

# Fuzzy gömbök metszetének és uniójának térfogatáról

Csikós Balázs



Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Budapest

Kerékjártó Geometriai Szeminárium  
2012. április 5.  
Bolyai Intézet, Geometriai Tanszék, Szeged

## Kneser–Poulsen-sejtés (1954-55)

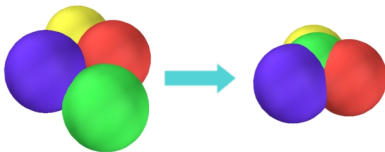
Tegyük fel, hogy a  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$  és  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$   $\mathbb{E}^n$ -beli pontokra

$$d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) \geq d(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) \quad \forall 1 \leq i < j \leq N.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  pontrendszer a  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$  pontrendszer **expanziója**, vagy hogy a  $\mathbf{q}$  pontrendszer a  $\mathbf{p}$  pontrendszer **kontrakciója**.

Következik-e a fenti egyenlőtlenségekből, hogy tetszőleges  $r_1 > 0, \dots, r_N > 0$  esetén

$$\text{Vol}_n \left( \bigcup_{i=1}^N B(\mathbf{p}_i, r_i) \right) \geq \text{Vol}_n \left( \bigcup_{i=1}^N B(\mathbf{q}_i, r_i) \right)? \quad (\cup)$$



## Megjegyzések

- ▶ A sejtés eredetileg azonos sugarú gömbökre volt megfogalmazva, de igaznak látszik **különböző sugarú** gömbökre is.
- ▶ Az ismert speciális esetek azt sugallják, hogy a sejtés igaz lehet a  $\mathbb{H}^n$  és  $\mathbb{S}^n$  terekben is.
- ▶ Megfogalmazható egy analóg sejtés metszetekre:

$$\text{Vol}_n \left( \bigcap_{i=1}^N B(\mathbf{p}_i, r_i) \right) \leq \text{Vol}_n \left( \bigcap_{i=1}^N B(\mathbf{q}_i, r_i) \right), \quad (\cap)$$

és olyan testekre is, melyek a  $\cup$  és  $\cap$  műveletek kevert alkalmazásával kaphatók gömbökből kiindulva.

# Legfontosabb ismert eredmények

Tétel (K. Bezdek, R. Connelly  $M^n = \mathbb{E}^n$ ; Cs.B.  $M = \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ )

Ha léteznek olyan folytonos  $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow M^{n+2}$  paraméterezett görbék, melyekre

- ▶  $\gamma_i(0) = \mathbf{p}_i \in M^n$ ,
- ▶  $\gamma_i(1) = \mathbf{q}_i \in M^n$ , and
- ▶  $d(\gamma_i(t), \gamma_j(t))$  a  $t$  paraméter (gyengén) csökkenő függvénye minden  $1 \leq i, j, \leq N$ -re,

akkor az  $(\cup)$  és  $(\cap)$   $K$ - $P$ -egyenlőtlenségek fennállnak az  $M^n$ -ben vett gömbökre.

## Bakugrás-lemma

- ▶ Ha  $\mathbf{p} \in (\mathbb{E}^n)^N$  a  $\mathbf{q} \in (\mathbb{E}^n)^N$  egy expansziója, akkor létezik a  $\mathbf{q}$ -nak egy folytonos expansziója  $\mathbf{p}$ -be  $\mathbb{E}^{2n}$ -ben.
- ▶ Ha  $\mathbf{p} \in (\mathbb{S}^n)^N$  a  $\mathbf{q} \in (\mathbb{S}^n)^N$  egy expansziója, akkor létezik a  $\mathbf{q}$ -nak egy folytonos expansziója  $\mathbf{p}$ -be  $\mathbb{S}^{2n+1}$ -ben.
- ▶ A hiperbolikus térben nem ismert, hogy igaz-e a bakugrás-lemma.

## Következmény

A  $K$ - $P$ -sejtés igaz az euklideszi síkon  $\cup$ -ra és  $\cap$ -re is.

# A K-P-sejtés fuzzy változata

## Definíció

Egy  $A$  halmaz **fuzzy részhalmaza** egy  $m: A \rightarrow [0, 1]$  leképezés. Az  $x \in A$  pontra,  $m(x)$  az  $x$  pontnak **fuzzy részhalmazhoz való tartozásának foka**,  $m$  a részhalmaz **tagsági függvénye**.

