

A megvilágítási probléma

Gyovai Antal

Témavezető: Dr. Fodor Ferenc

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet

2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Konvex testek lefedése, felbontása	4
2.1. Gohberg-Markus-Hadwiger sejtés	5
3. Megvilágítási probléma	5
4. A megvilágítási és fedési probléma ekvivalenciája	10
5. A szeparációs probléma	12
5.1. Polaritás	12
5.2. A szeparációs Tétel	14

1. Bevezetés

Szakdolgozatom célja egy jelenleg is intenzíven kutatott téma eddig elért eredményei egy részének a bemutatása. Ezt a konvex geometriai problémát először F.W. Levi vetette fel 1955-ben. Nevezetesen, ha adott egy n -dimenziós test, akkor legkevesebb hány, az adott testnek nem nullvektorral eltoltja kell ahhoz, hogy lefedjük ezekkel. A kérdéses minimumot tetszőleges síkbeli alakzatra meghatározta, és az ő tiszteletére Levi-számnak nevezik (a későbbiekben $b'(\cdot)$ -vel jelöljük).

F.W. Levi hatására 1957-ben H. Hadwiger egy hasonló – és ekvivalens – problémát vizsgált. Mégpedig azt, hogy egy K testnek hány homotetikusan kicsinyített mására van szükség ahhoz, hogy ezek egyesítése tartalmazza K -t. Hadwigertől függetlenül 1960-ban I.Z. Gohberg és A.S. Markus ugyanezt a problémát vizsgálták és hasonló eredményeket értek el: síkbeli alakzatokra meghatározták ezt az értéket, és azt sejtették – Hadwigerhez hasonlóan –, hogy tetszőleges n -dimenziós testnek legfeljebb 2^n darab homotetikusan kicsinyített mására van szükség a lefedéséhez. Ezt a sejtést a tiszteletükre Gohberg-Markus-Hadwiger sejtésnek nevezték el, a számot pedig $b(\cdot)$ -vel jelölik.

1960-ban H. Hadwiger bevezetett két új definíciót, a megvilágítási problémán belül. Azt a kérdést vizsgálta, hogy minimálisan hány vektor (pont) szükséges ahhoz, hogy az ezekkel párhuzamos vektorokkal (a pontból kiinduló vektorokkal) az adott konvex test összes határpontját megvilágítsuk. Ezeket a számokat $c(\cdot)$ -vel illetve $c'(\cdot)$ -vel jelölte. Még ebben az évben sikerült bebizonyítani, hogy tetszőleges konvex, korlátos n -dimenziós testre a $b(\cdot)$, $b'(\cdot)$, $c(\cdot)$, $c'(\cdot)$ értékek megegyeznek.

1991-ben Bezdek Károly a polaritás felhasználásával újabb ekvivalens megfogalmazását adta a megvilágítási problémának. Ő azt vizsgálta, hogy egy az origót belsejében tartalmazó konvex test polárisának lapjait hány hipersíkkal lehet az origótól szigorúan elszeparálni. A Gohberg-Markus-Hadwiger sejtésnek ez a megközelítése új utakat nyitott a probléma vizsgálatában, habár az eredeti sejtés még három dimenzióban is bizonyításra vár.

Általános jelölések

Az n -dimenziós euklidészi teret a megszokott módon $\mathbf{E}^n$ -nel jelöljük. Testnek a kompakt, azaz korlátos és zárt $\mathbf{E}^n$ -beli halmazokat nevezzük. Egy testet konvexnek nevezünk, ha bármely két pontját összekötő szakasz a testben halad. A T test belsejét T -vel, határát ∂T -vel jelöljük. Egy H halmaz lezártját $\text{cl } H$ -val jelöljük, ahol $\text{cl } H$ a legszűkebb olyan zárt halmaz, ami H -t tartalmazza. A pontokat kis betűvel, a testeket nagybetűvel jelöljük. Két pont távolságán a szokásos Euklideszi távolságot értjük és $d(\cdot, \cdot)$ -vel jelöljük. Két vektor skaláris szorzatát standard módon jelöljük: $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Egy vektor normáján az euklidészi normáját értjük, amit $\|\cdot\|$ -vel jelölünk. Hipersíknak nevezzük az $(n - 1)$ -dimenziós affin altereket, azaz $(n - 1)$ -dimenziós lineáris alterek eltoltjait.

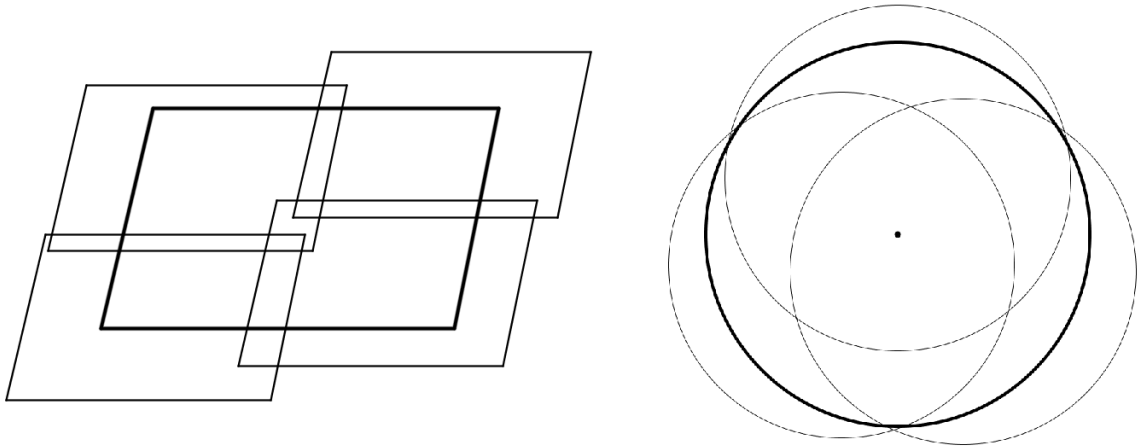
2. Konvex testek lefedése, felbontása

Legyen $K \in \mathbb{E}^n$ test. Válasszunk egy tetszőleges o pontot. A K test tetszőleges a pontjához található olyan a' pont, hogy $d(o, a')/d(o, a) = k$, valamely rögzített k valós számra. A $K' = \{a' \mid a \in K\}$ halmazt a K test homotetikus másának nevezzük. Ha $k < 1$, akkor kicsinyítésről, ha $k > 1$, akkor homotetikus nagyításról beszélünk.

