Multiszakaszok és multikörök takarási függvénye

Lukács Péter

II. éves alkalmazott matematika szakos Msc hallgató

Témavezető: dr. Kurusa Árpád

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar

Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

2018

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A geometriai tomográfia [2] témakörében különböző geometriai objektumok, vagy ezen objektumok függvényeinek és tulajdonságainak meghatározhatóságát vizsgáljuk, ha rendelkezésünkre áll az objektum valamilyen megfigyeléseit reprezentáló függvény.

Ezen témakörbe tartoznak az árnyékkép- és röntgen-problémák is. Árnyékkép-problémák esetén a testet különböző irányokból világítjuk meg párhuzamos vagy konkurens sugarakkal, és a test által vetett árnyékokból próbáljuk rekonstruálni a megvilágított testet. Ilyenkor általában léteznek olyan különböző alakzatok, amelyeknek megfelelő árnyékképei megegyeznek: erre példa párhuzamos sugarak esetén az r sugarú kör és a $2r$ sugarú körívekből álló Reuleaux háromszög.

Ha egy pontból kiinduló sugarakkal világítjuk meg a testet, az alakzat árnyéka az adott pontból vett látószöge lesz. Természetesen merül fel a kérdés: Ha egy kör belsejében fekvő két konvex alakzat a kör minden pontjából egyforma szög alatt látszik, akkor egybeesik-e a két alakzat? Bizonyos esetekben pozitív válasz adható:

1.1. Tétel ([4, Lemma 2.1]) *Ha egy kör belsejében fekvő konvex poligonok a kör bármely pontjából egyforma szög alatt látszanak, akkor a két poligon egybeesik.*

Azonban itt is találunk olyan eseteket, amikor a látószögfüggvény nem hordoz magában elég információt, ugyanis létezik a síkon olyan ellipszis és kör, melyek az őket körülvevő kör minden pontjából derékszög alatt látszanak.

Az árnyékkép modell többféleképp is tovább általánosítható. Ha egy testet röntgensugarakkal világítunk át, akkor az áthaladó sugárzás egy, a közeg sűrűségétől és vastagságától függő részét a test elnyeli. Az áthaladó sugárzást felfogva készülnek a főleg az orvosi diagnosztikában használt röntgenképek. Ha az eredeti sugár intenzitása I_1, ami az áthaladás után I_2 intenzitásúra csökken, akkor fennáll a $\ln(I_1/I_2) = \int_\xi f(x)dx$ összefüggés, ahol ξ a sugár haladásának egyenese. J. Radon 1917-ben foglalkozott a síkon értelmezett kompakt tartójú folytonos függvények meghatározhatóságával, ha ismertek a függvény egyeneseken vett integráljai. A róla elnevezett Radon-transzformáció tette lehetővé a tomográf elkészítését, ami a röntgen továbbfejlesztésének tekinthető. A tomográf a térbeli test egy vékony sík szeletét minden oldalról átvilágítja, és a sugarak egyenesein mért $\ln(I_1/I_2)$ értékekből képet alkot a test adott szeletéről.

Homogén konvex alakzatoknál a sugár elszenvedett vesztesége a kimetszett húr hosszát adja meg. Síkon ilyen röntgenképekhez kapcsolódnak a Hammer féle problémák: Hány röntgenképet kell készíteni egy konvex alakzatról, hogy ezekből a képekből a testet rekonstruálni lehessen? Gardner és McMullen [3] igazolták, hogy létezik négy irány, melyből párhuzamos sugarakkal megvilágítva bármely testet, a kapott képek eltolás erejéig egyértelműen meghatározzák a testet. Falconer [1] pedig belátta, hogy két, az alakzaton belüli pontból kiinduló egyenesek által az alakzatból kimetszett húrhosszak meghatározzák a síkidomot.

Az árnyékkép-probléma másik, röntgenképekhez hasonló általánosításakor több konvex alakzat határainak összessége, úgynevezett multigörbe adott a síkon, és ismerjük bizonyos pontokban a multigörbét definiáló egyes tartományok látószögeinek összegét, az úgynevezett takarási számot [6]. A τ-val jelölt takarási függvény pedig a sík minden pontjában megadja ezt az értéket. Az elnevezés magyarázata, hogy ebben az esetben a konvex alakzatok határára mint fényáteresztő hártyákra gondolhatunk, és mérjük, hogy az adott pontban a beérkező fényt a multigörbe átlagosan hányszor takarja. Ha a multigörbe egy elemű, akkor a takarási szám a látószögfüggvény duplája.

Diplomamunkám fókuszában is látószög- és takarási problémák állnak. A 2. fejezetben egy szakasz, illetve egy kör egységkörön értelmezett látószögfüggvényének első és másodrendű deriváltját vizsgáljuk meg, amely deriváltak a későbbiekben fontos szerepet kapnak a bizonyításokban. Másik gyakran használt eszközünk a témakör vizsgálatában, az *izoptikus* illetve *ekvioptikus* görbék. Egy multigörbe τ-izoptikusa nem más, mint azon pontok halmaza a síkon, amely pontokban a multigörbe takarási száma τ, azaz ezen izoptikusok a takarási függvény szintvonalai. Két multigörbe *ekvioptikusának* azon pontok lezártjának halmazát nevezzük, ahol a két multigörbe takarási száma megegyezik. Látni fogjuk, hogy szakaszpár/körpár izoptikusai, valamint két szakaszpár/körpár ekvioptikusa algebrai görbék részeként állnak elő.

A 3. fejezetben először egy egységkörben fekvő $\mathcal{S}$ szakasz meghatározhatóságát vizsgáljuk, ha ismerjük a szakasznak az egységkörön adott ν látószögfüggvényét. Korábban már beláttuk [8], hogy egy adott húrra eső szakasz meghatározható, ha ismert a húrvégpontokban a látószögfüggvény deriváltja. Természetesen adódik a kérdés, hogy ha a végpontokban a másodrendű derivált értéke is ismert, akkor a szakaszról mit tudunk mondani. Be fogjuk látni, hogy elég egy pontban ismerni a látószögfüggvény első és másodrendű deriváltjait, hogy egy adott húrra eső szakaszt meghatározhassunk, valamint bebizonyítjuk, hogy az így meghatározott szakasz hossza monoton nő a húrhosszal. Erre támaszkodva eljuthatunk a fejezet egyik fő eredményéhez, amely két adott hosszúságú szakasz által alkotott multigörbe körön felvett takarási függvényének meghatározó jellegét írja le. A bizonyítás nagyban támaszkodik a korábban már belátott *szimmetria-tételre*:

1.2. Tétel (Lukács [8, Tétel 4.1]) *A $\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ takarási függvény a $\mathcal{C}$ körön akkor és csak akkor szimmetrikus egy, a kör középpontján áthaladó σ egyenesre, ha a szakaszok egymás vagy önnön maguk tükörképei a σ egyenesre nézve.*

Végül Bézout tétele [10] és az ekvioptikus segítségével algebrai görbéken vizsgáljuk a takarási szám egyértelműségét, valamint szimmetriáját.

A 4. fejezetben körök takarási függvényéről lesz szó. Célom a szakaszokról szóló eredményekhez hasonló, azokkal analóg tételek bizonyítása. Elsőnek egy egységkörön adott $\nu_{\mathcal{K}}$ látószögfüggvényből nyerünk vissza egy, az egységkörben fekvő $\mathcal{K}$ kört. Látni fogjuk, hogy elég 3 pontból ismernünk a látószögfüggvényt, hogy a $\mathcal{K}$ kör meghatározható legyen. A szakaszhoz hasonló módon elég egy pontban ismernünk a látószögfüggvény és deriváltjainak értékét, hogy az eredeti kört meghatározzuk. A másodrendű derivált segítségével beláthatjuk, hogy két, a $\mathcal{C}$ körrel nem egyszerre koncentrikus kör takarási függvénye az egységkörön sose lehet konstans, majd szintén algebrai görbékre fogalmazunk meg állításokat.

Végezetül az 5. fejezetben a témakörből még megoldatlan, további vizsgálatra érdemes kérdéseket vetünk föl.

2. Előismeretek és előkészületek

Legyen $\mathcal{S}$ egy szigorúan konvex síkidom, $\mathcal{C}$ pedig egy görbe a síkban, melynek érintője soha nem metszi $\mathcal{S}$-et. Legyen g a $\mathcal{C}$ ívhossz szerinti paraméterezése, $\boldsymbol{t}(s)$, $\kappa(s)$ az érintő egységvektor és görbület a $g(s)$ pontban. Az $\mathcal{S}$ alakzat látszódjék $\nu_{\mathcal{S}}(s)$ szög alatt a $g(s)$ pontból. (Amennyiben egyértelmű, hogy melyik alakzatról van szó, a $\nu(s)$ jelölést használjuk.) Legyen $A(s)$ és $B(s)$ a $g(s)$ pontból az $\mathcal{S}$-hez húzott két érintő érintési pontja, úgy hogy az érintő egyenesek $\tau^a(s)$ és $\tau^b(s)$ irányvektoraira fennáll, hogy $\tau^a(s)$ pozitív lineáris kombinációja a $\tau^b(s)$ és $\boldsymbol{t}(s)$ vektornak. Az érintő egyenesek rendre $\alpha(s), \beta(s)$ szöget zárjanak be $\boldsymbol{t}(s)$-sel. Rendre $\kappa^a(s)$ és $\kappa^b(s)$ az $\mathcal{S}$ görbe görbülete $A(s)$-ben és $B(s)$-ben. Végül $a(s) = |A(s) - g(s)|$ és $b(s) = |B(s) - g(s)|$.

2.1. Lemma (Kurusa [5, Lemma 1]) *A fenti jelölésekkel*

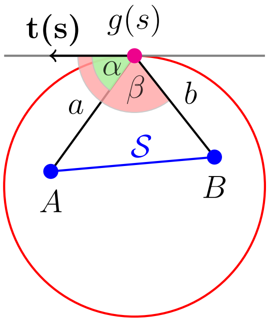
$$\dot\nu(s) = \frac{\sin\beta(s)}{b(s)} - \frac{\sin\alpha(s)}{a(s)},$$
$$\ddot\nu(s) = \frac{\sin 2\beta(s)}{b^2(s)} - \frac{\sin 2\alpha(s)}{a^2(s)} + \frac{\sin^2\beta(s)}{b^3(s)\kappa^b(s)} + \frac{\sin^2\alpha(s)}{a^3(s)\kappa^a(s)} - \kappa(s)\Big(\frac{\cos\beta(s)}{b(s)} - \frac{\cos\alpha(s)}{a(s)}\Big).$$

Legyen most $\mathcal{C}$ egy egységsugarú kör, és az $\mathcal{S}$ alakzat egy szakasz. Ekkor a 2.1 lemma a következő alakra egyszerűsödik, melyet itt direkt számításokkal igazolunk.

2.2. Lemma *Egy $\mathcal{S} = \overline{AB}$ szakasz egységkörön vett ν látószögfüggvényének deriváltjai*

$$\dot\nu(s+) = \frac{\sin\beta(s)}{b(s)} - \frac{\sin\alpha(s)}{a(s)}, \tag{2.1}$$
$$\ddot\nu(s+) = \frac{\sin 2\beta(s)}{b^2(s)} - \frac{\sin 2\alpha(s)}{a^2(s)} - \Big(\frac{\cos\beta(s)}{b(s)} - \frac{\cos\alpha(s)}{a(s)}\Big), \tag{2.2}$$

ahol $\dot\nu(s+)$ és $\ddot\nu(s+)$ a pozitív körüljárási iránnyal adódó első és másodrendű derivált.



Bizonyítás. Az egységkör ívhossz szerinti paraméterezése $g(s) = (\cos s, \sin s)$, érintője $\boldsymbol{t}(s) = (-\sin s, \cos s)$. Legyen $A = (a_1, a_2)$ egy pont az egységkörön belül. Ekkor

$$\cos\alpha(s) = \frac{\langle \overrightarrow{g(s)A}, \boldsymbol{t}(s)\rangle}{a(s)} = \frac{(a_1 - \cos s)(-\sin s) + (a_2 - \sin s)(\cos s)}{\sqrt{(a_1 - \cos s)^2 + (a_2 - \sin s)^2}}. \tag{2.3}$$

A számláló deriváltja $-a_1\cos s - a_2\sin s$, a nevezőé pedig

$$\dot a(s) = \frac{\sin s(a_1 - \cos s) - \cos s(a_2 - \sin s)}{\sqrt{(a_1 - \cos s)^2 + (a_2 - \sin s)^2}} = \frac{a_1\sin s - a_2\cos s}{a(s)}, \tag{2.4}$$

tehát a (2.3) deriváltja

$$-\sin\alpha(s)\dot{\alpha}(s) = \frac{-a_1\cos s - a_2\sin s}{a(s)} + \frac{(-a_1\sin s + a_2\cos s)^2}{a^3(s)}. \tag{2.5}$$

Ekkor (2.5) jobb oldalán az első tag számlálója

$$(\cos s - a_1)\cos s + (\sin s - a_2)\sin s - 1 = a(s)\sin\alpha(s) - 1,$$

a második tag számlálója pedig a (2.3) szerint $a^2(s)\cos^2\alpha(s)$, melyeket visszaírva

$$-\sin\alpha(s)\dot{\alpha}(s) = \frac{a(s)\sin(\alpha) - 1}{a(s)} + \frac{\cos^2\alpha(s)}{a(s)}$$

adódik. Felhasználva, hogy $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ és egyszerűsítve, kapjuk, hogy

$$-\sin\alpha(s)\dot{\alpha}(s) = \sin\alpha(s) - \frac{\sin^2\alpha(s)}{a(s)},$$

melyből megkapjuk a kívánt

$$\dot{\alpha}(s) = \frac{\sin\alpha(s)}{a(s)} - 1 \tag{2.6}$$

eredményt. Felírva a hasonló összefüggést $\dot{\beta}$-ra, és felhasználva, hogy $\nu(s) = \beta(s) - \alpha(s)$, adódik a tétel első állítása.

A másodrendű derivált kiszámolását a (2.4) és (2.3) összevetésével adódó

$$\dot{a}(s) = -\cos\alpha(s)$$

egyenlettel indítjuk. A (2.6) deriváltjában az $\dot{\alpha}(s)$ helyébe a (2.6)-ot helyettesítve, az

$$\ddot{\alpha}(s) = \frac{\cos\alpha(s)\dot{\alpha}(s)a(s) + \sin\alpha(s)\cos\alpha(s)}{a^2(s)} = \frac{2\sin\alpha(s)\cos\alpha(s)}{a^2(s)} - \frac{\cos\alpha(s)}{a(s)}$$

képlethez jutunk. Összevonva az első tag számlálóját, megkapjuk a keresett

$$\ddot{\alpha}(s) = \frac{\sin 2\alpha(s)}{a^2(s)} - \frac{\cos\alpha(s)}{a(s)}$$

összefüggést, amely a $\nu(s) = \beta(s) - \alpha(s)$ megfontolással bizonyítja az állítást. □

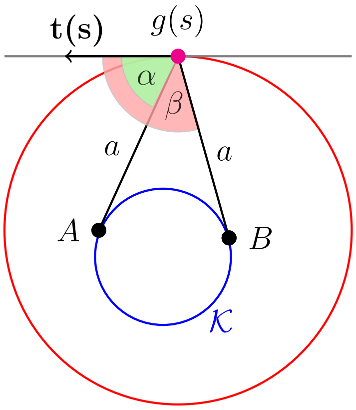
A továbbiakban, ha nem írjuk ki az argumentumot, akkor általában az ívhossz szerinti s paraméterrel értendő a függvény.

Most a 2.1 lemma azon speciális esetét vizsgáljuk, amikor $\mathcal{C}$ az egységkör, a belsejében fekvő alakzat pedig a $\mathcal{K}$ kör.

2.3. Lemma *Egy $\mathcal{K}$ kör $\mathcal{C}$ egységkörön vett ν látószögfüggvényének deriváltjai*

$$\dot{\nu} = \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{a}, \tag{2.7}$$

$$\ddot{\nu} = \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{a^2} + \frac{(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)r}{a^3} - \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{a}. \tag{2.8}$$



Bizonyítás. Válasszuk a koordinátázást olyannak, hogy a $\mathcal{C}$ kör középpontja az origó, és a $\mathcal{K}$ kör K középpontjának koordinátája $(x, 0)$. A $\mathcal{C}$ paraméterezése $g(s) = (\cos s, \sin s)$, az érintő egységvektor $\boldsymbol{t}(s) = (-\sin s, \cos s)$.

