

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi és Informatikai Kar

Geometria Tanszék

Matematika Bsc.

Szakdolgozat

Evolúták és evolvensék

Kreisch István András

Témavezető: Dr. Gévay Gábor

2011.

Tartalmi összefoglaló

Jelen szakdolgozatommal a differenciálgeometria két egyedi fogalmát szeretném bemutatni, ábrákon és szemléletes példákon keresztül. Bemutatom néhány nevezetesebb görbe evolútáját, evolvensét és a köztük lévő kapcsolatokat is. Végül pedig néhány alkalmazását is megemlítem. A saját ábrákat Maple-lel készítettem el, ezen színséma szerint: fekete – eredeti görbe, vörös – evolúta.

Tartalom

1. Bevezetés	3
2. Az evolúta és az evolvens	5
3. Példák evolútákra	8
3.1. Ciklois	8
3.2. Ellipszis	9
3.3. Hipociklois, asztrois	12
3.4. Epiciklois, nefroid	16
3.5. Logaritmikus spirál	19
3.6. Hipotrochois	23
3.7. Epitrochois	25
4. Érdekesség és a gyakorlat	28
4.1. A cikloidális inga	28
4.2. Evolvens fogaskerék	31
4.3. Készségfejlesztő játék, a spirográf	32
5. Irodalomjegyzék	34

1. Bevezetés

Néhány definíció és tétel

1.1. Definíció. Az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ alakú leképezéseket vektor-skalár függvényeknek nevezzük.

Jele: $\mathbf{r}(t)$.

Ha $n = 2$, akkor a síkban vizsgálódunk, ha $n = 3$, akkor pedig a térben. A vektor-skalár függvényekre érvényesek a valós függvénytanbeli határértékkel és folytonossággal kapcsolatos definíciók, állítások és megfigyelések.

1.2. Definíció. Az $\mathbf{r}(t)$ egyváltozós leképezés határértéke a $t = t_0$ pontban az $\mathbf{r}_0$ vektor, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ és $t \neq t_0$, akkor $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| < \varepsilon$. *Jele:* $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$.

1.3. Definíció. Az $\mathbf{r}(t)$ egyváltozós leképezés folytonos a $t = t_0$ pontban, ha

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

1.4. Definíció. Az $\mathbf{r}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ egyváltozós leképezés deriválható a $t = t_0$ pontban, ha létezik a következő határérték:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

Jele: $\dot{\mathbf{r}}(t)$.

1.5. Definíció. Az egyszer folytonosan differenciálható $\mathbf{r}(t) : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ egyváltozós leképezés képhalmazát egyszerű görbeívnek nevezzük, ha $\mathbf{r}(t)$ injektív és inverzével együtt folytonos. Továbbá $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$, ahol $t \in [a, b]$. Ezt másképpen az egyszerű görbe egy paraméterezésének nevezik.

1.6. Definíció. Véges sok olyan egyszerű görbeív unióját görbének nevezzük, mely görbék összes pontjának egy tetszőleges környezetében egyszerű görbeív van.

1.7. Definíció. Legyen G görbe egy paraméterezése $\mathbf{r}(t) : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$, ekkor a görbe ívhossza definíció szerint jelentse az $[a, b]$ intervallumon számított határozott integrált.

$$I := \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt.$$

1.8. Definíció. Az egyszerű görbeív ívhosszal való paraméterezését természetes paraméterezésnek nevezzük. Adott $\mathbf{r}(t) : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezésű görbe esetén, legyen $\mathbf{s}(t) : \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{t}} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$ ívhosszparaméter, mely szigorúan monoton növvő $[a, b]$ -n, folytonosan differenciálható ezen az intervallumon, továbbá ha $\mathbf{s}(t) : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow [0, \mathbf{d}]$, akkor van $\mathbf{t}(s) : [0, \mathbf{d}] \rightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, mely az $\mathbf{s}(t)$ inverze és egyszeresen folytonosan differenciálható $[0, d]$ -n. Jele: $\tilde{\mathbf{r}}(s)$

A továbbiakban a "pont" jelentse a sima paraméterezés szerinti deriválást, míg az "aposztróf" jelentse a természetes paraméterezés szerinti deriválást.

1.9. Definíció. Legyen G görbe $\mathbf{r}(s) : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ természetes paraméterezéssel adott, mely legalább egyszer folytonosan differenciálható. Ekkor a

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{r}'(s)$$

vektort egységnyi érintővektornak nevezzük. Illetve a

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{r}''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|}$$

vektort egységnyi normálisnak vagy egységnyi görbületi vektornak nevezzük.

1.1. Lemma. Legyen G görbe $\mathbf{r}(s) : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$, természetes paraméterezéssel adott ekkor: $\mathbf{t}(s) \perp \mathbf{n}(s)$.

1.2. Tétel. Legyen G görbe egy paraméterezése $\mathbf{r}(t) : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$, ekkor G görbülete:

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}.$$

1.3. Tétel. Legyen G görbe egy paraméterezése $\mathbf{r}(t) : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$, ekkor G torziója:

$$\tau(t) = \frac{[\dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t)]}{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|^2}.$$

Ahol $[a, b, c]$ művelet definíció szerint jelentse: $\langle a \times b, c \rangle$ skaláris szorzatot.

2. Az evolúta és az evolvens

Hogy bemutassam az evolúta fogalmát, szemléletesen leírom, mi a simulókör, illetve miként szerkesszünk simulókört. Szerkesztésének folyamata a következő. Tekintsünk egy görbét, mely nem kör vagy egyenes. Ezen a görbén jelöljük ki három pontot. Illeszünk erre a 3 pontra egy kört. Ezt követően közelítsük e három pontot egymáshoz. Ahogy mozgatjuk a pontokat egymás felé, úgy az illesztett kör is változni fog. Növekedhet, vagy éppen csökkenhet is. Mígnem egyetlen pontban, P , fogja érinteni a görbét. Ez a kapott kör a P pontbeli simuló kör, vagy görbületi kör. E kör középpontja a görbületi középpont. A görbületi kör sugara a P pontban $\rho = \frac{1}{\kappa}$.

Egy tetszőleges, körtől és egyenestől különböző G görbe evolútája a görbületi középpontok mértani helye. A P pontban a simulókör görbülete megegyezik a görbe P pontbeli görbületével, továbbá egységnyi normálisaik is megegyeznek ebben pontban.

2.1. Definíció. *Síkgörbe síkbeli evolútája a síkgörbe görbületi középpontjainak mértani helye. Ha $\mathbf{r}(s)$ a síkgörbe egy paraméteres előállítása, akkor az evolúta egyenlete:*

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s),$$

ahol $\rho(s)$ a görbe s pontbeli görbületi sugara.

2.1. Tétel. *Tetszőleges síkgörbe esetén, $s_0 < s < s_1$ intervallumban, ha $\kappa(s) \neq 0$ és $\rho'(s) \neq 0$, akkor $\mathbf{u}(s)$ ezen az íven a görbe normálisaiból álló görbesereg burkolója.*

Bizonyítás. Induljunk ki a normálisokból álló egyenessereg

$$\mathbf{w}(s, t) = \mathbf{r}(s) + t\mathbf{n}(s)$$

egyenletéből. Azt kell bebizonyítanunk, hogy $\mathbf{u}(s)$ eleget tesz a burkológörbére kirótt két követelménynek. Az első teljesül, mert a $t = \rho(s)$ értékre közös pontja van az evolútának a sereg s paraméterhez tartozó egyenesével ($\rho(s) \neq \infty$). A második feltétel is teljesül, mert az s helyen $\mathbf{u}(s)$ érintője

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(s) &= \mathbf{r}'(s) + \rho'(s)\mathbf{n}(s) + \rho(s)\mathbf{n}'(s) = \\ &= \mathbf{e}(s) + \rho'(s)\mathbf{n}(s) + \rho(s)\left(-\frac{1}{\rho(s)}\mathbf{e}(s)\right) = \rho'(s)\mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

Mivel $\rho'(s) \neq 0$, ezért $\dot{\mathbf{u}}(s)$ arányos az s paraméterhez tartozó egyenes

$$\frac{d\mathbf{w}((s, t))}{dt} = \mathbf{n}(s)$$

érintőjével, eszerint a második tulajdonság is teljesül.

■

Ehhez a tételhez szükséges a görbesereg burkolójának definíciója is.

2.2. Definíció. *Egy síkbeli egyparaméteres görbesereg burkolója olyan görbe, mely teljesíti a következőket: minden pontja rajta van egy a ponttól függő görbéjén és minden pontjában érinti a görbesereg egy megfelelő görbéjét.*

2.3. Definíció. *Tetszőleges a fenti megkötéseket teljesítő síkgörbe esetén az evolvens képlete:*

$$X = x - \dot{y} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{y} \dot{x} - \ddot{x} \dot{y}}, \quad (2.1)$$

$$Y = y + \dot{x} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{y} \dot{x} - \ddot{x} \dot{y}}. \quad (2.2)$$

2.4. Definíció. *Síkgörbe evolvensén a görbe érintőinek ortogonális trajektóriáját értjük, vagyis tetszőleges olyan görbét, amely merőlegesen metszi a görbe valamennyi érintőjét.*

A definícióból következik, hogy minden görbének végtelen sok evolvens van

2.2. Tétel. *A*

$$\mathbf{v}(s) = \mathbf{r}(s) - (s - s_0)\mathbf{r}'(s) \quad (2.3)$$

görbesereg minden görbéje evolvens $\mathbf{r}(s)$ -nek.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $\dot{\mathbf{v}}(s) \perp \mathbf{r}'(s)$. Mivel

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(s) &= \mathbf{r}'(s) - \mathbf{r}'(s) - (s - s_0)\mathbf{r}''(s) = \\ &= -(s - s_0)\mathbf{r}''(s) = -(s - s_0)\kappa(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

azaz valóban $\dot{\mathbf{v}}(s) \perp \mathbf{r}'(s)$, tehát $\mathbf{v}(s)$ minden érintőt merőlegesen metsz.