1960-ban két kisinyovi matematikus, I. C. Gohberg és A. Sz. Markusz a következő problémát vetette fel: Melyik az a legkisebb pozitív egész m szám, amire létezik m darab homotetikus kicsinyített példánya K -nak úgy, hogy ezek lefedik K -t. Ezt a számot $b(K)$ -val jelöljük, ha létezik véges sok ilyen, ellenkező esetben legyen $b(K) = \infty$. Most nézzünk egy egyszerű állítást síkban:

2.1. Állítás. *Kör esetén $b(K) = 3$, paralelogrammára pedig $b(P) = 4$.*

A bizonyítás nem túl bonyolult, megtalálható V. G. Boltyanskij, I. C. Gohberg [3] könyvének 43-44. oldalán. Az 1. ábrán látható két rajz tulajdonképpen tartalmazza bizonyítás egy részét.



1. ábra. Kör és paralelogramma lefedése 3 illetve 4 homotetikusan kicsinyített másával.

A relatív nagyság felhasználásával bevezethető egy „gyengébb” definíció $b(K)$ -ra.

2.2. Definíció. *Egy F konvex test, $G \subset F$ részének relatív nagysága F -ben k , ha k az a legkisebb szám, amire a k -arányú homotetikus kicsinyítése F -nek tartalmazza G -t.*

$b(K)$ definíciójában a homotetikus kicsinyített példányt kicserélve kisebb relatív nagyságú részre kapunk egy nagyon hasonló definíciót. Könnyen belátható, hogy ez a két definíció ekvivalens egymással.

A fedési számnak több hasonló formája létezik, a következő – a későbbiekben sokszor felhasznált – definíció is ilyen:

2.3. Definíció. *Azt a legkisebb pozitív egész m -et, amire létezik $K_1, \dots, K_m$ eltoltja K -nak úgy, hogy $K \subset \text{int } K_1 \cup \dots \cup \text{int } K_m$, $b'(K)$ -val jelöljük.*

2.1. Gohberg-Markus-Hadwiger sejtés

Vizsgáljuk meg, hogy milyen konvex testekre veszi fel $b(K)$ a maximumát. Síkban már láttuk, hogy a paralelogrammára veszi fel a legnagyobb értéket: $b(K) = 4$. Innen támadhat az a sejtésünk, hogy az n -dimenziós „paralelogrammára” lesz maximális a $b(K)$ érték. A két dimenziós esethez hasonlóan bizonyítható, hogy n -dimenzióban az n -dimenziós paralellotópra $b(K) = 2^n$, ahol a paralellotóp az n -dimenziós kocka affin képe.

1957-ben Hadwiger közölt egy listát megoldatlan geometriai problémákból. Az egyik erről a problémáról szólt. Ebben leírta erre vonatkozó sejtését is: Bármely $\mathbf{E}^n$ -beli konvex testre $b(K) \leq 2^n$, és egyedül az n -dimenziós paralellotópra teljesül az egyenlőség.

A problémát két dimenzióban Hadwiger korábban már megoldotta, azonban magasabb dimenziókban a mai napig nem sikerült senkinek sem bizonyítani a sejtést, habár bizonyos speciális testosztályokra igazolódott a sejtés. E sejtéssel megkaptuk az elérendő felső korlátot $b(K)$ -ra.

Az alsó korlát kérdése egyszerűbb – a későbbiekben bizonyításra is kerül – miszerint bármely korlátos, konvex testre $\mathbf{E}^n$ -ben $b(K) \geq n + 1$, és például az n -dimenziós gömbre teljesül is az egyenlőség.

3. Megvilágítási probléma

A probléma a következő: Keressük azt a minimális számú irányt, amivel egy adott test megvilágítható. Ehhez először konkrétan meg kell mondanunk, hogy mit értünk megvilágítás alatt:

3.1. Definíció. K határának egy tetszőleges x pontját megvilágítja az $\vec{l}$ vektor, ha létezik $\lambda > 0$ úgy, hogy $x + \lambda \cdot \vec{l} \in \text{int } K$.

Jelöljük $c(K)$ -val azt a legkisebb pozitív számot, amire létezik ennyi vektor, amelyek megvilágítják K határát. Kézenfekvő dolog, hogyha vektorokkal megvilágítható egy test, akkor léteznek olyan, az adott testen kívüli pontok, melyekből induló vektorok is megvilágítják az adott testet. Ekkor egy pont általi megvilágítás alatt az adott pontból induló és K határában végződő vektorok általi megvilágítást értünk. Jelöljük $c'(K)$ -val ezt a legkisebb pozitív számot, azaz létezik ennyi pont $\mathbf{E}^n \setminus K$ -ban úgy, hogy ezen pontok megvilágítják K határát. Ez utóbbi fogalom hasznos lesz a fedési és megvilágítási probléma ekvivalenciájának bizonyításakor.

Most pedig rátérünk a Hadwiger által is bebizonyított alsó korlát tételre, ami rávilágít a fedési és megvilágítási probléma közti hasonlóságra, konvex testekre mindkét értéknek azonos az alsó korlátja:

3.2. Tétel. Bármely $K \subset \mathbf{E}^n$ konvex testre $c(K) \geq n + 1$ teljesül.

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy n irány semmilyen konvex $\mathbf{E}^n$ -beli test megvilágításához nem elegendő.

Legyenek $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n$ tetszőleges vektorok. Legyen H egy olyan hipersík, amire $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n \in H$. Legyenek H_1, H_2 olyan támaszhipersíkjai K -nak, amelyek H -val párhuzamosak, továbbá legyenek H_1^+, H_2^+ a H_1, H_2 hipersíkok azon zárt félterei, amelyek nem tartalmazzák K -t. Legyen $x_1 \in H_1 \cap K$, $x_2 \in H_2 \cap K$. Legyen $\vec{l}_{x_1}$ az x_1 , $\vec{l}_{x_2}$ az x_2 kezdőpontú

$\vec{l}_n$ irányú vektor. Ekkor az $\vec{l}_{x_1} \in H_1^+$, $\vec{l}_{x_2} \in H_2^+$ feltételek közül legalább az egyik teljesül. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\vec{l}_{x_1} \in H_1^+$. Ekkor az x_1 pontot $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n$ vektorok közül egyik sem világítja meg, mivel az x_1 -ből induló $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n-1}$ irányú vektorok a H_1 hipersíkban maradnak, ami nem tartalmaz K -ból belső pontot; az $\vec{l}_{x_1}$ irányú vektor pedig definíció szerint nem tartalmaz pontot K belsejéből. Tehát n irány nem elegendő K megvilágításához. $\square$

A következő állítás megmutatja, hogy síkban a $b(K)$ és $c(K)$ értékek nagyon hasonlóak:

3.3. Állítás. *Bármely konvex, korlátos és zárt $K \subset \mathbf{E}^2$ halmazra, ami nem paralelogramma $c(K) = 3$. Ha K paralelogramma, akkor $c(K)=4$.*

