

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
BOLYAI INTÉZET
GEOMETRIA TANSZÉK

SZAKDOLGOZAT

FELÜLETEK MODELLEZÉSE

Készítette:
Balázs Tamás

Témavezető:
Dr. Kincses János
egyetemi docens

2011.

Tartalom

Előszó	1
1. De Casteljau algoritmus, Bézier-görbék Bernstein alakja	2
1.1 Affin leképezések, lineáris interpoláció	2
1.2 Bézier görbe definiálása	3
1.3 Bézier görbék néhány alaptulajdonsága	4
1.4 Bernstein polinomok	5
1.5 Bézier-görbe deriváltja	7
1.6 Összetett Bézier-görbék	9
1.7 Rang emelés	10
2. Bézier-négyszögfelületek	12
2.1 Bilineáris interpoláció	12
2.2 A direkt de Casteljau algoritmus	13
2.3 Rang emelés, deriváltak	16
2.4 Összetett Bézier-négyszögfelület, szplájnfelület	18
3. Blender	24

Előszó

A filmiparban napjainkban gyakori, hogy az élszereplős főhősök helyett számítógépes figurákkal találjuk szembe magunkat. Ezeket a szereplőket számítógépes modellező programokkal "keltik életre". Munkámban ezeknek a programoknak a matematikai hátterét szeretném bemutatni. Dolgozatom három fő részből áll.

Az első részben a síkon dolgozunk. Bevezetem a témában fontos alapfogalmakat, mint például a Bézier-görbe, vagy a Bernstein polinom definícióját, valamint ezeknek fontosabb tulajdonságait ismertetem.

A második részben lépünk át a térre, és a síkon használt fogalmakkal fogunk tovább dolgozni, csak itt már olyan fontos dolgokkal is foglalkozunk, hogy hogyan is illesszünk össze két adott felületdarabot.

A harmadik részben a Blender nevű modellező programot szeretném bemutatni, amelyet a filmiparban is használnak látványos animációk készítésére. A dolgozatban található képeket ezzel a programmal szerkesztettem, amelynek használatát az interneten, hivatalos oldalukon található leírásokból tanultam meg: <http://www.blender.org>

Dolgozatom írása során két fontos könyvet használtam fel. Az egyik a **Kurusa Árpád - Szemők Árpád** által írt *A Számítógépes Ábrázoló Geometria Alapjai*, Polygon kiadó, Szeged, 1999, a másik pedig **Gerald Farin**-tól a *CURVES and Surfaces for CAGD A Practical Guide*, Arizona State University, Fifth Edition. A dolgozatomban található állítások és az első két fejezetben található képek megtalálhatóak az említett irodalmakban.

Szeged, 2011. május 2

Balázs Tamás

1. De Casteljaun algoritmus, Bézier-görbék Bernstein alakja

1.1 Affin leképezések, lineáris interpoláció

A CAD rendszerek leginkább affin leképezéseket használnak objektumok elhelyezésére.

1.1. Definíció. Legyen $\mathbf{x}$ egy adott koordinátarendszer egy pontja. A Φ leképezést affin leképezésnek nevezzük, ha

$$(1.1) \quad \Phi \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v};$$

ahol $\mathbf{A}$ egy 3×3 -as mátrix, $\mathbf{v}$ pedig egy $\mathbb{R}^3$ -as vektor.

Tehát, ha

$$(1.2) \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i; \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1; \quad \mathbf{x}, \mathbf{a}_i \in \mathbb{E}^3$$

és Φ egy affin leképezés, akkor

$$(1.3) \quad \Phi \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi \mathbf{a}_i; \quad \Phi \mathbf{x}, \Phi \mathbf{a}_i \in \mathbb{E}^3$$

Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ két különböző pont $\mathbb{E}^3$ -ban. Azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekre teljesül az

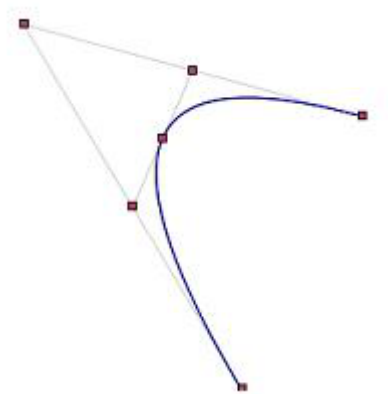
$$(1.4) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b};$$

egyenlőség, az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ -n átmenő egyenesnek nevezzük. Ha egy egyenesen 3 vagy több pont van, akkor azt mondjuk, hogy a pontok kollineárisak.

$t=0$ -ra az egyenes az $\mathbf{a}$ ponton fog átmenni, míg $t=1$ -re a $\mathbf{b}$ -n. $0 \leq t \leq 1$ -re az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ pontok között levő pontokon fog áthaladni.

1.2. Definíció. A lineáris interpoláció a valós egyenes affin leképezése az **a**, és **b** pontokon átmenő egyenesre.

1.2 Bézier görbe definiálása



1.1. ábra. A parabola 3-érintő tétele.

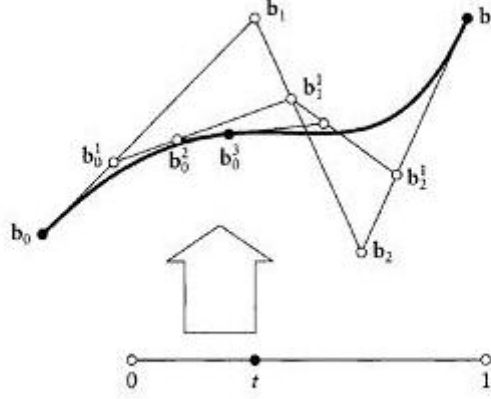
A parabola 3-érintő tétele kimondja, ha egy parabola két érintője egy pontban metszik egymást, és ha ezt a két szakaszt azonos arányban felosztjuk, majd a kapott pontok által meghatározott egyenest ugyanolyan arányban felosztjuk, akkor a kapott pont rajta lesz a parabolán.

A tételt olvashatjuk visszafelé is. Ekkor ha van két szakasz, amelyek egy pontban metszik egymást úgy, hogy a metszéspont az egyik szakasz végpontja, és a másik szakasz kezdőpontja, majd ezeket azonos arányban osztó két pontot összekötjük, és az így nyert újabb szakaszt ugyanolyan arányban ismét felosztjuk, akkor az osztópont egy parabolán van, mely átmegy a két kezdeti szakasz különböző végpontjain is. Vélhetőleg ez a tétel adta az alapötletet a Bézier-görbecsalád felfedezéséhez.

1.3. Definíció. Adottak $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ pontok a síkon. Minden $t \in [0, 1]$ számra legyen $\mathbf{p}_0^0(t) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1^0(t) = \mathbf{p}_1$, ..., $\mathbf{p}_n^0(t) = \mathbf{p}_n$, továbbá minden $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \in \{0, 1, \dots, n-j\}$ és $t \in [0, 1]$ esetén legyen

$$(1.5) \quad \mathbf{p}_i^j(t) = (1-t)\mathbf{p}_i^{j-1} + t\mathbf{p}_{i+1}^{j-1}(t);$$

Ekkor az a görbe, melyet a $\mathbf{p}_0^n(t)$ pont leír, ahogy t végigfut a $[0, 1]$ intervallumon, a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ kontrollpontokhoz tartozó *Bézier-görbe*, melyet



1.2. ábra. Ismételt lineáris interpolációval egy görbe előállítása.

ezután $\mathbf{B}(t)$ -vel jelölünk. A kontrollpontok által meghatározott sokszöget *kontrollpoligonnak*, az n számot a görbe *rangjának* nevezzük.

1.4. Definíció. Azt az eljárást, amikor a Bézier-görbét úgy kapjuk meg a kontrollpoligonból, hogy az oldalait felosztjuk $t/(1-t)$ arányban, és az így kapott eggyel kisebb oldalszámú poligont is ugyanígy felosztjuk, majd ezt n -szer megismételjük *de Casteljau-eljárásnak* nevezzük.