■

Az evolvens (2.3) egyenlete azt jelenti, hogy ha az $\mathbf{r}(s)$ görbe érintőire az $\mathbf{r}'(s)$ vektorával ellenkező irányban felmérjük a görbe valamely s_0 pontjától számított ívhosszát, akkor evolvenst kapunk. Ezek alapján egyszerűen szerkeszthetünk evolvenst, az $\mathbf{r}(s)$ görbére az s_0 pontból az s pontig fonalat feszítünk, majd a fonal s_0 -hoz tartozó P_0 végpontját addig mozgatjuk el, végig feszesen tartva a fonalat, míg e végpont az s ponthoz tartozó érintő egyenesre kerül. E mozgás közben a P_0 pont evolvenst ír le. Ha $\mathbf{r}(s)$ görbe egyik evolvense $\mathbf{v}(s)$, akkor $\mathbf{r}(s)$ a $\mathbf{v}(s)$ evolútája: a $\mathbf{v}(s)$ mint evolvens, merőlegesen metszi $\mathbf{r}(s)$ valamely érintőjét, azaz $\mathbf{r}(s)$ érintői a $\mathbf{v}(s)$ normálisai; ezért $\mathbf{r}(s)$ a $\mathbf{v}(s)$ normálisainak burkológörbéje, vagyis $\mathbf{r}(s)$ a $\mathbf{v}(s)$ evolútája. Tehát bármely evolvens evolútája az eredeti görbe.

2.3. Tétel. *Ha $\kappa(s) \neq 0, \rho'(s) \neq 0$ továbbá mindkét függvény folytonos az $[s_0, s]$ intervallumban, akkor az evolúta ívhossza – előjeltől eltekintve – egyenlő a megfelelő görbületi sugarak különbségével.*

Bizonyítás. Jelöljük $\mathbf{u}(s)$ evolúta ívhosszát o -val; akkor, mivel $\mathbf{u}(s) = \rho'(s)\mathbf{n}(s)$ azt kapjuk, hogy:

$$o = \int_{s_0}^{s_1} |\rho'(s)\mathbf{n}(s)| ds = \int_{s_0}^{s_1} |\rho'(s)| ds.$$

Mivel a $\rho'(s)$, függvény folytonos és nullától mindenütt különböző, állandó előjelű az $[s_0, s]$ intervallumban, így

$$o = \left| \int_{s_0}^{s_1} \rho'(s)\mathbf{n}(s) ds \right| = |\rho(s_1) - \rho(s_0)|,$$

■

3. Példák evolútákra

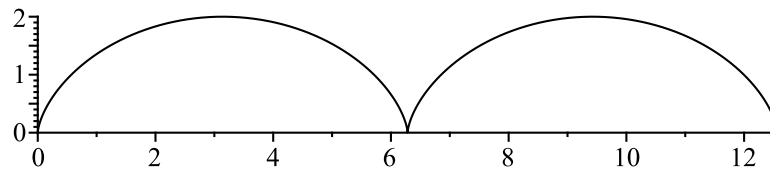
Ebben a szakaszban levezetem néhány nevezetesebb görbe evolvensét. Megpróbálok minden számolást precízen, pontosan kiszámolni és az eredményeket ábrázolni. Fontosnak tartom azonban megemlíteni, hogy nem az összes görbe evolvensét említem meg.

3.1. Ciklois

Tekintsük a Descartes-féle koordináta-rendszer első és második síknegyedbeli részét. Illesszünk egy a sugarú kört az origóra. Majd rögzítsük az érintési pontot a körhöz. Görgessük el az x -tengely mentén a kört. Az a görbe, amit ez a rögzített pont végez, lesz a ciklois. (1. ábra.)

Paraméteres egyenlete a következő:

$$\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)). \quad (3.1)$$



1. ábra. Ciklois

3.1.1. Példa. *A ciklois evolútája maga is egy ciklois.*

Megoldás. Első lépésben számoljuk ki a ciklois evolútáját, majd ábrázoljuk is azt. Vezessük be az alábbi egyszerűsítést: legyen R az evolútát kiszámító képletben a tört-kifejezés.

$$R = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}. \quad (3.2)$$

Mivel mindkét egyenletben ezek egyenlőek és elég csak egyszer kiszámolni. Először a képletéhez szükséges deriváltak:

$$\dot{x}(t) = a(1 - \cos t) \quad \dot{y}(t) = a \sin t,$$

$$\ddot{x}(t) = a \sin t \quad \ddot{y}(t) = a \cos t.$$

Helyettesítsünk be a (3.2) képletbe:

$$R = \frac{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}{a^2 \cos t(1 - \cos t) - a^2 \sin^2 t}.$$

a^2 -tel egyszerűsítve, illetve a zárójelek felbontása után:

$$R = \frac{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}.$$

Felhasználva a $(\sin^2 t + \cos^2 t = 1)$ azonosságot, kapjuk:

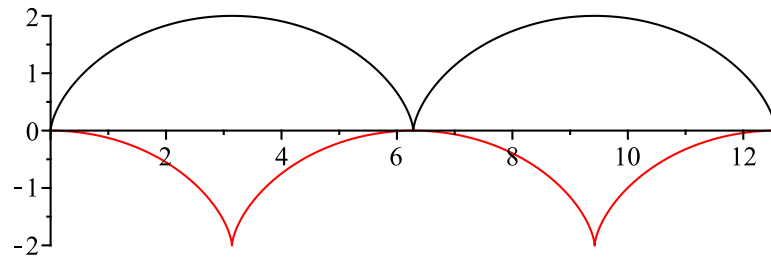
$$\begin{aligned} R &= \frac{2 - 2 \cos t}{\cos t - 1} = \\ &= (-2) \frac{1 - \cos t}{1 - \cos t} = -2. \end{aligned}$$

(3.2)-t helyettesítsük vissza az eredeti képletbe:

$$X(t) = a(t - \sin t) - a(\sin t)(-2) = a(t - \sin t + 2 \sin t) = a(t + \sin t), \quad (3.3)$$

$$Y(t) = a(1 - \cos t) + a(1 - \cos t)(-2) = a(1 - \cos t - 2 + 2 \cos t) = a(\cos t - 1). \quad (3.4)$$

Ábrázoljuk a cikloist és evolútáját. (2. ábra)



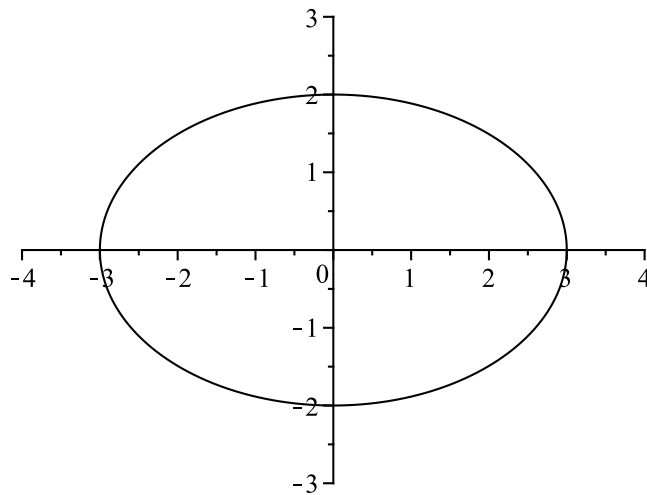
2. ábra. Ciklois és evolútája

3.2. Ellipszis

Az ellipszis

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad (3.5)$$

képlettel írható fel paraméteresen. Azaz: $x(t) = a \cos t$, illetve $y(t) = b \sin t$.



3. ábra. Ellipszis

3.2.1. Példa. Számoljuk ki az ellipszis evolútáját! Majd ábrázoljuk is!

Megoldás. Írjuk fel $x(t)$ és $y(t)$ első és második deriváltját.

$$\dot{x}(t) = -a \sin t \quad \ddot{x}(t) = -a \cos t$$

$$\dot{y}(t) = b \cos t \quad \ddot{y}(t) = -b \sin t$$

Ezen egyenleteket helyettesítsük be az evolúta képletébe. Behelyettesítés után:

$$R = \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t}.$$

Kiemelve ab -t,

$$R = \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab(\sin^2 t + \cos^2 t)}.$$

Felhasználva a $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ azonosságot,

$$R = \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab}.$$

A kapott (3.2) részeredményt visszahelyettesítve a megfelelő egyenletekbe kapjuk először az $X(t)$ majd $Y(t)$ paraméter egyenleteket.

$$X(t) = a \cos t - b \cos t \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab}.$$

Egyszerűsítve b -vel, illetve felhasználva az iménti azonosságot és elvégezve a szorzást, adódik:

$$X(t) = a \cos t + \frac{-a^2 \cos t(1 - \cos^2 t) - b^2 \cos^3 t}{a}.$$

A zárójel felbontása után és a tört átalakítása után:

$$X(t) = a \cos t + \frac{-a^2 \cos t}{a} + \frac{a^2 \cos^3 t - b^2 \cos^3 t}{a}.$$

Egyszerűsítve a -val és elvégezve a kivonást:

$$X(t) = \frac{a^2 \cos^3 t - b^2 \cos^3 t}{a}.$$

A kiemelés elvégzése után adódik az evolúta $X(t)$ paraméter egyenlete:

$$X(t) = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t. \quad (3.6)$$

Hasonlóan a másik paraméter egyenlet, nem részletezve, de ugyanazokat az azonosságokat felhasználva:

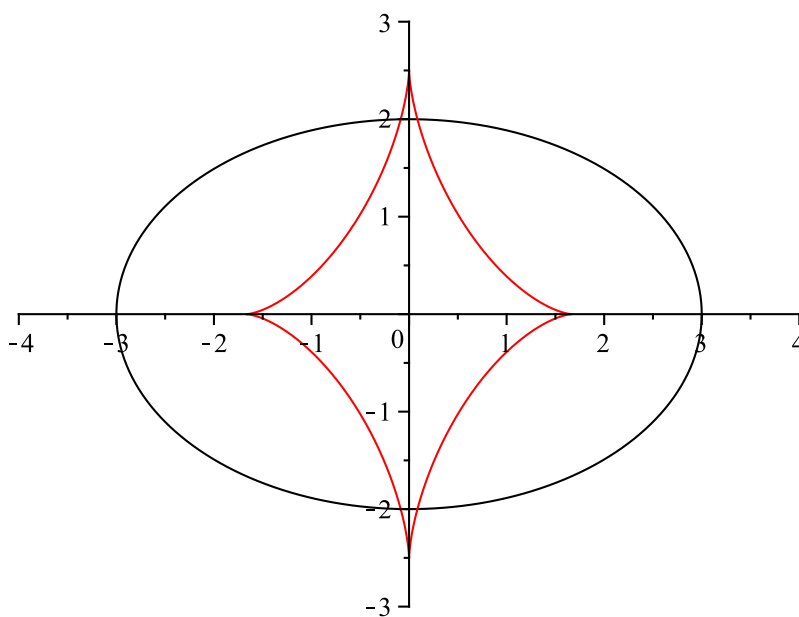
$$\begin{aligned} Y(t) &= b \sin t - a \sin t \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} = \\ &= b \sin t + \frac{-a^2 \sin^3 t - b^2 \sin t(1 - \sin^2 t)}{b} = \\ &= b \sin t + \frac{-a^2 \sin^3 t - b^2 \sin t + b^2 \sin^3 t}{b} = \\ &= b \sin t + \frac{-b^2 \sin t}{b} + \frac{-a^2 \sin^3 t + b^2 \sin^3 t}{b} = \\ &= \frac{-a^2 \sin^3 t + b^2 \sin^3 t}{b} = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t. \end{aligned}$$

Azaz:

$$Y(t) = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t. \quad (3.7)$$

A 4. ábrán vörössel ábrázolva az ellipszis evolútája.