Az állítás bizonyításához felhasználunk egy egyszerű lemmát, melynek bizonyítása megtalálható a V. G. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan könyv [4] 277-278. oldalain illetve a V. G. Boltyanskij, I. C. Gohberg könyv [3] 52-56. oldalain is:

3.4. Lemma. *Tetszőleges konvex, korlátos és zárt $K \subset \mathbf{E}^2$ halmaznak – ami nem paralelogramma – létezik három darab reguláris határpontja, melyeken át húzott érintők háromszöget alkotnak K körül.*

3.5. Definíció. *Egy $K \subseteq \mathbf{E}^n$ konvex test egy x határpontját regulárisnak mondjuk, ha K -nak pontosan egy olyan támaszhipersíkja létezik, ami tartalmazza x -et.*

Az állítás bizonyításához a V. G. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan [4] angol nyelvű könyv 278-279. oldalán található leírást vettem alapul:

Bizonyítás. Legyen P egy paralelogramma. P két csúcsát egyszerre nem világíthatja meg egyetlen vektor sem, hiszen akkor $c(P) = 2$ teljesülne, ami ellentmond a 3.2-es tételnek. Így $c(P) \geq 4$. Legyenek $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_4$ P négy csúcsából P belsejébe mutató vektorok, ezek megvilágítják P határát.

Most legyen F nem paralelogramma, a, b, c három olyan határpontja, melyeken keresztül csak egy támaszegyenes fektethető, úgy hogy ezen támaszegyenesek háromszöget alkotnak F körül. E háromszög csúcsai p_1, p_2, p_3 , legyen $x_0 \in \text{int } F$. Ekkor a p_1 csúcsból az x_0 -ba mutató $\vec{l}_1$ vektor megvilágít az a, b, c pontok közül kettőt, hiszen ezek a pontok regulárisak, és $\vec{l}_1$ vektor iránya nem párhuzamos a két ponton át fektetett támaszegyenesekkel, így egy vele párhuzamos egyenes belemetsz F belsejébe a két ponton keresztül, azaz $\vec{l}_1$ megvilágítja a két pontot. Továbbá az is világos, hogy $\vec{l}_1$ a két pont közötti határpontjait is megvilágítja F -nek. Hasonlóan $\vec{l}_2, \vec{l}_3$ megvilágítja F maradék határpontjait. Ebből és a 3.2-es tételből következik, hogy $c(F) = 3$. $\square$

A megvilágítási problémáknál fontos szerepe van a vizsgált konvex test határának. Mint majd kiderül, a „sima” határú testeket a legkönnyebb megvilágítani, ezek megvilágításához elég lesz $n + 1$ irány.

3.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy konvex test határa reguláris, ha minden határpontja az.*

Szemléletesen úgy fogalmazhatunk, ha a test határa sima, nincs benne törés, akkor reguláris. Az olyan testek például, amelyeknek határát polinom függvényekkel meg lehet adni, minden határpontja reguláris lesz. A 3.7-os állítás szerint, ha a test határa sima, akkor minimális számú iránnyal megvilágítható:

3.7. Állítás. Ha $K \subset \mathbf{E}^n$ konvex test határa reguláris, akkor $c(K) = n + 1$.

Bizonyítás. Legyen $T \subset \mathbf{E}^n$ egy tetszőleges n -dimenziós szimplex, a egy belső pontja T -nek. Ekkor T csúcaiból az a pontba mutató $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n$ vektorok megvilágítják K határát: Legyen x egy tetszőleges határpontja, H az ezen a ponton átmenő támaszhipersíkja K -nak. Toljuk el a T n -szimplexet T' -be úgy, hogy az x és a pont egybeessen. Ekkor a H hipersík mindkét oldalán lesz pontja T' -nek. Legyen b'_i olyan csúcsa T' -nek, ami H azon oldalán van, amelyik nem tartalmazza K -t. Ekkor a b'_i kezdőpontú x végpontú vektor $\vec{l}_i$ irányú és megvilágítja az x pontot. Tehát az $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+1}$ irányú vektorok megvilágítják K minden határpontját, azaz $c(K) \leq n + 1$, a 3.2. tétel szerint pedig $c(K) \geq n + 1$, tehát $c(K) = n + 1$. $\square$

A következő tétel szerint ha az $\mathbf{E}^n$ -beli testnek legfeljebb n nem-reguláris határpontja van, akkor az még mindig megvilágítható minimális számú iránnyal:

3.8. Tétel. Ha $K \subset \mathbf{E}^n$ konvex testnek legfeljebb n nem-reguláris határpontja van, akkor $c(K) = n + 1$.

A tétel bizonyításához felhasználjuk az előző állítás bizonyításában leírtakat:

3.9. Lemma. Legyen T egy n -dimenziós szimplex $\mathbf{E}^n$ -ben és $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+1}$ olyan vektorok, melyek a szimplex csúcaiból mutatnak T valamely belső pontjába. Ekkor tetszőleges K konvex test bármely reguláris határpontját megvilágítja a $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+1}$ vektorok által meghatározott irányok egyike.

Bizonyítás. Jelöljük $x_1, \dots, x_k$ -val, ahol $k \leq n$, K összes nem-reguláris határpontját. Válasszunk tetszőleges $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_k$ irányokat, melyek megvilágítják a nem-reguláris határpontokat. Feltehetjük, hogy ezek a vektorok lineárisan függetlenek, hiszen tetszőleges kis változtatásával az $\vec{l}_i$ vektornak x_i még megvilágított marad.

Válasszunk $a, b_1, \dots, b_k \in \mathbf{E}^n$ pontokat úgy, hogy az $a - b_i$ vektor $\vec{l}_i$ -vel párhuzamos legyen. Egészítsük ki ezeket a pontokat $b_{k+1}, \dots, b_n$ pontokkal úgy, hogy az $a - b_1, \dots, a - b_n$ vektorok lineárisan függetlenek maradjanak.

Legyen $b_{n+1} = a + (a - b_1) + \dots + (a - b_n)$. Ekkor a $b_1, \dots, b_{n+1}$ pontok egy n -szimplexet alkotnak, ami tartalmazza a -t belső pontként. Így az $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{n+1}$ vektorok K nem-reguláris határpontjait és a lemma értelmében K összes reguláris határpontját is megvilágítják. Tehát $c(K) \leq n + 1$, és a 3.2. tétel szerint $c(K) = n + 1$. $\square$

A továbbiakban olyan konvex testekre bizonyítunk állításokat, melyek határa „elég” jól közelíti az n -dimenziós gömböt.