## Definíció

$\mathbb{E}^n$  egy  $m$  mérhető tagsági függvénnyel megadott fuzzy részhalmazának **térfogata**  $\int_{\mathbb{E}^n} m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ .

## Definíció

Egy  $\mathbf{p}$  középpontú **fuzzy gömb**  $\mathbb{E}^n$ -ben  $\mathbb{E}^n$ -nek egy olyan fuzzy részhalmaza, melynek tagsági függvénye  $m(\mathbf{x}) = f(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$  alakú, ahol  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  egy csökkenő függvény.



Hogyan értelmezzük fuzzy részhalmazok unióját és metszetét?

# A fuzzy metszet axiómái

Egy **metszet műveletet** egy halmaz fuzzy részhalmazain egy

$$I : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

kétváltozós művelettel adunk meg a  $[0, 1]$  intervallumon. Ha adott  $I$ , akkor a megfelelő művelet az  $m_1$ ,  $m_2$  fuzzy részhalmazokon

$$(m_1 \cap_I m_2)(x) = I(m_1(x), m_2(x)).$$

Az  $I$  által definiált művelet egy fuzzy metszet, ha  $I$  teljesíti az alábbi axiómákat:

- i1. **Határfeltétel:**  $I(a, 1) = a$ ;
- i2. **Monotonitás:**  $b \leq d \implies I(a, b) \leq I(a, d)$ ; ( $\Leftarrow$  i5. és i7.)
- i3. **Kommutativitás:**  $I(a, b) = I(b, a)$ ;
- i4. **Asszociativitás:**  $I(a, I(b, d)) = I(I(a, b), d)$ ;
- i5. **Folytonosság:**  $I$  folytonos;
- i6. **Szubidempotencia:**  $I(a, a) \leq a$ ; ( $\Leftarrow$  i1. és i2.)
- i7. **Szigorú monotonitás:**  $a < c$  és  $b < d \implies I(a, b) < I(c, d)$ .

# A fuzzy unió axiómái

Hasonlóan, egy **unió műveletet** egy halmaz fuzzy részhalmazain egy olyan

$$U : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

kétváltozós művelettel adunk meg a  $[0, 1]$  intervallumon, mely kielégíti a **fuzzy unió axiómáit**:

- u1. **Határfeltétel**:  $U(a, 0) = a$ ;
- u2. **Monotonitás**:  $a \leq b \implies U(a, c) \leq U(b, c)$ ;
- u3. **Kommutativitás**:  $U(a, b) = U(b, a)$ ;
- u4. **Asszociativitás**:  $U(a, U(b, c)) = U(U(a, b), c)$ ;
- u5. **Folytonosság**:  $U$  folytonos;
- u6. **Szuperidempotencia**:  $U(a, a) \geq a$ ;
- u7. **Szigorú monotonitás**:  $a_1 < a_2$  és  $b_1 < b_2 \implies U(a_1, b_1) < U(a_2, b_2)$ .

## Észrevétel

- ▶  $I$ -re teljesül az  $ik.$  axióma  $\iff U(a, b) = 1 - I(1 - a, 1 - b)$  kielégíti az  $uk.$  axiómát.

# Példák fuzzy metszetre

- ▶ **Zadeh-féle metszet:**  $I(a, b) = \min\{a, b\}$ ,  $U(a, b) = \max\{a, b\}$ .
- ▶ **Valószínűségi metszet:**  $I(a, b) = ab$ ,  $U(a, b) = a + b - ab$ .
- ▶ **Vastag metszet:**  $I(a, b) = \max\{0, a + b - 1\}$   
(nem szigorúan monoton!)
- ▶ **Drasztikus metszet:**  $I(a, b) = \begin{cases} \min\{a, b\} & \text{ha } \max\{a, b\} = 1 \\ 0 & \text{másként.} \end{cases}$   
(nem folytonos, nem szigorúan monoton!)
- ▶ **Hamacher-féle metszet:**  $I(a, b) = \frac{ab}{\gamma + (1 - \gamma)(a + b - ab)}$ , ahol  $\gamma \in [0, \infty)$ .
- ▶ **Yager-féle metszet:**  $I(a, b) = 1 - \min\{1, ((1 - a)^w + (1 - b)^w)^{1/w}\}$ , ahol  $w \in (0, \infty)$ .
- ▶ **Dombi-féle metszet:**  
 $I(a, b) = \{1 + [(1/a - 1)^w + (1/b - 1)^w]^{1/w}\}^{-1}$ , ahol  $w \in (0, \infty)$ .  
 $U(a, b) = \{1 + [(1/a - 1)^{-w} + (1/b - 1)^{-w}]^{-1/w}\}^{-1}$