Ábrázolás után érdekes kapcsolat fedezhető föl az evolúta illetve, az asztrois közt. Ha fogjuk az ellipszis két fókuszpontját, majd ezeket egymás felé közelítjük, akkor változni fog az evolúta formája is. A görbén túl kilógó csúcsok közeledni fognak az origó felé, míg a belső csúcsok távolodni fognak az origótól. Mikor már majdnem egybeesnek a fókuszpontok, akkor az evolúta nagyjából meg fog egyezni az asztroissal. Mikor egybeesnek, kört kapunk, az evolúta is átalakul körré. Mivel a kör evolútája is kör.



4. ábra. Ellipszis és evolútája

3.3. Hipociklois, asztrois

A hipocikloisok olyan görbék, melyek két kör és egy pont által rajzolt görbék. A két kör nem azonos átmérőjű. Képzésük hasonló, mint a cikloisé. Legyen K a kisebb, k a nagyobb kör. Legyen P az a pont, ahol k belülről érinti K -t. Majd k -t görgessük a K belső kerületén. Az a görbe amit a P pont bejár, az lesz a hipociklois. Legyen R a nagyobb, r a kisebb kör sugara. A kirajzolódó görbék alakja függ a két kör sugarának arányától. Paraméteres képletük:

$$\mathbf{r}(t) = \left((R - r) \cos(t) + r \cos\left(\frac{R - r}{r}t\right), (R - r) \sin(t) - r \sin\left(\frac{R - r}{r}t\right) \right). \quad (3.8)$$

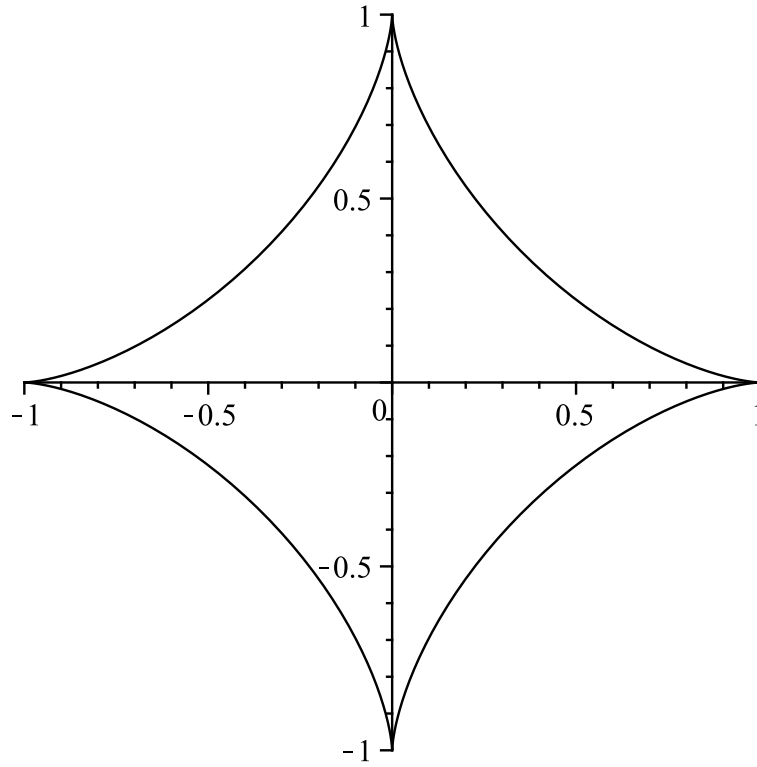
3.3.1. Példa. *Az asztrois evolútája is egy asztrois, amely az eredetihez képest $\frac{\pi}{2}$ szöggel van elforgatva, illetve a hasonlóság aránya 2.*

Megoldás. Első lépésben szükséges levezetni az asztrois képletét. Azt tudjuk, hogy az asztrois egy olyan hipociklois, amelynél a generáló körök sugarainak aránya $R : r = 4$. Legyen $R = 1$ és $r = \frac{1}{4}$. Ekkor:

$$x(t) = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos \frac{3}{4}t$$

Egyszerűsítve:

$$x(t) \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t.$$



5. ábra. Asztrois, ($R=1$, $r=1/4$)

Alkalmazzuk a háromszoros szög koszinuszára vonatkozó azonosságot: $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$. Ekkor:

$$x(t) = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4}(4 \cos^3 t - 3 \cos t).$$

Ezek után kapjuk:

$$= \frac{3}{4} \cos t + \cos^3 t - \frac{3}{4} \cos t = \cos^3 t.$$

Az $y(t)$ paraméter hasonlóképp:

$$y(t) = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin \frac{3}{4}t.$$

Egyszerűsítve:

$$y(t) = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t.$$

Felhasználva a háromszoros szög szinuszt $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$ adódik:

$$y(t) = \frac{3}{4} \sin t - \frac{3}{4} \sin t + \sin^3 t = \sin^3 t.$$

A kivonást elvégezve adódik az $y(t)$ paraméter. Összegezve az asztrois paraméteres egyenlete:

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t). \quad (3.9)$$

Az 5. ábrán látható az asztrois, ahol a sugarak aránya 4. Az evolúta kiszámításához szükségesek a paraméterek deriváltjai:

$$\dot{x}(t) = a(3 \cos^2 t (-\sin t)), \quad \ddot{x}(t) = a(6 \cos t \sin^2 t - 3 \cos^3 t),$$

$$\dot{y}(t) = a(3 \sin^2 t \cos t), \quad \ddot{y}(t) = a(6 \sin t \cos^2 t - 3 \sin^3 t).$$

Ezeket behelyettesítve a (3.2) képletbe, egy eléggé csúnya tört adódik. Ezért külön számolom ki a számlálót és a nevezőt.

$$SZ = [a(3 \cos^2 t (-\sin t))]^2 + [a(3 \sin^2 t \cos t)]^2.$$

A hatványozást elvégezve:

$$SZ = a^2 9 \cos^4 t \sin^2 t + a^2 9 \sin^4 t \cos^2 t.$$

Kiemelve a^2 -et, illetve $9 \cos^2 t \sin^2 t$ -t, kapjuk:

$$SZ = a^2 9 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t).$$

Felhasználva a $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ trigonometrikus azonosságot:

$$SZ = a^2 9 \cos^2 t \sin^2 t.$$

Most a nevező.

$$N = a(3 \cos^2 t (-\sin t))a(6 \sin t \cos^2 t - 3 \sin^3 t) - a(3 \sin^2 t \cos t)a(6 \cos t \sin^2 t - 3 \cos^3 t).$$

A szorzásokat elvégezve:

$$N = a^2(-18 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \cos^2 t \sin^4 t) - a^2(18 \sin^4 t \cos^2 t - 9 \sin^2 t \cos^4 t).$$

a^2 -et és 9-et kiemelve:

$$N = a^2 9(-2 \cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t - 2 \sin^4 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^4 t).$$

Az összeadások elvégzése után:

$$N = a^2 9(-\cos^4 t \sin^2 t - \sin^4 t \cos^2 t).$$

Ismételten $(-\cos^2 t \sin^2 t)$ -t kiemelve:

$$N = -a^2 9 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t).$$

Felhasználva ismét a $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ trigonometrikus azonosságot:

$$N = -a^2 9 \cos^2 t \sin^2 t.$$

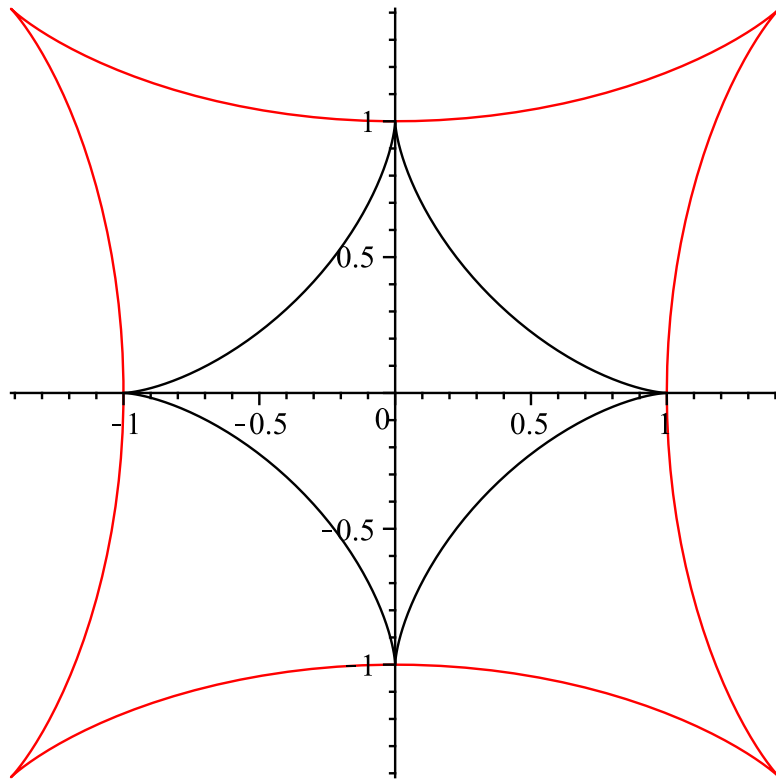
Összegezzük részeredményeinket, majd egyszerűsítsük is azt:

$$R = \frac{SZ}{N} = \frac{a^2 9 \cos^2 t \sin^2 t}{-a^2 9 \cos^2 t \sin^2 t} = -1. \quad (3.10)$$