3.10. Definíció. Legyen $C_x(K)$ a $K \subset \mathbf{E}^n$ konvex test x határpontjához tartozó konvexitási kúp, azaz azon félegyeneselek uniója $\mathbf{E}^n$ -ben, amelyek közös végpontja x , és tartalmaznak K -ból x -től különböző pontot. A konvexitási kúp szögén az x -et tartalmazó támaszhipersíkok által bezárt maximális szög felét értjük.

3.11. Lemma. Legyen $T \subset \mathbf{E}^n$ szabályos $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ csúcshalmazú n -dimenziós szimplex, melynek körülírható n -dimenziós gömbjének sugara 1. Legyen H olyan tetszőleges hipersík, ami áthalad T középpontján. Ekkor létezik olyan $a \in \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ pont, hogy a távolsága H -tól legalább $1/n$.

Bizonyítás. Ágyazzuk be T -t az $n + 1$ dimenziós térbe úgy, hogy az n -szimplex csúcsai a koordinátarendszer $(\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ tengelyein helyezkedjenek el, azonos távolságra az origótól. Ekkor T a $\xi_1 + \dots + \xi_{n+1} = c$ egyenlet által meghatározott H_1 hipersíkban fekszik. T középpontjának koordinátái: $s = c/(n + 1)(1, \dots, 1)$, hiszen össze kell adni a csúcsokba mutató vektorokat, majd osztani a csúcsok számával.

Feltettük, hogy az n -dimenziós szimplex köré egység sugarú n -dimenziós gömb írható, aminek mellesleg T centruma a középpontja. Így s távolsága egy tetszőleges a csúcstól egységnyi:

$$\begin{aligned}\|s - a\| &= 1 \\ \left\| \frac{c}{n+1}(1, \dots, 1, -n, 1, \dots, 1) \right\| &= 1 \\ n \left(\frac{c}{n+1} \right)^2 + \left(\frac{cn}{n+1} \right)^2 &= 1 \\ c^2 n(n+1) &= (n+1)^2 \\ c &= \sqrt{\frac{n+1}{n}}\end{aligned}$$

Legyen H_2 olyan az origót tartalmazó – azaz $\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n = 0$ egyenletű – hipersík $\mathbf{E}^{n+1}$ -ben, amire $H = H_1 \cap H_2$. Mivel $s \in H$, így $s \in H_2$ -nek is teljesülni kell, így $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$. Az egyszerűség kedvéért legyen a normálisa egységnyi: $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$. H_1 és H_2 ortogonálisak, hiszen irányvektoraik merőlegesek egymásra:

$$\langle (1, \dots, 1), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 0$$

Mivel H_1 és H_2 merőlegesek egymásra, ezért az a_i pontok távolsága H -tól megegyezik a H_2 -től mért távolságukkal. Így

$$d(a_i, H) = \frac{\langle (0, \dots, 0, c, 0, \dots, 0), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rangle}{\|(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\|} = c\alpha_i$$

Világos, hogy a H -tól vett távolságok között legalább egy pozitívnak és negatívnak is lennie kell. Indexeljük úgy az a -kat, hogy $d(a_i, H) \geq 0$, ha $1 \leq i \leq k$, és $d(a_i, H) < 0$, ha $i > k$. Tegyük fel, hogy minden $1 \leq i \leq k$ -ra: $d(a_i, H) < 1/n$.

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n} &= c^2 \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^k d_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n+1} d_i^2 \leq \sum_{i=1}^k d_i^2 + \left(- \sum_{i=k+1}^{n+1} d_i \right)^2 \\ &< \frac{k}{n^2} + \left(\sum_{i=1}^k d_i \right)^2 < \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^2} \leq \frac{n+n^2}{n^2}\end{aligned}$$

Ez ellentmondás (egy szám nem nagyobb, mint önmaga), tehát van olyan pont a csúcsok közt, aminek H -tól mért távolsága legalább $1/n$. $\square$

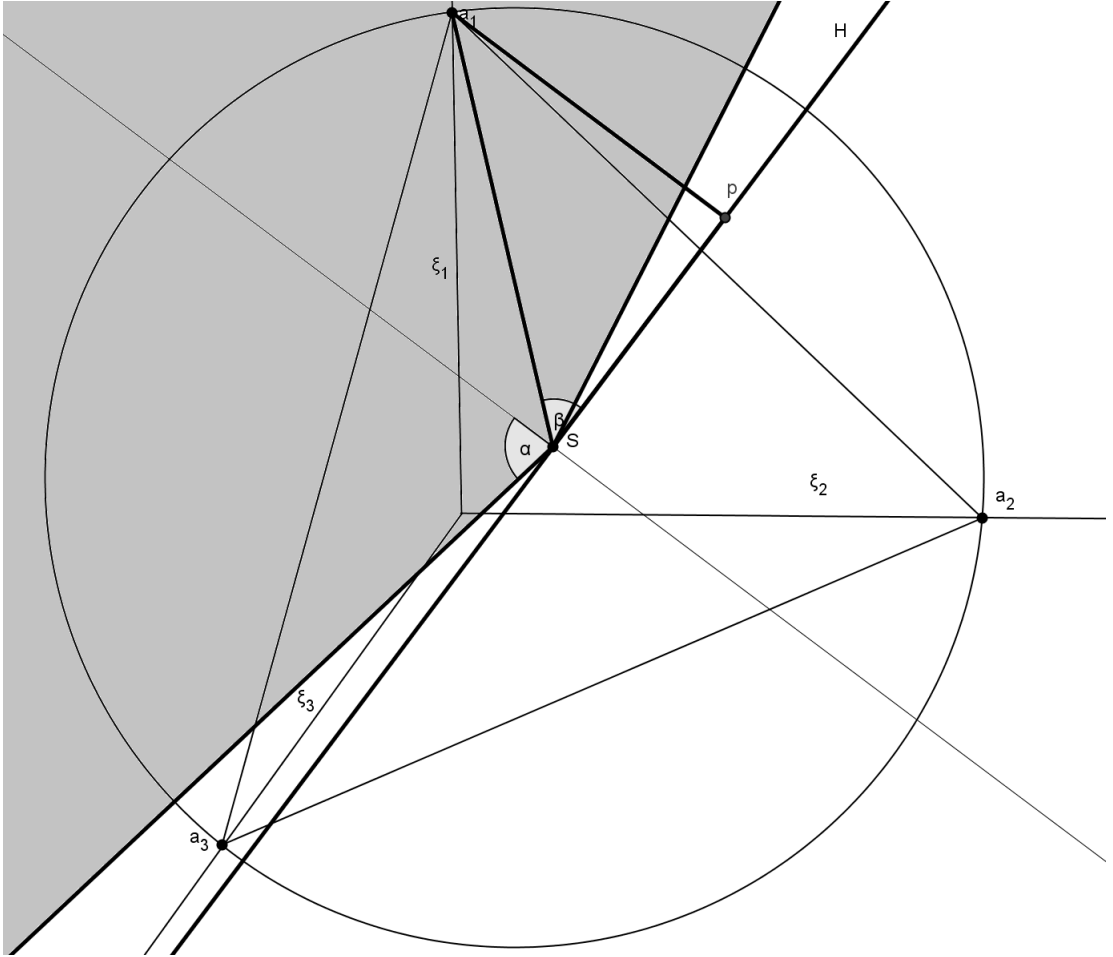
3.12. Tétel. Legyen $K \subset \mathbf{E}^n$ olyan konvex test, aminek minden x határpontjához tartozó konvexitási kúp α szögére $\cos(\alpha) < 1/n$ teljesül. Ekkor $n + 1$ irány elég K megvilágításához, azaz $c(K) = n + 1$.

