gyümölcsökét. Az állítás szerint az így kapott gömbpakolás kb. 74%-át (pontosan $\pi/\sqrt{18}$ -ad részét) tölti ki a térnek, és nincs ennél nagyobb sűrűségű pakolás. Ellenben ebből az optimális sűrűségű elhelyezésből végtelen sok egymástól különböző létezik! Ez abból adódik, hogy a gömböket a következőképp pakoljuk: lerakjuk az első réteget, majd a következőt mindig úgy rakjuk rá az előzőre, hogy annak "mélyedéseibe" essenek a gömbök. Visszont ekkor minden egyes sor esetében két választásunk van, hiszen kétszer annyi mélyedés van, mint ahány gömb a következő rétegben, tehát egy "fél gömbnyi" eltolás a különbség a második réteg két elhelyezése között. Ekkor még nincs különbség a két elhelyezés között, viszont a harmadik sor lerakásánál, amikor az előzőhöz hasonlóan ismét két lehetőség közül választhatunk, az egyik esetben a harmadik réteg gömbjei éppen az első réteg fölé kerülnek, a másik esetben pedig az első réteg bizonyos mélyedései fölé. Természetesen minden réteg esetén megvan ez az egymástól

független választási lehetőségünk, ezáltal végtelen sok különböző elhelyezést generálva, amelyeknek sűrűsége pontosan $\pi/\sqrt{18}$. Viszont ezek között a különböző pakolások között kettő olyan van, amelyik rácsot alkot. Az egyik az, amikor mindig egy irányba toljuk el a sort. Az így kapott rácsot nevezzük lapcentrált kockarácsnak, melynek neve onnan származik, hogy ez a rács oly módon is előállítható, hogy a szokásos kockarácshoz hozzávesszük a lapközéppontjaikat is. A másik rácsot úgy kapjuk, hogy felváltva, az egyik lépésben egyik irányba, a másik lépésben a másik irányba végezzük el az eltolást. Bár Kepler sejtése egyszerűnek tűnik, a bizonyítás annál nehezebbnek bizonyult. Az első lényeges előrelépést 1831-ben Gauss érte el. Megmutatta, hogy a gömb rácsszerű pakolási sűrűsége (3-dimenzióban) megegyezik a lapcentrált kockarács által adottal. Bár ez kevesebb, mint a Kepler sejtés, mégis nagyon fontos eredmény volt. Az áttörést 1998-ban Thomas Hales amerikai matematikus érte el, amikor – részben Fejes Tóth László egy gondolata alapján – sikerült bebizonyítania a sejtést.

Tehát az első három dimenzióban vizsgált elhelyezések azt sugallják, hogy "rétegek" megfelelő, kellően szoros pakolásával/egymásba ágyazásával a dimenziók közötti áttérés kiindulási alapot ad a sűrűségek magasabb dimenziós vizsgálatához. De sajnos ez nem így van. A magasabb dimenziós gömbpakolásokról (a nyolc- és huszonnégy-dimenziós eseteket leszámítva) sokkal kevesebbet tudunk (pl. még olyan alapvető tulajdonságokat sem tudunk megjósolni, mint például az optimális pakolás periodicitása). Viszont egy egyszerű mohó algoritmussal megmutatható, hogy az $\mathbb{R}^n$ -ben vett optimális sűrűség legalább 2^{-n} . Ez az alábbi módon történik: vegyünk egy telített, egység sugarú n -dimenziós gömbökkel való elhelyezést, amelynek sűrűsége legyen $\delta^*(B^n)$. (Telített gömbelhelyezésen egy olyan elhelyezést értünk, melyre igaz, hogy nem tudunk még egy gömböt úgy lerakni, hogy az ne metsszen bele semelyik másik gömbbe.) Ekkor bármely két gömb középpontja közti távolság legalább 2. Ha a gömbök sugarát 2-szeresére nagyítjuk, akkor az n -dimenziós tér egy fedését kapjuk, azaz $2^n \delta^*(B^n) \geq 1$, vagyis $\delta(B^n) \geq 1/2^n$. Talán megdöbbenően hangzik, de ennél az alsó korlátnál lényegében csak egy lineáris faktorra tudunk jobbat mondani. Erről a témáról egy áttekintés található például az [FTK93] könyvben. Ami a sűrűség felső becslését illeti, az eddigi ismereteink szerinti legjobb aszimptotikus felső korlátot Kabatyanskii és Levenshtein adták meg 1978-ban. Ez az érték $2^{(-0.599\dots+o(1))n}$. Érdekes meggondolni, hogy $2^n/2^{0.599n} = 2^{0.401n}$, ami azt mutatja, hogy a két korlát közti különbség a dimenzió növekedésével exponenciálisan nő.