- ▶ Ha  $I$  egy fuzzy metszet, akkor legyen

$$I_N(a_1, \dots, a_N) = I(a_1, I(a_2, \dots, I(a_{N-1}, a_N) \dots)).$$

- ▶ Definiáljuk  $U_N$ -t egy  $U$  fuzzy unióra hasonlóan.
- ▶ Definiálhatók más  $H : [0, 1]^N \rightarrow [0, 1]$  **halmozott fuzzy műveletek is**  $N$  fuzzy részhalmazon a fuzzy unió és fuzzy metszet vegyes kombinálásával.

## Kérdés

Tegyük fel, hogy a  $\mathbf{p} \in (\mathbb{E}^n)^N$  pontrendszer egy expanziója a  $\mathbf{q} \in (\mathbb{E}^n)^N$  pontrendszernek. Igaz-e, hogy bármely mérhető és csökkenő

$f_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  „fuzzy sugár” és bármely  $I$  fuzzy metszetre, illetve  $U$  fuzzy unióra

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} I_N(f_1(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_1\|), \dots, f_N(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_N\|)) d\mathbf{x} \\ \leq \int_{\mathbb{R}^n} I_N(f_1(\|\mathbf{x} - \mathbf{q}_1\|), \dots, f_N(\|\mathbf{x} - \mathbf{q}_N\|)) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} U_N(f_1(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_1\|), \dots, f_N(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_N\|)) d\mathbf{x} \\ \geq \int_{\mathbb{R}^n} U_N(f_1(\|\mathbf{x} - \mathbf{q}_1\|), \dots, f_N(\|\mathbf{x} - \mathbf{q}_N\|)) d\mathbf{x}? \end{aligned}$$

## Tétel

Tegyük fel, hogy

- ▶  $I$  egy sima fuzzy metszet,
- ▶  $f_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ ,  $1 \leq i \leq N$  sima csökkenő függvények, melyekre  $\lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) = 0$ .

Ekkor

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} I_N(f_1(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_1\|), \dots, f_N(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_N\|)) d\mathbf{x} \\ = \int_{\mathbb{R}_+^N} \partial_1 \dots \partial_N I_N(f_1(r_1), \dots, f_N(r_N)) \prod_{i=1}^N (-f'_i(r_i)) \cdot \\ \cdot \text{Vol} \left( \bigcap_{i=1}^N (B(\mathbf{p}_i, r_i)) \right) d\mathbf{r} \end{aligned}$$

## Észrevétel

Ha  $\partial_1 \dots \partial_N I_N \geq 0$ , akkor az „éles” gömbök metszetére vonatkozó K–P-egyenlőtlenségből következik a fuzzy gömbök fuzzy metszetére vonatkozó egyenlőtlenség.

Ebben az esetben,  $\partial_1 \dots \partial_N I_N \geq 0$  egy valószínűségi eloszlás sűrűségfüggvénye az egységkockán, és ha  $X = (X_1, \dots, X_N)$  egy véletlen vektor, melyet ezzel valószínűségi sűrűséggel választunk, akkor  $I_N$  az  $X$  kumulatív eloszlásfüggvénye, azaz

$$I_N(x_1, \dots, x_N) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_N \leq x_N). \quad (*)$$

## Tétel

*Tegyük fel, hogy*

- ▶  *$I$  egy fuzzy metszet, melyre van olyan valószínűségi mérték a  $[0, 1]^N$  kockán melyre  $(*)$  fennáll.*
- ▶  *$f_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ ,  $1 \leq i \leq N$  csökkenő függvények, melyekre a  $\mathcal{B}_i(\mathbf{x}) = f_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|)$  fuzzy gömbök térfogata véges.*