Ezt a részeredményt visszahelyettesítve a megfelelő paraméter képletbe, kapjuk az evolúta képletét:

$$X(t) = a(\cos^3 t + 3 \sin^2 t \cos t), \quad (3.11)$$

$$Y(t) = a(\sin^3 t + 3 \cos^2 t \sin t). \quad (3.12)$$



6. ábra. Asztrois és evolútája

3.4. Epiciklois, nefroid

Ez a görbe is hasonlóan jön létre, mint a hipociklois. Azzal a különbséggel, hogy itt a körök helyzete más. Ennél a görbénél a kisebbik kör a nagyobbik kör kerületén kívül esik, illetve mozog. Ha hasonlóan jelöljük a kisebb, illetve a nagyobb kör sugarát, mint a hipociklois esetében, akkor ezen görbe általános képlete a következő:

$$\mathbf{r}(t) = \left((r + R) \cos t - r \cos \left(\frac{r + R}{r} t \right), (r + R) \sin t - r \sin \left(\frac{r + R}{r} t \right) \right) \quad (3.13)$$

3.4.1. Példa. *A nefroid evolútája is egy nefroid, de $\frac{\pi}{2}$ szöggel elforgatott. Illetve a hasonlóság aránya 2.*

Egy epiciklois abban az esetben lesz nefroid, ha az alkotó körök sugarainak aránya: 2, azaz $\frac{R}{r} = 2$. Ezt felhasználva levezethető a nefroid képlete, $R = 2$ illetve $r = 1$ esetben. Először az $x(t)$ paraméter:

$$x(t) = 3 \cos t - \sin \left(\frac{2+1}{1} t \right) = 3 \cos t - \sin(3t).$$

Felhasználva a háromszoros szög koszinuszának képletét $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$:

$$x(t) = 3 \cos t - (4 \cos^3 t - 3 \cos t) = 6 \cos t - 4 \cos^3 t.$$

Hasonlóképp az $y(t)$ paraméter is levezethetővé válik.

$$y(t) = 3 \sin t - \sin \left(\frac{2+1}{1} t \right) = 3 \sin t - \sin(3t).$$

A háromszoros szög szinusznak képletét ($\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$) felhasználva:

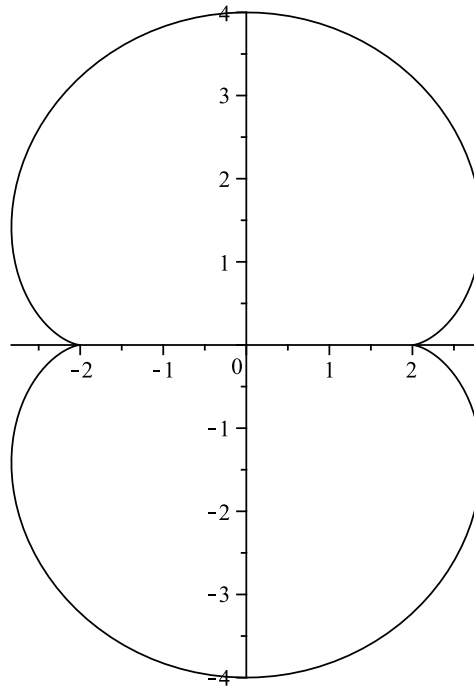
$$y(t) = 3 \sin t - (3 \sin t - 4 \sin^3 t) = 4 \sin^3 t.$$

Tehát a nefroid képlete:

$$\mathbf{r}(t) = (6 \cos t - 4 \cos^3 t, 4 \sin^3 t). \quad (3.14)$$

Hogy megkapjuk a nefroid evolútájának képletét, szükségesek lesznek az $x(t)$ és $y(t)$ paraméterek első illetve második deriváltjai. Először az $x(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 6(-\sin t) - 12 \cos^2 t(-\sin t) = \\ &= 12 \cos^2 t \sin t - 6 \sin t = 6 \sin t(2 \cos^2 t - 1). \\ \ddot{x}(t) &= 6 \cos t(2 \cos^2 t - 1) - 24 \sin^2 t \cos t = 6 \cos t(2 \cos^2 t - 1 - 4 \sin^2 t) = \\ &= 6 \cos t(2 \cos^2 t - 1 - 4 + 4 \cos^2 t) = 6 \cos t(6 \cos^2 t - 5) = 36 \cos^3 t - 30 \cos t. \end{aligned}$$



7. ábra. A nefroid, $R=2$, $r=1$

Most az $y(t)$:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}(t) &= 12 \sin^2 t \cos t. \\
 \ddot{y}(t) &= 24 \sin t \cos^2 t + 12 \sin^2 t (-\sin t) = \\
 &= 24 \sin t \cos^2 t - 12 \sin^3 t = 12 \sin t (2 \cos^2 t - \sin^2 t) = \\
 &= 12 \sin t (2 - 2 \sin^2 t - \sin^2 t) = 12 \sin t (2 - 3 \sin^2 t) = 24 \sin t - 36 \sin^3 t.
 \end{aligned}$$

Mindkét második derivált kiszámításakor felhasználtam a $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ trigonometrikus azonosságot. Most következzen a (3.2) képlet kiszámítása. Az előzőkhöz hasonlóan először a számlálót, majd a nevezőt számolom ki. A számláló:

$$SZ = (6 \sin t (2 \cos^2 t - 1))^2 + (12 \sin^2 t \cos t)^2.$$

A hatványozást elvégezve:

$$\begin{aligned}
 SZ &= 36 \sin^2 t (4 \cos^4 t - 4 \cos^2 t + 1) + 144 \sin^4 t \cos^2 t = \\
 &= 144 \sin^2 t \cos^4 t - 144 \sin^2 t \cos^2 t + 36 \sin^2 t + 144 \sin^4 t \cos^2 t.
 \end{aligned}$$

Kiemelve $(144 \sin^2 t \cos^2 t)$ -t, kapjuk:

$$SZ = 144 \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) - 144 \sin^2 t \cos^2 t + 36 \sin^2 t.$$

Felhasználva a jól ismert azonosságot, majd a kivonást elvégezve kapjuk:

$$SZ = 36 \sin^2 t. \quad (3.15)$$

Most következzen a nevező kiszámítása. Ez is két részre bontom, hogy átlátható maradjon. A nevező számításakor a nem kiemelt képleteket használom. Legyen $N_1 = \dot{f}\ddot{g}$ és $N_2 = \dot{g}\ddot{f}$ ekkor:

$$\begin{aligned} N_1 &= 6 \sin t (2 \cos^2 t - 1) 12 \sin t (2 - 3 \sin^2 t) = \\ &= (12 \cos^2 t \sin t - 6 \sin t) (24 \sin t - 36 \sin^3 t) = \\ &= 288 \cos^2 t \sin^2 t - 432 \cos^2 t \sin^4 t - 144 \sin^2 t + 216 \sin^4 t. \\ N_2 &= 12 \sin^2 t \cos t (6 \cos t (6 \cos^2 t - 5)) = \\ &= 12 \sin^2 t \cos t (36 \cos^3 t - 30 \cos t) = \\ &= 432 \sin^2 t \cos^4 t - 360 \sin^2 t \cos^2 t. \end{aligned}$$

A nevező kiszámolásához összegezem a részeredményeket:

$$\begin{aligned} N &= N_1 - N_2 = 288 \cos^2 t \sin^2 t - 432 \cos^2 t \sin^4 t - 144 \sin^2 t + 216 \sin^4 t - \\ &\quad - 432 \sin^2 t \cos^4 t - 360 \sin^2 t \cos^2 t. \end{aligned}$$

Kiemelve $(-432 \cos^2 t \sin^2 t)$ -t majd elvégezve a kivonást:

$$\begin{aligned} N &= -432 \cos^2 t \sin^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) + 648 \cos^2 t \sin^2 t - 144 \sin^2 t + 216 \sin^4 t = \\ &= 216 \sin^2 t \cos^2 t - 144 \sin^2 t + 216 \sin^4 t. \end{aligned}$$

Azaz:

$$N = 216 \sin^2 t \cos^2 t - 144 \sin^2 t + 216 \sin^4 t. \quad (3.16)$$

Összegezve ezen részeredményeket, következhet a (3.2) képletbe való behelyettesítés:

$$R = \frac{36 \sin^2 t}{216 \sin^2 t \cos^2 t - 144 \sin^2 t + 216 \sin^4 t}.$$

Egyszerűsítés után:

$$R = \frac{1}{6 \cos^2 t + 6 \sin^2 t - 4}.$$

Kiemelve 6-ot, majd felhasználva a nevezetes trigonometrikus azonosságot adódik:

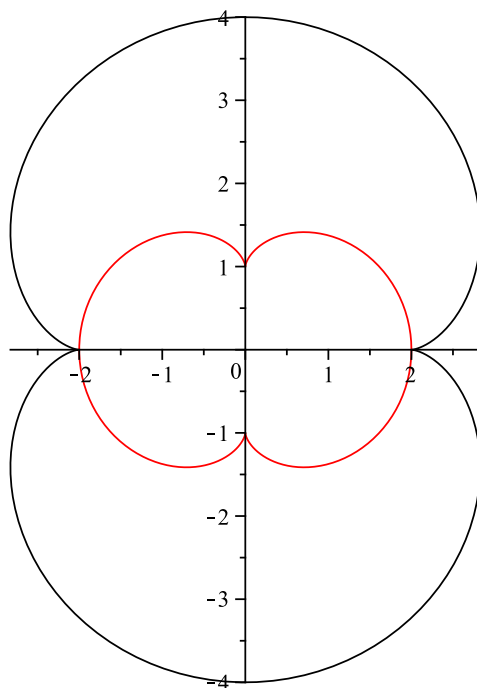
$$R = \frac{1}{6 \cos^2 t + 6 \sin^2 t - 4} = \frac{1}{2}. \quad (3.17)$$

Ezt az eredményt behelyettesítve a megfelelő paraméterképletekbe, adódik a nefroid evolútájának képlete:

$$X(t) = 6 \cos t - 4 \cos^3 t - \frac{12 \sin^2 t \cos t}{2} = 6 \cos t - 4 \cos^3 t - 6 \sin^2 t \cos t, \quad (3.18)$$

$$Y(t) = 4 \sin^3 t + \frac{12 \cos^2 t \sin t - 6 \sin t}{2} = 4 \sin^3 t + 6 \cos^2 t \sin t - 3 \sin t. \quad (3.19)$$

Ezt ábrázolva látszik is a nefroid evolútája. (8. ábra.)