A következőkben betekintést nyújtunk a 8-dimenziós esetbe és nagyon röviden utalunk a 24-dimenziós esetre is. Maryna Viazovska rendkívül friss 2016-os eredményében megoldotta a nyolc dimenziós gömbpakolási problémát, azaz megmutatta, hogy a leg-sűrűbb gömbelhelyezés sűrűsége $\mathbb{R}^8$ -ban, megegyezik az E_8 rácson való elhelyezés által meghatározott pakolás sűrűségével. A bizonyítás lényege, hogy a 2003-ban Cohn és Elkies által leírt ún. lineáris programozási korlátot használta és élesítette ki. Ehhez szükség volt egy speciális feltételeket kielégítő függvényre, amelyet korábban már Cohn és Elkies számítógépes eljárások segítségével csak közelíteni tudott. Viazovska megtalálta ezt a függvényt, és ezáltal pontossá tudta tenni a lineáris programozási módszer által adott felső korlátot, ami 8-dimenzióban éppen az optimumot adja. Nem sokkal később Cohn, Kumar, Miller, Radchenko és Viazovska kiterjesztették ezt a gondolatmenetet és megoldották a 24-dimenziós esetet.

Most Cohn [Coh17] cikke alapján lássunk néhány alap gondolatot a nyolc dimenziós esetről. Először vezessük be az n -dimenziós (geometria) rács definícióját: legyenek $v_1, \dots, v_n$ lineárisan független vektorok. A

$$\Lambda = \Lambda(v_1, \dots, v_n) = \{m_1 v_1 + \dots + m_n v_n : m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}\}$$

(vektor-) halmazt a $v_1, \dots, v_n$ vektorok által meghatározott $\mathbb{R}^n$ -beli rácsnak nevezzük. Azt mondjuk, hogy a $(v_1, \dots, v_n)$ vektorrendszer egy bázisa a Λ rácsnak.

A $v_1, \dots, v_n$ által meghatározott

$$P = P(v_1, \dots, v_n) := \{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n : 0 \leq x_i < 1, i = 1, \dots, n\}$$

ún. paralelotópot a Λ rács $v_1, \dots, v_n$ bázishoz tartozó alapparalelotópjának nevezzük. Vegyük észre, hogy a fenti definícióban a paralelotóp "félig zárt, félig nyitott". Ennek az a következménye, hogy P -nek a Λ rácsvektorokkal való eltoltsai úgy fedik le az $\mathbb{R}^n$ teret, hogy semelyik pont nem tartozik két ilyen eltolthoz. Ismert, hogy egy rács két tetszőleges bázisához tartozó alapparalelotópjainak térfogata megegyezik, és ezt a térfogatot a Λ rács determinánsának nevezzük, és $|\det \Lambda|$ -val jelöljük.

Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy G additív részcsoportja diszkrét, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy az origó középpontú ε sugarú gömb nem tartalmazza az origón kívül más elemét G -nek. Ez lényegében azt jelenti, hogy G -nek nincs torlódási pontja.