Nyilván $\overrightarrow{g(s)K} = (x - \cos s, -\sin s)$, a $KA(s)g(s)$ derékszögű háromszögben pedig

$$|KA(s)| = r, \quad d := |Kg(s)| = \sqrt{(x-\cos s)^2 + \sin s^2} = \sqrt{x^2 - 2x\cos s + 1}, \quad \text{és}$$

$$a := |A(s)g(s)| = \sqrt{(x-\cos s)^2 + \sin s^2 - r^2} = \sqrt{x^2 - 2x\cos s + 1 - r^2},$$

valamint

$$\sin\frac{\nu}{2} = \frac{r}{d} \quad \text{és} \quad \cos\frac{\nu}{2} = \frac{a}{d}. \tag{2.9}$$

A $\overrightarrow{g(s)K}$ és $\boldsymbol{t}(s)$ szögére ugyanakkor

$$\cos\left(\frac{\nu}{2} + \alpha\right) = \frac{\langle\overrightarrow{g(s)K}, \boldsymbol{t}(s)\rangle}{|\overrightarrow{g(s)K}|} = \frac{-x\sin s}{d} \quad \text{és}$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\nu}{2}\right) = \frac{|\overrightarrow{g(s)K} \times \mathbf{t}(s)|}{|\overrightarrow{g(s)K}|} = \frac{|(x-\cos s)\cos s - \sin^2 s|}{d} = \frac{1 - x\cos s}{d}.$$

Mindezek alapján

$$\sin\beta = \sin\left(\left(\frac{\nu}{2} + \alpha\right) + \frac{\nu}{2}\right) = \sin\left(\frac{\nu}{2} + \alpha\right)\cos\frac{\nu}{2} + \sin\frac{\nu}{2}\cos\left(\frac{\nu}{2} + \alpha\right) \tag{2.10}$$
$$= \frac{(1 - x\cos s)a - rx\sin s}{d^2}$$

$$\cos\beta = \cos\left(\left(\frac{\nu}{2} + \alpha\right) + \frac{\nu}{2}\right) = \cos\left(\frac{\nu}{2} + \alpha\right)\cos\frac{\nu}{2} - \sin\left(\frac{\nu}{2} + \alpha\right)\sin\frac{\nu}{2} \tag{2.11}$$
$$= \frac{-xa\sin s - (1 - x\cos s)r}{d^2}$$

és ugyanígy

$$\sin\alpha = \sin\left(\left(\frac{\nu}{2} + \alpha\right) - \frac{\nu}{2}\right) = \frac{(1 - x\cos s)a + rx\sin s}{d^2} \tag{2.12}$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\left(\frac{\nu}{2} + \alpha\right) - \frac{\nu}{2}\right) = \frac{-xa\sin s + (1 - x\cos s)r}{d^2}. \tag{2.13}$$

A (2.9) első egyenlete alapján

$$\frac{\dot\nu}{2}\cos\frac{\nu}{2}=\left(\sin\frac{\nu}{2}\right)'=\frac{-xr\sin s}{d^3},$$

melyet a (2.9) második egyenletével, valamint a (2.10) és (2.12) egyenletekkel összevetve és a értékét beírva,

$$\dot\nu=\frac{2(\sin\frac{\nu}{2})'}{\cos\frac{\nu}{2}}=\frac{-2xr\sin s}{d^2a}=\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{a}$$

adódik, ami pont a bizonyítandó állítás.

A (2.8) bizonyításához először kiszámoljuk $\dot\nu$ deriváltját:

$$\ddot\nu=\frac{-2xr\cos s}{d^2a}+\frac{4x^2r\sin^2 s}{d^4a}+\frac{2x^2r\sin^2 s}{d^2a^3},\tag{2.14}$$

majd a (2.8)-ben szereplő tagokat fejtjük ki egyesével:

$$\frac{\sin 2\beta-\sin 2\alpha}{a^2}=\frac{2\sin\beta\cos\beta-2\sin\alpha\cos\alpha}{a^2}=\frac{4r(x^2\sin^2 s-(1-x\cos s)^2)}{d^4a},\tag{2.15}$$

$$\frac{(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)r}{a^3}=\frac{2((1-x\cos s)^2a^2+(rx\sin s)^2)r}{d^4a^3}\tag{2.16}$$

és

$$-\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{a}=\frac{2(1-x\cos s)r}{d^2a}.\tag{2.17}$$

A (2.15), (2.16) és (2.17) egyenleteket összeadva és rendezve, a

$$\frac{-2xr\cos s}{d^2a}+\frac{4x^2r\sin^2 s}{d^4a}-\frac{2r(1-x\cos s)^2}{d^4a}+\frac{2r^3x^2\sin^2 s}{d^4a^3}+\frac{2r}{d^2a}\tag{2.18}$$

kifejezést kapjuk. Hogy belássuk (2.18) és (2.14) egyenlőségét, meg kell mutatnunk, hogy

$$-\frac{2r(1-x\cos s)^2}{d^4a}+\frac{2r^3x^2\sin^2 s}{d^4a^3}+\frac{2r}{d^2a}=\frac{2x^2r\sin^2 s}{d^2a^3}.\tag{2.19}$$

A jobb oldalt közös nevezőre hozva a

$$\frac{2r(a^2d^2-a^2(-1+x\cos s)^2+r^2x^2\sin^2 s)}{d^4a^3}\tag{2.20}$$

kifejezést kapjuk. Visszaírva a és d értékét

$$\begin{aligned}&a^2d^2-a^2(-1+x\cos s)^2\\&\quad=(x^2-2x\cos s+1-r^2)(x^2-2x\cos s+1)\\&\qquad-(x^2-2x\cos s+1-r^2)(1-2x\cos s+x^2\cos^2 s)\\&\quad=(x^2-2x\cos s+1-r^2)(x^2-x^2\cos^2 s)=(x^2-2x\cos s+1-r^2)(x^2\sin^2 s)\end{aligned}$$

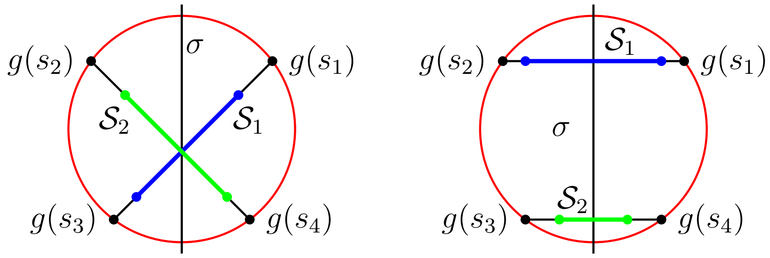
adódik, amit visszaírva a (2.20)-ba a

$$\frac{2r(d^2x^2\sin^2 s)}{d^4a^3}=\frac{2x^2r\sin^2 s}{d^2a^3}\tag{2.21}$$

azonosság jön ki, amely bizonyítja tételünk második formuláját. □

A 3. fejezetben a $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ szakaszok körön felvett $\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}:=\nu_{\mathcal{S}_1}+\nu_{\mathcal{S}_2}$ takarási függvényének vizsgálatakor szükségünk lesz a korábban belátott szimmetria tételre.

2.4. Tétel (Lukács [8, Tétel 4.1]) *A $\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ takarási függvény a $\mathcal{C}$ körön akkor és csak akkor szimmetrikus egy, a kör középpontján áthaladó σ egyenesre, ha a szakaszok egymás vagy önnön maguk tükörképei a σ egyenesre nézve.*



A tétel bizonyítása a takarási függvény nem differenciálhatósági pontjainak száma alapján történik.

Két egyenletet felírva a húrvégpontban felvett $\dot{\tau}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s)$ értékére és a szimmetria tengelyen felvett takarási szám értékére, belátható az alábbi tétel is.

2.5. Tétel (Lukács [9, Tétel 4.2]) *Ha két szakasz takarási száma szimmetrikus és a szakaszok egy egyenesre esnek, akkor a szakaszok helye egyértelműen meghatározható.*

Korábban a látószögfüggvény és annak elsőrendű deriváltja segítségével az alábbi tételeket láttuk be, ahol $\mathcal{S}$ húrja a $\mathcal{C}$ egységkörben a $g(s_1)g(s_2)$ húrra esik:

2.6. Tétel (Lukács [8, Tétel 3.4]) *A $\dot{\nu}_{\mathcal{S}}(s_1+)$ és $\dot{\nu}_{\mathcal{S}}(s_2+)$ értékek meghatározzák a $g(s_1)g(s_2)$ húrra eső $\mathcal{S}$ szakaszt.*

Valamivel gyengébb állításhoz jutunk, ha egy vagy két deriváltat látószögre cserélünk le.

2.7. Tétel (Lukács [8, Tétel 3.5]) *Legfeljebb egy olyan, az $\mathcal{S}$ szakasztól különböző, vele egy húron lévő $\hat{\mathcal{S}}$ szakasz létezik, amelyre*

1. *$\dot{\nu}_{\mathcal{S}}(s_1+) = \dot{\nu}_{\hat{\mathcal{S}}}(s_1+)$ és $\nu_{\mathcal{S}}(s_3) = \nu_{\hat{\mathcal{S}}}(s_3)$, vagy*
2. *$\nu_{\mathcal{S}}(s_4) = \nu_{\hat{\mathcal{S}}}(s_4)$ és $\nu_{\mathcal{S}}(s_3) = \nu_{\hat{\mathcal{S}}}(s_3)$,*

ahol $g(s_3) \neq g(s_4)$ a húrvégpontoktól különböző pontok.

A témakör vizsgálatában fontos szerepet kapnak az izoptikus, ekvioptikus és kompoptikus görbék. Síkban egy konvex tartomány *α-izoptikusa* azon pontok halmaza a síkon, amelyekből a tartomány α szög alatt látszik. Ezek alapján egy multigörbe τ-izoptikusa nem más, mint azon pontok halmaza a síkon, amely pontokban a multigörbe takarási száma τ, azaz ezen izoptikusok a takarási függvény szintvonalai.

Vizsgáljuk meg először egy szakaszpár τ izoptikusát! Legyen $\mathcal{S}_1$ szakasz két végpontja $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$, $\mathcal{S}_2$ szakasz két végpontja pedig $C = (c_1, c_2), D = (d_1, d_2)$, $P = (x, y)$ pedig a sík egy pontja, valamint a továbbiakban használjuk a következő jelöléseket: A szakasz A végpontjának távolsága a P ponttól legyen d_A, azaz $d_A = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}$. Jelölje s_1 a P pontból az $\mathcal{S}_1$ szakasz végpontjaiba mutató vektorok skalárszorzatát, tehát $s_1 = \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB} \rangle = \langle (x-a_1, y-a_2)(x-b_1, y-b_2) \rangle = (x-a_1)(x-b_1) + (y-a_2)(y-b_2)$, v_1 pedig legyen ugyanezen vektorok vektoriális szorzatának abszolút értéke, tehát $v_1 = |(x-a_1)(y-b_2) - (x-b_1)(y-a_2)|$.

Ha az $\mathcal{S}_1$ szakasz α, az $\mathcal{S}_2$ szakasz β szög alatt látszik a P pontból, akkor $\tau = \alpha + \beta$, vagyis

$$\cos\tau = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{s_1 s_2}{d_A d_B d_C d_D} - \frac{v_1 v_2}{d_A d_B d_C d_D} \tag{2.22}$$

ami felszorzás után a

$$d_A d_B d_C d_D \cos\tau = s_1 s_2 - v_1 v_2,$$

majd négyzetre emelve pedig a

$$d_A^2 d_B^2 d_C^2 d_D^2 \cos^2\tau = s_1^2 s_2^2 + v_1^2 v_2^2 - 2 s_1 s_2 v_1 v_2$$

formulát eredményezi. Ezt rendezve, és újra négyzetre emelve, a

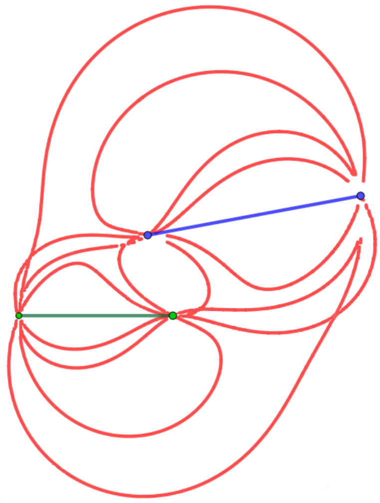
$$\left(d_A^2 d_B^2 d_C^2 d_D^2 \cos^2\tau - s_1^2 s_2^2 - v_1^2 v_2^2\right)^2 = 4 s_1^2 s_2^2 v_1^2 v_2^2$$

algebrai görbét kapjuk. A szakaszpár τ-izoptikusa tehát kielégíti ezt az egyenlőséget, de az $|\alpha - \beta| = \tau$ feltételt teljesítő pontok, valamint a $(\pi - \tau)$-izoptikus pontjai is kielégítik ugyanezt. Így jutunk el az alábbi tételhez:

2.8. Tétel *Az $\mathcal{S}_1 = (A, B), \mathcal{S}_2 = (C, D)$ szakaszpár τ-izoptikusa a legfeljebb tizenhatod fokú*

$$\left(d_A^2 d_B^2 d_C^2 d_D^2 \cos\tau - s_1^2 s_2^2 - v_1^2 v_2^2\right)^2 = 4 s_1^2 s_2^2 v_1^2 v_2^2 \tag{2.23}$$

algebrai görbe részhalmaza.



2.1. ábra. A két szakasz izoptikus görbéje a pirossal kirajzolt algebrai görbe része.

Következőnek vizsgáljuk meg egy körpár τ-izoptikusát! Ha a sík egy P pontjából a $\mathcal{K}_1$ kör α, a $\mathcal{K}_2$ kör β szög alatt látszik, akkor a takarási szám $\tau = \alpha + \beta$, ezért

$$\sin\frac{\tau}{2} = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{2.24}$$

A fenti egyenletet természetesen a sík $(\pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2})$ takarási számú pontjai is kielégítik. Továbbiakban a $\mathcal{K}_i$ kör sugarát jelölje r_i és, középpontjának távolságát a P ponttól pedig d_i. Mivel $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \in (0, \pi/2)$, ezért előbbi egyenletünk a

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{r_1}{d_1}\sqrt{1 - \frac{r_2^2}{d_2^2}} + \frac{r_2}{d_2}\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{d_1^2}}$$

alakot ölti. Rendezzük ezt egyenletet, a következő módon, kétszeri négyzetre emeléssel:

$$\sin^2\frac{\tau}{2} = \frac{r_1^2}{d_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{d_2^2}\right) + \frac{r_2^2}{d_2^2}\left(1-\frac{r_1^2}{d_1^2}\right) + 2\frac{r_1}{d_1}\sqrt{1-\frac{r_2^2}{d_2^2}}\frac{r_2}{d_2}\sqrt{1-\frac{r_1^2}{d_1^2}}, \tag{2.25}$$

$$\left(\sin^2\frac{\tau}{2} - \frac{r_1^2}{d_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{d_2^2}\right) - \frac{r_2^2}{d_2^2}\left(1-\frac{r_1^2}{d_1^2}\right)\right)^2 = 4\frac{r_1^2}{d_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{d_2^2}\right)\frac{r_2^2}{d_2^2}\left(1-\frac{r_1^2}{d_1^2}\right)$$

A második négyzetre emeléskor elveszett előjel miatt utóbbi egyenletnek azon P pontok is megoldásai, amelyekben a látószögekre $|\alpha-\beta| = \tau$ teljesül. Ezek a megoldások kizárhatóak, ha kikötjük, hogy d_1 és d_2 olyanok, hogy

$$\sin^2\frac{\tau}{2} > \frac{r_1^2}{d_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{d_2^2}\right) + \frac{r_2^2}{d_2^2}\left(1-\frac{r_1^2}{d_1^2}\right).$$

Végül felszorozva $d_1^4 d_2^4$-el a

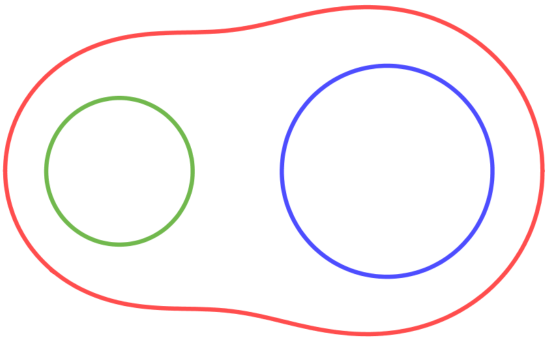
$$(d_1^2 d_2^2 \sin^2\frac{\tau}{2} - r_1^2(d_2^2 - r_2^2) - r_2^2(d_1^2 - r_1^2))^2 = 4r_1^2 r_2^2 d_1^2 d_2^2 (d_2^2 - r_2^2)(d_1^2 - r_1^2)$$

alakhoz jutunk. A d_1 és d_2 szám értéke a középpontok és a P pont koordinátájából kiolvasható. A fenti számolások bizonyítják az alábbi tételt.

2.9. Tétel *Az r_1 sugarú (x_1, y_1) középpontú és az r_2 sugarú (x_2, y_2) középpontú köröknek a τ és $(2\pi-\tau)$ izoptikusának uniója a*

$$(d_1^2 d_2^2 \sin^2\frac{\tau}{2} - r_1^2(d_2^2 - r_2^2) - r_2^2(d_1^2 - r_1^2))^2 = 4r_1^2 r_2^2 d_1^2 d_2^2 (d_2^2 - r_2^2)(d_1^2 - r_1^2)$$

legfeljebb nyolcadfokú algebrai görbe.