1.3 Bézier görbék néhány alaptulajdonsága

A de Casteljau algoritmussal a Bézier-görbék néhány fontos tulajdonságára tudunk következtetni.

Affin invariancia:

A Bézier-görbék egy fontos tulajdonsága, hogy invariánsak az affin leképezésre, ami azt jelenti, hogy a következő két eljárással ugyanarra az eredményre jutunk: (1) először számítsuk ki a $\mathbf{p}^n(t)$ -t, majd alkalmazzuk rá az affin leképezést; (2) először hajtsuk végre az affin leképezést a kontrollpoligonra, majd számítsuk ki a poligont a t paraméter segítségével. Természetesen az affin invariancia a de Casteljau algoritmus következménye: az algoritmus lineáris interpolációk sorozatából áll, amelyek külön-külön, és így együtt is affin invariánsak. Viszont a Bézier-görbék nem invariánsak a projekcióra.

Affin paraméter transzformációra való invariancia:

Gyakran gondolják azt, hogy a Bézier-görbe csak a $[0,1]$ intervallumon van értelmezve. Ez azért van, mert kényelmes, és nem azért, mert alapvető.

Például legyen definiálva a görbénk a valós egyenes $a \leq u \leq b$ intervallumán, ekkor $t=(u-a)/(b-a)$, és a de Casteljau algoritmus a következőképpen fog kinézni:

$$(1.6) \quad \mathbf{p}_i^r(u) = \left(\frac{b-u}{b-a}\right) \mathbf{p}_i^{r-1}(u) + \left(\frac{u-a}{b-a}\right) \mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(u)$$

A $[0,1]$ intervallumról az $[a,b]$ intervallumra való transzformáció egy affin leképezés, ezért mondhatjuk, hogy a Bézier-görbék invariánsak az affin paraméter transzformációra.

Konvex burok tulajdonság:

$t \in [0,1]$ -re, $\mathbf{p}^n(t)$ a kontrollpoligon konvex burkában helyezkedik el. Ez azért van, mert minden közbeeső $\mathbf{p}_i^r$ kontrollpontot megkapunk az előző $\mathbf{p}_j^{r-1}$ kontrollpontok baricentrikus kombinációjából, és a de Casteljau algoritmus-sal sosem kerülünk ki a konvex burokból.

Egy nagyon fontos felhasználása például amikor azt szeretnénk ellenőrizni, hogy 2 görbe vajon metszi-e egymást. Ekkor ahelyett, hogy kiszámolnánk a lehetséges metszéspontokat, megrajzoljuk mindkét görbe kontrollpoligonjához a lehetséges legkisebb négyszöget ami tartalmazza őket (ezeket angolul *minmax box*-oknak hívjuk). Ha ezeknek nincs metszetük, akkor a konvex burok tulajdonsága miatt a két görbe biztosan nem metszi egymást. Ha igen, akkor további számításokra van szükség.

1.4 Bernstein polinomok

A későbbiekben szeretnénk a Bézier-görbéket a Bernstein polinomokkal definiálni.

1.5. Definíció.

$$(1.7) \quad B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},$$

Az egyik legfontosabb tulajdonságuk, hogy kifejezhetők a következő rekurzióval:

$$(1.8) \quad B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t), \quad ahol$$

$$B_0^0(t) = 1, \quad \text{és} \quad B_i^j(t) = 0 \quad \text{minden} \quad j \leq 0 \quad \text{vagy} \quad n \leq j \quad - \text{re}.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= (1-t) B_i^{n-1}(t) + t B_{i-1}^{n-1}(t) \end{aligned}$$

Másik fontos tulajdonságuk a Bernstein polinomoknak, hogy a $[0,1]$ egy egységbontását adják, tehát

$$(1.9) \quad \sum_{j=0}^n B_j^n(t) = 1;$$

Ez az állítás a binomiális tételből következik:

$$(1.10) \quad 1 = [t + (1-t)]^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} = \sum_{j=0}^n B_j^n(t)$$

Most már beláthatjuk, hogy a Bézier-görbék és a Bernstein polinomok között milyen összefüggés is van.

1.6. Tétel. *A $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ kontrollpontokkal generált Bézier-görbe de Casteljau pontjaira*

$$(1.11) \quad \mathbf{p}_i^j(t) = \sum_{k=0}^j \mathbf{p}_{i+k} B_k^j(t) \quad (0 \leq j \leq n)$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i^{j+1} &= (1-t) \mathbf{p}_i^j + t \mathbf{p}_{i+1}^j \\ &= (1-t) \sum_{k=0}^j \mathbf{p}_{i+k} B_k^j(t) + (t) \sum_{k=0}^j \mathbf{p}_{i+1+k} B_k^j(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-t) \sum_{k=0}^j \mathbf{p}_{i+k} B_k^j(t) + (t) \sum_{k=1}^{j+1} \mathbf{p}_{i+k} B_{k-1}^j(t) \\
&= \mathbf{p}_i (1-t) B_0^j(t) + \sum_{k=1}^j \mathbf{p}_{i+k} \left((1-t) B_k^j(t) + t B_{k-1}^j(t) \right) + t \mathbf{p}_{i+j+1} B_j^j(t) \\
&= \sum_{k=0}^{j+1} \mathbf{p}_{i+k} B_k^{j+1}(t)
\end{aligned}$$

1.7. Megjegyzés. A bizonyításban felhasználtuk az alábbi 2 egyenlőséget:

$$(1.12) \quad (1-t) B_k^j(t) + t B_{k-1}^j(t) = B_k^{j+1}(t)$$

$$\begin{aligned}
(1-t) \binom{j}{k} t^k (1-t)^{j-k} + t \binom{j}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{j-k+1} &= \left(\binom{j}{k} + \binom{j}{k-1} \right) t^k (1-t)^{j-k+1} \\
&= \binom{j+1}{k} t^k (1-t)^{j-k+1} \\
&= B_k^{j+1}(t)
\end{aligned}$$

Az előző tételből pedig következik, hogy

$$(1.13) \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{p}_0^n(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{p}_k B_k^n(t)$$

1.5 Bézier-görbe deriváltja

Ahhoz hogy megadjuk a Bézier-görbék r -edik deriváltját, bevezetjük a következő operátort:

1.8. Definíció. A $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ kontrollpontok r -*differentiál* a

$$(1.14) \quad \Delta^0 \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i, \quad \Delta^r \mathbf{p}_i = \Delta^{r-1} \mathbf{p}_{i+1} - \Delta^{r-1} \mathbf{p}_i$$

rekurzióval definiált $\Delta^r \mathbf{p}_i$ vektorok.

Teljes indukcióval könnyen bizonyítható, hogy

$$(1.15) \quad \Delta^r \mathbf{p}_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \mathbf{p}_{i+j}$$

1.9. Tétel. *A Bézier-görbe r -edik deriváltja is Bézier-görbe, melynek a kontrollpontjai a $\Delta^r \mathbf{p}_i$ pontok, vagyis*

$$(1.16) \quad \mathbf{B}^{(r)}(t) = \frac{d^r \mathbf{B}}{dt^r}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{p}_i B_i^{n-r}(t).$$

Bizonyítás. Elég az állítást az $r = 1$ esetre bizonyítani, mivel a magasabb deriváltakra is csak az egyszeres deriválást kell többször végrehajtani.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(t) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \frac{dB_i^n(t)}{dt} \\ &= -n\mathbf{p}_0 B_0^{n-1}(t) + n \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{p}_i \left(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t) \right) + n\mathbf{p}_n B_n^{n-1}(t) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{p}_i B_i^{n-1}(t), \end{aligned}$$

és felhasználtuk, hogy

$$\frac{dB_i^n(t)}{dt} = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$$

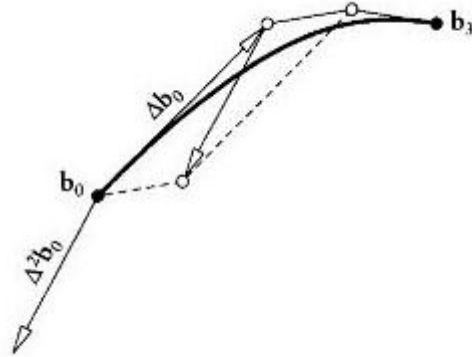
1.10. Következmény. *A Bézier-görbe végpontjaiban a deriváltak csak a végpontokhoz sorszámában közeli kontrollpontoktól függenek*

$$(1.17) \quad \mathbf{B}^{(r)}(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{B}^{(r)}(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{p}_{n-r}.$$

A Bézier-görbe r -edik deriváltja kifejezhető a de Casteljau pontokkal is, felhasználva a (1.15)-es egyenlőséget:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{p}_i B_i^{n-r}(t) &= \sum_{i=0}^{n-r} \left(\sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{n-j} \mathbf{p}_{i+j} \right) B_i^{n-r}(t) \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{n-j} \sum_{i=0}^{n-r} \mathbf{p}_{i+j} B_i^{n-r}(t) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{n-j} \mathbf{p}_j^{n-r}(t) = \Delta^r \mathbf{p}_0(t). \end{aligned}$$

Ezt pedig csak be kell helyettesíteni az előző tétel eredményébe.