*Ekkor*

$$\int_{\mathbb{R}^n} I_N(\mathcal{B}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathcal{B}_N(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = E\left(\text{Vol}\left(\bigcap_{i=1}^N B(\mathbf{p}_i, g_i^{\max}(X_i))\right)\right),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} U_N(\mathcal{B}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathcal{B}_N(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = E\left(\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^N B(\mathbf{p}_i, g_i^{\min}(1 - X_i))\right)\right),$$

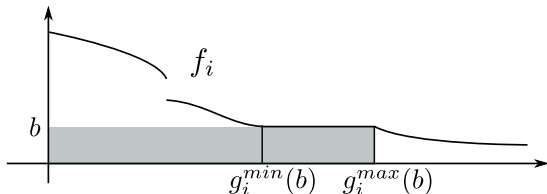
ahol  $g_i^{\max}(b) := \sup\{a : f_i(a) \geq b\}$  és  $g_i^{\min}(b) := \inf\{a : f_i(a) \leq b\}$ .

... Ekkor

$$\int_{\mathbb{R}^n} I_N(\mathcal{B}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathcal{B}_N(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = E\left(\text{Vol}\left(\bigcap_{i=1}^N B(\mathbf{p}_i, g_i^{\max}(X_i))\right)\right),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} U_N(\mathcal{B}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathcal{B}_N(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = E\left(\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^N B(\mathbf{p}_i, g_i^{\min}(1 - X_i))\right)\right),$$

ahol  $g_i^{\max}(b) := \sup\{a : f_i(a) \geq b\}$  és  $g_i^{\min}(b) := \inf\{a : f_i(a) \leq b\}$ .

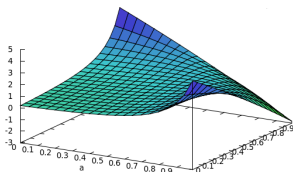


## Következmény

Ha  $I_N$  egy  $(X_1, \dots, X_N) \in [0, 1]^N$  véletlen vektor kumulatív eloszlásfüggvénye, akkor az „éles” gömbökre vonatkozó  $(\cap)$  és  $(\cup)$   $K$ - $P$ -egyenlőtlenségekből következnek a megfelelő egyenlőtlenségek az ugyanazon középpontokba tett fuzzy gömbökre is.

## Példák

- ▶ Az egyenletes eloszlást véve  $[0, 1]^N$ -en,  
 $P(X_1 \leq x_1, \dots, X_N \leq x_n) = x_1 \cdots x_N$ , ez a **valószínűségi metszet**.
- ▶ Ha  $X$  egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó a  $[0, 1]$ -en,  
akkor  $(X_1, \dots, X_n) = (X, \dots, X)$  egy véletlen vektor, mely  
egyenletesen oszlik el a  $[0, 1]^N$  kocka főátlóján. Ekkor  
 $P(X_1 \leq x_1, \dots, X_N \leq x_N) = \min\{x_1, \dots, x_N\}$  a **Zadeh-féle metszet**.
- ▶ Ha  $(X_1, \dots, X_N)$  egyenletes eloszlású a  $[0, 1]^N$  kocka  $(1, \dots, 1)$   
csúcsával szomszédos csúcsai által kifeszített szimplexén, akkor  
 $P(X_1 \leq x_1, \dots, X_N \leq x_N) = \min\{0, x_1 + x_2 + \dots + x_N - (N - 1)\}$ ,  
ami éppen a **vastag metszet**.
- ▶ Az  $I(a, b) = \frac{ab}{\gamma + (1 - \gamma)(a + b - ab)}$  **Hamacher-féle metszetre**, ahol  
 $\gamma \in [0, \infty)$ , a sűrűségfüggvényre jelölt  $\partial_1 \partial_2 I$  negatív értékeket vesz  
fel  $\gamma > 2$  esetén.



# Miért érdemes a fuzzy és valószínűségi változatokat vizsgálni?

- ▶ Ezek következnek az „éles” sejtésből ezért talán könnyebben bizonyíthatók.
- ▶ Ha a valószínűségi változatot elég sok eloszlásra bebizonyítjuk, abból következhet a Kneser–Poulsen-sejtés.
- ▶ Ha a sejtés nem igaz, könnyebb lehet egy ellenpélda létezését valószínűségi módszerrel bizonyítani, mint konkrétan megadni egy ellenpéldát a középpontokkal és pontos sugárértékekkel.