Bizonyítás. A lemmánál bevezetett jelöléseket használjuk. Legyen H tetszőleges hipersík T centrumán keresztül, valamint $C_s(T)$ olyan konvexitási kúp, melynek szögére $\cos(\alpha) < 1/n$ teljesül, és a támaszhipersíkjai egyenlő szöget zárnak be H -val.

Ekkor a lemma szerint van egy olyan csúcsa T -nek – legyen a_1 – melynek távolsága H -tól legalább $1/n$. Az a_1 pontnak a H hipersíkra vett merőleges vetülete legyen p . Az a_1, s, p pontok alkotta R háromszög derékszögű. Tudjuk, hogy p és a_1 távolsága megegyezik H és a_1 távolságával, továbbá $d(s_1, a_1) = 1$, hiszen egységnyi n -dimenziós gömb írható T köré. Legyen β az s -nél lévő szöge az R háromszögnek (lásd 2. ábra). Ekkor

$$\cos(\pi - \beta) = \sin(\beta) = \frac{d(a_1, p)}{d(a_1, s)} = d(a_1, H) \geq \frac{1}{n} > \cos(\alpha)$$

Mivel a $\cos(x)$ függvény a $[0, \pi]$ intervallumon monoton csökkenő, ezért $\alpha > \pi - \beta$, $\alpha + \beta > \pi$. Mivel α -t és β -t úgy választottuk, hogy 90° -nál kisebbek legyenek, ezért a két szögtartomány nem lehet diszjunkt, így $a_1 \in C_s(T)$.



2. ábra.

Ez azt jelenti, hogyha vesszük K egy tetszőleges h határpontját, és az ehhez tartozó $C_h(H)$ konvexitási kúpot, akkor lesz olyan $\vec{l}$ vektor, hogy $\vec{l} \subset C_h(H)$, és $\vec{l}$ párhuzamos $\overrightarrow{s - a_i}$ -vel, valamely $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ -re. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $n + 1$ irány elég K megvilágításához. $\square$

4. A megvilágítási és fedési probléma ekvivalenciája

Először a következő tételt mutatjuk meg:

4.1. Tétel. *Bármely $K \subset \mathbb{E}^n$ konvex testre a következők teljesülnek:*

$$(1) \quad c(K) \leq b'(K) \leq b(K)$$

$$(2) \quad c(K) \leq c'(K) \leq b(K)$$

Bizonyítás. Legyen $b'(K) = m$, azaz létezik $K_1, \dots, K_m$ eltoltja K -nak, hogy $K \subset \text{int } K_1 \cup \dots \cup \text{int } K_m$. Legyen π_i az az eltolás, melyre $\pi_i(K_i) = K$, és $\vec{l}_i$ az eltolás iránya. Legyen $x \in K_i \cap \text{bd } K$. Ekkor $\pi_i(x) \in \text{int } K$, azaz $\vec{l}_i$ megvilágítja az x pontot, így $\vec{l}_i$ megvilágítja $K_i \cap \text{bd } K$ halmaz összes pontját. Tehát az $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m$ irányú vektorok megvilágítják K minden határpontját, hiszen:

$$\text{bd } K = \bigcup_{i=1}^m (\text{int } K_i \cap \text{bd } K)$$

Így ha $b'(K) < \infty$, akkor $c(K) \leq m = b'(K)$.

Legyen most $b(K) = m$, azaz $K_1, \dots, K_m$ homotetikus $k_i < 1$ arányú kicsinyített másai K -nak, melyek lefedik K -t. Jelöljük h_i -vel a megfelelő homotéciát: $h_i(K) = K_i$. Legyen egy tetszőleges $a_i \in \text{int } K_i$ pontra h'_i az a_i középpontú $1/k_i$ arányú homotécia. Nyilván a $\pi_i = h'_i \circ h_i$ homotécia egy eltolás, és $h'_i(K_i) = h'_i(h_i(K)) = \pi_i(K)$. Továbbá $K_i \subset \text{int } h'_i(K_i)$, mivel $1/k_i > 1$ és $a_i \in \text{int } K_i$. Tehát:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m K_i \subset \bigcup_{i=1}^m \text{int } h'_i(K_i) \subset \bigcup_{i=1}^m \text{int } \pi_i(K)$$

Azaz $b'(K) \leq m = b(K)$. Ezzel (1)-et bizonyítottuk.

Legyen $c'(K) = m$, azaz a $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{E}^n \setminus K$ pontok megvilágítják K határát. Vegyünk egy a pontot K belsejéből, jelöljük $\vec{l}_i$ -vel a $\overrightarrow{p_i a}$ vektor által meghatározott irányt. Legyen $x \in \text{bd } K$ egy tetszőleges pont, amit p_i megvilágít. Ekkor definíció szerint létezik $z \in \text{int } K$ pont, hogy $x \in \overrightarrow{p_i z}$. Vegyünk még fel egy u pontot K belsejében úgy, hogy $\overrightarrow{xu}$ párhuzamos és azonos irányú legyen $\overrightarrow{p_i a}$ vektorral. Mivel $\overrightarrow{p_i a}$ vektor $\vec{l}_i$ irányú, így $\vec{l}_i$ megvilágítja az x határpontot. Ez igaz tetszőleges $x \in \text{bd } K$ pontra, amit p_i megvilágít, így ha a $p_1, \dots, p_m$ pontok megvilágítják K határát, akkor m irány elég K megvilágításához: $c(K) \leq m = c'(K)$.