8. ábra. A nefroid és evolútája, $R=2$, $r=1$

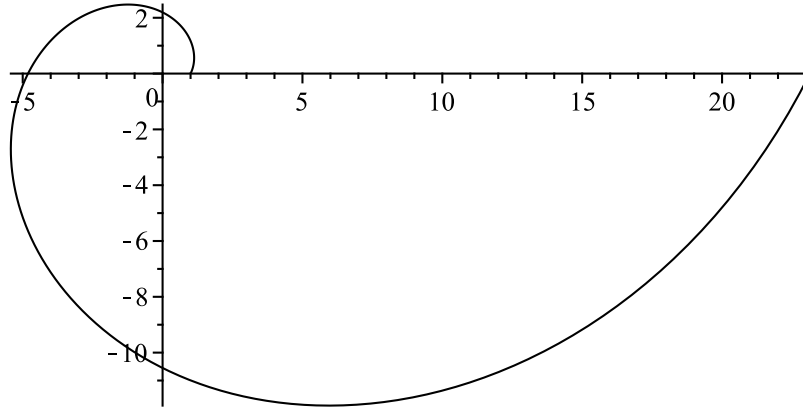
3.5. Logaritmikus spirál

A logaritmikus spirál általános képlete:

$$\mathbf{r}(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t). \quad (3.20)$$

A logaritmikus spirál erősen függ az a és b valós számoktól. A 9.ábrán, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$.

3.5.1. Példa. *A logaritmikus spirál evolútája maga is egy logaritmikus spirál, mely az eredetihez képest egy bizonyos szöggel van elforgatva.*



9. ábra. A logaritmikus spirál, $a=1$, $b=1/2$

Az $x(t)$ paraméter első és második deriváltja:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= abe^{bt} \cos t - ae^{bt} \sin t = ae^{bt}(b \cos t - \sin t) \\ \ddot{x}(t) &= abe^{bt}(b \cos t - \sin t) + ae^{bt}(-b \sin t - \cos t).\end{aligned}$$

Kiemelve ae^{bt} -t és elvégezve a kivonást:

$$\ddot{x}(t) = ae^{bt}(b^2 \cos t - 2b \sin t - \cos t)$$

Az $y(t)$ paraméter első és második deriváltja:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= abe^{bt} \sin t + ae^{bt} \cos t = ae^{bt}(b \sin t + \cos t). \\ \ddot{y}(t) &= abe^{bt}(b \sin t + \cos t) + ae^{bt}(b \cos t - \sin t) = \\ &= ae^{bt}(b^2 \sin t + 2b \cos t - \sin t).\end{aligned}$$

Ezeket az eredményeket helyettesítsük be a (3.2) képletbe. Itt is szétbontom R -t, külön számolom ki a számlálót és a nevezőt is.

$$SZ = a^2 e^{2bt}(b \cos t - \sin t)^2 + a^2 e^{2bt}(b \sin t + \cos t).$$

Kiemelve $a^2 e^{2bt}$ -t, majd elvégezve a hatványozást:

$$SZ = a^2 e^{2bt}(b^2 \cos^2 t - 2b \sin t \cos t + \sin^2 t + b^2 \sin^2 t + 2b \sin t \cos t + \cos^2 t).$$

Egyszerűsítés után, illetve felhasználva a $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ trigonometrikus azonosságot, kapjuk:

$$SZ = a^2 e^{2bt}(b^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + 1) = a^2 e^{2bt}(b^2 + 1).$$

Tehát a számláló:

$$SZ = a^2 e^{2bt} (b^2 + 1). \quad (3.21)$$

Most következik a nevező. Ezt is két további részre bontottam. $N = N_1 - N_2$, hasonlóan az előző példához.

$$N_1 = a e^{bt} (b \cos t - \sin t) a e^{bt} (b^2 \sin t + 2b \cos t - \sin t).$$

A szorzásokat elvégezve:

$$N_1 = a^2 e^{2bt} (b^3 \cos t \sin t + 2b^2 \cos^2 t - b \cos t \sin t - b^2 \sin^2 t - 2b \cos t \sin t + \sin^2 t).$$

Elvégezve az összevonásokat és a kiemeléseket:

$$N_1 = a^2 e^{2bt} ((b^3 - 3b) \cos t \sin t + (1 - b^2) \sin^2 t + 2b^2 \cos^2 t).$$

A másik része:

$$N_2 = a e^{bt} (b \sin t + \cos t) a e^{bt} (b^2 \cos t - 2b \sin t - \cos t).$$

Szorzások után:

$$N_2 = a^2 e^{2bt} (b^3 \sin t \cos t - 2b^2 \sin^2 t - b \sin t \cos t + b^2 \cos^2 t - 2b \sin t \cos t - \cos^2 t).$$

Összevonások után:

$$N_2 = a^2 e^{2bt} ((b^3 - 3b) \sin t \cos t + (b^2 - 1) \cos^2 t - 2b \sin^2 t).$$

Most a nevező összesítve:

$$\begin{aligned} N = N_1 - N_2 &= a^2 e^{2bt} ((b^3 - 3b) \cos t \sin t + (1 - b^2) \sin^2 t + 2b^2 \cos^2 t - \\ &\quad - (b^3 - 3b) \sin t \cos t - (b^2 - 1) \cos^2 t + 2b \sin^2 t). \end{aligned}$$

Kivonás és egy -1 kiemelése után:

$$N = a^2 e^{2bt} ((1 - b^2) \sin^2 t + (1 - b^2) \cos^2 t + 2b^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)).$$

Ismételt kiemelés után:

$$N = a^2 e^{2bt} ((1 - b^2) (\sin^2 t + \cos^2 t) + 2b^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)).$$

Felhasználva a fentebb említett trigonometrikus azonosságot:

$$N = a^2 e^{2bt} (1 - b^2 + 2b^2) = a^2 e^{2bt} (1 + b^2).$$

Tehát a nevező:

$$N = a^2 e^{2bt} (1 + b^2). \quad (3.22)$$

Ezeket felhasználva adódik a (3.2) képlet:

$$R = \frac{SZ}{N} = \frac{a^2 e^{2bt} (b^2 + 1)}{a^2 e^{2bt} (1 + b^2)} = 1. \quad (3.23)$$

Most következnek az evolúta paramétereinek kiszámításai.

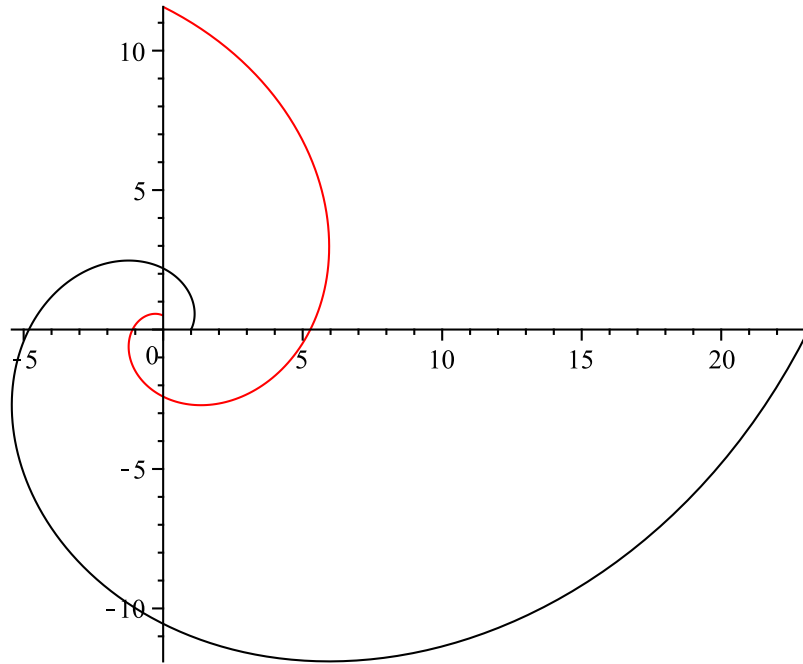
$$X(t) = ae^{bt} \cos t - ae^{bt} (b \sin t + \cos t) = ae^{bt} \cos t - abe^{bt} \sin t - ae^{bt} \cos t = -abe^{bt} \sin t,$$

$$Y(t) = ae^{bt} \sin t + ae^{bt} (b \cos t - \sin t) = ae^{bt} \sin t + abe^{bt} \cos t - ae^{bt} \sin t = abe^{bt} \cos t.$$

Kaptuk tehát, hogy a logaritmikus spirál evolútája is egy logaritmikus spirál:

$$X(t) = -abe^{bt} \sin t, \quad (3.24)$$

$$Y(t) = abe^{bt} \cos t. \quad (3.25)$$



10. ábra. A logaritmikus spirál és evolútája, $a=1$, $b=1/2$

3.6. Hipotrochois

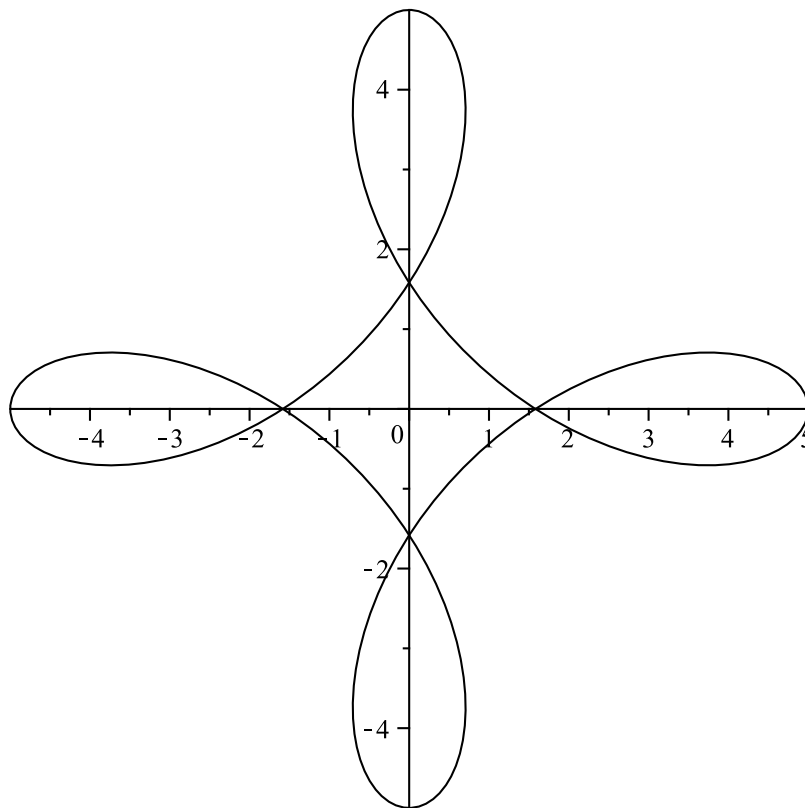
Az előbbi példák után szeretnék megemlíteni két további görbét, melyek nem maradhatnak ki a kidolgozott példák sorából. A hipociklois és epiciklois is rendelkezik testvérgörbékkel. Ez a két görbe a hipotrochois, illetve az epitrochois. A képzésük majdnem megegyezik testvérgörbéik képzésével, azzal a különbséggel, hogy az a pont, amelynek mozgása megrajzolja a görbét, nem a kisebb kör felületén fut, hanem egy adott h távolságra halad a kisebb kör középpontjától. R és r a nagyobb, illetve a kisebb kör sugara.