2.2. ábra. Két kör egyik izoptikus görbéje pirossal, ami egy algebrai görbe része.

A síkban két konvex tartományt azonos szög alatt látó pontok halmazának lezártját *ekvioptikusnak*, az alakzatokat kiegészítő szög alatt látó pontjait pedig *kompoptikusnak* nevezzük. Két multigörbe *ekvioptikusának* azon pontok lezártjának halmazát nevezzük, ahol a két multigörbe takarási száma megegyezik.

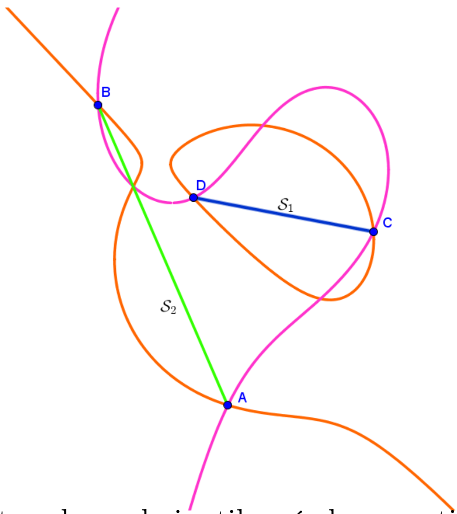
Szakaszok ekvi- és kompoptikus görbéiről ismert az alábbi tétel:

2.10. Tétel [7, 2.1. Tétel] *Két szakasz ekvioptikusának, és kompoptikusának uniója két, legfeljebb harmadfokú algebrai görbe.*

Ezen két görbét *Apollóniosz-görbének* nevezzük. Két, nem egybeeső és nem elfajuló $\mathcal{S}_1 := \overline{AB}$ és $\mathcal{S}_2 := \overline{CD}$ szakasz két Apollóniosz-görbéjének egyenlete [7, (2.3)]

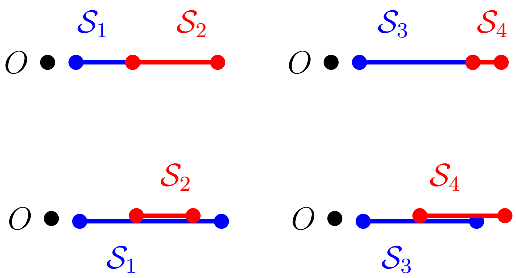
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}|^2\langle \boldsymbol{x},(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times \boldsymbol{m}\rangle + \langle \boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b},\boldsymbol{m}\rangle|\boldsymbol{x}|^2 - \langle \boldsymbol{x},(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times \boldsymbol{m}\rangle\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\rangle +\\ + \langle \boldsymbol{x},\langle \boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\rangle((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times \boldsymbol{m}) - \langle \boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b},\boldsymbol{m}\rangle(\boldsymbol{c}+\mathrm{d})\rangle + \langle \boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b},\boldsymbol{m}\rangle\langle \boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\rangle\\ = \pm\,(|\boldsymbol{x}|^2\langle \boldsymbol{x},(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})\times \boldsymbol{m}\rangle + \langle \boldsymbol{b}\times \boldsymbol{d},\boldsymbol{m}\rangle|\boldsymbol{x}|^2 - \langle \boldsymbol{x},(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})\times \boldsymbol{m}\rangle\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle +\\ + \langle \boldsymbol{x},\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle((\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})\times \boldsymbol{m}) - \langle \boldsymbol{c}\times \boldsymbol{d},\boldsymbol{m}\rangle(\boldsymbol{a}+\mathrm{b})\rangle + \langle \boldsymbol{c}\times \boldsymbol{d},\boldsymbol{m}\rangle\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle),\end{aligned}$$

ahol $\boldsymbol{x} = (x, y, 0)$, $\boldsymbol{a} = (a, \overline{a}, 0), \boldsymbol{b} = (b, \overline{b}, 0), \boldsymbol{c} = (c, \overline{c}, 0), \boldsymbol{d} = (d, \overline{d}, 0)$ az A, B, C és D végpontok koordinátái, $\boldsymbol{m} = (0, 0, 1)$ a $z = 0$ sík normálisa.



2.3. ábra. Két szakasz ekvioptikus és kompoptikus görbéjének uniója, az Appollóniosz görbék.

Felmerül a kérdés, hogy két szakaszpár, mint multigörbék ekvioptikusa előáll-e egy algebrai görbe részhalmazaként. Bizonyos esetekben előfordulhat hogy az $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ és az $(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4)$ szakaszpárok a sík minden pontjában azonos takarási számmal rendelkeznek, tehát az ekvioptikusuk maga a sík. A síkon értelmezett takarási függvény a szakaszok végpontjain kívül mindenütt folytonos, viszont ezen nem folytonossági pontok két különböző szakaszpárnál csak akkor egyezhetnek meg, ha a szakaszok egy egyenesre esnek. Ekkor két elhelyezkedésben állhatnak. Az egyik eset, ha az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ szakasznak, valamint a $\mathcal{S}_3$ és $\mathcal{S}_4$ szakasznak is egy-egy közös végpontjuk van, és a szakaszpárok uniója ugyanazt az egy szakaszt határozzák meg (2.5. ábra felső része).



2.4. ábra. A szakaszpárok ezekben az elhelyezkedésekben a látószögek alapján egymástól megkülönböztethetetlenek az egész síkon.

A másik eset pedig, ha a szakaszpárok 4-4 végpontja azonos, de másképp vannak bepárosítva (2.5. ábra alsó része). Mivel ezek a szakaszpárok egymástól takarási függvény alapján megkülönböztethetetlenek, a továbbiakban ezeket *becsapós elhelyezkedéseknek* nevezzük.

Ha egy $P = (x, y)$ pont ráesik az $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ szakaszpár és az $(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4)$ szakaszpár ekvioptikusára, akkor P-ben a takarási számokra fennáll a $\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} = \tau_{\mathcal{S}_3,\mathcal{S}_4}$ összefüggés, amiből következik a $\cos\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2} = \cos\tau_{\mathcal{S}_3,\mathcal{S}_4}$. Tehát a (2.22) alapján

$$\frac{s_1s_2}{d_Ad_Bd_Cd_D} - \frac{v_sv_2}{d_Ad_Bd_Cd_D} = \frac{s_3s_4}{d_Ed_Fd_Gd_H} - \frac{v_3v_4}{d_Ed_Fd_Gd_H}, \tag{2.26}$$

ahol $\mathcal{S}_1 = (A, B), \mathcal{S}_2 = (C, D), \mathcal{S}_3 = (E, F)$ és $\mathcal{S}_4 = (G, H)$. Felszorozva adódik, hogy

$$(d_Ed_Fd_Gd_H)(s_1s_2 - v_1v_2) = (d_Ad_Bd_Cd_D)(s_3s_4 - v_3v_4),$$

majd négyzetre emelve a

$$(d_E^2d_F^2d_G^2d_H^2)(s_1^2s_2^2 + v_1^2v_2^2 - 2s_1s_2v_1v_2) = (d_A^2d_B^2d_C^2d_D^2)^2(s_3^2s_4^2 + v_3^2v_4^2 - 2s_3s_4v_3v_4)$$

képletet kapjuk. Hogy algebrai görbét kapjunk, a v_1, v_2, v_3, v_4 tagoknak is négyzeten kell szerepelniük, ezért újra rendezzük az egyenletet a

$$\begin{aligned}(d_E^2d_F^2d_G^2d_H^2)(s_1^2s_2^2 + v_1^2v_2^2) - (d_A^2d_B^2d_C^2d_D^2)(s_3^2s_4^2 + v_3^2v_4^2)&\\ = -(d_A^2d_B^2d_C^2d_D^2)(2s_3s_4v_3v_4) + (d_E^2d_F^2d_G^2d_H^2)(2s_1s_2v_1v_2)&\end{aligned}$$

alakra, majd négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\big((d_E^2d_F^2d_G^2d_H^2)(s_1^2s_2^2 + v_1^2v_2^2) - (d_A^2d_B^2d_C^2d_D^2)(s_3^2s_4^2 + v_3^2v_4^2)\big)^2&\\ =(d_A^2d_B^2d_C^2d_D^2)^2(4s_3^2s_4^2v_3^2v_4^2) + (d_E^2d_F^2d_G^2d_H^2)^2(4s_1^2s_2^2v_1^2v_2^2)-&\\ - 2(d_A^2d_B^2d_C^2d_D^2)(2s_3s_4v_3v_4)(d_E^2d_F^2d_G^2d_H^2)(2s_1s_2v_1v_2).&\end{aligned}$$

Végezetül újból rendezve és négyzetre emelve kapjuk a

$$\begin{aligned}\Big(\big((d_E^2d_F^2d_G^2d_H^2)(s_1^2s_2^2 + v_1^2v_2^2) - (d_A^2d_B^2d_C^2d_D^2)(s_3^2s_4^2 + v_3^2v_4^2)\big)^2-&\\ - ((d_A^2d_B^2d_C^2d_D^2)^2(4s_3^2s_4^2v_3^2v_4^2)) - ((d_E^2d_F^2d_G^2d_H^2)^2(4s_1^2s_2^2v_1^2v_2^2))\Big)^2&\\ =64(d_A^2d_B^2d_C^2d_D^2)^2(s_3^2s_4^2v_3^2v_4^2)(d_E^2d_F^2d_G^2d_H^2)^2(s_1^2s_2^2v_1^2v_2^2)&\end{aligned}$$

algebrai görbét. A fenti számítás igazolja a következő tételt.

2.11. Tétel *Két, nem becsapós elhelyezkedésű szakaszpár ekvioptikusa egy legfeljebb hatvannegyed fokú algebrai görbe része.*

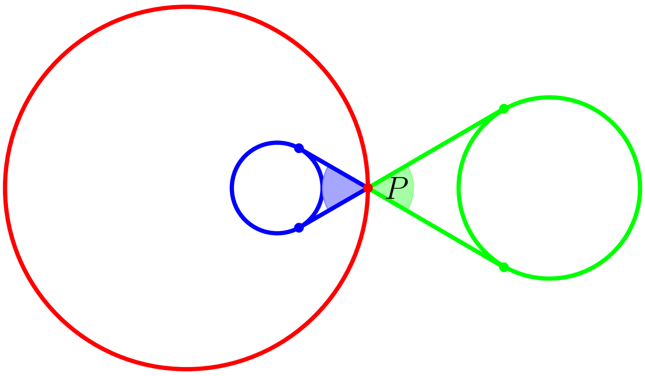
Két körlap esetén azok ekvioptikusáról a következőt tudjuk.

2.12. Tétel *Adott a síkon két nem koncentrikus $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ körlap, melyek középpontjai rendre K_1 és K_2, sugaraik rendre r_1 és r_2. Ezek ekvioptikusa a K_1 és K_2 pontok r_1/r_2 arányú Apollóniosz-körének a körlapokon kívüli része.*

Bizonyítás. A sík egy P pontjából a két kör látszódjék rendre α és β szög alatt. Az PK_1 távolságot jelölje d_1, az PK_2 távolságot d_2. Mivel $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, ezért

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} \Leftrightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{d_1}{d_2}. \tag{2.27}$$

Ez azt jelenti, hogy csak azon X pontokból látszódnak a körök azonos szög alatt, amelyekre teljesül, hogy a kör középpontoktól vett távolságok aránya az r_1/r_2 állandó. Ez éppen az K_1 és K_2 pontok r_1/r_2 arányú Apollóniosz-köre. □



2.5. ábra. A zöld és kék kör ekvioptikusa a pirossal ábrázolt Apollóniosz-kör.

Hasonló módon vizsgálhatjuk a $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ és a $(\mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4)$ körpárok ekvioptikusát. Ha egy P pont az ekvioptikus része, akkor a két körpár takarási számának szinusza megegyezik, ezért (2.25) alapján ki kell elégítse az

$$\begin{aligned}&\frac{r_1^2}{d_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{d_2^2}\right)+\frac{r_2^2}{d_2^2}\left(1-\frac{r_1^2}{d_1^2}\right)+2\frac{r_1}{d_1}\sqrt{1-\frac{r_2^2}{d_2^2}}\frac{r_2}{d_2}\sqrt{1-\frac{r_1^2}{d_1^2}}\\ &\qquad=\frac{r_3^2}{d_3^2}\left(1-\frac{r_4^2}{d_4^2}\right)+\frac{r_4^2}{d_4^2}\left(1-\frac{r_3^2}{d_3^2}\right)+2\frac{r_3}{d_3}\sqrt{1-\frac{r_4^2}{d_4^2}}\frac{r_4}{d_4}\sqrt{1-\frac{r_3^2}{d_3^2}}\end{aligned}$$

egyneletet. A gyököt tartalmazó kifejezéseket egy oldalra rendezve és négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\left(\frac{r_1^2}{d_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{d_2^2}\right)+\frac{r_2^2}{d_2^2}\left(1-\frac{r_1^2}{d_1^2}\right)-\frac{r_3^2}{d_3^2}\left(1-\frac{r_4^2}{d_4^2}\right)-\frac{r_4^2}{d_4^2}\left(1-\frac{r_3^2}{d_3^2}\right)\right)^2\\ &\qquad=4\frac{r_3^2}{d_3^2}\left(1-\frac{r_4^2}{d_4^2}\right)\frac{r_4^2}{d_4^2}\left(1-\frac{r_3^2}{d_3^2}\right)+4\frac{r_1^2}{d_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{d_2^2}\right)\frac{r_2^2}{d_2^2}\left(1-\frac{r_1^2}{d_1^2}\right)-\\ &\qquad\quad-8\frac{r_1}{d_1}\sqrt{1-\frac{r_2^2}{d_2^2}}\frac{r_2}{d_2}\sqrt{1-\frac{r_1^2}{d_1^2}}\frac{r_3}{d_3}\sqrt{1-\frac{r_4^2}{d_4^2}}\frac{r_4}{d_4}\sqrt{1-\frac{r_3^2}{d_3^2}}.\end{aligned}$$

Újra rendezve és négyzetre emelve pedig a

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{r_1^2}{d_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{d_2^2}\right)+\frac{r_2^2}{d_2^2}\left(1-\frac{r_1^2}{d_1^2}\right)-\frac{r_3^2}{d_3^2}\left(1-\frac{r_4^2}{d_4^2}\right)-\frac{r_4^2}{d_4^2}\left(1-\frac{r_3^2}{d_3^2}\right)\right)^2-\right.\\ &\qquad\left.-4\frac{r_3^2}{d_3^2}\left(1-\frac{r_4^2}{d_4^2}\right)\frac{r_4^2}{d_4^2}\left(1-\frac{r_3^2}{d_3^2}\right)-4\frac{r_1^2}{d_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{d_2^2}\right)\frac{r_2^2}{d_2^2}\left(1-\frac{r_1^2}{d_1^2}\right)\right)^2\\ &\qquad=64\frac{r_1^2}{d_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{d_2^2}\right)\frac{r_2^2}{d_2^2}\left(1-\frac{r_1^2}{d_1^2}\right)\frac{r_3^2}{d_3^2}\left(1-\frac{r_4^2}{d_4^2}\right)\frac{r_4^2}{d_4^2}\left(1-\frac{r_3^2}{d_3^2}\right)\end{aligned}$$

kifejezést kapjuk, amely $d_1^8 d_2^8 d_3^8 d_4^8$-el való felszorzás után a

$$\begin{aligned}\Bigg(\bigg(d_3^2d_4^2r_1^2\Big(d_2^2-r_2^2\Big)+d_3^2d_4^2r_2^2\Big(d_1^2-r_1^2\Big)-d_1^2d_2^2r_3^2\Big(d_4^2-r_4^2\Big)-d_1^2d_2^2r_1^4\Big(d_3^2-r_3^2\Big)\bigg)^2-&\\ -4d_1^4d_2^4r_3^2\Big(d_4^2-r_4^2\Big)r_4^2\Big(d_3^2-r_3^2\Big)-4d_1^4d_2^4r_1^2\Big(d_1^2-r_2^2\Big)r_2^2\Big(d_1^2-r_1^2\Big)\Bigg)^2&\\ =64d_1^4d_2^4d_3^4d_4^4r_1^2\Big(d_2^2-r_2^2\Big)r_2^2\Big(d_1^2-r_2^1\Big)r_3^2\Big(d_4^2-r_4^2\Big)r_4^2\Big(d_3^2-r_3^2\Big)&\end{aligned}$$

algebrai görbe lesz. Ez igazolja a következő tételt:

2.13. Tétel *Két körpár ekvioptikusa egy legfeljebb huszonnegyed fokú algebrai görbe része.*

3. Multiszakaszok takarási függvénye

Ebben a fejezetben először a $\mathcal{C}$ egységkörön belül fekvő $\mathcal{S}$ szakaszt vizsgáljuk, ha adott a körön annak $\nu(s)$ látószögfüggvénye.