A definícióból nyilvánvaló, hogy egy rács mindig diszkrét (additív) részcsoportja az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek. Megjegyezzük, hogy ennek az állításnak a fordítottja is igaz, pontosabban, ha G az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek olyan diszkrét additív részcsoportja, amely nincs benne semmilyen $(n-1)$ -dimenziós lineáris altérben, akkor G rács $\mathbb{R}^d$ -ben. Ennek a tételnek a bizonyítása megtalálható pl. a Gruber és Lekkerkerker által írt [GL87] könyv 18-19. oldalán.

Legyen $D_n \subset \mathbb{Z}^n$ a következő (lásd [Bar02] 281. oldal):

$$D_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z} \ i = 1, \dots, n, \text{ és } x_1 + \dots + x_n \text{ páros}\}.$$

Páros n esetén tekintsük a $D_n^+ = D_n \cup (D_n + v_0)$ halmazt, ahol a $v_0 = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$. Speciálisan, a D_8^+ az ún. E_8 rács, melyet Korkine és Zolotareff fedeztek fel 1873-ban.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy D_8^+ rács $\mathbb{R}^8$ -ban, ellenőrizni kell, hogy D_8^+ additív részcsoportja $\mathbb{R}^8$ -nak, nincs benne egy 7-dimenziós lineáris altérben, illetve, hogy diszkrét.

Az, hogy D_8^+ nincs benne egy 7-dimenziós altérben könnyen látható, mert tudunk benne 8 lineáris független vektor adni: pl. tekintsük $\mathbb{R}^8$ standard ortonormált bázisvektorainak kétszeresét.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy D_8^+ additív részcsoportja $\mathbb{R}^8$ -nak, meg kell mutatnunk, hogy zárt az összeadásra nézve, és hogy minden vektornak tartalmazza a mínusz egyszeresét is. Az első tulajdonság a következőképpen látszik. Legyen $v, w \in D_8^+$. Az alábbi esetek vannak:

- i) Ha $v, w \in D_8$ (tehát v és w minden koordinátája egész és a koordinátáik összege páros), akkor nyilvánvalóan $v + w \in D_8$.
- ii) Ha $v \in D_8$ és $w \in D_8 + v_0$, akkor létezik olyan $w' \in D_8$, hogy $w = w' + v_0$. Ekkor $v + w = v + w' + v_0 = z + v_0$, ahol $z = v + w' \in D_8$ az i) pont miatt. Tehát $v + w \in D_8 + v_0$.
- iii) Ha $v, w \in D_8 + v_0$, akkor létezik olyan $v', w' \in D_8$, hogy $v = v' + v_0$ és $w = w' + v_0$. Tehát $v + w = v' + v_0 + w' + v_0 = z' + 2v_0$, ahol $z' \in D_8$ az i) szerint, és $2v_0 = (1, \dots, 1) \in D_8$. Így $v + w = z' + 2v_0 \in D_8$.

A második tulajdonságot a következő módon ellenőrizzük. Legyen $v \in D_8^+$. Ekkor két eset lehetséges:

- i) Ha $v \in D_8$, akkor természetesen $-v \in D_8$, hiszen a (-1) -gyel való szorzás sem a rács pont koordinátáinak egész voltát, sem azok összegének párosságát nem befolyásolja.

- ii) Ha $v \in D_8 + v_0$, akkor legyen $v' \in D_8$ megint olyan, hogy $v = v' + v_0$. Vegyük észre a következőt: legyen $v_1 = (1, 1, \dots, 1) \in D_8$. Az i) miatt $-v_1 \in D_8$. Ezért $-v_0 = -v_1 + v_0$. Azaz $-v = -v' - v_0 = -v' - v_1 + v_0 = w + v_0$, ahol $w = -v' - v_1 \in D_8$. Tehát $-v \in D_8 + v_0$.