A hipotrochois általános képlete a következő:

$$\mathbf{r}(t) = \left((R - r) \cos t + h \cos \left(\frac{R - r}{r} t \right), (R - r) \sin t - h \sin \left(\frac{R - r}{r} t \right) \right). \quad (3.26)$$

Legyen $a = R - r$ és $b = \frac{R-r}{r}$, így:

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t + h \cos(bt), a \sin t - h \sin(bt)). \quad (3.27)$$



11. ábra. Hipotrochois, $R=4$, $r=1$, $h=2$

Következnek a deriváltak:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -a \sin t - bh \sin(bt), \\ \ddot{x}(t) &= -a \cos t - b^2 h \cos(bt), \\ \dot{y}(t) &= a \cos t - bh \cos(bt), \\ \ddot{y}(t) &= -a \sin t + b^2 h \sin(bt).\end{aligned}$$

Ezeket helyettesítsük a 3.2 képletbe. Először a számlálót, utána a nevezőt számolom ki:

$$\begin{aligned}SZ &= (-a \sin t - bh \sin(bt))^2 + (a \cos t - bh \cos(bt))^2 = \\ &= a^2 \sin^2 t + b^2 h^2 \sin^2(bt) + 2abh \sin t \sin(bt) + a^2 \cos^2 t + b^2 h^2 \cos^2(bt) - 2abh \cos t \cos(bt).\end{aligned}$$

Csoportosítás után, felhasználva a $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ trigonometrikus azonosságot:

$$SZ = a^2 + b^2 h^2 + 2abh(\sin t \sin(bt) - \cos t \cos(bt)). \quad (3.28)$$

A nevező:

$$\begin{aligned}N &= (-a \sin t - bh \sin(bt))(-a \sin t + b^2 h \sin(bt)) - \\ &\quad -(a \cos t - bh \cos(bt))(-a \cos t - b^2 h \cos(bt)) = \\ &= a^2 \sin^2 t - ab^2 h \sin t \sin(bt) + abh \sin t \sin(bt) - b^3 h^2 \sin^2(bt) + \\ &\quad + a^2 \cos^2 t + ab^2 h \cos t \cos(bt) - abh \cos t \cos(bt) - b^3 h^2 \cos^2(bt).\end{aligned}$$

Csoportosítás után, felhasználva a $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ trigonometrikus azonosságot:

$$N = a^2 - b^3 h^2 + (ab^2 h - abh)(\cos t \cos(bt) - \sin t \sin(bt)). \quad (3.29)$$

Összegezve:

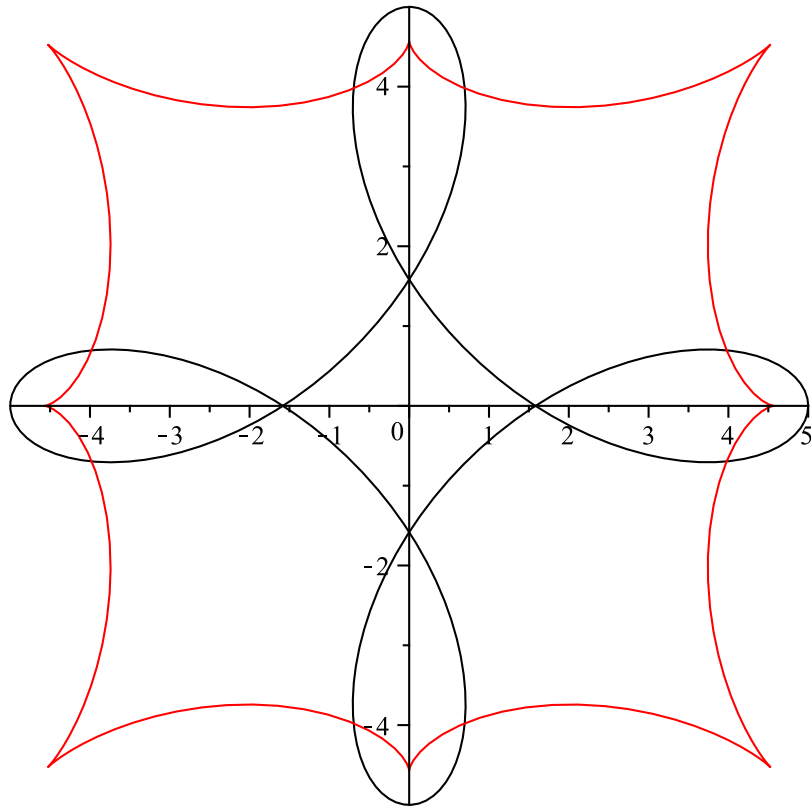
$$R = \frac{SZ}{N} = \frac{a^2 + b^2 h^2 + 2abh(\sin t \sin(bt) - \cos t \cos(bt))}{a^2 - b^3 h^2 + (ab^2 h - abh)(\cos t \cos(bt) - \sin t \sin(bt))}. \quad (3.30)$$

Ezt írjuk vissza az evolvens képletek megfelelő részébe:

$$\begin{aligned}X(t) &= a \cos t + h \cos(bt) - \\ &\quad -(a \cos t - bh \cos(bt)) \left(\frac{a^2 + b^2 h^2 + 2abh(\sin t \sin(bt) - \cos t \cos(bt))}{a^2 - b^3 h^2 + (ab^2 h - abh)(\cos t \cos(bt) - \sin t \sin(bt))} \right) \quad (3.31)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y(t) &= a \sin t - h \sin(bt) + \\ &\quad + (-a \sin t - bh \sin(bt)) \left(\frac{a^2 + b^2 h^2 + 2abh(\sin t \sin(bt) - \cos t \cos(bt))}{a^2 - b^3 h^2 + (ab^2 h - abh)(\cos t \cos(bt) - \sin t \sin(bt))} \right) \quad (3.32)\end{aligned}$$

Ezek után ábrázolni kell az evolútát (12. ábra).



12. ábra. Hipotrochois és evolútája, $R=4$, $r=1$, $h=2$

3.7. Epitrochois

Általános képlete:

$$\mathbf{r}(t) = \left((R+r) \cos t - h \cos \left(\frac{R+r}{r} t \right), (R+r) \sin t - h \sin \left(\frac{R+r}{r} t \right) \right). \quad (3.33)$$

Vezessük be az előző példához hasonlóan az alábbi egyszerűbb jelölést: $a = R + r$ és $b = a/r$. Ekkor:

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t - h \cos(bt), a \sin t - h \sin(bt)) \quad (3.34)$$

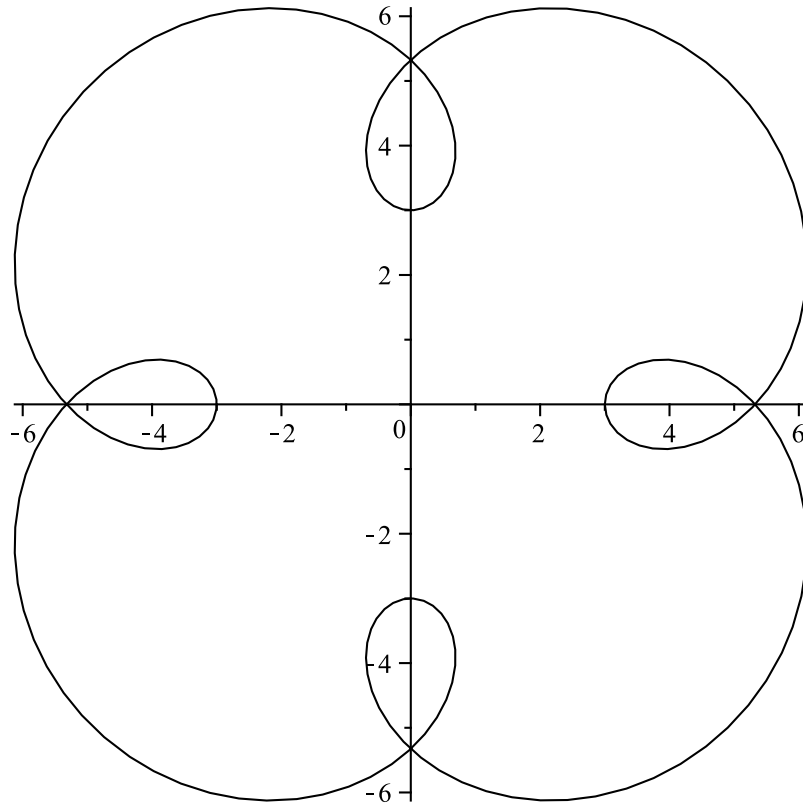
A deriváltak:

$$\dot{x}(t) = -a \sin t + bh \sin(bt),$$

$$\ddot{x}(t) = -a \cos t + b^2 h \cos(bt),$$

$$\dot{y}(t) = a \cos t - bh \cos(bt),$$

$$\ddot{y}(t) = -a \sin t + b^2 h \sin(bt).$$



13. ábra. Epitrochois, $R=4$, $r=1$, $h=2$

Helyettesítsük be 3.2 képletbe. Külön számolva a számlálót és a nevezőt:

$$\begin{aligned} SZ &= (-a \sin t + bh \sin(bt))^2 + (a \cos t - bh \cos(bt))^2 = \\ &= a^2 \sin^2 t + b^2 h^2 \sin^2(bt) - 2abh \sin t \sin(bt) + \\ &\quad + a^2 \cos^2 t + b^2 h^2 \cos^2(bt) - 2abh \cos t \cos(bt). \end{aligned}$$

Felhasználva a $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ trigonometrikus azonosságot:

$$SZ = a^2 + b^2 h^2 - 2abh(\sin t \sin(bt) + \cos t \cos(bt)). \quad (3.35)$$

Most a nevező:

$$\begin{aligned} N &= (-a \sin t + bh \sin(bt))(-a \sin t + b^2 h \sin(bt)) - \\ &\quad - (a \cos t - bh \cos(bt))(-a \cos t + b^2 h \cos(bt)) = \\ &= a^2 \sin^2 t - ab^2 h \sin t \sin(bt) - abh \sin t \sin(bt) + b^3 h^2 \sin^2(bt) + \\ &\quad + a^2 \cos^2 t - ab^2 h \cos t \cos(bt) - abh \cos t \cos(bt) + b^3 h^2 \cos^2(bt). \end{aligned}$$