Érdemes megvizsgálni a $\dot\nu(s+)$, $\dot\nu(s-)$ valamint a $\ddot\nu(s+)$, $\ddot\nu(s-)$ függvények kapcsolatát. A negatív (óramutató járásával megegyező) körüljárás esetén a deriváltak a 2.2 lemma alapján

$$\dot\nu(s-) = \frac{\sin\hat\beta}{\hat b} - \frac{\sin\hat\alpha}{\hat a} \quad \text{és} \quad \ddot\nu(s-) = \frac{\sin 2\hat\beta}{\hat b^2} - \frac{\sin 2\hat\alpha}{\hat a^2} - \Big(\frac{\cos\hat\beta}{\hat b} - \frac{\cos\hat\alpha}{\hat a}\Big), \tag{3.1}$$

ahol $\hat a, \hat b, \hat\alpha, \hat\beta$ a megfelelő végpontok távolsága, és az érintővel bezárt szögek.

Első esetben válasszunk egy olyan $g(s)$ pontot, ami nem esik az $\mathcal{S}$ egyenesére. Ekkor ha a körüljárási irány változik, akkor megcserélődik az A és a B pont, ezért fennállnak az $a = \hat b$ és $b = \hat a$, valamint az $\hat\alpha = \pi - \beta$ és $\hat\beta = \pi - \alpha$ összefüggések, azaz

$$\dot\nu(s-) = \frac{\sin\hat\beta}{\hat b} - \frac{\sin\hat\alpha}{\hat a} = \frac{\sin\alpha}{a} - \frac{\sin\beta}{b} = -\dot\nu(s+)$$

és

$$\begin{aligned}\ddot\nu(s-) &= \frac{\sin 2\hat\beta}{\hat b^2} - \frac{\sin 2\hat\alpha}{\hat a^2} - \Big(\frac{\cos\hat\beta}{\hat b} - \frac{\cos\hat\alpha}{\hat a}\Big)\\ &= \frac{-\sin 2\alpha}{a^2} - \frac{-\sin 2\beta}{b^2} - \Big(\frac{-\cos\alpha}{a} - \frac{-\cos\beta}{b}\Big) = \ddot\nu(s+),\end{aligned}$$

vagyis $\dot\nu(s+) + \dot\nu(s-) = 0$ és $\ddot\nu(s+) - \ddot\nu(s-) = 0$.

Amennyiben a $g(s)$ pont az $\mathcal{S}$ egyenesére esik, akkor A és B nem cserélődik meg, tehát $\hat a = a$ és $\hat b = b$, valamint $\alpha = \beta$ és $\hat\alpha = \hat\beta = \pi - \alpha$, tehát

$$\dot\nu(s-) = \frac{\sin\hat\beta}{\hat b} - \frac{\sin\hat\alpha}{\hat a} = \frac{\sin\beta}{b} - \frac{\sin\alpha}{a} = \dot\nu(s+)$$

és

$$\begin{aligned}\ddot\nu(s-) &= \frac{\sin 2\hat\beta}{\hat b^2} - \frac{\sin 2\hat\alpha}{\hat a^2} - \Big(\frac{\cos\hat\beta}{\hat b} - \frac{\cos\hat\alpha}{\hat a}\Big)\\ &= \frac{-\sin 2\beta}{b^2} - \frac{-\sin 2\alpha}{a^2} - \Big(\frac{-\cos\beta}{b} - \frac{-\cos\alpha}{a}\Big) = -\ddot\nu(s+)\end{aligned}$$

vagyis így $\dot\nu(s+) - \dot\nu(s-) = 0$ és $\ddot\nu(s+) + \ddot\nu(s-) = 0$.

A fenti megfontolások motiválják a derivált használatát a takarási függvény vizsgálatakor. Tekintsünk egy $\mathcal{C}$ kört, benne pedig az $\mathcal{S}_1$ és az $\mathcal{S}_2$ szakaszt, amelyeknek adott a $\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s) := \nu_{\mathcal{S}_1}(s) + \nu_{\mathcal{S}_2}(s)$ takarási függvénye a körön. Ha a kör egy $g(s_1)$ pontjában csak az $\mathcal{S}_1$ szakasz egyenese metszi a kört, akkor a $g(s_1)$ végpontú húrra eső $\mathcal{S}_1$ szakasz $\dot\nu(s_1+)$ és $\ddot\nu(s_1+)$ deriváltjai meghatározhatóak az

$$\dot\nu(s_1+) = \frac{\dot\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s+) + \dot\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s-)}{2} \qquad \ddot\nu(s_1+) = \frac{\ddot\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s+) - \ddot\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s-)}{2} \tag{3.2}$$

összefüggésekből, hiszen a fenti képletekben az $\mathcal{S}_2$ szakaszhoz tartozó deriváltak kiejtik egymást, míg az $\mathcal{S}_1$ szakaszhoz tartozóak pedig összeadódnak.

Legyen a továbbiakban $g(s_1)$ és $g(s_2)$ a kör azon pontjai, ahol az $\mathcal{S}$ szakasz egyenese metszi a kört. Figyelemmel a 2.6 és 2.7 tételekre, természetesen merül fel a kérdés, hogy ha a másodrendű deriváltakat is figyelembe vesszük, akkor mi állítható az $\mathcal{S}$ szakaszról. Így jutunk el a következő tételhez.

3.1. Tétel *A $g(s_1)g(s_2)$ húrra eső $\mathcal{S}$ szakaszt a $\dot{\nu}(s_1+)$ és $\ddot{\nu}(s_1+)$ értékek meghatározzák.*

Bizonyítás. A továbbiakban $\dot{\nu}(s_1+)$-t röviden $\dot{\nu}$-vel, $\ddot{\nu}(s_1+)$-t pedig $\ddot{\nu}$-vel jelöljük. A 2.2 lemma második egyenletét átrendezve és az elsőt behelyettesítve adódik, hogy

$$\begin{aligned}\ddot{\nu} &= \frac{\sin 2\alpha}{b^2} - \frac{\sin 2\alpha}{a^2} - \Big(\frac{\cos\alpha}{b} - \frac{\cos\alpha}{a}\Big) = \Big(\sin 2\alpha\Big(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\Big) - \cos\alpha\Big)\Big(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\Big)\\ &= \frac{\dot{\nu}}{\sin\alpha}\Big(\sin 2\alpha\Big(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\Big) - \cos\alpha\Big),\end{aligned}$$

melyet tovább rendezve a távolság reciprokok összegére és különbségére

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\ddot{\nu}\sin\alpha}{\dot{\nu}} + \cos\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\ddot{\nu}}{\dot{\nu}2\cos\alpha} + \frac{1}{2\sin\alpha} &= \frac{1}{b} + \frac{1}{a},\\ \frac{\dot{\nu}}{\sin\alpha} &= \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\end{aligned}$$

adódik. A kettő különbségéből és összegéből kapjuk $\frac{1}{b}$ és $\frac{1}{a}$ értékét amikből

$$b = 2\Big(\frac{\dot{\nu}\sin 2\alpha}{\ddot{\nu}\sin\alpha + (1+2\dot{\nu})\dot{\nu}\cos\alpha}\Big) = \frac{2\sin 2\alpha}{\frac{\ddot{\nu}\sin\alpha}{\dot{\nu}} + \cos\alpha + 2\dot{\nu}\cos\alpha}, \tag{3.3}$$

$$a = 2\Big(\frac{\dot{\nu}\sin 2\alpha}{\ddot{\nu}\sin\alpha + (1-2\dot{\nu})\dot{\nu}\cos\alpha}\Big) = \frac{2\sin 2\alpha}{\frac{\ddot{\nu}\sin\alpha}{\dot{\nu}} + \cos\alpha - 2\dot{\nu}\cos\alpha}. \tag{3.4}$$

Ez egyértelműen meghatározza a húron az $\mathcal{S}$ szakaszt. □

3.2. Tétel *A $\dot{\nu}(s_1+)$ és $\ddot{\nu}(s_1+)$ értékek hosszabb húron hosszabb szakaszt határoznak meg.*

Bizonyítás. A húr hossza $h = 2\sin\alpha$. A (3.3) és (3.4) szerint az erre eső $\mathcal{S}$ szakasz hossza

$$l(\alpha) = a - b = \frac{-8\dot{\nu}\sin 2\alpha\cos\alpha}{(\frac{\ddot{\nu}\sin\alpha}{\dot{\nu}} + \cos\alpha)^2 - 4\dot{\nu}^2\cos^2\alpha}. \tag{3.5}$$

Megmutatjuk, hogy ez a függvény a $(0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, mert α szerinti deriváltja ezen az intervallumon mindig pozitív.

Először számoljuk ki az f-fel jelölt számláló deriváltját:

$$\begin{aligned}f' &= (-8\dot{\nu}\sin 2\alpha\cos\alpha)' = -16\dot{\nu}(\sin\alpha\cos^2\alpha)' = -16\dot{\nu}(\cos^3\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha)\\ &= -16\dot{\nu}\cos\alpha(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) = -16\dot{\nu}\cos\alpha\cos 2\alpha + 8\dot{\nu}\sin 2\alpha\sin\alpha.\end{aligned}$$

Majd a g-vel jelölt nevező deriváltját:

$$\begin{aligned}g' &= \Big(\Big(\frac{\ddot{\nu}\sin\alpha}{\dot{\nu}} + \cos\alpha\Big)^2 - 4\dot{\nu}^2\cos^2\alpha\Big)'\\ &= \Big(\Big(\frac{\ddot{\nu}}{\dot{\nu}}\Big)^2\sin^2\alpha + 2\frac{\ddot{\nu}}{\dot{\nu}}\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - 4\dot{\nu}^2\cos^2\alpha\Big)'\\ &= \Big(\frac{\ddot{\nu}}{\dot{\nu}}\Big)^2 2\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\ddot{\nu}}{\dot{\nu}}\ \cos^2\alpha - 2\frac{\ddot{\nu}}{\dot{\nu}}\sin^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha + 8\dot{\nu}^2\sin\alpha\cos\alpha\\ &= \Big(\frac{\ddot{\nu}}{\dot{\nu}}\Big)^2\sin 2\alpha - \sin 2\alpha + 4\dot{\nu}^2\sin 2\alpha + 2\frac{\ddot{\nu}}{\dot{\nu}}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\end{aligned}$$

$$= \sin 2\alpha\Big(\Big(\frac{\ddot\nu}{\dot\nu}\Big)^2 - 1 + 4\dot\nu^2\Big) + 2\frac{\ddot\nu}{\dot\nu}\cos 2\alpha.$$

Mivel $(f/g)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$, elég csak az $f'g - fg'$ alakú számláló pozitivitását kimutatni. Ennek első tagja

$$fg' = -8\dot\nu \sin 2\alpha \cos\alpha\Big(\sin 2\alpha\Big(\Big(\frac{\ddot\nu}{\dot\nu}\Big)^2 - 1 + 4\dot\nu^2\Big) + 2\frac{\ddot\nu}{\dot\nu}\cos 2\alpha\Big),$$

melyből a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ és a $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ azonosságok felhasználása, valamint a zárójelek kibontása után

$$\begin{aligned}fg' =& -32\dot\nu\Big(\Big(\frac{\ddot\nu}{\dot\nu}\Big)^2 - 1 + 4\dot\nu^2\Big)\sin^2\alpha\cos^3\alpha - 32\ddot\nu\sin\alpha\cos^4\alpha + 32\ddot\nu\sin^3\alpha\cos^2\alpha\\ =&32\Big(-\frac{\ddot\nu^2}{\dot\nu}\sin^2\alpha\cos^3\alpha + \dot\nu\sin^2\alpha\cos^3\alpha - 4\dot\nu^3\sin^2\alpha\cos^3\alpha - \ddot\nu\sin\alpha\cos^4\alpha +\\ &+ \ddot\nu\sin^3\alpha\cos^2\alpha\Big)\end{aligned}$$

adódik. A kivonandóra azt kapjuk hogy

$$\begin{aligned}f'g =& -16\dot\nu(\cos^3\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha)\times\\ &\times\Big(\Big(\frac{\ddot\nu}{\dot\nu}\Big)^2\sin^2\alpha + 2\frac{\ddot\nu}{\dot\nu}\sin\alpha\cos\alpha + +\cos^2\alpha - 4\dot\nu^2\cos^2\alpha\Big)\\ =& -16\frac{\ddot\nu^2}{\dot\nu}\sin^2\alpha\cos^3\alpha - 32\ddot\nu\sin\alpha\cos^4\alpha - 16\dot\nu\cos^5\alpha + 64\dot\nu^3\cos^5\alpha +\\ &+ 32\frac{\ddot\nu^2}{\dot\nu}\sin^4\alpha\cos\alpha + 64\ddot\nu\sin^3\alpha\cos^2\alpha + 32\dot\nu\sin^2\alpha\cos^3\alpha -\\ &- 128\dot\nu^3\sin\alpha^2\cos^3\alpha.\end{aligned}$$

A két kifejezést egymásból kivonva, elvégezve az egyszerűsítéseket, kiderül, hogy

$$\begin{aligned}f'g - fg' = 16\frac{\ddot\nu^2}{\dot\nu}\sin^2\alpha\cos^3\alpha - 16\dot\nu\cos^5\alpha + 64\dot\nu^3\cos^5\alpha +\\ + 32\frac{\ddot\nu^2}{\dot\nu}\sin^4\alpha\cos\alpha + 32\ddot\nu\sin^3\alpha\cos^2\alpha.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Vizsgáljuk meg előjel szempontjából ezt a kifejezést! Nyilván $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\dot\nu > 0$ és mivel $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} > \frac{1}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$, hiszen a maximális távolság ami elérhető, a húrhossz, az is teljesül hogy

$$\ddot\nu = \frac{\dot\nu}{\sin\alpha}\Big(\sin 2\alpha\Big(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\Big) - \cos\alpha\Big) > \dot\nu\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} > 0. \tag{3.7}$$

A (3.6) képletben a második tag kivételével tehát minden tag pozitív. Az első két tagot a (3.7) összefüggéssel vizsgálva

$$16\frac{\ddot\nu^2}{\dot\nu}\sin^2\alpha\cos^3\alpha - 16\dot\nu\cos^5\alpha > 16\dot\nu\Big(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big)^2\sin^2\alpha\cos^3\alpha - 16\dot\nu\cos^5\alpha = 0 \tag{3.8}$$

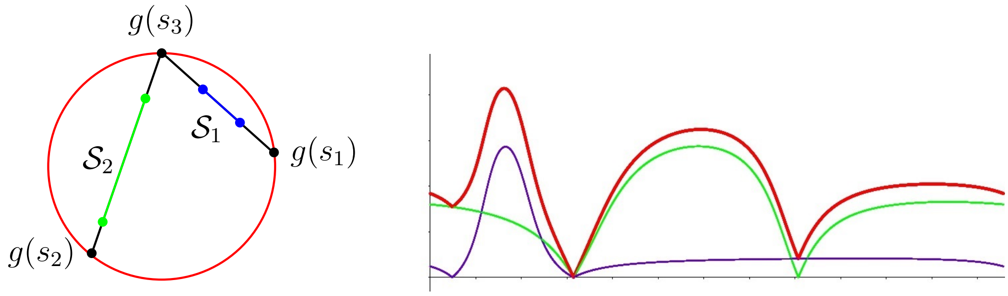
adódik, ami igazolja, hogy l' nagyobb mint 0, azaz az α szög növelésével a húron lévő szakasz hossza szigorú monoton nő a $(0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon.

Már csak be kell látnunk, hogy az l függvény a $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ intervallumon szigorú monoton csökken. Látható, hogy ha a (3.5) képletbe $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ helyett $(\pi - \alpha)$-t írunk, attól a tört értéke nem változik, tehát minden $\alpha \in (0, \pi]$-ra $l(\alpha) = l(\pi - \alpha)$ fennáll, vagyis az l függvény a megfelelő intervallumon valóban szigorúan monoton csökkenő.

Ezzel beláttuk, hogy a hosszabb húron a deriváltak hosszabb szakaszt határoznak meg. □

3.3. Lemma *Ha az $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ szakaszpár takarási függvénye a körön három pontban nem differenciálható, akkor a takarási függvény egyértelműen meghatározza a két szakaszt.*

Bizonyítás. Jelölje ezeket a nem differenciálhatósági pontokat $g(s_1), g(s_2)$ és $g(s_3)$. Ezek közül pontosan egyben, mondjuk $g(s_3)$-ban a takarási függvény értéke 0, így a szakaszok húrjai egyértelműek. A $g(s_1)g(s_3)$ húrra eső $\mathcal{S}_1$ szakasz $\dot{\nu}_{\mathcal{S}_1}(s_1)$ és $\ddot{\nu}_{\mathcal{S}_1}(s_1)$ deriváltjai a takarási függvényből meghatározhatóak a (3.2) alapján, amelyekből a 3.1 tétel szerint a szakasz egyértelműen meghatározott. Hasonlóan megkapható $g(s_2)g(s_3)$ húrra eső szakasz is, így ebben az esetben a takarási függvényből a szakaszok meghatározhatóak. □



3.1. ábra. Két szakasz, illetve ezen szakaszok látószögfüggvényei kékkel és zölddel, valamint a $\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ takarási függvény pirossal, ha a $\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ három pontban nem differenciálható.