1.3. ábra. $t=0$ pontban az első és második derivált.

1.6 Összetett Bézier-görbék

Ha bizonyos pontokon keresztülmenő Bézier-görbét akarunk szerkeszteni, akkor az csak rengeteg számítással oldható meg, míg az összetett Bézier-görbék esetében jóval kevesebb számolás is elegendő.

1.11. Definíció. Az $U=[u_0, u_n]$ zárt intervallumon paraméterezett S görbe *összetett Bézier-görbe*, ha létezik az U intervallumnak olyan $u_0 < u_1 < \dots < u_{n-1} < u_n$ felbontása, hogy S minden $U_i=[u_i, u_{i+1}]$ intervallumon Bézier-görbe, az $S_i(t) = S(t(u_{i+1}-u_i)+u_i)$ paraméterezéssel. Az u_i értékeket töréspontoknak nevezzük, az S_i görbét Bézier-görbének, az $S(u_i) = S_i(0) = S_{i-1}(1)$ pontokat pedig csomópontoknak nevezzük.

A továbbiakban olyan összetett Bézier-görbékkel dolgozunk, amelyek harmadrendű görbékéből fognak állni. Ezeket köbös Bézier-görbéknek, vagy szplájnoknak nevezzük.

Ahhoz, hogy a görbéinket összeillesszük szükségünk van a simaságuk vizsgálatára. Legyen adott egy szplájn, amelyet két harmadrendű görbe alkot. Ezeknek a görbéknek a kontrollpontjai legyenek a $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_3$ és $\mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_6$ pontok, valamint a két görbét jelölje $\mathbf{x}_-$ és $\mathbf{x}_+$. Mivel mindkettőnek $\mathbf{p}_3$ közös pontja, ezért a görbe folytonos lesz, vagyis C^0 görbe.

Viszont ha azt szeretnénk, hogy a simaságuk megegyezzen, akkor többet kell feltenni. (1.10)-es következményből adódik, hogy a $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ pontoknak

egy egyenesre kell esniük. Ezzel a feltétellel garantáljuk, hogy $\mathbf{p}_3$ csúcsnál az érintő megegyezik mindkét görbénél. Az ilyen görbéket G^1 görbéknek nevezzük.

Ennél erősebb feltétel, ha azt is megköveteljük, hogy a két görbe folytonosan differenciálható, vagyis C^1 görbe legyen. Tegyük fel, hogy x_- az $[a, b]$ intervallumon, míg x_+ a $[b, c]$ intervallumon van definiálva. Deriváljuk a két szegmenst b paraméter szerint, ekkor a következőt kapjuk:

$$(1.18) \quad \frac{3}{b-a}[\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2] = \frac{3}{c-b}[\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3]$$

Ez geometriailag azt jelenti, hogy a $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ pontok arányának meg kell egyeznie az a, b, c paraméterek arányával. Ez a feltétel sokkal erősebb, mint amit a G^1 görbénél tettünk fel.

A következő tétel biztosít minket, hogy tetszőleges pontokhoz megszerkeszthető egyértelmű módon egy egyszeresen differenciálható köbös összetett görbe.

1.12. Tétel. *Tetszőlegesen adott $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ pontokhoz, $u_0 < u_1 < \dots < u_n$ töréspontokhoz és $\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_n$ vektorokhoz pontosan egy olyan $\mathbf{S}$ köbös összetett Bézier-görbe létezik, amely folytonosan differenciálható, és amelyre $\mathbf{S}(u_i) = \mathbf{p}_i$ és $\mathbf{S}'(u_i) = \mathbf{t}_i$, ahol $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.*

1.7 Rang emelés

Célunk, hogy egy új csúcs beszúrásával a görbénk alakja ne változzon, tehát keressük azt a $\bar{\mathbf{p}}_0, \bar{\mathbf{p}}_1, \dots, \bar{\mathbf{p}}_n, \bar{\mathbf{p}}_{n+1}$ kontrollpoligont, amely azt a görbét állítja elő, mint a $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ kontrollpoligon.

Állítsuk elő az $\mathbf{x}(t)$ görbét a következő módon: $\mathbf{x}(t) = (1-t)\mathbf{x}(t) + t\mathbf{x}(t)$, és

$$(1.19) \quad (1-t)B_i^n(t) = \frac{n+1-i}{n+1}B_i^{n+1}(t), \quad tB_i^n(t) = \frac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(t)$$

egyenlőségekből következik, hogy

$$(1.20) \quad \mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{p}_i B_i^{n+1} + \sum_{i=0}^n \frac{i+1}{n+1} \mathbf{p}_i B_{i+1}^{n+1}$$

Az első szummának a felső limitjét növelhetjük $n+1$ -re, mert az értéke 0 lesz, így az összeg nem változtatunk, ugyanígy a második szummánál se

fog változni az összeg, ha növeljük $n+1$ -ig, és eltoljuk eggyel az i értékét. Így a következőt kapjuk:

$$(1.21) \quad \mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{p}_i B_i^{n+1} + \sum_{i=0}^{n+1} \frac{i+1}{n+1} \mathbf{p}_{i-1} B_i^{n+1}$$

Adjuk össze a két összeget, és megkapjuk az $n+1$ csúcsú kontrollpoligon csúcsait:

$$(1.22) \quad \bar{\mathbf{p}}_i = \frac{i}{n+1} \mathbf{p}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{p}_i; \quad i = 0, \dots, n, n+1$$

így az új $\bar{\mathbf{p}}_i$ csúcsok a régi csúcsok lineáris kombinációjaként állnak elő.

Ezt az eljárást ismételgethetjük és így kontrollpoligonoknak egy sorozatát kapjuk. Nem nehéz megmutatni, hogy ez a sorozat egyenletesen fog tartani a Bézier-görbéhez. Fontos következmény, ha az újonnan kapott görbének és az eredeti görbének megváltoztatjuk egy kontrollpontját, akkor az újonnan kapott görbének egy kisebb részére lesz ez hatással, ami a lokális tulajdonságnak köszönhető.

2. Bézier-négyszögfelületek

2.1 Bilineáris interpoláció

Ahogy a lineáris interpoláció a Bézier-görbék alapjául szolgált, ugyanúgy szolgál alapjául a Bézier-négyszögfelületeknek a bilineáris interpoláció, amely 4 ponton szolgáltatja a "legegyszerűbb" felületet.

2.1. Definíció. Legyen $\mathbf{p}_{00}, \mathbf{p}_{01}, \mathbf{p}_{10}, \mathbf{p}_{11} \in \mathbb{E}^3$. A tér azon $\mathbf{x}$ pontjai, melyre

$$(2.1) \quad \mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \mathbf{p}_{ij} B_i^1(u) B_j^1(v),$$

a $\mathbf{p}_{00}, \mathbf{p}_{01}, \mathbf{p}_{10}, \mathbf{p}_{11}$ pontok *bilineáris interpoláltjának* nevezzük, a négy pontra vett bilineáris interpolált a négy ponton keresztülhaladó *hiperbolikus paraboloidot* határozza meg.