Felhasználva az iménti trigonometrikus azonosságot, kapjuk:

$$N = a^2 + b^3 h^2 - (ab^2 h + abh)(\sin t \sin(bt) + \cos t \cos(bt)). \quad (3.36)$$

Összegezve:

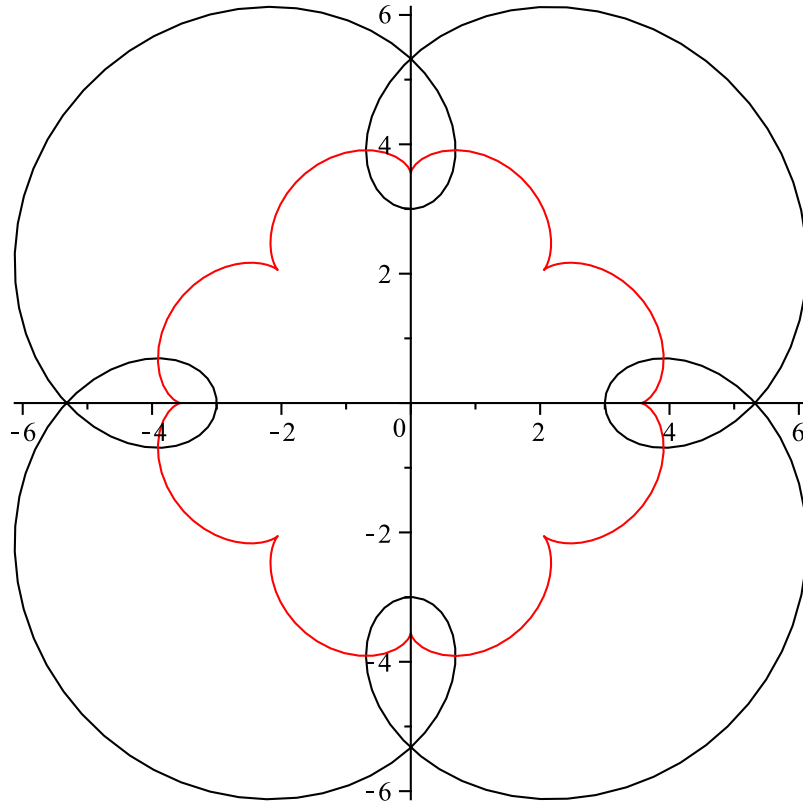
$$R = \frac{SZ}{N} = \frac{a^2 + b^2 h^2 - 2abh(\sin t \sin(bt) + \cos t \cos(bt))}{a^2 + b^3 h^2 - (ab^2 h + abh)(\sin t \sin(bt) + \cos t \cos(bt))}. \quad (3.37)$$

Ezt visszahelyettesítve a megfelelő képletekbe, adódik az evolúta képlete:

$$X(t) = a \cos t - h \cos(bt) - (a \cos t - bh \cos(bt)) \left(\frac{a^2 + b^2 h^2 - 2abh(\sin t \sin(bt) + \cos t \cos(bt))}{a^2 + b^3 h^2 - (ab^2 h + abh)(\sin t \sin(bt) + \cos t \cos(bt))} \right), \quad (3.38)$$

$$Y(t) = a \sin t - h \sin(bt) + (-a \sin t + bh \sin(bt)) \left(\frac{a^2 + b^2 h^2 - 2abh(\sin t \sin(bt) + \cos t \cos(bt))}{a^2 + b^3 h^2 - (ab^2 h + abh)(\sin t \sin(bt) + \cos t \cos(bt))} \right). \quad (3.39)$$

Ábrázoljuk az evolútát (14. ábra).



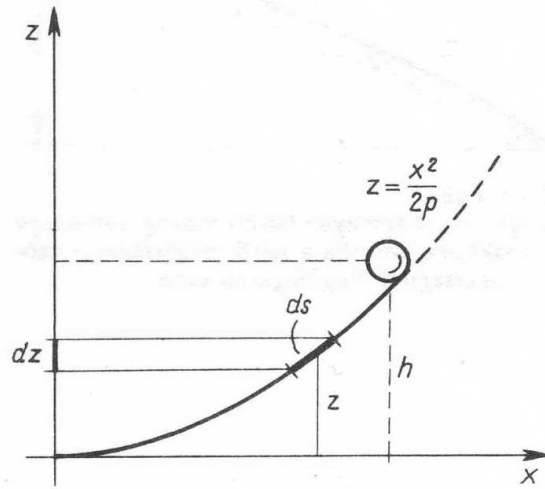
14. ábra. Epitrochois és evolútája, $R=4$, $r=1$, $h=2$

4. Érdekesség és a gyakorlat

Ebben a részben szeretnék egy érdekességet, illetve a hétköznapi eszközökben fellelhető néhány megoldást megemlíteni, nem teljes részletességgel.

4.1. A cikloidális inga

1673-ban egy híres matematikus, fizikus, órászmester Christiaan Huygens feltett egy kérdést publikációjában, van-e olyan görbe, amelynek tetszés szerinti pontjából (a talpponttól tehát bármilyen messze eső pontból) indított test mindig ugyanakkora idő alatt érkezik a talppontba. Huygens egyik legzseniálisabb eredménye éppen az erre a kérdésre adott válasz: a ciklois, amely ilyen tulajdonságú. De nemcsak elméletileg indokolta meg a választ, hanem a gyakorlatban is megvalósított egy olyan ingát, amelynek lengési ideje bármilyen nagy amplitúdónál is állandó. Ha tetszés szerinti α hajlásszöget megenge-



15. ábra. Parabolán leguruló golyó

dünk, akkor a dz koordináta-differenciál befutásához szükséges idő a következő alakú lesz:

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{2g(h-z)}} \frac{1}{\sin \alpha}.$$

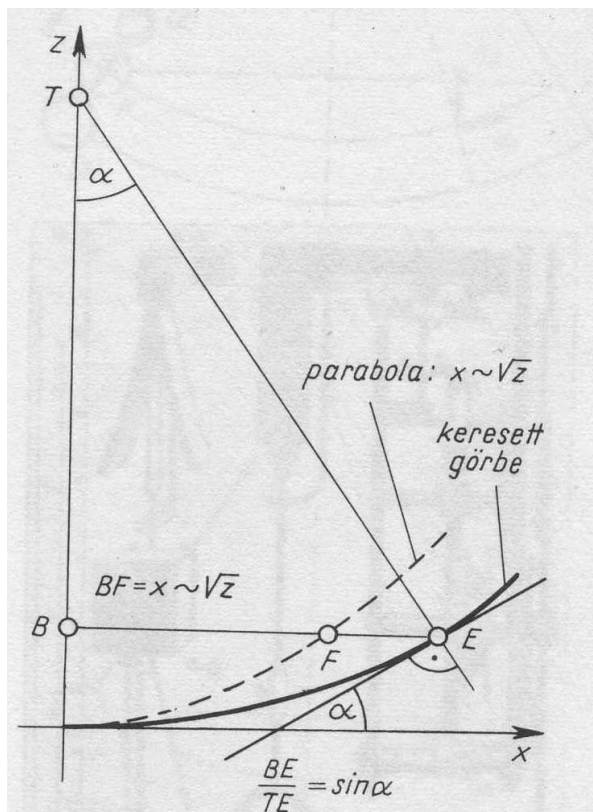
Ha ez az egyenlet

$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{dz}{\sqrt{(h-z)z}}.$$

alakú, akkor akkor integrálásnál a h magasság kiesik. Ha a görbe olyan, hogy bármelyik pontjában fennáll a

$$k \sin \alpha = \sqrt{z}$$

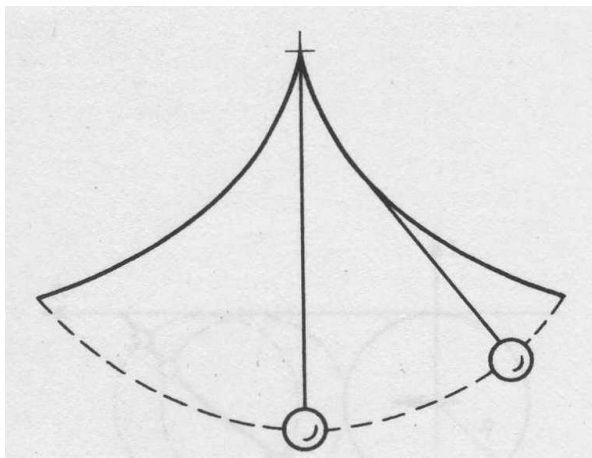
összefüggés, ahol k állandó, akkor valóban a fenti alakú képlethez jutunk vissza: az integrál értéke független lesz h -tól. Ezért fogalmazta meg a problémát Huygens a következő módon: Melyik az a görbe, melyre nézve a



16. ábra. Keresendő görbe

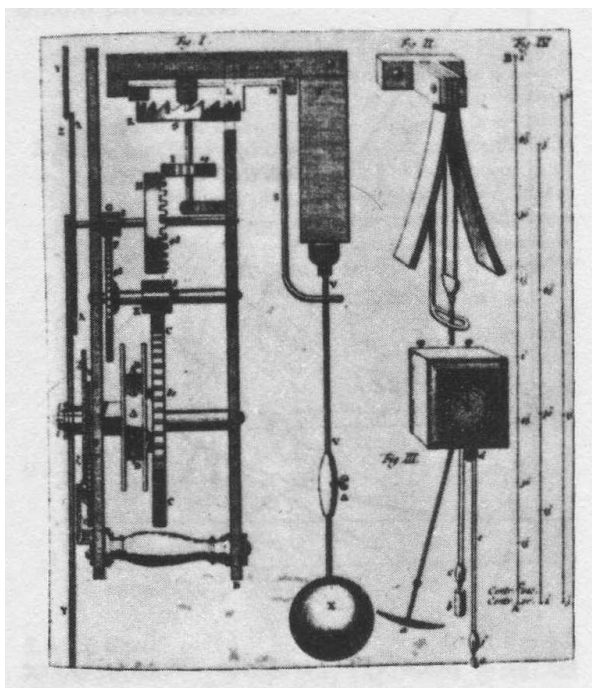
$$BF = \frac{BE}{TE} k$$

egyenlet által meghatározott F pontok parabolán fekszenek. Így jutott el a cikloishoz, kimutatta, hogy annak valóban ez a tulajdonsága. Ha az állandó periódusidőt fonálinga segítségével szeretnénk megvalósítani, felmerül a kérdés, hogyan tudjuk a fonál végére kötött súlyt arra kényszeríteni, hogy az ciklois pályán mozogjon (18. ábra)? Huygens ezt úgy érte el, hogy a fonál útjába ciklois alakú lemezpárt helyezett el. Bár az állandó periódusú ingát kísérleti úton akarta előállítani, úgy hogy ezen lemezpár alakját változtatgatta. Huygens azt állapította meg, hogy a testnek cikloispályán kell mozognia.