A fenti 2.4 szimmetria-tétel, és a 3.2 tétel segítségével belátható két adott hosszúságú szakasz takarási függvényük általi meghatározhatósága.

3.4. Tétel *Egy szakaszpár egy körön belüli különböző nem becsapós elhelyezésekben különböző takarási függvényt határoz meg a körön.*

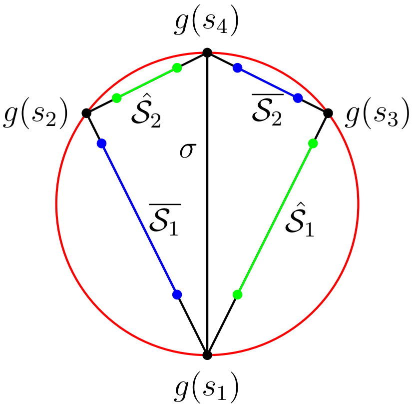
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ szakaszpár, amely két különböző, nem becsapós elhelyezkedésben is ugyanazt a függvényt adja a $\mathcal{C}$ körön. Ezen szakaszpár két elhelyezését jelölje a továbbiakban $\overline{\mathcal{S}_1}, \overline{\mathcal{S}_2}$ illetve $\hat{\mathcal{S}}_1, \hat{\mathcal{S}}_2$.

A bizonyítás a közös takarási függvény nem differenciálhatósági pontjainak száma alapján történik.

HA HÁROM PONTBAN NEM DIFFERENCIÁLHATÓ A TAKARÁSI FÜGGVÉNY
Ekkor a fentinél általánosabb állítás is igaz, amint azt a 3.3 lemma mutatja.

HA NÉGY PONTBAN NEM DIFFERENCIÁLHATÓ A TAKARÁSI FÜGGVÉNY
Legyen ez a négy pont $g(s_1), g(s_2), g(s_3)$ és $g(s_4)$. Először azt az esetet nézzük, amikor semelyik két szakasz nem esik ugyanazon húrra. Ekkor a $\overline{\mathcal{S}_1}$ és $\hat{\mathcal{S}}_1$ szakaszok húrjainak van közös végpontja, az általánosság megszorítása nélkül ez a pont legyen a $g(s_1)$, a két húr pedig rendre $g(s_1)g(s_2)$ és $g(s_1)g(s_3)$. Az indirekt feltevés miatt a két különböző elhelyezkedés takarási függvénye megegyezik, ami miatt

$\dot{\nu}_{\overline{\mathcal{S}_1}}(s_1) = \dot{\nu}_{\hat{\mathcal{S}}_1}(s_1)$ és $\ddot{\nu}_{\overline{\mathcal{S}_1}}(s_1) = \ddot{\nu}_{\hat{\mathcal{S}}_1}(s_1)$ teljesül. Viszont mivel $\overline{\mathcal{S}_1}$ és $\hat{\mathcal{S}}_1$ hossza megegyezik, a 3.2 tétel miatt a két szakasz húrjai egyenlő hosszúak, azaz $g(s_1)g(s_2)$ és $g(s_1)g(s_3)$ szimmetrikusak egy, a kör középpontján és $g(s_1)$ ponton átmenő σ egyenesre. Viszont ekkor a $g(s_3)g(s_4)$ és $g(s_2)g(s_4)$ húrokra, amelyekre rendre a $\overline{\mathcal{S}_2}$ és $\hat{\mathcal{S}}_2$ szakaszok esnek, hasonlóképp igaz, hogy szimmetrikusak, így $g(s_4)$ is ráesik a σ tengelyre. Tehát a $g(s_1), g(s_2), g(s_3)$ és $g(s_4)$ pontok egy deltoidot határoznak meg, ahol a szimmetria tengely a $g(s_1)g(s_4)$ egyenesen van. Az $\dot{\nu}(s_1)$ és $\ddot{\nu}(s_1)$ értékek a szimmetrikus húrokon szimmetrikus $\overline{\mathcal{S}_1}$ és $\hat{\mathcal{S}}_1$ szakaszokat határoznak meg, illetve hasonlóképpen az $\overline{\mathcal{S}_2}$ és $\hat{\mathcal{S}}_2$ szakaszok is szimmetrikusak lesznek a σ egyenesre.



3.2. ábra. Ha egy szakaszpárnak létezne kettő különböző elhelyezése, amelyek ugyanazon négy pontban adnak nem differenciálható takarási függvényt a körön, úgy ezen húrok egy deltoidot adnak.

Ekkor ha egy nem a σ egyenesre eső tetszőleges $g(s_5)$ pontból az $\overline{\mathcal{S}_1}, \overline{\mathcal{S}_2}$ szakaszpár takarási száma $\tau(s_5)$, akkor $g(s_5)$ σ-ra vett tükörképében az $\hat{\mathcal{S}}_1, \hat{\mathcal{S}}_2$ szakaszpárnak is $\tau(s_5)$ a takarási száma, a szakaszok szimmetriája miatt. Az indirekt feltétel miatt viszont $g(s_5)$-ben $\hat{\mathcal{S}}_1, \hat{\mathcal{S}}_2$ szakaszpárnak is $\tau(s_5)$ a takarási száma, tehát ekkor a közös takarási függvény szimmetrikus σ-ra. Ebből viszont ellentmondásra jutottunk, mert a 2.4 szimmetria-tétel miatt a takarási függvény szimmetriájából következnie kell a szakaszok szimmetriájának, ami a húrok elhelyezkedése miatt most nem áll fenn.

Ha $\overline{\mathcal{S}_1}, \hat{\mathcal{S}}_1$ valamint $\overline{\mathcal{S}_2}, \hat{\mathcal{S}}_2$ páronként azonos húrokra esnek, az egy húrra eső szakaszok látószögfüggvényeinek deriváltjai a húrvégpontokban meghatározhatóak a (3.2) alapján és a 3.1 tétel szerint az azonos húrokra eső szakaszok egybeesnek, ami szintén ellentmondás.

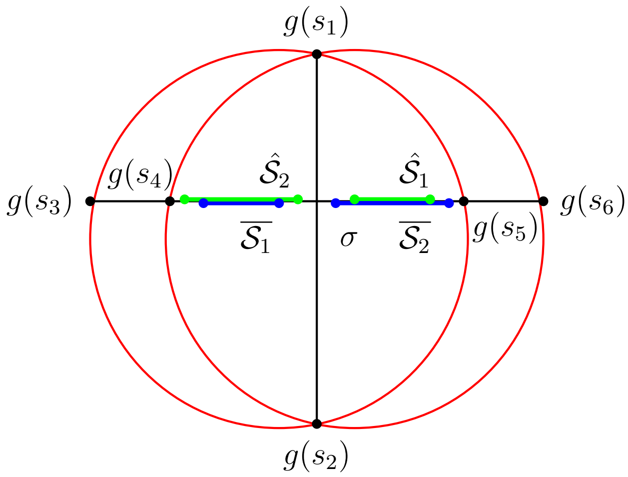
Ha két pontban nem differenciálható a takarási függvény

Ekkor az $\overline{\mathcal{S}_1}$ és az $\hat{\mathcal{S}}_1$ szakaszok σ szimmetriatengelyéről a két szakasz azonos szög alatt látszódik. Legyen $g(s_1)$ és $g(s_2)$ az a két pont, ahol ez a tengely metszi a $\mathcal{C}$ kört. Ezekben a pontokban az indirekt feltevés miatt $\overline{\mathcal{S}_2}$ és $\hat{\mathcal{S}}_2$ is azonos szög alatt kell hogy látszódjanak, azaz ezen két szakasz szimmetriatengelye egybe kell essen σ-val. Tehát a szakaszpárok egymás σ-ra vett tükörképei.

Ha a σ egyenes átmegy a $\mathcal{C}$ kör középpontján, akkor egy, nem a tengelyre eső $g(s_3)$ pontból az $\overline{\mathcal{S}_1}$, $\overline{\mathcal{S}_2}$ szakaszpár takarási száma $\tau(s_3)$. Viszont a szimmetria miatt, a $g(s_3)$ σ-ra vett tükörképében $\hat{\mathcal{S}}_1$, $\hat{\mathcal{S}}_2$ takarási száma is $\tau(s_3)$ lesz, így az indirekt feltevés miatt az $\overline{\mathcal{S}_1}$, $\overline{\mathcal{S}_2}$ takarási függvénye szimmetrikus a körön. Ekkor a 2.4 szimmetria-tétel alapján a szakaszpárok is szimmetrikusak, és helyzetük a 2.5

tétel értelmében egyértelműen ki is számolható, azaz a két szakaszpár egybeesik, ami ellentmond az eredeti feltevésnek.

Amennyiben a σ egyenes nem megy át a középponton, úgy a $\mathcal{C}$ kört egy rövidebb és egy hosszabb körívre bontja. A kört σ-ra tükrözve, az így kapott $g(s_1), g(s_2)$ csúcsú két orsón, az előbbi megfontolással élve, a takarási függvény szimmetrikus lesz. Be fogjuk látni, hogy az orsókon szimmetrikus takarási függvények esetén a szakaszok is szimmetrikusan helyezkednek el.



3.3. ábra. Ha a két orsón a takarási függvény szimmetrikus, akkor az azt meghatározó szakaszok is szimmetrikusan helyezkednek el.

Tekintsük az $\overline{\mathcal{S}_1}, \overline{\mathcal{S}_2}$ szakaszpár takarási függvényét! Legyen a szakaszok egyenesének és a két körnek a metszéspontjai sorban $g(s_3), g(s_4)$, $g(s_5)$ és $g(s_6)$. Ekkor a szimmetriából, és abból, hogy a húrvégpontokban azonosak a jobb és bal irány szerinti deriváltak

$$\dot{\tau}(s_3+) = \dot{\tau}(s_6+) \qquad \text{és} \qquad \dot{\tau}(s_4+) = \dot{\tau}(s_5+)$$

következik. Legyen a két orsó húrjának a hossza $l < h$, a húr és végpontokba húzott érintő által bezárt szög α, az $\overline{\mathcal{S}_1}$ és $\overline{\mathcal{S}_2}$ szakaszok végpontjainak az előjeles távolsága a σ tengely és a húr metszéspontjától rendre $a < b$ és $c < d$. Ekkor a 2.2 lemma alapján a

$$\frac{1}{h+a} - \frac{1}{h+b} + \frac{1}{h+c} - \frac{1}{h+d} = \frac{\dot{\tau}(s_3+)}{\sin\alpha} = \frac{1}{h-b} - \frac{1}{h-a} + \frac{1}{h-d} - \frac{1}{h-c}, \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{l+a} - \frac{1}{l+b} + \frac{1}{l+c} - \frac{1}{l+d} = \frac{\dot{\tau}(s_4+)}{\sin\alpha} = \frac{1}{l-b} - \frac{1}{l-a} + \frac{1}{l-d} - \frac{1}{l-c}$$

egyenletekhez jutunk. Átrendezve rendre az első és a második egyenletet, valamint leosztva $2h$-val illetve $2l$-lel, kapjuk hogy

$$h^2 - a^2 = \frac{(h^2-b^2)(h^2-c^2)(h^2-d^2)}{(h^2-c^2)(h^2-d^2) - (h^2-b^2)(h^2-d^2) + (h^2-b^2)(h^2-c^2)},$$

$$l^2 - a^2 = \frac{(l^2-b^2)(l^2-c^2)(l^2-d^2)}{(l^2-c^2)(l^2-d^2) - (l^2-b^2)(l^2-d^2) + (l^2-b^2)(l^2-c^2)}.$$

A két egyenletet kivonva egymásból a

$$h^2 - l^2 = \frac{(h^2-b^2)(h^2-c^2)(h^2-d^2)}{(h^2-c^2)(h^2-d^2)-(h^2-b^2)(h^2-d^2)+(h^2-b^2)(h^2-c^2)} - \\ - \frac{(l^2-b^2)(l^2-c^2)(l^2-d^2)}{(l^2-c^2)(l^2-d^2)-(l^2-b^2)(l^2-d^2)+(l^2-b^2)(l^2-c^2)}$$

egyenlethez jutunk. Felszorozva a nevezőkkel, és (h^2-b^2)-et és (l^2-b^2)-et kiemelve,

$$\begin{aligned}(h^2-l^2)&[(h^2-c^2)(h^2-d^2)+(h^2-b^2)(d^2-c^2)]\times \\ &\times[(l^2-c^2)(l^2-d^2)+(l^2-b^2)(d^2-c^2)] \\ =&(h^2-b^2)(h^2-c^2)(h^2-d^2)[(l^2-c^2)(l^2-d^2)+(l^2-b^2)(d^2-c^2)]- \\ &-(l^2-b^2)(l^2-c^2)(l^2-d^2)[(h^2-c^2)(h^2-d^2)+(h^2-b^2)(d^2-c^2)]\end{aligned} \tag{3.10}$$

majd elvégezve a szorzásokat és újra szorzattá alakítva

$$\begin{aligned}(h^2-l^2)&(h^2-c^2)(h^2-d^2)(l^2-c^2)(l^2-d^2)+ \\ &+(h^2-l^2)(h^2-c^2)(h^2-d^2)(l^2-b^2)(d^2-c^2)+ \\ &+(h^2-l^2)(h^2-b^2)(d^2-c^2)(l^2-c^2)(l^2-d^2)+ \\ &+(h^2-l^2)(h^2-b^2)(d^2-c^2)(l^2-b^2)(d^2-c^2) \\ =&(h^2-b^2)(h^2-c^2)(h^2-d^2)(l^2-c^2)(l^2-d^2)+ \\ &+(h^2-b^2)(h^2-c^2)(h^2-d^2)(l^2-b^2)(d^2-c^2)- \\ &-(l^2-b^2)(l^2-c^2)(l^2-d^2)(h^2-c^2)(h^2-d^2)- \\ &-(l^2-b^2)(l^2-c^2)(l^2-d^2)(h^2-b^2)(d^2-c^2) \\ =&(h^2-b^2)(l^2-b^2)(d^2-c^2)[(h^2-c^2)(h^2-d^2)-(l^2-c^2)(l^2-d^2)]+ \\ &+(l^2-c^2)(l^2-d^2)(h^2-d^2)(h^2-c^2)(h^2-l^2)\end{aligned}$$

adódik. Ezt 0-ra rendezve

$$\begin{aligned}0=&(h^2-b^2)(l^2-b^2)(d^2-c^2)[(h^2-c^2)(h^2-d^2)-(l^2-c^2)(l^2-d^2)]- \\ &-(h^2-l^2)(h^2-c^2)(h^2-d^2)(l^2-b^2)(d^2-c^2)- \\ &-(h^2-l^2)(h^2-b^2)(d^2-c^2)(l^2-c^2)(l^2-d^2)- \\ &-(h^2-l^2)(h^2-b^2)(d^2-c^2)(l^2-b^2)(d^2-c^2),\end{aligned} \tag{3.11}$$

majd, mivel

$$(h^2-c^2)(h^2-d^2)-(l^2-c^2)(l^2-d^2)=(h^2-l^2)(h^2+l^2-c^2-d^2)$$

és így

$$(h^2-c^2)(h^2-d^2)-(l^2-c^2)(l^2-d^2)-(d^2-c^2)(h^2-l^2)=(h^2-l^2)(-2d^2+h^2+l^2),$$

a (3.11) első és negyedik, illetve második és harmadik tagjából kiemelve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}0=&(h^2-b^2)(l^2-b^2)(d^2-c^2)(h^2-l^2)(-2d^2+h^2+l^2)- \\ &-(h^2-l^2)(d^2-c^2)[(h^2-c^2)(h^2-d^2)(l^2-b^2)+(h^2-b^2)(l^2-c^2)(l^2-d^2)].\end{aligned}$$

Mivel $d \neq c$ és $h \neq l$ ezért (h^2-l^2) és (d^2-c^2)-el való leosztás után marad a

$$0 =(h^2 - b^2)(l^2 - b^2)(-2d^2 + h^2 + l^2) - (h^2 - c^2)(h^2 - d^2)(l^2 - b^2)-$$
$$- (h^2 - b^2)(l^2 - c^2)(l^2 - d^2)$$

egyenlőség. A zárójeleket felbontva,

$$0 = - 2b^4d^2 + 2b^2c^2d^2 + b^4h^2 - b^2c^2h^2 + b^2d^2h^2 - c^2d^2h^2+$$
$$b^4l^2 - b^2c^2l^2 + b^2d^2l^2 - c^2d^2l^2 - 2b^2h^2l^2 + 2c^2h^2l^2$$

majd újra csoportosítva jutunk a

$$0 = -(b^2 - c^2)(2h^2l^2 + b^2(2d^2 - h^2 - l^2) - d^2(h^2 + l^2)) \tag{3.12}$$

alakhoz. Ha a szorzat első tényezője 0, akkor $b = \pm c$ adódik. Visszaírva ezt az (3.9)-be, $a = \pm d$ eredményt kapunk. A négy lehetséges megoldáspár közül azonban az $a = d$ és $b = c$ illetve az $a = -d$ és $b = c$ végeredmények az $a < b$ és $c < d$ feltételek miatt nem teljesülhet. Ha $a = -d$ és $b = c$, akkor az egy húrra eső szakaszoknak pontosan egy közös pontjuk van, de a becsapós szakaszpárokat kizártuk. Tehát az egyetlen megoldás az $a = -d$ és $b = -c$, ami azt jelenti hogy a szakaszok a σ tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el. Ha a (3.12) második tényezője 0, akkor

$$b^2 = \frac{d^2(h^2 + l^2) - 2h^2l^2}{2d^2 - h^2 - l^2},$$

ami szintén ellentmondás, hiszen $b^2 > l^2$, mert

$$\frac{d^2(h^2 + l^2) - 2h^2l^2}{2d^2 - h^2 - l^2} > l^2,$$

ugyanis a negatív nevezővel felszorozva $d^2(h^2 + l^2) - 2h^2l^2 < l^2(2d^2 - h^2 - l^2)$, majd átrendezve $(d^2 - l^2)(h^2 - l^2) < 0$ adódik, amely mindig teljesül hiszen az első tényező negatív, a második pedig pozitív.