Mátrix alakja a következő:

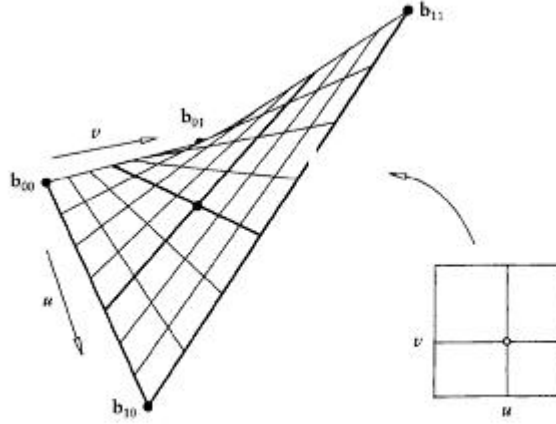
$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 1-u & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{00} & \mathbf{p}_{01} \\ \mathbf{p}_{10} & \mathbf{p}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix}$$

A bilineáris interpoláció tekinthető úgy, mint az egységnézet $0 \leq u, v \leq 1$ leképezése a térbe. Az egységnézet az interpoláció értelmezési tartománya, míg az $\mathbf{x}$ felület az értékkészlete. Azok az egyenesek, amelyek párhuzamosak az értelmezési tartomány valamelyik oldalával, azok az értékkészletben egy görbének fognak megfelelni, ezeket *izoparametrikus görbéknek* nevezzük. Minden izoparametrikus görbe a hiperbolikus paraboloidon egy egyenes.

Ahelyett, hogy kiszámolnánk a bilineáris interpolációt direktben, használhatjuk a következő kétlépcsős eljárást:

számoljuk ki a közbeeső pontokat:

$$(2.2) \quad \mathbf{p}_{00}^{01} = (1-v)\mathbf{p}_{00} + v\mathbf{p}_{01}$$



2.1. ábra. Bilineáris interpoláció.

$$(2.3) \quad \mathbf{p}_{10}^{01} = (1 - v)\mathbf{p}_{10} + v\mathbf{p}_{11}$$

és végül kiszámoljuk

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p}_{00}^{11} = (1 - v)\mathbf{p}_{00}^{01} + v\mathbf{p}_{10}^{01}$$

Tehát először kiszámoljuk az együtthatókat a v irányába, majd pedig u irányába is. (Ha megfordítjuk, és először u , majd pedig v irányában számolnánk ki, az eredményünk nem változik)

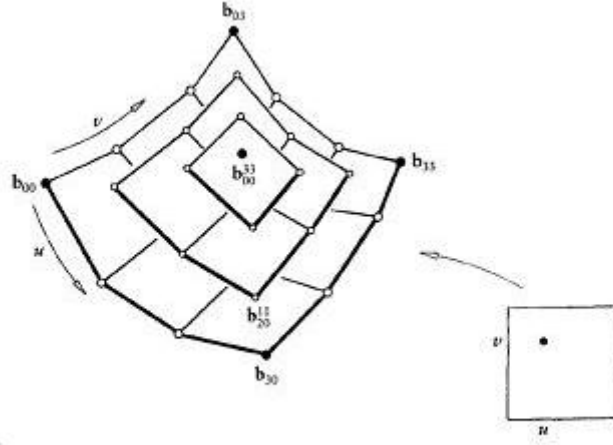
2.2 A direkt de Casteljau algoritmus

Felületeket az ismételt bilineáris interpoláció alkalmazásával fogjuk kiszámolni. Tegyük fel, hogy adva van egy téglalap mátrixa a $\mathbf{p}_{ij}$ $0 \leq i, j \leq n$ pontok, és u, v paraméterértékek. A következő algoritmus egy pontot fog generálni egy felületen:

2.2. Definíció. Legyen adott $\{\mathbf{p}_{ij}\}_{i,j=0}^n$ és $u, v \in \mathbb{R}^2$, a következő algoritmus egy pontot fog generálni a felületen:

$$\mathbf{p}_{ij}^{rr} = (1 - u \quad u) \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{i,j}^{r-1,r-1} & \mathbf{p}_{i,j+1}^{r-1,r-1} \\ \mathbf{p}_{i+1,j}^{r-1,r-1} & \mathbf{p}_{i+1,j+1}^{r-1,r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - v \\ v \end{pmatrix}$$

ahol $r=0, \dots, n$, $i, j=0, \dots, n-r$, $\mathbf{p}_{i,j}^{0,0} = \mathbf{p}_{i,j}$. A $\mathbf{p}_{0,0}^{n,n}(u, v)$ a $\mathbf{p}^{n,n}$ Bézier felületen egy pont u, v paraméterekkel. A $\mathbf{p}_{i,j}$ hálót Bézier-hálónak hívjuk.



2.2. ábra. Direkt de-Casteljau algoritmus egy felületen.

Definiáljuk a felületünket a következő módon:

$$(2.4) \quad \mathbf{p}^{m,n} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{p}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

Az ilyen módon megadott felületet *Bézier-négyszögfelületnek* nevezzük. Az előző egyenlőséget felírhatjuk mátrix alakba is:

$$\mathbf{p}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(u, v) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{0,0} & \dots & \mathbf{p}_{0,n} \\ B_0^m(u) & \dots & B_m^m(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{0,0} & \dots & \mathbf{p}_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{p}_{m,0} & \dots & \mathbf{p}_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^n(v) \\ \vdots \\ B_n^n(v) \end{pmatrix}$$

Vizsgáljuk meg pontosabban az egyenlőséget. Ha $u=0$, akkor

$$\mathbf{p}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(0, v) = (\mathbf{p}_{0,0} \quad \mathbf{p}_{0,1} \quad \dots \quad \mathbf{p}_{0,n}) \begin{pmatrix} B_0^n(v) \\ \vdots \\ B_n^n(v) \end{pmatrix}$$

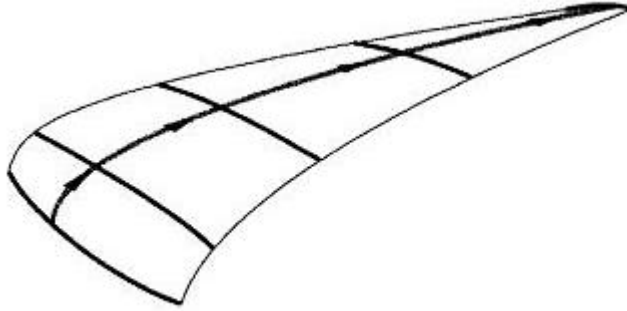
tehát megkapjuk a felület egyik oldalát. Ha rögzítjük u -t u_0 pontban, akkor az u_0 izoparametrikus görbét kapjuk meg v függvénye szerint:

$$\mathbf{p}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(u, v) = \begin{pmatrix} B_0^m(u_0) & \dots & B_m^m(u_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{0,0} & \dots & \mathbf{p}_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{p}_{m,0} & \dots & \mathbf{p}_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^n(v) \\ \vdots \\ B_n^n(v) \end{pmatrix}$$

Ha az utolsó két mátrixot összeszorozzuk, akkor egy n -ed fokú Bézier-görbét kapunk, ahol az $n+1$ kontrollpontot a két mátrix szorzata fogja generálni:

$$\mathbf{p}_{\mathbf{n}}(v) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{0,0} & \dots & \mathbf{p}_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{p}_{m,0} & \dots & \mathbf{p}_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^n(v) \\ \vdots \\ B_n^n(v) \end{pmatrix}$$

Ennek a görbének a pontjai lesznek a továbbiakban a kontrollpontok, és hogy megkapjuk az u_0 paraméterhez tartozó felületet, megszorozzuk őket az u_0 -hoz tartozó Bernstein polinomokkal:



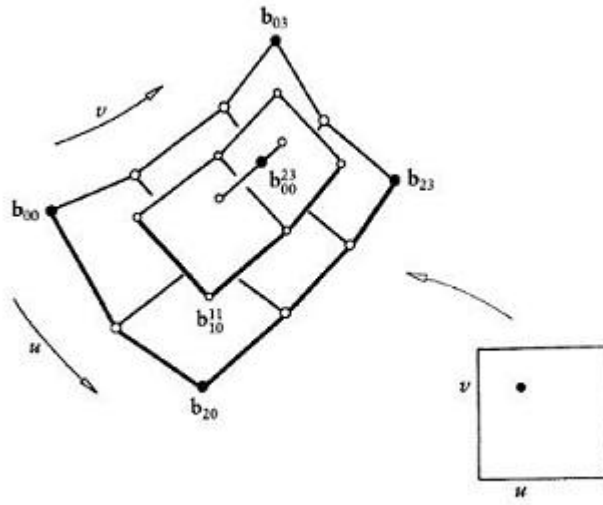
2.3. ábra. Egy felület megadható egy mozgás közben deformálódó görbével is.

$$\mathbf{p}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(u_0, v) = \begin{pmatrix} B_0^m(u_0) & \dots & B_m^m(u_0) \end{pmatrix} \mathbf{p}_{\mathbf{n}}(v)$$

Ezzel beláttuk, hogy az előbb definiált Bézier-négyszögfelület, és a de Casteljau algoritmussal definiált felület megegyezik.