17. ábra. Fonálra felfüggesztett test ciklois pályája

További jelentős eredménye, hogy rájött, hogy a fonál végén lógó test akkor mozog cikloispályán, ha a lemez alakja, melyre a fonál mozgás közben rásimul, maga is ciklois. Ez a tény abból ered, hogy a ciklois evolútája maga is ciklois. Az a ciklois, amelyen a test mozog, az első görbe evolvensé.



18. ábra. Huygens cikloid-ingaórája

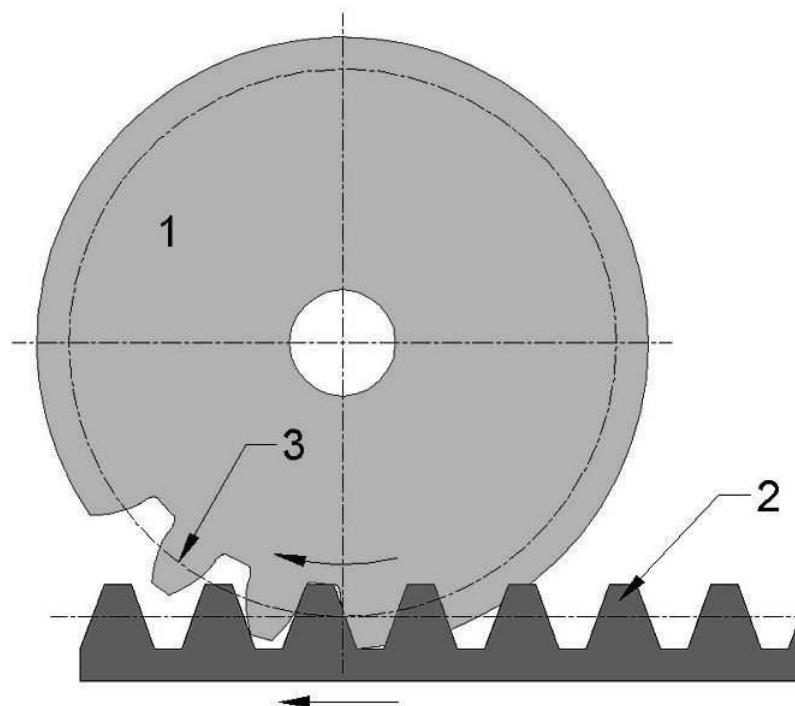
4.2. Evolvens fogaskerék

A nagyobb terhelésnek kitett és gyors forgású fogaskerék-hajtásoknál a fentiek miatt az evolvens (pontosabban körevolvens) fogprofil terjedt el. Ma a fogaskerek túlnyomó többsége evolvens fogazású. Az evolvens fogalaknak több jelentős előnye van. Az egyik az, hogy a tengelytávolság pontos tartására nem érzékeny. A fordulatszám-tartó kapcsolódás korrekt akkor is, ha a tengelytáv a tervezettől kissé eltér. A másik előnye a következő: könnyen szabványosítható és viszonylag olcsó a gyártása. Ennek oka az, hogy az evolvens fogazathoz illeszkedő fogasléc fogai egyenesekkel határoltak (trapéz alakúak). Emiatt a fogasléc egyszerűen és pontosan gyártható. De ugyanilyen pontosan és olcsón gyárthatók a különböző fogaskerek is. A legegyszerűbb, ha fogaskerék előállításához fogasléc alakú gyalukést készítenek. A fogazógépek úgy működnek, hogy a szerszámgép valószínűleg meg azt a mozgást, amelyet később a fogaskerek végeznek majd el, a fogasléc alakú szerszám a fogaskerék tengelyével párhuzamosan mozog, a fogazógép a szerszám alatt mindig kis szöggel elforgatja a nyers tárcsát, a szerszámot pedig érintőirányban ugyanannyival elmozdítja, mint amennyi a fogaskerék elfordulási íve, így fokozatosan kialakítja, "generálja" a fogakat. Ez a Maag-féle lefejtő gyalu eljárás. A lefejtő-maró eljárással, a csavarmenet-szerűen elkészített forgó marószerszám, mint végtelen számú gyalukés működik, a készítendő fogaskerék – a marószerszámmal szinkronban – folyamatosan forog. Sorozatgyártásnál nagyon termelékeny, az előgyártmányokat egymás mellé felfogva egyszerre sok kerék fogazható, mellékidő növekedése nélkül.

Ennek ismeretében adott alakú fogasléc méretsorát lehetett szabványosítani, ezekkel kis darabszámú szerszám segítségével gazdaságosan gyárthatók egyedi fogaskerek is igen nagy pontossággal. Az ISO szabványosította a fogasléc fogprofilját. Az ISO fogprofilok valójában nem valóságos fogasléc, mert csak a fog geometriai adatainak arányait tartalmazzák. A tényleges méreteket úgy kapjuk meg, ha ezeket megszorozzuk a modullal. Az m modul az osztókör átmérőjének egy fogra eső része:

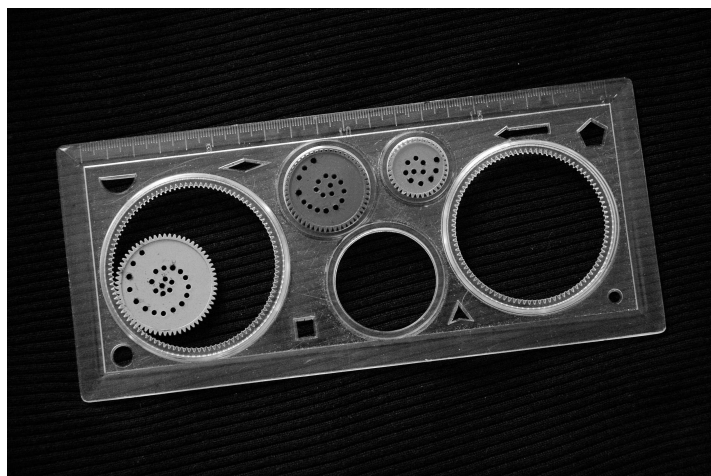
$$m = \frac{d_0}{z} = \frac{t_0}{\pi} \quad (4.1)$$

ahol d_0 az osztókör átmérője, t_0 az osztókörü osztás, vagyis egy fogra eső ívhossz, z pedig a fogsám.



19. ábra. Evolvens profil készítése

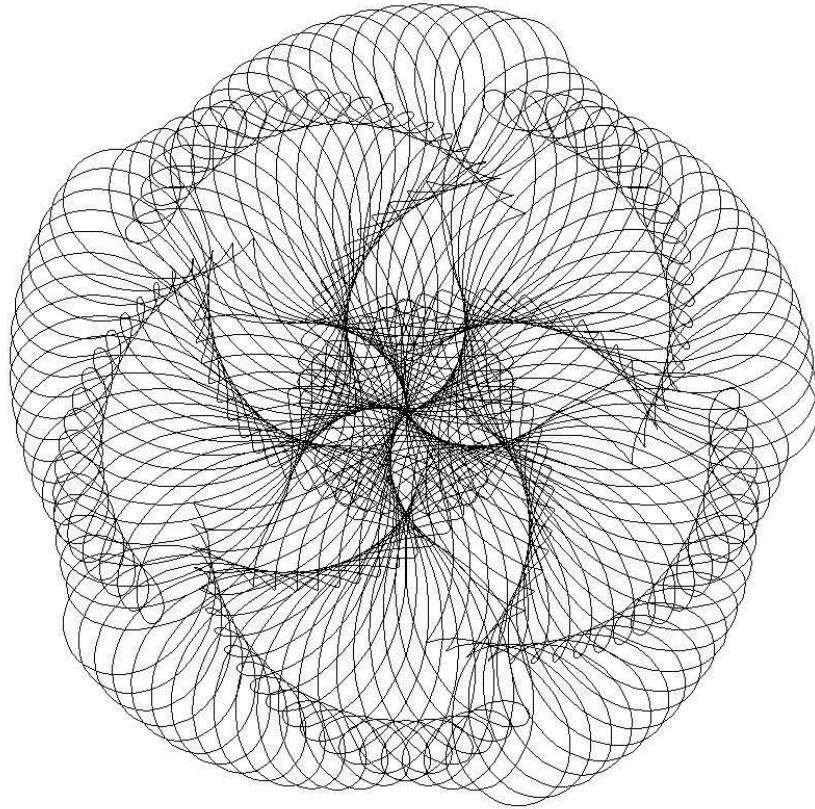
4.3. Készségfejlesztő játék, a spirográf



20. ábra. Spirográf

A spirográfot egy brit mérnök – Denys Fisher – találta föl. Az 1965-ös Nürnbergi Nemzetközi Játék Kiállításon mutatta be. Saját cége gyártotta. Később a terjesztési jogokat a Kenner, Inc. szerezte meg, nemsokkal ezután 1966-ban mutatták be az amerikai piacokon. A spirográf néhány műanyag fogaskerékből és egy nagyobb keretből áll. A fogaskerekeken lyukak vannak, melyek segítségével lehet megrajzolni például az alábbi

ábrát. Világszerte továbbra is népszerű, kreativitást elősegítő, szórakoztató játék.



21. ábra. Spirográffal készült ábra

5. Irodalomjegyzék

1. Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter: Differenciálgeometria, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
2. Kurusa Árpád: Bevezetés a differenciálgeometriába, Polygon, Szeged, 1999.
3. Vodnyev, V.T.: Differenciálgeometriai feladatgyűjtemény, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
4. Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete, Gondolat Kiadó, Budapest, 1981.
5. Előadás jegyzeteim: A Differenciálgeometriák alapjai c. előadás, Fodor Ferenc, 2009/2010-I.
6. Gyakorlati jegyzeteim: A Differenciálgeometriák alapjai c. gyakorlat, Gévay Gábor, 2009/2010-I.
7. Wolfram Mathworld: Evolute, <http://mathworld.wolfram.com/Evolute.html>
8. Wolfram Mathworld: Involute, <http://mathworld.wolfram.com/Involute.html>
9. Evolvens profilú fogaskerekek, <http://hu.wikipedia.org/wiki/Fogaskerék>
10. Spirograph, <http://en.wikipedia.org/wiki/Spirograph>

Nyilatkozat

Alulírott Kreisch István András, matematika BSc. szakos hallgató, kijelentem, hogy a szakgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem azt, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Aláírás:

Dátum: 2011, május 13.