Kaptuk tehát, hogy a $\mathcal{C}$ körben elhelyezkedő $\overline{\mathcal{S}_1}$ és $\overline{\mathcal{S}_2}$ szakaszok egymás tükörképei, illetve a $\overline{\mathcal{S}_1}, \overline{\mathcal{S}_2}$ szakaszpárt σ-ra tükrözve $\hat{\mathcal{S}}_1, \hat{\mathcal{S}}_2$ szakaszpárt kapjuk. A kettő szimmetria összevetése eredményezi hogy a két szakaszpárnak egybe kell esnie, ami ellentmond az eredeti indirekt feltevésünknek. □

A következőkben általánosabb görbéken szeretnénk egy szakaszpár takarási függvényét vizsgálni. A 2.1 lemma az alábbi alakban fogalmazható meg, ha a $\mathcal{C}$ egy zárt konvex görbe.

3.5. Lemma *Egy $\mathcal{S} = \overline{AB}$ szakasz C konvex zárt görbén vett ν látószögfüggvényének deriváltjai*

$$\dot{\nu}(s+) = \frac{\sin\beta(s)}{b(s)} - \frac{\sin\alpha(s)}{a(s)}$$

és

$$\ddot{\nu}(s+) = \frac{\sin 2\beta(s)}{b^2(s)} - \frac{\sin 2\alpha(s)}{a^2(s)} - \kappa(s)\Big(\frac{\cos\beta(s)}{b(s)} - \frac{\cos\alpha(s)}{a(s)}\Big),$$

ahol $\dot{\nu}(s+)$ és $\ddot{\nu}(s+)$ a pozitív körüljárási iránnyal adódó első és másodrendű derivált.

A 3.1 lemma zárt konvex $\mathcal{C}$ görbe esetén is érvényben marad, azaz a $\mathcal{C}$ görbe egy adott húrjára eső $\mathcal{S}$ szakasz kiszámolható az egyik végpontban felvett első és másodrendű derivált értékéből. A bizonyítás menete változatlan, csak a szakasz végpontjainak húrvégponttól vett távolságába kerül bele a $\mathcal{C}$ görbe húrvégpontbeli κ értéke:

$$a = \frac{2\dot{\nu}\sin 2\alpha}{\ddot{\nu}\sin\alpha + (\kappa - 2\dot{\nu})\dot{\nu}\cos\alpha} \qquad b = \frac{2\dot{\nu}\sin 2\alpha}{\ddot{\nu}\sin\alpha + (\kappa + 2\dot{\nu})\dot{\nu}\cos\alpha} \tag{3.13}$$

Valamint továbbra is ki tudjuk olvasni két szakasz takarási függvényéből az egyes szakaszok látószögfüggvényeinek a deriváltját, azokban a pontokban, ahol csak az egyik szakasz egyenese metszi a $\mathcal{C}$ görbét, a (3.2) képletek segítségével.

A fenti megfontolások és a 2. szakaszban tárgyalt ekvioptikus görbék segítségével új állításokhoz juthatunk. A 2.11 tétel szerint két szakaszpár ekvioptikusa egy algebrai görbe része. Bèzout tétele [10] szerint két, közös komponenstől mentes algebrai görbe metszéspontjainak száma legfeljebb a görbék fokszámának szorzata, ezért egy algebrai $\mathcal{C}$ görbe, és a szakaszpárok evioptukusát tartalmazó algebrai-görbe véges sok pontban metszheti egymást úgy, hogy a $\mathcal{C}$ ne legyen az ekvioptikus része. Ebből következik az alábbi állítás.

3.6. Tétel *Ha a $\mathcal{C}$ algebrai görbe egy nyílt ívén két szakaszpár takarási száma megegyezik, akkor a szakaszpárok takarási függvénye az egész $\mathcal{C}$ görbén megegyezik.*

Az ekvioptikusokat felhasználva az alábbi állítás is bebizonyítható:

3.7. Tétel *Ha egy $\mathcal{C}$ görbe nem része algebrai görbének, akkor egy nem becsapós $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ szakaszpárt a görbén felvett $\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ takarási függvénye egyértelműen meghatároz.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik két különböző szakaszpár is, amelynek ugyanaz a takarási függvénye a $\mathcal{C}$ görbén. Ekkor tehát a görbe ezen két szakaszpár ekvioptikusának része, ami viszont a 2.11 tétel értelmében egy algebrai görbe része, tehát ellentmondásra jutottunk. □

A következő szimmetria-tétel ugyanezen megfontolásból adódik.

3.8. Tétel *Ha egy σ tengelyre szimmetrikus $\mathcal{C}$ görbe nem része algebrai görbének, akkor egy szakaszpár takarási függvénye a görbén akkor és csak akkor szimmetrikus σ-ra, ha a szakaszok egymás vagy önnön maguk tükörképei a σ egyenesre nézve.*

Bizonyítás. Szimmetrikus szakaszokból természetesen következik a függvény szimmetriája.

Ha egy nem szimmetrikus elhelyezkedésű szakaszpár függvénye szimmetrikus, akkor a σ tengelyre tükrözve a szakaszokat, a tükörkép szakaszpárnak is ugyanaz lesz a takarási függvénye a körön. Azaz a két különböző szakaszpár ekvioptikusának része a $\mathcal{C}$ görbe, ami ellentmondana a 2.11 tételnek. Így a szakaszpárnak a σ tengelyre nézve szimmetrikusan kell elhelyezkedniük. □

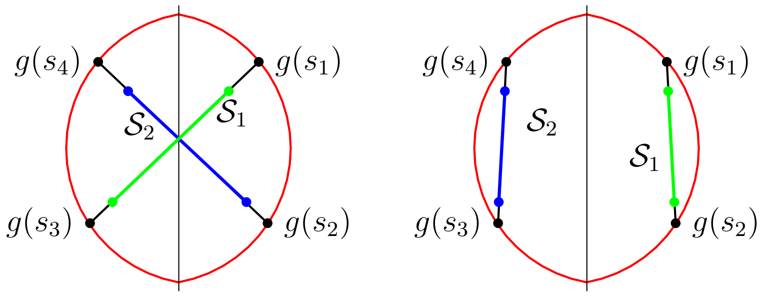
A 3.4 tétel bizonyítása során találkoztunk orsón adott takarási függvénnyel, ami után felmerül a kérdés, ha két szakasznak egy orsón szimmetrikus a takarási függvénye, akkor következik-e ebből, hogy a szakaszpár szimmetrikus elhelyezkedésű. Sőt, a 3.6 tétel segítségével általánosabb görbéken is értelmezhető a szimmetria: tekintsünk egy zárt $\mathcal{C}$ algebrai görbét, és ezt a görbét metsző σ egyenest. Az egyenes két ívre bontja $\mathcal{C}$-t. Ekkor hívjuk az egyik ív, és ezen ív σ-ra vett tükörképét *algebrai-orsónak*, σ-t pedig ezen algebrai-orsó tengelyének.

3.9. Tétel *A $\tau_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}$ takarási függvény a $\mathcal{C}$ konvex algebrai-orsón akkor és csak akkor szimmetrikus a $\mathcal{C}$ orsó σ tengelyére, ha a szakaszok egymás vagy önnön maguk* *tükörképei a σ egyenesre nézve, vagy ha a két szakasz egy σ-ra merőleges egyenesre esik, becsapós elhelyezkedésűek és az uniójuk szimmetrikus a σ egyenesre.*

Bizonyítás. A bizonyítás a szakaszok egyenesei és a $\mathcal{C}$ algebrai-orsó metszéspontjainak száma szerint történik.

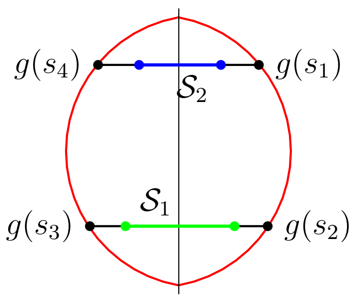
Ha a szakaszok egyeneseinek és $\mathcal{C}$-nek négy metszéspontja van
Elsőnek azt az esetet nézzük, amikor ezen pontok egyike sem esik a σ tengelyre. Legyen ez a négy pont $g(s_1)$, $g(s_2)$ valamint ezek tükörképei, rendre $g(s_3)$ és $g(s_4)$. Ekkor a húrok 3 különböző helyzetben állhatnak.

Amennyiben a két húr a $g(s_1)g(s_2)$ és a $g(s_3)g(s_4)$ vagy a $g(s_1)g(s_4)$ és $g(s_2)g(s_3)$, azaz a húrok egymás tükörképei, úgy a $g(s_1)$ végpontú húrra eső $\mathcal{S}_1$ szakaszt a $\dot{\nu}_{\mathcal{S}_1}(s_1)$ és $\ddot{\nu}_{\mathcal{S}_1}(s_1)$ értékek, a $g(s_3)$ végpontú húrra eső $\mathcal{S}_2$ szakaszt pedig a $\dot{\nu}_{\mathcal{S}_2}(s_3+)$ és $\ddot{\nu}_{\mathcal{S}_2}(s_3+)$ értékek egyértelműen meghatározzák. Mivel a húrok egymás σ-ra vett tükörképei, a függvény szimmetriája miatt a deriváltak is szimmetrikusak, ezért az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ szakaszoknak is szimmetrikusnak kell lenniük.



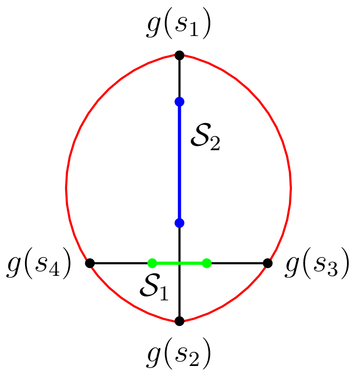
3.4. ábra. Ha a húrok egymás tükörképei, akkor a szimmetrikus adatok egymással szimmetrikus szakaszokat határoznak meg.

Ha az $\mathcal{S}_1$ a $g(s_1)g(s_3)$ húrra esik, akkor a húrvégpontokban lévő szimmetrikus adatok egyenlő távolságokat adnak a szakasz végpontjaira, azaz $\mathcal{S}_1$ önmaga σ-ra vett tükörképe. Hasonlóan belátható $\mathcal{S}_2$ szimmetrikussága σ-ra.



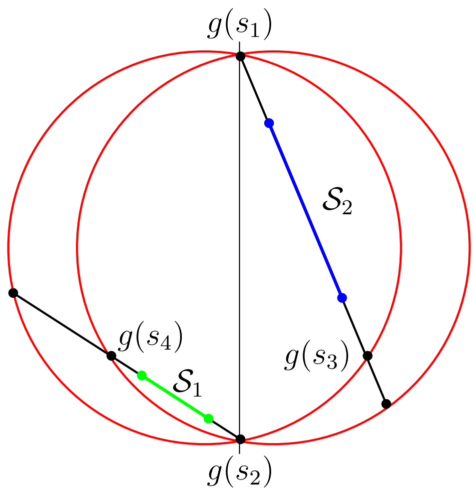
3.5. ábra. Ha a húrok a tengelyre merőlegesek, akkor a szakaszok szimmetrikusak a tengelyre.

Ha az egyik húrvégpont a tengelyre esik, akkor egy másik húrvégpontnak is a tengelyre kell esnie. Legyen ez a két pont $g(s_1)$ és $g(s_2)$, a másik két szimmetrikus pont pedig $g(s_3)$ és $g(s_4)$. Ekkor ha az egyik húr a $g(s_1)g(s_2)$, akkor ezen húrra eső szakasz látószögfüggvénye szimmetrikus $\mathcal{C}$-n, tehát a másik szakasznak is szimmetrikus a látószögfüggvénye, ami nem lehet másképp, minthogy önmaga tükörképe σ-ra nézve.



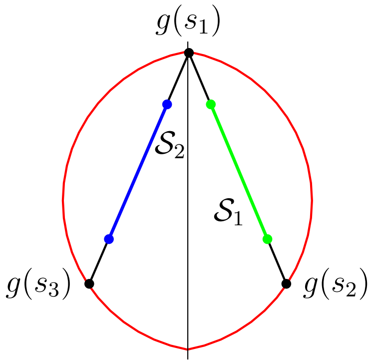
3.6. ábra. Ha az egyik húr egyenese egybeesik a tengellyel, akkor a szakaszok szimmetrikusak a tengelyre.

A másik párosítás, amikor egy-egy húrvégpont esik a tengelyekre, nem lehetséges. Tegyük fel ugyanis, hogy az ilyen elhelyezkedésű $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ szakaszpár szimmetrikus függvényt határoz meg az orsón. Ekkor a szakaszpár σ-ra vett tükörképe, a szimmetria miatt ugyanazt a függvényt határozza meg az orsón. Ekkor a 3.6 tétel értelmében a két szakaszpár takarási függvénye megegyezik az orsót meghatározó teljes két algebrai görbén is, azaz a két algebrai görbén felvett takarási függvények szimmetrikusak. Viszont ekkor a szakasz húrjainak egyenesei, azoknak az aszimmetriája miatt a két algebrai görbét nem szimmetrikus pontokban metszik, azaz a görbéken máshol keletkeznek nem differenciálhatósági pontok, így ellentmondáshoz jutunk.



3.7. ábra. Ha a húrok egy-egy végpontja esik a tengelyre, a szakaszok nem határozhatnak meg szimmetrikus függvényt.

HA A SZAKASZOK EGYENESEINEK ÉS $\mathcal{C}$-NEK HÁROM METSZÉSPONTJA VAN
Ezen három pont közül pontosan egynek a tengelyre kell esnie. Ekkor a húrok szimmetrikusak, és az egymásra szimmetrikus húrvégpontokban a húrra eső szakaszok látószögfüggvényének első és másodrendű deriváltjai megegyeznek, amik szimmetrikus szakaszokat határoznak meg a húrokon.



3.8. ábra. Ha a szakaszok egyenesei a tengelyen metszik egymást, a szimmetrikus adatok szimmetrikus szakaszokat határoznak meg.

Ha a szakaszok egyeneseinek és $\mathcal{C}$-nek két metszéspontja van

Ekkor ezen két pont legyen $g(s_1)$ és $g(s_2)$. Ha $g(s_1)$ és $g(s_2)$ a σ-ra esik, az állítás triviális. Egyébként a takarási függvény szimmetriája miatt fennállnak a

$$\dot{\tau}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s_1+) = \dot{\tau}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s_2-) \qquad \text{és} \qquad \ddot{\tau}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s_1+) = \ddot{\tau}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s_2-)$$

egyenlőségek. Ha $a < b$ illetve $c < d$ jelöli a szakasz végpontjainak $g(s_1)$-től vett távolságát, α a húrvégpontokba húzott érintőknek és a szakaszok egyeneseinek szögét, h a húr hosszát, akkor a fenti egyenlőségrendszer első egyenlete a (3.5) alapján

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{d} = \frac{\dot{\tau}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s_1+)}{\sin\alpha} = \frac{\dot{\tau}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s_2-)}{\sin\alpha} = \frac{1}{h-b} - \frac{1}{h-a} + \frac{1}{h-d} - \frac{1}{h-c} \tag{3.14}$$

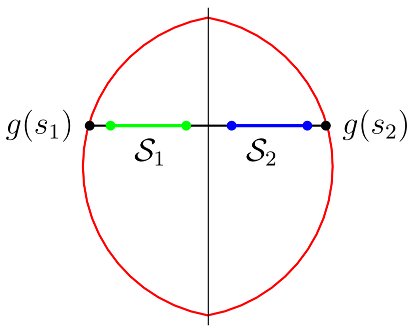
alakú, másodrendű deriváltakra pedig fennáll az

$$\ddot{\tau}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s_1+) = \frac{\sin 2\alpha}{a^2} - \frac{\sin 2\alpha}{b^2} + \frac{\sin 2\alpha}{c^2} - \frac{\sin 2\alpha}{d^2} - \kappa(s_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dot{\tau}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s_1+)$$
$$\ddot{\tau}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s_2-) = \frac{\sin 2\alpha}{(h-b)^2} - \frac{\sin 2\alpha}{(h-a)^2} + \frac{\sin 2\alpha}{(h-d)^2} - \frac{\sin 2\alpha}{(h-c)^2} - \kappa(s_2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dot{\tau}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s_2+)$$

összefüggés. Kihasználva, hogy a kivonandók egyenlőek, hiszen a szimmetria miatt a κ görbületek egyenlőek és $\dot{\tau}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s_1+) = \dot{\tau}_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}(s_2+)$ hiszen a nem deriválhatósági pontokban a jobb és bal irány szerint vett elsőrendű deriváltak megegyeznek, a második egyenletünk

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2} = \frac{1}{(h-b)^2} - \frac{1}{(h-a)^2} + \frac{1}{(h-d)^2} - \frac{1}{(h-c)^2} \tag{3.15}$$

lesz.