Végezetül még szükségünk van arra, hogy D_8^+ diszkrét részcsoportja $\mathbb{R}^8$ -nak. Ez viszont következik abból, hogy az origó középpontú egységgömb csak véges sok elemét tartalmazza D_8^+ -nak. Ezek között pedig van az origóhoz legközelebbi. Válasszuk ε -t ezen minimális távolság felének, és ekkor ebből már látszik, hogy D_8^+ diszkrét. Ezzel megmutattuk, hogy D_8^+ rács.

Ismert, hogy az alábbi mátrix oszlopvektorai egy bázisát alkotják az $E_8 = D_8^+$ rácsnak (lásd pl. [Bar02] 282. oldal):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

amely egy felső trianguláris mátrix (az oszlopokra nézve), ezért determinánsának abszolút értéke 1, és ez egyben azt is jelenti, hogy az alapparalelotóp térfogata 1, tehát az E_8 egységgrács.

Összefoglalásképpen, az E_8 egységgrácsra teljesülnek a következők:

- minden rácpont minden koordinátája egész vagy minden koordinátája fél,
- a rácpontok koordinátáinak összege páros. Ugyanis, ha egy rácpont minden koordinátája egész, akkor az D_n egy eleme, míg ha minden koordinátája fél, akkor a rácpont $D_n + v_0$ -nak eleme, de mivel $8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ páros, így a koordináták összege is páros.

A Λ rács gömbpakolási sugara legyen az a maximális sugár, melyre teljesül, hogy a rácpontok, mint középpontok köré írt gömbök pakolást alkotnak. Azt mondjuk, hogy ha $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex test és a $\mathcal{K} = K + \Lambda$ elrendezés egy pakolás, akkor $\mathcal{K}$ a K egy rácsszerű elhelyezése (pakolása). Ebben az esetben ismert, hogy $\delta(\mathcal{K}) = \delta(\mathcal{K}, P)$, ahol P a Λ rács egy bázisához tartozó alapparalelotóp.

Konkréten az E_8 rács esetén a gömbpakolási sugár éppen $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ahhoz, hogy ezt belássuk, meg kell határozni a rács origóhoz legközelebbi rácpontjának távolságát (azaz a legrövidebb nemnulla vektor hosszát), és ekkor ennek az értéknek a fele lesz a pakolási sugár. Vegyük észre, hogy az E_8 rács egész rács, azaz a rácsvektorok skaláris szorzata egész szám. Ehhez elég azt ellenőrizni, hogy a fenti bázisvektorok (amelyeket ebben a gondolatmenetben $v_1 \dots v_8$ -al fogunk jelölni) skalárszorzata egész szám, ami könnyen belátható. Speciálisan, ha $m_1, \dots, m_8 \in \mathbb{Z}$, az $m_1 v_1 + \dots + m_8 v_8$ vektor hossz négyzete:

$$|m_1 v_1 + \dots + m_8 v_8|^2 = 2m_1^2 + \dots + 2m_8^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 8} 2m_i m_j \langle v_i v_j \rangle,$$

amely nyilvánvalóan páros, és értéke legalább 2, továbbá ezt az értéket fel is veszi, hiszen pl. a $v_2, \dots, v_8$ bázisvektorok hosszának négyzete éppen ennyi. Tehát a gömbpakolási sugár $\sqrt{2}/2$.

Ennek alapján az E_8 rács által meghatározott legsűrűbb gömbpakolás sűrűsége felírható a 8-dimenziós $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sugarú gömb térfogatának és az E_8 rács determinánsának hányadosaként:

$$\frac{(1/\sqrt{2})^8 \kappa_8}{|\det \Lambda|} = \frac{1}{16} \kappa_8 = \frac{1}{16} \cdot \frac{\pi^4}{4!} \approx 0.2536.$$

Hasonlóan huszonnégyszeres dimenzióban is létezik egy nevezetes rács, az ún. Leech rács, amelyet J. Leech fedezett 1967-ben. Tudjuk, hogy a Leech rács megvalósítja a legsűrűbb gömbpakolást (bővebb információ található pl. a Cohn [Coh17] cikkben, illetve a benne lévő hivatkozásokban). Ez a rács egy rendkívül bonyolult struktúrájú rács, ezért csak felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:

- egységgrács, azaz akármelyik bázisához tartozó alapparalelotóp térfogata 1,
- páros, azaz minden vektor hosszúságának négyzete is páros,
- (az előzőből következik, hogy) minden nem nulla vektor hosszúsága legalább $\sqrt{2}$, azonban a Leech rácsban a legrövidebb rácsvektor hosszúsága 2, így gömbpakolási sugara 1.