Tehát egy felületet értelmezhetünk úgy is, mint egy térben mozgó kétdimenziós görbe produktumát, amely miközben mozog, folyamatosan változtatja az alakját.

Jogosan vetődik fel az a kérdés, hogy mi történik akkor, ha az u , és v paraméterek foka nem egyezik meg. Vegyük a következő $\{\mathbf{p}_{i,j}\}$ kontrollhálót, ahol $i=0,\dots,m$ és $j=0,\dots,n$. A de-Casteljau algoritmust most is elvégezhetjük, csak bizonyos eseteket kell feltüntetni. A 2.4-es ábrán láthatjuk, hogy az algoritmus nem hajtható végig teljesen. A $\mathbf{p}_{i,j}^{k,k}$ alak egy görbe kontrollpoligonja, ahol $k=\min(m,n)$, és végrehajtunk egy egy szabadságfokú de Casteljau algoritmust, hogy megkapjunk a felületen egy pontot.



2.4. ábra. Egy szabadságfokú de-Casteljau algoritmus $(m,n)=(2,3)$ esetben.

Tulajdonságai:

A de Casteljau algoritmus tulajdonágai miatt a Bézier-felület affin invariáns, a kontrollpontok konvex burkában marad, ha $0 \leq u, v \leq 1$. A határoló görbék polinomiális görbék lesznek.

2.3 Rang emelés, deriváltak

Tegyük fel, az (m, n) -ed fokú Bézier-felületünket $m+1, n$ alakban szeretnénk felírni. Ez megegyezik azzal, hogy találjuk meg azt a $\mathbf{p}_{i,j}^{(1,0)}$ együtthatót, amelyre :

$$\mathbf{p}^{m,n} = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^{m+1} \mathbf{p}_{i,j}^{(1,0)} B_i^{m+1}(u) \right) B_j^n(v).$$

Ezt a problémát a görbék esetében már megoldottuk, így

$$(2.5) \quad \mathbf{p}_{i,j}^{m,n} = \frac{i}{m+1} \mathbf{p}_{i,j-1} + \left(1 - \frac{i}{m+1}\right) \mathbf{p}_{i,j}; \quad \begin{cases} i = 0, \dots, m+1 \\ j = 0, \dots, n \end{cases}$$

Tehát, ha az u irányba szeretnénk elvégezni a rangemelést, akkor nincs más dolgunk, mint hogy a kontrollháló összes sorát m -ed fokú Bézier-görbének vesszük, és mindegyiken elvégezzük a rangemelést. A v irányba való rangemelés ugyanígy történik. A lokális tulajdonság itt is ugyanolyan fontos, mint a görbék esetében.

Görbénél deriváláskor elegendő volt a kontrollpontokat deriválni, hasonló a helyzet a felületeknél is. A parciális deriváltakat vesszük figyelembe $\frac{\partial}{\partial u}$ -t, vagy $\frac{\partial}{\partial v}$ -t. A parciális derivált nem más, mint az izoparametrikus görbe érintője. A görbe u szerinti parciális deriváltja:

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{p}^{m,n}(u, v) = m \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^{m-1} \Delta^{1,0} \mathbf{p}_{i,j} B_i^{m-1}(u) \right) B_j^n(v),$$

az r -edik parciális deriváltja pedig

$$(2.7) \quad \frac{\partial^r}{\partial u^r} \mathbf{p}^{m,n}(u, v) = \frac{m!}{(m-r)!} \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^{m-r} \Delta^{r,0} \mathbf{p}_{i,j} B_i^{m-r}(u) \right) B_j^n(v), \text{ ahol}$$

$$(2.8) \quad \Delta^{r,0} \mathbf{p}_{i,j} = \Delta^{r-1,0} \mathbf{p}_{i+1,j} - \Delta^{r-1,0} \mathbf{p}_{i,j}$$

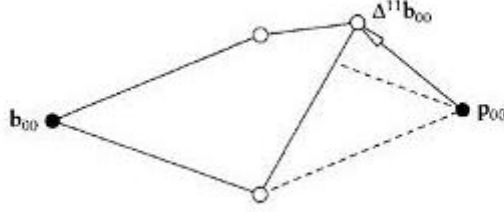
(A v -re vett parciális derivált ugyanígy történik.) Ezek után a kevert parciális deriváltak a következő lesz a formulája:

$$(2.9) \quad \frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s} \mathbf{p}^{m,n}(u, v) = \frac{m!n!}{(m-r)!(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s} \mathbf{p}_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v)$$

Az összeillesztésnél fontosak lesznek a négy határológörbék deriváltjai, amit az $u=0$ esetben így kapunk:

$$(2.10) \quad \frac{\partial^r}{\partial u^r} \mathbf{p}^{m,n}(0, v) = \frac{m!}{(m-r)!} \sum_{j=0}^n \Delta^{r,0} \mathbf{p}_{0,j} B_j^n(v)$$

Tehát a határgörbénk r -edik deriváltja csak az $r+1$ -edik sor kontrollpontjaitól függ.



2.5. ábra. A három pont által meghatározott paralelogramma.

A $\frac{\partial^2}{\partial u, v}$ parciális deriválnak különleges szerepe van. Ez nem más, mint egy $(m-1, n-1)$ -ed fokú Bézier-felület, melynek az együtthatói $mn\Delta^{1,1}\mathbf{p}_{i,j}$. Általánosságban elmondható, hogy egy paralelogramma negyedik $\bar{\mathbf{p}}_{i,j}$ csúcsát meghatározzák a maradék $\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{p}_{i+1,j}, \mathbf{p}_{i,j+1}$ csúcsok:

$$(2.11) \quad \bar{\mathbf{p}}_{i,j} - \mathbf{p}_{i+1,j} = \mathbf{p}_{i,j+1} - \mathbf{p}_{i,j},$$

és, mivel

$$(2.12) \quad \Delta^{1,1}\mathbf{p}_{i,j} = (\mathbf{p}_{i+1,j+1} - \mathbf{p}_{i+1,j}) - (\mathbf{p}_{i,j+1} - \mathbf{p}_{i,j}),$$

így

$$(2.13) \quad \Delta^{1,1}\mathbf{p}_{i,j} = \mathbf{p}_{i+1,j+1} - \bar{\mathbf{p}}_{i,j}.$$

Tehát a $\Delta^{1,1}\mathbf{p}_{i,j}$ méri a Bézier-háló négyszögeinek az elhajlását a paralelogrammától. Egy érdekes osztálya a felületeknek, amelyekre igaz, hogy minden $\mathbf{p}_{i,j}, \mathbf{p}_{i+1,j}, \mathbf{p}_{i,j+1}, \mathbf{p}_{i+1,j+1}$ négyszög paralelogramma, mert abban az esetben a $\frac{\partial^2}{\partial u, v}$ értéke nullává válik. Ezeket translációs felületeknek nevezzük.