Legyen most $b(K) = m$, azaz léteznek $K_1, \dots, K_m$ homotetikus kicsinyített másai K -nak, melyek lefedik K -t. Jelöljük h_i -vel a $k_i < 1$ arányú homotéciát, amire $h_i(K) = K_i$. Legyen $a_i \in \text{int } K_i$ tetszőleges pont és jelöljük g_i -vel az a_i középpontú $1 < \lambda_i < 1/k_i$ arányú homotetikus nagyítást. Legyen $f_i = g_i \circ h_i$ homotécia középpontja y_i . Mivel $\lambda_i > 1$ és $a_i \in \text{int } K$, így $K_i \subset \text{int } g_i(K) = \text{int } f_i(K)$, következésképpen:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m K_i \subset \text{int } \bigcup_{i=1}^m f_i(K)$$

Legyen $x \in \text{int } f_i(K) \cap \text{bd } K$. Ekkor $y_i \notin K$. Ha $y_i \in K$ teljesülne, akkor mivel $k_i \lambda_i < 1$: $f_i(K) \subset K$, $\text{int } f_i(K) \subset \text{int } K$ lenne, ami azt jelentené, hogy $\text{int } f_i(K) \cap \text{bd } K = \emptyset$, ami

ellentmond x választásának. Mivel $x \in \text{int } f_i(K)$, létezik $z_i \in \text{int } K$, hogy $f_i(z_i) = x$. Ekkor $x \in \overline{y_i z_i}$ szakasz, hiszen az f_i homotécia $k_i \lambda_i < 1$ arányú kicsinyítés. Tehát ha $h_i(K) \cap \text{bd } K \neq \emptyset$, akkor az y_i pont megvilágítja x -et. Mivel

$$\text{bd } K = \text{int } \bigcup_{i=1}^m (f_i(K) \cap \text{bd } K)$$

így K határának megvilágításához legfeljebb m pont szükséges: $c'(K) \leq m = b(K)$. Ezzel a (2)-es állítás is bizonyítást nyert. $\square$

4.2. Tétel. *Bármely $K \subset \mathbf{E}^n$ konvex testre a következő teljesül:*

$$b(K) = b'(K) = c(K) = c'(K)$$

Bizonyítás. Az előző tétel értelmében elég megmutatni, hogy $b(K) \leq c(K)$.

Legyen $c(K) = m$, azaz léteznek olyan $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_m$ vektorok, melyek megvilágítják K határát. Jelöljük Δ_i -vel az $\vec{l}_i$ által megvilágított határpontjait K -nak. Mivel bármely konvex testnek egy határpontjában létezik támaszhipersíkja, így a Δ_i halmazok nyíltak lesznek K határán. Továbbá mivel az adott irányú vektorok megvilágítják K határát, így $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_m = \text{bd } K$.

Megmutatjuk, hogy léteznek $V_1, \dots, V_m \in \text{bd } K$ nyílt halmazok, melyek teljesítik a következő két feltételt:

$$V_1 \cup \dots \cup V_m = \text{bd } K$$

$$\text{cl } V_1 \subset \Delta_1, \dots, \text{cl } V_m \subset \Delta_m$$

A bizonyításhoz az elemek száma (k) szerinti teljes indukciót használunk. A $k = 1$ eset triviális. Tegyük fel, hogy k -nál kisebb értékekre teljesül az állítás. Konstruáljuk meg a V_k halmazt!

Tekintsük a következőket:

$$F_k = \text{bd } K \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{k-1} \cup \Delta_{k+1} \cup \dots \cup \Delta_m)$$

$$H_k = \text{bd } K \setminus \Delta_k$$

Ekkor az F_k, H_k zárt halmazok diszjunktak. Legyen $h_k = \min \|x - y\|$, ahol $x \in F_k, y \in H_k$. Legyen $\epsilon < h_k$ és F'_k olyan nyílt halmaz, amit F_k -ból kapunk kicsinyítéssel, hogy a két halmaz határának távolsága ϵ . Ekkor a $V_k = F'_k \cap \text{bd } K$ halmaz nyílt és megvan a kívánt tulajdonsága: $\text{cl } V_k \subset \Delta_k$, hiszen $\text{cl } V_k \cap H_k = \emptyset$, és $V_1 \cup \dots \cup V_k \cup \Delta_{k+1} \cup \dots \cup \Delta_m = \text{bd } K$. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

Jelöljük $f_i(x)$ -szel az $\vec{l}_i$ által megvilágított $x \in \text{bd } K$, és $l_i(x) \in \text{bd } K$ pontok távolságát, ahol $\overrightarrow{x l_i(x)}$ vektor párhuzamos $\vec{l}_i$ -vel. Az $f_i(x)$ mennyiség Δ_i -n pozitív értékeket vesz fel. Mivel $\text{cl } V_i \subset \Delta_i$ kompakt, és $f_i(x)$ folytonos Δ_i -n, ezért $f_i(x)$ -nek létezik minimuma $\text{cl } V_i$ -n, legyen $m_i > 0$ kisebb ennél a minimumnál. Tekintsük a π_i eltolást $\vec{l}_i$ irányában m_i távolsággal. Ekkor $\pi_i(\text{cl } V_i) \subset \text{int } K$, hiszen tetszőleges $x \in \text{cl } V_i$ -re az x és $l_i(x)$ pontok távolsága nagyobb m_i -nél, így $\text{cl } V_i \subset \pi_i^{-1}(\text{int } K)$ is teljesül.

Válasszunk K belsejéből egy tetszőleges y_0 pontot. Az m_i szám tetszőlegesen kicsinek választható, így megvalósítható, hogy $y_0 \in \pi_i^{-1}(\text{int } K)$ teljesüljön minden $1 \leq i \leq m$ -re. Mivel $\text{cl } V_i \cup \{y_0\} \subset \pi_i^{-1}(\text{int } K) = \text{int } \pi_i^{-1}(K)$, ezért létezik egy $k_i < 1$ arányú g_i homotécia,

hogy $\text{cl } V_i \cup \{y_0\} \subset g_i(\pi_i^{-1}(K))$.

Így $g_i \circ \pi_i^{-1}$ egy $k_i < 1$ kicsinyítési tényezőjű homotécia, azaz $K_i = g_i(\pi_i^{-1}(K))$ homotetikus kicsinyített mása K -nak, tehát ha igazoljuk, hogy $K \subset K_1 \cup \dots \cup K_m$, akkor készen vagyunk.

Válasszunk egy tetszőleges $z \in K$ ponthoz egy $x \in \text{bd } K$ pontot úgy, hogy z az $\overline{xy_0}$ szakasz belső pontja legyen. Legyen V_s olyan, amire $x \in V_s$ teljesül. Mivel az y_0 és x pontok a $K_s = g_s(\pi_s^{-1}(K))$ konvex testben vannak, így az $\overline{y_0x}$ szakasz K_s belsejében halad, azaz $z \in K_s$. Kapjuk, hogy tetszőleges $z \in K$ pontra $z \in K_i$ teljesül valamely $i \in \{1, \dots, m\}$ index esetén. Tehát $b(K) \leq m = c(K)$. $\square$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy konvex testekre a két érték megegyezik. Azonban ha elhagyjuk a korlátossági feltételt, akkor érvényét veszti a tétel. Például ha tekintünk egy síkbeli parabolát, akkor azt meg tudjuk világítani egyetlen egy iránnyal, viszont egy homotetikus kicsinyített példánya nem elég a lefedéséhez.