Ekkor a 8-dimenziós esethez hasonlóan a $\mathcal{K}$ elhelyezés gömbpakolási sűrűsége:

$$\frac{(1/\sqrt{2})^{24} \kappa_{24}}{|\det \Lambda|} = \frac{1}{2^{12}} \kappa_{24} = \frac{1}{2^{12}} \cdot \frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0.001929.$$

Ez a szám rendkívül kicsi, de ne felejtsük el, hogy a sűrűség a dimenzió növekedésével exponenciálisan csökken. Bár érdekességképpen megegyezzük, hogy számunkra ismeretlen okból, de lehetnek kiugró esetek. Például 23-dimenzióban a gömb pakolási sűrűség 0.001905 (lásd Cohn [Coh17] cikkének 105. oldalán levő táblázatot), ami kisebb, mint 24-dimenzióban.

Irodalomjegyzék

- [Bar02] A. Barvinok, *A course in convexity*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [Coh17] H. Cohn, *A conceptual breakthrough in sphere packing*, Notices Amer. Math. Soc. **64** (2017), no. 2, 102–115.
- [FT04] G. Fejes Tóth, *Packing and covering*, Handbook of discrete and computational geometry (2nd ed.), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [FTK93] G. Fejes Tóth and W. Kuperberg, *Packing and covering with convex sets*, Handbook of convex geometry, Vol. A, B, North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [FL44] Fejes L., *Extremális pontrendszerek a síkban, a gömbfelületen és a térben*, Univ. Francisco-Josephina. Kolozsvár. Acta Sci. Math. Nat., **1944** (1944), no. 23.
- [FTL63a] Fejes Tóth L., *Újabb eredmények a diszkrét geometriában*, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. **13** (1963), 341–354.
- [FTL63b] Fejes Tóth L., *Mi a "diszkrét geometria"?*, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. **13** (1963), 229–238.
- [FT64] L. Fejes Tóth, *Regular figures*, A Pergamon Press Book, The Macmillan Co., New York, 1964.
- [Gro63] H. Groemer, *Existenzsätze für Lagerungen im Euklidischen Raum*, Math. Z. **81** (1963), 260–278.
- [Gro86] H. Groemer, *Some basic properties of packing and covering constants*, Discrete Comput. Geom. **1** (1986), no. 2, 183–193.
- [GL87] P. M. Gruber and C. G. Lekkerkerker, *Geometry of numbers*, 2nd ed., North-Holland Mathematical Library, vol. 37, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.
- [Rog64] C. A. Rogers, *Packing and covering*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 54, Cambridge University Press, New York, 1964.
- [Sch61] W. M. Schmidt, *Zur Lagerung kongruenter Körper im Raum*, Monatsh. Math. **65** (1961), 154–158 (German).

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Fodor Ferencnek, aki sok hasznos tanáccsal és észrevétellel segítette munkámat.

Köszönöm a szüleimnek, nővéremnek és barátaimnak, hogy szeretetükkel, türelmükkel és bátorításaikkal támogattak egyetemi tanulmányaim alatt.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném hálásan megköszönni a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kara valamennyi oktatójának, dolgozójának azt a lelkiismeretes munkát, amivel a hallgatók képzését, tanulását és a versenyképes tudás megszerzését támogatják.

Nyilatkozat

Alulírott Borzási Henrietta (BOHTAAT.SZE) kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2017. május 19.

.....