A (3.14) és (3.15) egyenleteket egyszerűbb alakra hozhatjuk, ha bevezetjük az

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{h-a} = \frac{h}{a(h-a)} = x, \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{h-c} = y, \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{h-b} = z, \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{h-d} = t$$

jelöléseket. Mivel

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(h-a)^2} = x^2 - \frac{2}{a(h-a)} = x^2 - \frac{2}{h}x,$$

a (3.14) és (3.15) egyenletek az

$$x + y = z + t,$$
$$x^2 - \frac{2}{h}x + y^2 - \frac{2}{h}y = z^2 - \frac{2}{h}z + t^2 - \frac{2}{h}t$$

alakra hozhatóak. Az első egyenlet $2/h$-szorosát hozzáadva a másodikhoz, az

$$x + y = z + t,$$
$$x^2 + y^2 = z^2 + t^2$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első négyzetéből kivonva a második egyenletet, majd osztva kettővel azt kapjuk, hogy

$$x + y = z + t,$$
$$xy = zt.$$

Az első egyenletből kifejezett t-t a másodikba helyettesítve az $xy = z((x+y) - z)$ egyenlethez jutunk, ami a z-ben másodfokú

$$z^2 - (x+y)z + xy = (z-x)(z-y) = 0 \tag{3.16}$$

egyenlethez vezet, melynek két megoldása $z = y$ és $z = x$.

Ha $z = x$ akkor $t = y$. Mivel

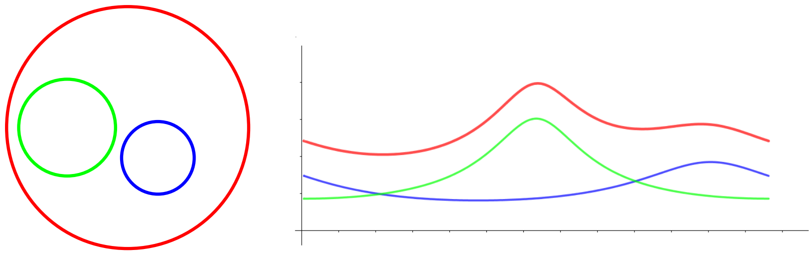
$$\frac{h}{b(h-b)} = z = x = \frac{h}{a(h-a)}, \tag{3.17}$$

ebből következik $a(h-a) = b(h-b)$, amiből $h(a-b) = (a-b)(a+b)$ adódik. Ennek egyik megoldása $a = b$, ami most nem teljesülhet, hiszen $a < b$. Másik megoldása $a = h-b$, ami vagy nem lesz megoldás, ha $b < b-h$, vagy pedig a szakasz két végpontja egymás tükörképei a tengelyre. Hasonlóan a $t = y$ egyenletből arra juthatunk, hogy a másik szakasz a tengelyre szimmetrikus.

Ha $z = y$ akkor $t = x$. Ekkor négy lehetséges megoldás-pár van. Ha $b = c$ és $a = d$, akkor az $a < b$ és $c < d$ egyenlőtlenségek egyszerre nem teljesülhetnek, ezért nem lesz megoldása a problémának. Ha $b = c, a = h - d$ és az egyenlőtlenségek teljesülnek, akkor a két szakasz egy, a tengelyre szimmetrikus szakaszt határoz meg. Ha $b = h - c$, $a = d$ és az egyenlőtlenségek teljesülnek, akkor is egy, a tengelyre szimmetrikus szakaszt határoz meg $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$. Ha pedig $b = h - c$, $a = h - d$ és az egyenlőtlenségek is teljesülnek, akkor a két szakasz egymás tükörképe. $\square$

4. MULTIKÖRÖK TAKARÁSI FÜGGVÉNYE

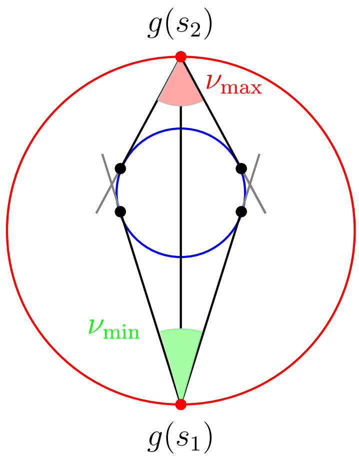
Ebben a fejezetben körök takarási függvényéről lesz szó. Célunk a szakaszokra kimondott tételekhez hasonló állítások elérése. Vizsgáljuk, hogy a $\mathcal{K}$ körnek a $\mathcal{C}$ körön felvett $\nu(s)$ látószögfüggvénye meghatározza-e a kört, és ha igen, akkor hány pontban elég ismerni a függvény, vagy annak deriváltjainak értékét. Majd vizsgáljuk a $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ körök $\tau_{\mathcal{K}1,\mathcal{K}_2}(s)$ takarási függvénye milyen esetekben lesz konstans a $\mathcal{C}$ körön, illetve ha $\tau_{\mathcal{K}1,\mathcal{K}_2}(s)$ szimmetrikus a körön, következtethetünk-e ebből a $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ szimmetriájára.



4.1. ábra. A zöld és kék kör látószögfüggvényei zölddel és kékkel, illetve a két függvény összege, a takarási függvény pirossal

4.1. Lemma *A $\mathcal{K}$ kört a $\mathcal{C}$ körön adott $\nu(s)$ függvény egyértelműen meghatározza.*

Bizonyítás. A $\mathcal{K}$ kör megszerkeszthető az alábbi módon. Amennyiben a $\nu(s)$ függvény nem konstans, úgy pontosan egy minimuma és egy maximuma van, és ezen szélsőértékhelyek, valamint a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{C}$ kör középpontjai egy közös e egyenesre esnek. Ez adódik a 2.3 lemmából, vagy abból a megfontolásból, hogy a látószög a síkon kizárólag a körtől vett távolságtól függ. Vegye fel a $\nu(s)$ függvény a $\nu_{\min}$ minimumát a $\mathcal{C}$ kör $g(s_1)$ pontjában, $\nu_{\max}$ maximumát a $\mathcal{C}$ kör $g(s_2)$ pontjában. Ekkor $g(s_1)$-ben egy $\nu_{\min}$ szögű, e szögfelezőjű szöget, és $g(s_2)$-ben egy $\nu_{\max}$ szögű, e szögfelezőjű szöget szerkesztve egy érintőnégyszöget kapunk, melynek az egyetlen beírt köre éppen $\mathcal{K}$.



Amennyiben a $\nu(s)$ a $\mathcal{C}$ körön konstans, úgy $\mathcal{C}$ és $\mathcal{K}$ koncentrikusak. Világos, ha a kör középpontja ismert, és legalább a sík egy pontjából ismerjük a látószöget, a kör megszerkeszthető. $\square$

Mivel két nem koncentrikus kör ekivoptikusa a 2.12 tétel szerint egy Apollóniosz-körív, ami a tőle különböző $\mathcal{C}$ kört legfeljebb 2 pontban metszheti, a fenti lemmából adódik a következő állítás.

4.2. Tétel *Ha a $\mathcal{C}$ körnek létezik 3 olyan pontja, melyekből a kör belsejében fekvő $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ körök egyforma szög alatt látszódnak, akkor $\mathcal{K}_1 \equiv \mathcal{K}_2$.*

Ha a $\mathcal{C}$ kör 3 pontjából ismerjük egy $\mathcal{K}$ kör látószögét, akkor meg is szerkeszthetjük a $\mathcal{K}$ kört. Legyen a kör ezen három pontja rendre $g(s_1), g(s_2)$ és $g(s_3)$, a látószögek rendre α, β és γ. A $g(s_i)$ pont távolsága a $\mathcal{K}$ kör K középpontjától legyen d_i, ahol $i = 1, 2, 3$, a $\mathcal{K}$ kör sugara pedig r. Ekkor

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{d_1}, \quad \sin\frac{\beta}{2} = \frac{r}{d_2}, \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{d_3}, \tag{4.1}$$

amiből

$$\frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)} = \frac{d_2}{d_1}, \tag{4.2}$$

ami azt jelenti, hogy a K középpont $g(s_1)$ és $g(s_2)$-től vett távolságok aránya ismert, azaz K rajta fekszik a $g(s_1)$ és $g(s_2)$ pontok $\frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)}$ arányú Apollóniosz körén. Hasonlóan, K rajta fekszik a $g(s_2), g(s_3)$ és $g(s_1), g(s_3)$ megfelelő arányú Apollóniosz körén. Az Apollóniosz körök a K pontban metszik egymást, a középpontot és egy látószöget ismerve pedig a $\mathcal{K}$ kör megszerkeszthető.

4.3. Tétel *A $\mathcal{K}$ kört egyértelműen meghatározza bármely $(\nu(s), \dot\nu(s), \ddot\nu(s))$ számhármas.*

Bizonyítás. A 2.3 lemma alapján az alábbi összefüggéseket tudjuk a látószögfüggvényről és annak deriváltjairól:

$$\nu = \beta - \alpha \tag{4.3}$$

$$\dot\nu = \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{a} \tag{4.4}$$

$$\ddot\nu = \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{a^2} + \frac{(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)r}{a^3} - \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{a} \tag{4.5}$$

Mivel $r = a \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}$ ezért a (4.5) egyenlet a

$$\ddot\nu = \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{a^2} + \frac{(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{a^2} - \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{a} \tag{4.6}$$

alakra írható át. Először azt az esetet tekintsük, amikor $\dot\nu \neq 0$. A (4.3) képletből $\beta = \alpha + \nu$, amit a (4.4)-be helyettesítve

$$\begin{aligned}\dot\nu &= \frac{\sin(\alpha+\nu) - \sin\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha\cos\nu + \cos\alpha\sin\nu - \sin\alpha}{a} \\ &= \frac{(\cos\nu - 1)\sin\alpha + \cos\alpha\sin\nu}{a},\end{aligned}$$

amiből

$$a = \frac{(\cos\nu - 1)\sin\alpha + \cos\alpha\sin\nu}{\dot\nu} \tag{4.7}$$

adódik. A (4.6)-ba beírva β értékét azt kapjuk, hogy

$$\ddot{\nu} = \frac{\sin 2(\alpha+\nu) - \sin 2\alpha}{a^2} + \frac{(\sin^2\alpha + \sin^2(\alpha+\nu))\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{a^2} - \Big(\frac{\cos(\alpha+\nu) - \cos\alpha}{a}\Big).$$

Felszorozva mindkét oldalt a^2-tel és rendezve, az

$$0 = (\sin 2(\alpha+\nu) - \sin 2\alpha) + (\sin^2\alpha + \sin^2(\alpha+\nu))\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} - a(\cos(\alpha+\nu) - \cos\alpha) - \ddot{\nu}a^2 \quad (4.8)$$

egyenletet kapjuk. Egyszerűsítsük külön-külön a tagokat! Mivel,

$$\begin{aligned}
\sin 2(\alpha+\nu) &= 2\sin(\alpha+\nu)\cos(\alpha+\nu)\\
&= 2(\sin\alpha\cos\nu + \cos\alpha\sin\nu)(\cos\alpha\cos\nu - \sin\alpha\sin\nu)\\
&= 2(\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\nu - \sin^2\alpha\cos\nu\sin\nu + \cos^2\alpha\sin\nu\cos\nu - \cos\alpha\sin\alpha\sin^2\nu)\\
&= 2((\cos^2\nu - \sin^2\nu)\sin\alpha\cos\alpha + (\cos\nu\sin\nu)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)),
\end{aligned}$$

az első tag

$$\begin{aligned}
&\sin 2(\alpha+\nu) - \sin 2\alpha\\
&\qquad = 2((\cos^2\nu - \sin^2\nu - 1)\sin\alpha\cos\alpha + (\cos\nu\sin\nu)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha))\\
&\qquad = -4(\cos\nu\sin\nu)\sin^2\alpha - 4\sin^2\nu\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos\nu\sin\nu,
\end{aligned}$$

a második tag

$$\begin{aligned}
(\sin^2\alpha + \sin^2(\alpha+\nu))\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} &= \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}(\sin^2\alpha + (\sin\alpha\cos\nu + \cos\alpha\sin\nu)^2)\\
&= \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}((\cos^2\nu + 1)\sin^2\alpha + 2\sin\nu\cos\nu\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\nu\cos^2\alpha)\\
&= \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}((\cos^2\nu - \sin^2\nu + 1)\sin^2\alpha + 2\sin\nu\cos\nu\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\nu),
\end{aligned}$$

a harmadik tag

$$\begin{aligned}
&a(\cos(\alpha+\nu) - \cos\alpha)\\
&\qquad = \frac{1}{\dot{\nu}}((\cos\nu - 1)\sin\alpha + \cos\alpha\sin\nu)((\cos\nu - 1)\cos\alpha - \sin\alpha\cos\nu)\\
&\qquad = \frac{1}{\dot{\nu}}(-\cos\nu(\cos\nu - 1)\sin^2\alpha + \sin\nu(\cos\nu - 1)\cos^2\alpha +\\
&\qquad\quad + ((\cos\nu - 1)^2 - \sin\nu\cos\nu)\sin\alpha\cos\alpha)\\
&\qquad = \frac{1}{\dot{\nu}}(((\cos\nu(\cos\nu - 1)) - (\sin\nu(\cos\nu - 1)))\sin^2\alpha +\\
&\qquad\quad + ((\cos\nu - 1)^2 - \sin\nu\cos\nu)\sin\alpha\cos\alpha + \sin\nu(\cos\nu - 1)),
\end{aligned}$$

a negyedik tag pedig

$$\begin{aligned}
a^2\ddot{\nu} &= \frac{\ddot{\nu}}{\dot{\nu}^2}((\cos\nu - 1)^2\sin^2\alpha + 2\sin\nu(\cos\nu - 1)\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\nu\cos^2\alpha)\\
&= \frac{\ddot{\nu}}{\dot{\nu}^2}((((\cos\nu - 1)^2 - \sin^2\nu)\sin^2\alpha + 2\sin\nu(\cos\nu - 1)\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\nu).
\end{aligned}$$

Ezek szerint a (4.8) egyenlet átírható az

$$A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C = 0 \quad (4.9)$$

alakra, ahol az A, B és C együtthatók kiolvashatók a takarási függvényből, mégpedig

$$\begin{aligned}
A =& -4\cos\nu\sin\nu + \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}(\cos^2\nu - \sin^2\nu + 1) - \\
&- \frac{1}{\dot\nu}\cos\nu(\cos\nu - 1) - \sin\nu(\cos\nu - 1) - \frac{\ddot\nu}{\dot\nu^2}((\cos\nu - 1)^2 - \sin^2\nu), \\
B =& -4\sin^2\nu + \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}2\sin\nu\cos\nu - \frac{1}{\dot\nu}((\cos\nu - 1)^2 - \sin\nu\cos\nu) - 2\sin\nu(\cos\nu - 1), \\
C =& 2\cos\nu\sin\nu + \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\sin^2\nu - \frac{1}{\dot\nu}\sin\nu(\cos\nu - 1) - \frac{\ddot\nu}{\dot\nu^2}\sin^2\nu.
\end{aligned}$$

Az (4.9) egyenletet az

$$A\frac{1-\cos 2\alpha}{2} + B\frac{\sin 2\alpha}{2} + C = 0$$

alakra hozva, rendezve és leosztva

$$\sin 2\alpha\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} - \cos 2\alpha\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-2C-A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

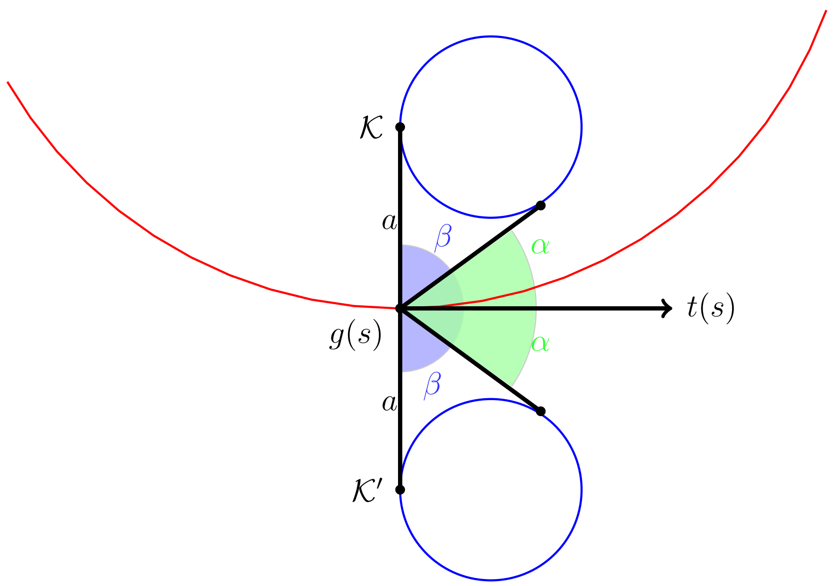
adódik. Legyen $\gamma \in (0, \pi)$ olyan, hogy $\cos\gamma = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Ekkor egyenletünk a

$$\sin(2\alpha - \gamma) = \frac{-2C-A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

alakot veszi fel, melyből

$$\alpha = \frac{1}{2}\Big(\gamma + \arcsin\frac{-2C-A}{\sqrt{A^2+B^2}}\Big) \qquad \text{vagy} \qquad \alpha = \frac{1}{2}\Big(\pi - \gamma - \arcsin\frac{-2C-A}{\sqrt{A^2+B^2}}\Big)$$

következik. Visszahelyettesítve $\beta = \alpha + \nu$-be és a (4.7) képletbe, két kört kapunk megoldásként.