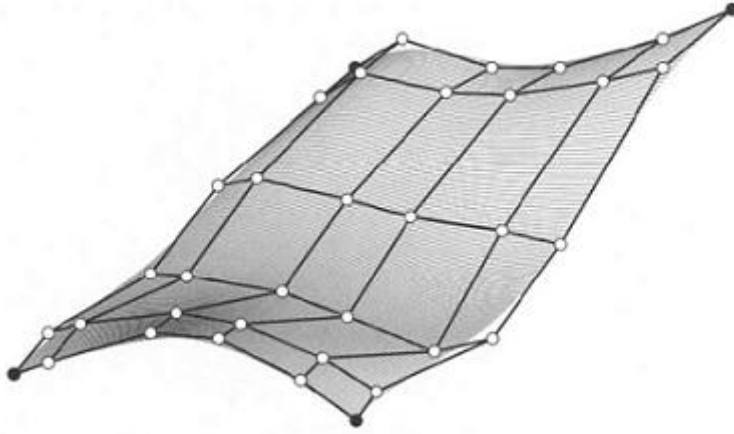
2.4 Összetett Bézier-négyszögfelület, szplájnfelület

Szplájnfelületek

A szplájnfelületek fontos szerepet játszanak a modern felülettervezésben. Mivel a szplájnok nem mások, mint bikubikus elemi felületek összessége, így felvetődik a kérdés, hogyan található meg a Bézier-hálójá minden egyes

elemi felületnek? Hogy megoldjuk ezt a problémát, visszavezetjük a kérdést a görbék esetéhez:

$$(2.14) \quad \mathbf{x}(u, v) = \sum_i B_i^n(v) \left[\sum_j \mathbf{p}_{i,j} B_j^m(u) \right]$$



2.6. ábra. *Bikubikus szplájnfelület, amely 3x4-es felületdarabokból áll.*

Ahogy láthatjuk minden i értékre kapunk egy szplájngörbét u paraméterrel. Ez átalakítható Bézier formulává a következő módon: értelmezzük a szplájnhalót sorról-sorra, mint egyváltozós szplájnpoligont, majd alakítsuk át őket szakaszonkénti Bézier-formulává. Majd ugyanezt elvégezzük a szplájnhalójával oszlopról-oszlopra, így ez a végső Bézier-poligon fogja alkotni a szakaszos Bézier-hálóját a felületnek.

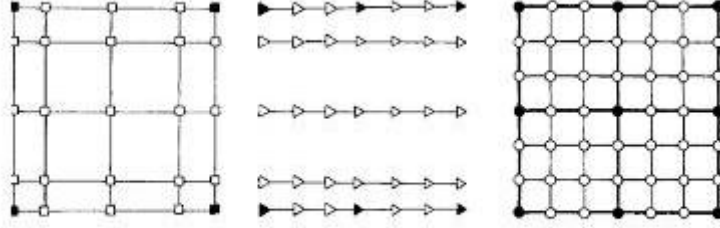
A racionális Bézier-felületet úgy definiáljuk, mint egy 4 dimenziós Bézier-négyszögfelület projekcióját.

Tehát a racionális Bézier-felület formulája:

$$(2.15) \quad \mathbf{x}(u, v) = \frac{\sum_i \sum_j w_{i,j} \mathbf{p}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_i \sum_j w_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)},$$

ahol a $w_{i,j}$ értékek a pontokhoz tartozó súlyokat jelöli (ezekről később részletesen fogok írni).

Simaság



2.7. ábra.

Először sorról sorra, majd pedig oszlopról oszlopra számoljuk ki a változókat.

Legyen $\mathbf{x}(u, v)$, elemi felület definiálva az $[u_{I-1}, u_I] \times [v_J, v_{J+1}]$, és $\mathbf{y}(u, v)$ elemi felület a $[u_I, u_{I+1}] \times [v_J, v_{J+1}]$ halmazon. Csak akkor r differenciálhatóak a közös határológörbe mentén $\mathbf{x}(u_I, v) = \mathbf{y}(u_I, v)$, ha minden $u \in u_I$:

$$(2.16) \quad \frac{\partial^r}{\partial u^r} x(u, v) = \frac{\partial^r}{\partial u^r} y(u, v)$$

Legyen a bal oldali felületdarab kontrollhálóját $\{\mathbf{p}_{i,j}\}; 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$, míg a jobb oldali felületdarab kontrollhálóját $\{\mathbf{p}_{i,j}\}; m \leq i \leq 2m, 0 \leq j \leq n$. A Bézier-négyszögfelületek határgörbéi menti deriváltakból:

$$(2.17) \quad \left(\frac{1}{\Delta_{I-1}}\right)^r \sum_{j=0}^n \Delta^{r,0} \mathbf{p}_{m-r,j} B_j^n(v) = \left(\frac{1}{\Delta_I}\right)^r \sum_{j=0}^n \Delta^{r,0} \mathbf{p}_{m,j} B_j^n(v), \quad \text{ahol}$$

$\Delta_I = u_{I+1} - u_i$. Mivel $B_j^n(v)$ lineárisan függetlenek, ezért elég csak összehasonlítani a következő egyenlőséget:

$$(2.18) \quad \left(\frac{1}{\Delta_{I-1}}\right)^r \sum_{j=0}^n \Delta^{r,0} \mathbf{p}_{m-r,j} = \left(\frac{1}{\Delta_I}\right)^r \sum_{j=0}^n \Delta^{r,0} \mathbf{p}_{m,j}.$$

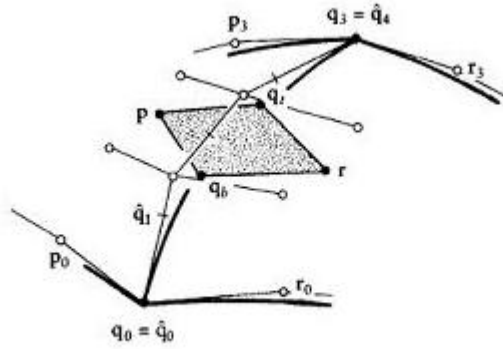
Ezzel megkaptuk az összetett Bézier-felületekre a C^r feltételt:

2.3. Tétel. *Két elemi Bézier-felület akkor és csak akkor illeszkedik r -szer differenciálható módon, ha a Bézier-háló minden sora olyan kontrollpoligont alkot, amely r -szer differenciálható összetett Bézier görbe.*

C^1 esetre például nem elég, hogy $\mathbf{p}_{m-1,j}, \mathbf{p}_{m,j}, \mathbf{p}_{m+1,j}$ csak kollineárisak legyenek, az is kell, hogy minden j -re az arányuk megegyezzen.

A következőkben azokat a feltételeket keressük, amelyek ahhoz kellenek, hogy két szomszédos Bézier-négyszögfelület G^1 folytonos legyen.

Tegyük fel, hogy adott két szomszédos Bézier-négyszögfelület azonos n -ed fokú határmenti görbével. Jelöljük ezt a görbét $\mathbf{x}(t)$ -vel, ezt megkaphatjuk a de Casteljau algoritmus segítségével. Az algoritmussal megkaphatjuk a görbe érintőjét, mint két $\mathbf{p}_1^{n-1}$, $\mathbf{p}_2^{n-1}$ közbeeső pontok különbségeként. Jelöljük a $\mathbf{p}_1^{n-1}$ pontot $\mathbf{q}_b$ -vel, a $\mathbf{p}_2^{n-1}$ pontot pedig $\mathbf{q}_t$ -vel.



2.8. ábra. Négyszögfelületekre a G^1 folytonosság.

A felületnek egy a határmenti görbéhez közeli $\mathbf{p}(u)$ pontjának az érintő síkját kifesztítik a hozzá tartozó $\mathbf{p}_{00}^{n-1}$, $\mathbf{p}_{01}^{n-1}$, $\mathbf{p}_{10}^{n-1}$, $\mathbf{p}_{11}^{n-1}$ de Casteljau pontok. Vegyünk ezen a síkon egy tetszőleges $\mathbf{p}$ pontot. Ekkor a $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}_b$, $\mathbf{q}_t$ a $\mathbf{p}(u)$ érintősíkját fogja kifesztíteni. Ugyanezzel a gondolatmenettel megkaphatjuk a másik felületen található pont érintőfelületét, amelyet az $\mathbf{r}$, $\mathbf{q}_b$, $\mathbf{q}_t$ pontok fesztísenek ki.