5. A szeparációs probléma

5.1. Polaritás

A szeparációs probléma tárgyalása előtt szükségünk van néhány alapvető definícióra, illetve állításra. Ezek a konvex geometriában használatos polaritásról szólnak, melyek részletes tárgyalását az olvasó megtalálja például Szabó László [5] jegyzetének 40-43. oldalán. Mi csak a későbbiekben szükséges állításokat tárgyalunk.

5.1. Definíció. Legyen $K \subseteq \mathbf{E}^n$ nem üres halmaz, ekkor a

$$K^* = \{x \in \mathbf{E}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 1, \forall y \in K\}$$

halmazt K polárisának nevezzük.

Most nézzünk meg néhány egyszerűbb állítást:

5.2. Állítás. Legyen $K_1, \dots, K_n$ nem üres halmazok. Ekkor

$$\left(\bigcup_{i=1}^n K_i \right)^* = \bigcap_{i=1}^n K_i^*$$

.

Bizonyítás. A definícióból:

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i=1}^n K_i \right)^* &= \{x \in \mathbf{E}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 1, \forall y \in \bigcup_{i=1}^n K_i\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbf{E}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 1, \forall y \in K_i\} = \bigcap_{i=1}^n K_i^* \end{aligned}$$

$\square$

5.3. Állítás. Legyen $K \subset \mathbf{E}^n$ konvex, zárt halmaz, ami belsejében tartalmazza az origót. Ekkor $K^{**} = K$.

Bizonyítás. Ha $x \in K$ tetszőleges és $y \in K^*$, akkor $\langle x, y \rangle \leq 1$ definíció szerint teljesül. $x \in K^{**}$ hiszen teljesíti a K^* polárisának definícióját. Kapjuk, hogy $K \subseteq K^{**}$.

Most tegyük fel, hogy $x_0 \notin K$. Ekkor létezik olyan $H = \{z \in \mathbf{E}^n \mid \langle z, u \rangle = 1\}$ hipersík, ami szigorúan elválasztja x_0 -t K -tól. Mivel K tartalmazza az origót, így $\langle x, u \rangle < 1$ minden $x \in K$ -ra, ami azt jelenti, hogy $u \in K^*$. Mivel x_0 a másik felén van a hipersíknak, így $\langle x_0, u \rangle > 1$. Ebből és abból, hogy $u \in K^*$ következik, hogy $x_0 \notin K^{**}$. Tehát ha $x_0 \in K^{**}$, akkor $x_0 \in K$ is teljesül, azaz $K^{**} \subseteq K$. $\square$

A polaritásnak van egy érdekes tulajdonsága: megfordítja a tartalmazási relációt.

5.4. Állítás. Legyenek $K_1, K_2 \subseteq \mathbf{E}^n$ halmazok, melyekre $K_1 \subseteq K_2$ teljesül. Ekkor $K_2^* \subseteq K_1^*$.

Bizonyítás. $K_2 = K_1 \cup (K_2 \setminus K_1)$. Alkalmazzuk erre az 5.2-es állítást:

$$K_2^* = (K_1 \cup (K_2 \setminus K_1))^* = K_1^* \cap (K_2 \setminus K_1)^* \subseteq K_1^*$$

$\square$

5.5. Definíció. Egy $K \subseteq \mathbf{E}^n$ konvex test egy $F \subseteq K$ részhalmazát K lapjának nevezzük, ha létezik olyan H támaszhipersíkja K -nak, amire $F = H \cap K$.

A következő tétel alapvető fontosságú lesz a szeparációs probléma tárgyalásánál:

5.6. Tétel. Legyen $K \subseteq \mathbf{E}^n$ konvex test, ami belsejében tartalmazza az origót. K minden F lapjához rendeljük hozzá az

$$F^* = \{x \in \mathbf{E}^n \mid \langle x, y \rangle = 1, \forall y \in F\}$$

halmazt. Ekkor F^* a K^* egy lapja. Az $F \mapsto F^*$ a tartalmazási relációt megfordító kölcsönösen egyértelmű leképezés K és K^* lapjai között.

Bizonyítás. Legyen F K egy lapja, $H = \{x \in \mathbf{E}^n \mid \langle x, u_0 \rangle = 1\}$ támaszhipersíkja K -nak: $H \cap K = F$ és $K \subseteq \{y \in \mathbf{E}^n \mid \langle y, u_0 \rangle \leq 1\}$. Mivel $\langle x, u_0 \rangle = 1$, $x \in F$ estén, így $u_0 \in F^*$. Válasszunk egy x_0 pontot F belsejéből. Ekkor a $H' = \{x \in \mathbf{E}^n \mid \langle x, x_0 \rangle = 1\}$ támaszhipersíkja K^* -nak, így $F' = H' \cap K^*$ lapja K^* -nak. Bizonyítandó az $F^* = F'$ egyenlőség:

Az $F^* \subseteq F'$ tartalmazás triviálisan teljesül. Legyen most $y_0 \notin F^*$. Válasszunk $x_1 \in F$ -et, hogy $\langle y_0, x_1 \rangle < 1$ teljesüljön. Mivel x_0 belső pontja F -nek, ezért lesz olyan $x_2 \in F$ pont, hogy $x_0 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$, ahol $0 < \lambda < 1$. Mivel $y_0 \in K^*$, így $\langle y_0, x_2 \rangle \leq 1$, ebből pedig $\langle y_0, x_0 \rangle = (1 - \lambda)\langle y_0, x_1 \rangle + \lambda\langle y_0, x_2 \rangle < (1 - \lambda) + \lambda = 1$, azaz $y_0 \notin H'$, így $y_0 \notin F'$ is fennáll. A leképezés kölcsönösen egyértelműségének igazolásához elég belátni, hogy K tetszőleges F lapjára $F^{**} = F$; illetve $(F^*)^{-1} = F$, de ez ekvivalens az előzővel.

Definíció szerint: $F^{**} = \{y \in K^{**} \mid \langle x, y \rangle = 1, x \in F^*\}$ az 5.3-as állítás szerint $K^{**} = K$, ezért ha $y \in F$ és $x \in F^*$, akkor $y \in K^{**}$ és $\langle x, y \rangle = 1$, hiszen x, y teljesíti F^* definícióját. Tehát $y \in F$ esetén $y \in F^{**}$ teljesül, azaz $F \subseteq F^{**}$.