4.2. ábra. Két körhöz is ugyanazon $(\nu(s), \dot\nu(s), \ddot\nu(s))$ számhármas tartozik, de az egyik az egységkörön kívül esik.

Mivel minden lépésben ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért nem jöttek be új megoldások, és nem is vesztettünk el megoldást. Ha a $\mathcal{K}$ kört tükrözzük a $g(s)$ pontba húzott érintő egyenesére, az így kapott $\mathcal{K}'$ kör α', β' és a' értékei megegyeznek az eredeti kör α, β és a értékeivel, ezért $g(s)$ pontban a $\mathcal{K}'$ és $\mathcal{K}$ körök $(\nu(s), \dot{\nu}(s), \ddot{\nu}(s))$ számhármasai megegyeznek, így az egyik megoldásunk $\mathcal{K}$-t, a másik megoldásunk $\mathcal{K}'$-t kell adja. Viszont $\mathcal{K}'$ a $\mathcal{C}$ körön kívül fekszik, ezért ez hamis megoldás, tehát a számhármas valóban egyértelműen meghatározza a $\mathcal{K}$ kört.

Ha $\dot{\nu} = 0$, akkor a látószögfüggvénynek szélsőértéke van az adott pontban, ami csak úgy lehet, hogy $\beta = \pi - \alpha$, ahol $\alpha \in (0, \pi/2)$. Ez a megfontolás és a $\nu = \beta - \alpha$ értéke egyértelműen meghatározza az érintők egyenesét. A kérdés, hogy különböző a értékekre különböző $\ddot{\nu}$ értékeket kapunk-e. Mivel most $\sin\beta = \sin\alpha$ és $\cos\beta = -\cos\alpha$ a (4.6) formula az

$$\ddot{\nu} = \frac{-2\sin 2\alpha}{a^2} + \frac{2\sin^2\alpha \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{a^2} + \frac{2\cos\alpha}{a} \tag{4.10}$$

alakra egyszerűsödik. Mivel

$$\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

ezért a (4.10) egyenlet az

$$\ddot{\nu} = \frac{-2\sin\alpha\cos\alpha}{a^2} + \frac{2\cos\alpha}{a}$$

alakra hozható, ami az a-ban másodfokú $\nu\ddot{\alpha} - 2a\cos\alpha + \sin 2\alpha = 0$ egyenletre vezet. Ennek megoldásai

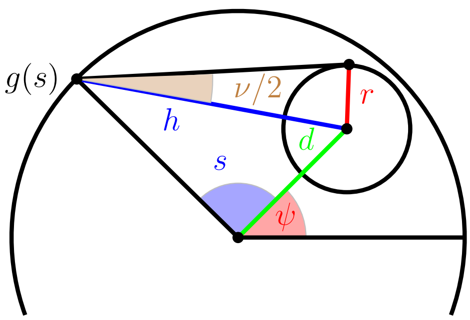
$$a_\pm = \frac{\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - \ddot{\nu}\sin 2\alpha}}{\ddot{\nu}}.$$

Vagyis, ha $\ddot{\nu} < 0$ (ilyenkor ν maximális), akkor $a = a_-$, mert $a_+ < 0$. Ha $\ddot{\nu} > 0$ (ilyenkor ν minimális), akkor

$$a_+ = \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \ddot{\nu}\sin 2\alpha}}{\ddot{\nu}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \ddot{\nu}\sin 2\alpha}} > 2\sin\alpha,$$

holott $a < 2\sin\alpha$, mert a nem lehet hosszabb a húr hosszánál, így $a = a_-$. Tehát mindkét esetben $a = a_-$. □

Később hasznunkra lesz a $\nu(s)$ látószögfüggvény deriváltjainak felírása az s függvényében. Jelölje továbbra is r a $\mathcal{K}$ kör sugarát, d az origótól vett távolságát a középpontnak, ψ pedig az x tengely pozitív félegyenese és a két kör középpontját összekötő szakasz által bezárt szöget. Jelölje $h(s)$ a $g(s)$ pont és a $\mathcal{K}$ kör középpontjának a távolságát.



Ekkor $\sin\frac{\nu(s)}{2} = \frac{r}{h}$, a koszinusz tétel miatt pedig $h^2(s) = 1 + d^2 - 2d\cos(s-\psi)$ amiért

$$\nu(s) = 2\arcsin\frac{r}{(1+d^2-2d\cos(s-\psi))^{1/2}}. \tag{4.11}$$

Az $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ összefüggést, és az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva a

$$\dot{\nu}(s) = \frac{-2dr\sin(s-\psi)}{(1+d^2-2d\cos(s-\psi))^{3/2}\sqrt{1-\frac{r^2}{(1+d^2-2d\cos(s-\psi))}}} = \frac{-2dr\sin(s-\psi)}{h^3(s)\sqrt{1-\frac{r^2}{h^2(s)}}}$$

képlethez jutunk. A másodrendű derivált vizsgálatához először a nevező deriváltját nézzük, ami

$$\frac{3}{2}2d\sin(s-\psi)h(s)\sqrt{1-\frac{r^2}{h^2(s)}} + h^3(s)\frac{1}{2}\Big(1-\frac{r^2}{h^2(s)}\Big)^{-1/2}\Big(\frac{2d\sin(s-\psi)r^2}{h^4(s)}\Big)$$
$$= 3d\sin(s-\psi)h(s)\sqrt{1-\frac{r^2}{h^2(s)}} + dr^2\sin(s-\psi)h^{-1}(s)\Big(1-\frac{r^2}{h^2(s)}\Big)^{-1/2}.$$

Ezért a másodrendű deriváltra a

$$\ddot{\nu}(s) = \frac{-2dr\cos(s-\psi)}{h^3(s)\big(1-\frac{r^2}{h^2(s)}\big)^{1/2}} + \frac{6d^2r\sin^2(s-\psi)}{h^5(s)\big(1-\frac{r^2}{h^2(s)}\big)^{1/2}} + \frac{2d^2r^3\sin^2(s-\psi)}{h^7(s)\big(1-\frac{r^2}{h^2(s)}\big)^{3/2}} \tag{4.12}$$

képletet kapjuk. A (4.11) képletből leolvasható, hogy egy kör látószögfüggvénye analitikus, hiszen analitikus függvényekből van összerakva. Ebből adódik a következő tétel:

4.4. Tétel *Ha $\mathcal{K}_1 ... \mathcal{K}_n$ multikörök és $\mathcal{K}'_1 ... \mathcal{K}'_n$ multikörök takarási függvényei a $\mathcal{C}$ kör egy kis ívén megegyezik, akkor az egész $\mathcal{C}$ körön megegyezik.*

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{K}_1 ... \mathcal{K}_n$ takarási függvénye előáll a látószögfüggvények összegeként, szintén analitikus függvény lesz, azaz a $\mathcal{C}$ egy ívén ismerve az értékét, az egyértelműen kiterjeszthető lesz. □

4.5. Lemma *Ha a C egységkörben a $\mathcal{K}$ körnek az origóval egybe nem eső középpontja az x tengelyre esik, akkor $\ddot{\nu}(\pm\frac{\pi}{2}) > 0$.*

Bizonyítás. Ekkor a origótól vett távolság $d > 0$, $\psi = 0$ vagy $\psi = \pi$ és a tétel szerint az $s = \pm\frac{\pi}{2}$ eseteket kell vizsgálnunk. Tehát $(s-\psi) = \pm\frac{\pi}{2}$. Ekkor a (4.12) képletbe behelyettesítve $\cos(s-\psi) = 0$ és $\sin^2(s-\psi) = 1$. Az első tag tehát kiesik, a második és a harmadik tagban a számláló és a nevező is pozitív lesz, hiszen $h(s) > 0$ és $(1-\frac{r^2}{h^2(s)}) > 0$. Ez eredményezi a lemmát. □

4.6. Tétel *A $\mathcal{C}$ körben a $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ körök $\tau_{\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2}(s)$ takarási függvénye akkor és csak akkor konstans, ha a három kör koncentrikus.*

Bizonyítás. A körök koncentrikusságából triviálisan adódik a konstans takarási függvény.

Tegyük fel, hogy a takarási függvény konstans, de a két kör nem origó koncentrikus. Ekkor $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ kör középpontjának azonos átmérőre kell essenek, hisz ahol a $\mathcal{K}_1$ kör látószögének maximuma van, ott a $\mathcal{K}_2$ kör látószögének minimuma, és fordítva. Ez az átmérő az általánosság megszorítása nélkül legyen az x tengely. Az indirekt feltevés miatt $0 = \ddot{\tau}_{\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2}(s) = \ddot{\nu}_{\mathcal{K}_2}(s) + \ddot{\nu}_{\mathcal{K}_1}(s)$, azaz a második deriváltak ellentétesek a körön. Viszont a 4.5 lemma szerint mindkét derivált pozitív az $s = \pm\frac{\pi}{2}$ helyen, azaz $\ddot{\tau}_{\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2}(\pm\frac{\pi}{2}) \neq 0$, ami ellentmond az eredeti feltételnek. □

A szakaszokhoz hasonló módon, két körpár ekvioptikusa 2.13 értelmében egy algebrai görbe. Ekkor Bézout tételéből itt is következnek az alábbiak:

4.7. Tétel *Ha a $\mathcal{C}$ algebrai görbe egy nyílt ívén két körpár takarási száma megegyezik, akkor a körpárok egész $\mathcal{C}$ görbén értelmezett takarási függvénye megegyezik.*

4.8. Tétel *Ha egy $\mathcal{C}$ görbe nem áll elő egy algebrai görbe részhalmazaként, akkor egy $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ körpárt a görbén felvett $\tau_{\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2}$ takarási függvénye egyértelműen meghatároz.*

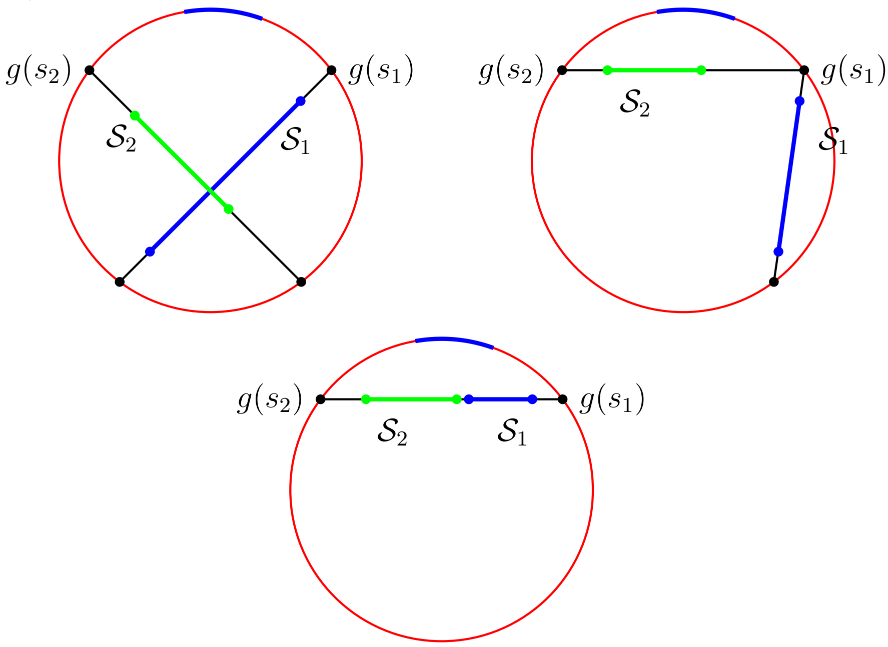
A tételek bizonyítása ugyanaz, mint szakaszpárok esetén.

5. MEGOLDATLAN PROBLÉMÁK

Sejtésünk, hogy analitikus görbékre kimondható a következő.

5.1. Sejtés *Ha a $\mathcal{C}$ konvex analitikus görbe egy nyílt ívén ismert egy szakaszpár takarási függvénye, akkor a szakaszpár takarási függvénye az egész $\mathcal{C}$ görbén meghatározható.*

Sejtésünk alapját a következő megfontolás adja. Tudjuk [4], hogy egy szakasz látószögfüggvénye analitikus görbén analitikus. Két látószögfüggvény összege is analitikus lesz, ezért az ívről a $\mathcal{C}$ görbén a nemdifferenciálhatósági pontokig egyértelmű lesz a kiterjesztés.



5.1. ábra. A takarási függvény a kék ívről egyértelműen terjed ki a $g(s_2)$ és $g(s_2)$ pontokig

A kérdés, hogy ezen pontokon túl tudjuk-e folytatni a kiterjesztést. Ha az adott nemdifferenciálhatósági pontban csak egy szakasz húrja metszi a görbét, akkor ezen szakasz látószögfüggvénye deriváltjainak értékét korábbi módszereink segítségével ebben a pontban a kiterjesztésből ki lehetne olvasni, amiből ez a szakasz meghatározható. A szakaszt ismerve, a szingularitás megszüntethető, így a kiterjesztés folytatható. Nyitott kérdés, ha két szakasz egyenese is metszi egymást a görbe ugyanazon pontjában, akkor kiszámítható-e a folytatás.

Érdemes lenne tovább vizsgálni a szakaszpárok/körpárok ekvioptikus görbéit is. Kérdés, hogy különböző szakaszpárok/körpárok ekvioptikus görbéi lehetnek-e azonosak és ha igen, milyen esetekben.

IRODALOM

[1] K. J. FALCONER, X-ray problems for point sources, *Proc. London Math. Soc.*, **46** (1983), 241–262, DOI: 10.1112/plms/s3-46.2.241. ⟨1⟩

[2] R. J. GARDNER, *Geometric Tomography*, 2. kiadás, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. DOI: 10.1017/CBO9781107341029. ⟨1⟩

[3] R. J. GARDNER és P. MCMULLEN, On Hammer's X-ray problem, *J. London Math. Soc.*, **21** (1980), 171–175, DOI: 10.1112/jlms/s2-21.1.171. ⟨1⟩

[4] J. KINCSES és Á. KURUSA, Felismerhető-e egy alakzat az árnyékképeiből, *Polygon*, **I**:2 (1991), 69–71. ⟨1, 34⟩

[5] Á. KURUSA, You can recognize the shape of a figure by its shadows!, *Geom. Dedicata*, **59**(1996), 113–125; DOI: 10.1007/BF00155723. ⟨3⟩

[6] Á. KURUSA, Can you see the bubbles in a foam?, *Acta Sci. Math.*, Szeged, **58**(2016), 663–694; DOI: 10.14232/actasm-015-299-1 . ⟨1⟩

[7] Á. KURUSA, Szakaszok ekvioptikusai, *Polygon*, **36** (2012), 43–57. ⟨9, 10⟩

[8] P. LUKÁCS, Szakaszok takarási száma, *Polygon*, **XXIV/2.**(2017), 29–41. ⟨2, 7⟩

[9] P. LUKÁCS, *Szakaszok takarási száma*, Szakdolgozat, SZTE TTIK Bolyai Intézet, (2016). ⟨7⟩

[10] WIKIPEDIA, `https://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zout%27s_theorem`. ⟨2, 22⟩

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, dr. Kurusa Árpádnak, a dolgozat elkészítéséhez nyújtott türelmes segítségéért.

Nyilatkozat

Alulírott Lukács Péter kijelentem, hogy a diplomamunkámban foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2018. május 18.

Lukács Péter