Ekkor a két felület akkor lesz G^1 folytonos, ha a négy pont egy síkban van minden t értékre, vagyis ha $\overline{\mathbf{p}\mathbf{r}}$ -nek és $\overline{\mathbf{q}_b\mathbf{q}_t}$ -nek mindig van metszéspontja. Ez azt jelenti, hogy léteznek olyan $\lambda(t)$ és $\mu(t)$ függvények, hogy mindet t -re

$$(2.19) \quad (1 - \lambda(t))\mathbf{p}(t) + \lambda(t)\mathbf{r}(t) = (1 - \mu(t))\mathbf{q}_b(t) + \mu(t)\mathbf{q}_t(t)$$

Emeljük a határológörbe rangját n -ről $(n+1)$ -re. Az újonnan kapott kontrollpontok legyenek $\hat{\mathbf{q}}_0, \dots, \hat{\mathbf{q}}_{n+1}$. Tehát van $n+1$ $\mathbf{p}_i$ kontrollpontunk, $n+2$ $\hat{\mathbf{q}}_i$ kontrollpontunk, valamint $n+1$ $\mathbf{r}_i$ kontrollpontunk. Ezzel sikerült háromszögekre redukálni a problémát.

Tudjuk, hogy az első és utolsó háromszögpárnak egy síkban kell lennie. Ez azt jelenti, hogy létezik λ_0 , λ_1 , μ_0 , μ_1 , hogy

$$1 - \lambda(t) = (1 - t)\bar{\lambda}_0 + t\bar{\lambda}_1, \quad 1 - \mu(t) = (1 - t)\bar{\mu}_0 + t\bar{\mu}_1,$$

ahol $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$. Írjuk fel a $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{q}_b(t)$, $\mathbf{q}_t(t)$ és $\mathbf{r}(t)$ explicit alakját:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n$$

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{r}_i B_i^n$$

$$\mathbf{q}_b(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{q}_i B_i^n$$

$$\mathbf{q}_t(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{q}_{i+1} B_i^n$$

A (2.19)-es egyenlőség ezután a következőképp alakul

$$\begin{aligned} & \left((1 - t)\bar{\lambda}_0 + t\bar{\lambda}_1 \right) \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t) + \left((1 - t)\lambda_0 + t\lambda_1 \right) \sum_{i=0}^n \mathbf{r}_i B_i^n(t) \\ &= \left((1 - t)\bar{\mu}_0 + t\bar{\mu}_1 \right) \sum_{i=0}^n \mathbf{q}_i B_i^n(t) + \left((1 - t)\mu_0 + t\mu_1 \right) \sum_{i=0}^n \mathbf{q}_{i+1} B_i^n(t) \end{aligned}$$

Csoportosítás után a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n+1-i}{n+1} \left(\bar{\lambda}_0 \mathbf{p}_i + \lambda_0 \mathbf{r}_i \right) B_i^n(t) + \sum_{i=0}^{n+1} \frac{i+1}{n+1} \left(\bar{\lambda}_1 \mathbf{p}_i + \lambda_1 \mathbf{r}_i \right) B_{i+1}^n(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n+1-i}{n+1} \left(\bar{\mu}_0 \mathbf{q}_i + \mu_0 \mathbf{q}_{i+1} \right) B_i^n(t) + \sum_{i=0}^{n+1} \frac{i+1}{n+1} \left(\bar{\mu}_1 \mathbf{q}_i + \mu_1 \mathbf{q}_{i+1} \right) B_{i+1}^n(t) \end{aligned}$$

A B_i^n értéke nem fog változni, ha B_{i+1}^n -et írunk a helyére, viszont így összevonhatjuk a változókat, és kapjuk:

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{n+1} \left(\bar{\lambda}_1 \mathbf{p}_{i-1} + \lambda_1 \mathbf{r}_{i-1} \right) + \frac{n+1-i}{n+1} \left(\bar{\lambda}_0 \mathbf{p}_i + \lambda_0 \mathbf{r}_i \right) \\
&= \frac{i}{n+1} \left(\bar{\mu}_1 \mathbf{q}_{i-1} + \mu_1 \mathbf{q}_i \right) + \frac{n+1-i}{n+1} \left(\bar{\mu}_0 \mathbf{q}_i + \mu_0 \mathbf{q}_{i+1} \right)
\end{aligned}$$

ezt átrendezve pedig végül a következő eredményt kapjuk:

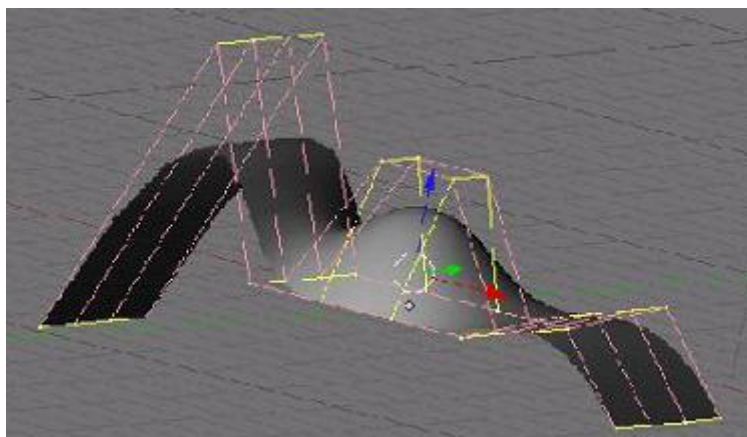
$$\begin{aligned}
(2.20) \quad & \frac{i}{n+1} \left[[\bar{\lambda}_1 \mathbf{p}_{i-1} + \lambda_1 \mathbf{r}_{i-1}] + [\bar{\mu}_1 \mathbf{q}_{i-1} + \mu_1 \mathbf{q}_i] \right] = \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \left[[\bar{\lambda}_0 \mathbf{p}_i + \lambda_0 \mathbf{r}_i] + [\bar{\mu}_0 \mathbf{q}_i + \mu_1 \mathbf{q}_{i+1}] \right]
\end{aligned}$$

3. Blender

Dolgozatom írása során megismerkedtem a Blender programmal, hogy segítségével további példákat konstruáljak. A Blender egy nyílt forráskódú, háromdimenziós grafikai program. Egyik nagy előnye, hogy számos operációs rendszeren működtethető.

Két alapvető mód található benne. Az egyik az objektum mód, amelyben az egyes objektumokat lehet egységként kezelni, a másik mód a szerkesztési mód, amelyben az objektumokat lehet szerkeszteni. Az objektum módban például egy egész testet lehet mozgatni, méretezni és forgatni, míg a szerkesztési módban a test egyes csúcsain dolgozhatunk.

Az első példával azt szeretném szemléltetni, hogy mi történik akkor, ha egy adott felület kontrollpontjának megnöveljük a hozzátartozó súly értékét. A súlyokról feltesszük, hogy valamennyien nemnegatív számok. Fontos tulajdonságuk, hogy ha a súlyokat ugyanolyan arányban növeljük, akkor a felületünk alakja nem fog változni.