Legyen most $z \in K \setminus F$. Tudjuk, hogy $u_0 \in F^*$ és $K \subseteq \{y \in \mathbf{E}^n \mid \langle y, u_0 \rangle \leq 1\}$. Mivel z nincs rajta H támaszhipersíkján, így $\langle z, u_0 \rangle < 1$, ebből pedig $z \notin F^{**}$ következik. Tehát az $F^{**} \subseteq F$ reláció is bizonyítva van.

A leképezés tartalmazási relációt megfordító tulajdonsága az 5.4-es állításból következik. $\square$

5.2. A szeparációs Tétel

Bezdek Károly 1991-ben közölt [1] cikkében egy újabb ekvivalens megfogalmazást ad a megvilágítási problémára. Ez az állítás konvex test polárisára vonatkozik, mely szerint ha az adott testet egy külső Q pont megvilágít, akkor létezik olyan hipersík, ami szigorúan elválasztja az origót a poláris test F^* lapjától, ahol F^* a Q pont által megvilágított pontot tartalmazó legkisebb dimenziós lapjának polárisa. Precízebben a tétel:

5.7. Tétel. Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ konvex test, ami belsejében tartalmazza az origót. Legyen p egy tetszőleges határpontja K -nak. Jelöljük F_K -val a legkisebb dimenziós lapját K -nak, ami p -t tartalmazza. Ekkor egy $q \in \mathbb{E}^n \setminus K$ pont megvilágítja p -t akkor és csak akkor, ha a $H_q = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle \vec{ox}, \vec{oq} \rangle = 1\}$ hipersík szigorúan elválasztja az origót a K^* poláris test $F_K^* = \{x \in K^* \mid \langle \vec{ox}, \vec{oy} \rangle = 1, \forall y \in F_K\}$ lapjától.

Bizonyítás. Legyen p egy tetszőleges határpontja K -nak. Vezessük be a következő jelöléseket:

$C_F = \bigcap \{H^+ \text{ féltér} \mid \text{a } H \text{ támaszhipersík által meghatározott két féltér közül az, amelyik } K\text{-t tartalmazza, } F \subset H\}$

$\overline{C}_F = \vec{po} + C_F$, ahol $p \in F$

$C_F^* = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle \vec{oy}, \vec{ox} \rangle \leq 0, \text{ ahol } y \in \overline{C}_F\}$ Ez a halmaz azon pontokból áll, amelyekhez húzott helyvektorok a $\overline{C}_F$ halmaz pontjaihoz húzott helyvektoraival legalább derékszöget zárnak be.

Ha F K egy lapja, akkor a lenti definíció a fentivel ekvivalens (lásd 3. ábra):

$C_F^* = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \vec{ox} = \lambda \cdot \vec{oy} \text{ olyan } \lambda > 0\text{-ra, hogy } \langle \vec{oy}, \vec{oz} \rangle \leq 1 \text{ minden } z \in K \text{ esetén, és az } F \text{ lap tetszőleges } z_0 \text{ pontjára } \langle \vec{oy}, \vec{oz}_0 \rangle = 1 \text{ teljesül}\}$. Ebből a definícióból látszik, hogy C_F^* megegyezik F^* konvex kúpburkával.

Legyen F_K a legkisebb dimenziós lapja K -nak, ami tartalmazza p -t. A $q \in \mathbb{E}^n \setminus K$ megvilágítja a p pontot akkor és csak akkor, ha a p kezdőpontú $\vec{qp}$ irányú $\vec{r}$ vektor benne van a C_p halmazban, ami viszont benne van a C_{F_K} -ban. Az $\vec{r}$ vektor pedig akkor és csak akkor van benne a C_{F_K} halmazban, ha a $-\vec{r}$ vektor a $\overline{C}_{F_K}$ halmaz minden vektorával legalább derékszöget zár be (lásd 3. ábra), tehát a $C_{F_K}^*$ halmaz vektoraival legfeljebb 90° -ot zár be: $\langle \vec{oy}, \vec{pq} \rangle > 0$ teljesül minden $y \in C_{F_K}^*$ esetén. Tehát a q pont megvilágítja a p határpontot akkor és csak akkor, ha $\langle \vec{oy}, \vec{pq} \rangle > 0$ minden olyan y -ra, ami F_K^* konvex kúpburkában van. F_K^* konvex kúpburkára akkor és csak akkor teljesül ez a feltétel, ha a belsejére is, tehát $\forall y \in F_K^*$ -ra $\langle \vec{oy}, \vec{pq} \rangle > 0$.

$\langle \vec{oy}, \vec{oq} \rangle > \langle \vec{oy}, \vec{op} \rangle$ teljesül minden $y \in F_K^*$ -ra, hiszen az $\vec{oy}$ -ra vett merőleges vetülete $\vec{oq}$ -nak nagyobb, mint $\vec{op}$ -jé; illetve $\langle \vec{oy}, \vec{op} \rangle = 1$ a poláris definíciója szerint. Tehát az $\langle \vec{oy}, \vec{oq} \rangle$ skaláris szorzat $y \in F_K^*$ -re nagyobb egynél, a $H_q = \{y \in \mathbb{E}^n \mid \langle \vec{oy}, \vec{oq} \rangle = 1\}$ hipersíkra pontosan 1. Tehát a q pont akkor és csak akkor világítja meg p -t, ha a H_q hipersík szigorúan elválasztja az F_K^* lapot az origótól. $\square$

A fenti tétel értelmében n -dimenziós politópokra a Gohberg-Markus-Hadwiger sejtés megfogalmazható a poláritás felhasználásával is. Szeparációs sejtés: Legyen P egy n -dimenziós politóp, ami belsejében tartalmazza az o origót. Ekkor P minden lapja szigorúan elszeparálható o -tól legfeljebb 2^n hipersík segítségével. Jelölje $s(P, o)$ azt a legkisebb számot, amire $s(P, o)$ darab hipersík szigorúan elszeparálja o -t P minden hiperlapjától. A szeparációs tételből következik, hogy P polárisát meg lehet világítani $s(P, o)$ iránnyal.

Hivatkozások

- [1] K. Bezdek, *The problem of illumination of the boundary of a convex body by affine subspaces*, *Mathematika* **38** (1991), no. 2, 362–375.
- [2] K. Bezdek, T. Bisztriczky, A proof of Hadwiger’s covering conjecture for dual cyclic polytopes, *Geom. Dedicata* **68** (1997), no. 1, 29–41.
- [3] V. G. Boltyanskij, I. C. Gohberg, *Tételek és feladatok a kombinatorikus geometriából*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
- [4] V. G. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [5] Szabó László, *Konvex geometria*, ELTE jegyzet, 1996.

Nyilatkozat

Alulírott Gyovai Antal kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Gyovai Antal