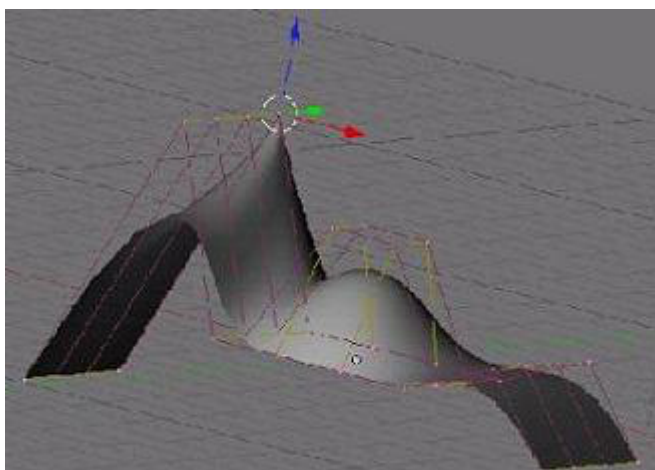
3.1. ábra. *A kezdeti felületünk $W=1$ súlyú kontrollpontokkal.*

Fontos észrevennünk, hogy a súlypontok megváltoztatása más hatással

van a felületre, mintha a kontrollpontokat mozgatnánk. A de Casteljau algoritmus során a súlypontokra is hatással lesz a rekurzió, méghozzá a következőképpen fognak változni a súlyok az algoritmus során:

$$w_i^n(t) = (1-t)w_i^{n-1}(t) + tw_{i+1}^{n-1}(t)$$

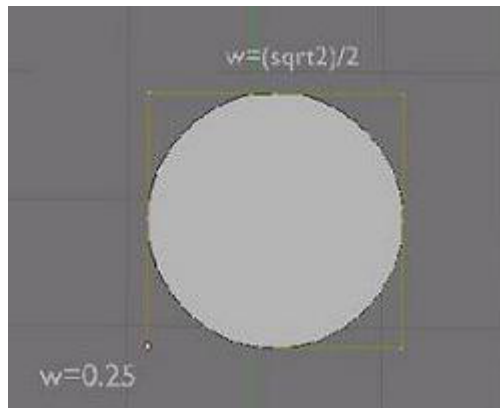
A **3.1**-es ábra a kezdeti felületet ábrázolja. Itt a kontrollpontok súlya egységesen 1. Viszont miután megnöveltük az egyik csúcs súlyát, jól látható a **3.2**-es ábrán, hogy a felület miként változik a módosított kontrollpont egy közeli környezetében. Tehát minél jobban növeljük egy pont súlyát, annál inkább fog a felületünk az adott pont irányába elmozdulni. Ezzel is szemléltettük a kontrollpontok lokális tulajdonságát, hogy egy kontrollpont súlyának a megváltoztatása nem lesz az egész felületre hatással.



3.2. ábra. *A módosított felületünk.*

A Blenderben tudunk Bézier görbékkel, és racionális Bézier-görbékkel dolgozni egyaránt. A Bézier-görbét általában betűk és logók szerkesztéséhez használjuk, valamint animációk létrehozására. A racionális görbét, más néven NURBS, sokkal gyakrabban használják, mert segítségével bármilyen körvonal megrajzolható. Például a Bézier-görbével a kört csak közelíteni tudjuk, addig a racionális görbével meg is szerkeszthetjük.

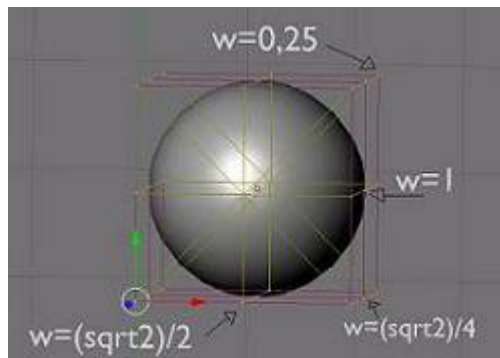
A következő példában egy kört adunk meg racionális görbével. A **3.3**-as ábrán jól látható, hogy a kör kontrollpoligonja esetünkben négyzet alakú lesz. Hogy megadjunk egy kört, a kontrollpoligonok súlyain kell dolgoznunk. Ahhoz, hogy három kontrollponttal létrehozzunk egy körívet az első és utolsó kontrollpont súlyának meg kell egyeznie, míg a középső pont súlya a



3.3. ábra. Kör szerkesztése racionális görbével.

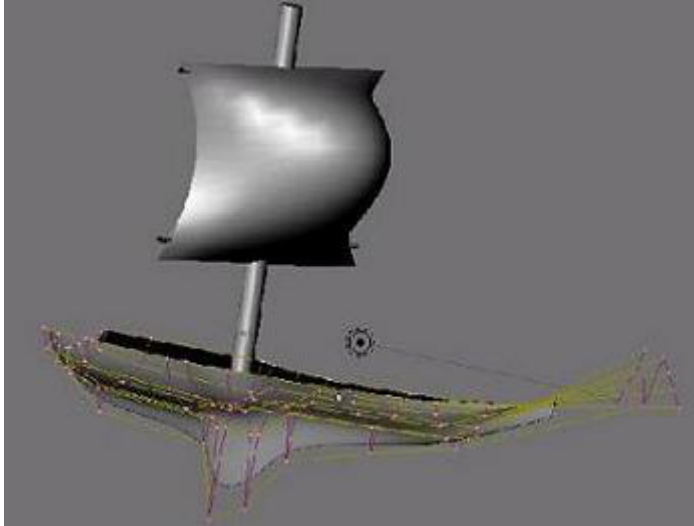
szomszédos csúcsok súlyának függvénye lesz. Esetünkben a $w=0.25$ és $w=\frac{\sqrt{2}}{2}$ súlyok fognak változni.

Hasonló a helyzet a gömb esetében is, amelynek a szerkesztését a **3.4-es** ábrán láthatjuk. Itt a kontrollpoligonunk kocka alakú lesz, ahol az alsó és felső négyzet kontrollpontjainak súlya a körnél leírt $w=0,25$ és $w=\frac{\sqrt{2}}{2}$, míg a középső négyzetnél a $w=1$ és $w=\frac{\sqrt{2}}{4}$ értékek fognak változni.

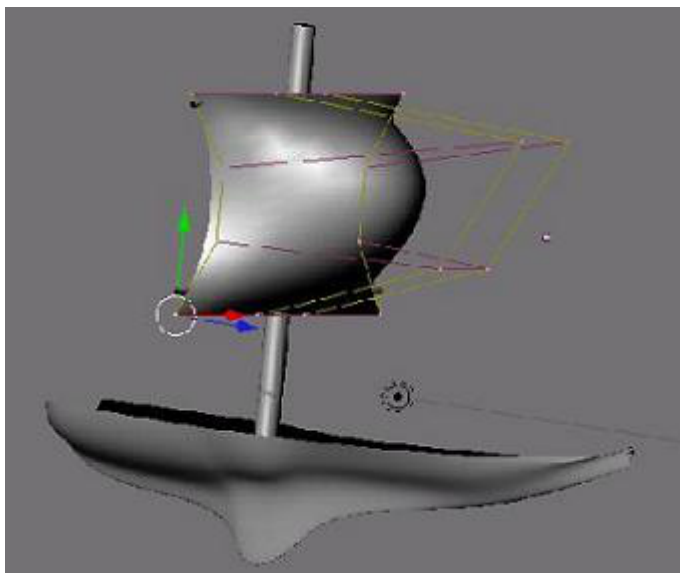


3.4. ábra. Gömb szerkesztése

Legvégül egy hajó modellje látható. Az alapot racionális görbékkel szerkesztettem, láthatóak a hozzá tartozó kontrollpontok is, amelyek kifeszítik a felületet. Az árbócot úgy kaptam, hogy megszerkesztettem egy kört, majd megdupláztam, és az általuk kifeszített felülettel egy hengert kaptam, amit már csak át kellett alakítani a végső alakjához. A vitorla egy Bézier-négyszögelület, ahol a középső pontok nagyobb súllyal szerepelnek, hogy a vitorla "dagadó" alakot vegyen fel.



3.5. ábra. *A hajómodell testének a kontrollpoligonja.*



3.6. ábra. *A hajómodell vitorlájának kontrollpoligonja.*

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kinyilvánítani köszönetemet a témavezetőmnek, Dr Kincses János tanár úrnak, aki tanácsaival és segítőkészségével nagyban hozzájárult a dolgozat sikeres elkészítéséhez.

Nyilatkozat

Alulírott Balázs Tamás BSc szakos hallgató kijelentem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Karának, a Bolyai Intézet Geometria Tanszékén készítettem, alkalmazott matematikus diploma megszerzése érdekében.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Szeged, 2011. május 10