# Egy esettanulmány

## Tétel

Ha  $f_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  csökkenő  $L_1$ -függvények, és  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1 \dots N$ , akkor

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} \prod_{i=1}^N (-f'_i(r_i)) \text{Vol} \left( \bigcap_{i=1}^N (B(\mathbf{p}_i, r_i)) \right) d\mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^N f_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|) d\mathbf{x}$$

## Valószínűségi interpretáció

- ▶ A  $g_i = -\frac{1}{f(0)} f'_i \geq 0$  (általánosított) függvény egy valószínűségi eloszlás, melynek tartója  $\mathbb{R}_+$ , azaz  $\int_0^\infty -\frac{1}{f(0)} f'_i(t) dt = 1$ .
- ▶ Bármely  $g_i$  valószínűségi eloszlás, melynek tartója  $\mathbb{R}_+$ , megkapható ilyen módon az  $f_i(t) = \int_t^\infty g_i(t) dt$  függvényből.
- ▶ Ha az  $r_i$  sugár egy valószínűségi változó ezzel az eloszlással, akkor

$$E \left( \text{Vol} \left( \bigcap_{i=1}^N (B(\mathbf{p}_i, r_i)) \right) \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^N f_i(0) f_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|) d\mathbf{x}$$

# Egy esettanulmány

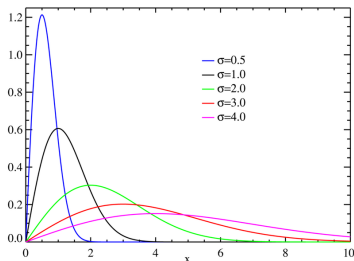
## Következmény

A szita-formulából az  $\underline{N} = \{1, 2, \dots, N\}$  jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$E\left(\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^N (B(\mathbf{p}_i, r_i))\right)\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \underline{N}} (-1)^{|I|+1} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i \in I} f_i(0) f_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|) d\mathbf{x}.$$

## Definíció

Egy  $R \in [0, \infty)$  valószínűségi változó **Rayleigh-eloszlású**  $\sigma$  paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye  $f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}$ .



# Egy esettanulmány

## Tétel

Tegyük fel, hogy az  $i$ -edik gömb  $r_i$  sugarát véletlenül választjuk

$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2m_i}}$  paraméterű Rayleigh-eloszlással. Ekkor



$$E(r_i) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{m_i}},$$



$$E(\text{Vol}(B(\mathbf{p}_i, r_i))) = (\pi/m_i)^{n/2},$$



$$E(\text{Vol}(\bigcap B(\mathbf{p}_i, r_i))) = \left(\frac{\pi}{M}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i < j} m_i m_j \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2}{M}},$$

$$\text{ahol } M = \sum_{i=1}^N m_i.$$

## Következmény

Amikor a középpontok közelednek, a gömbök metszetének várható értéke nem nőhet.

# Egy esettanulmány

## Tétel (R. Alexander)

Legyen  $M = \sum_{i=1}^N m_i$ . Ha a  $\mathbf{p}_i$  pontrendszert tartalmazó legkisebb gömb középpontja  $\mathbf{o}$ , sugara  $R$ , akkor

$$\frac{\sum_{i < j} m_i m_j \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2}{M} \leq MR^2,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a  $(\mathbf{p}_i, m_i)$  súlyozott pontrendszer súlypontja  $\mathbf{o}$ .

## Következmény (Kirschbraun tétele)

Egy pontrendszer összehúzásakor  $R$  nem nőhet.

## Következmény

$$E(\text{Vol}(\bigcap B(\mathbf{p}_i, r_i))) \geq \left(\frac{\pi}{M}\right)^{n/2} e^{-MR^2},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a  $(\mathbf{p}_i, m_i)$  súlyozott pontrendszer súlypontja  $\mathbf{o}$ .

# Egy esettanulmány

A unió térfogata

$$E(\text{Vol}(\bigcup B(\mathbf{p}_i, r_i))) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \underline{N}} (-1)^{|I|+1} \left( \frac{\pi}{M_I} \right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i < j \in I} m_i m_j \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|^2}{M_I}}$$

várható értékének monotonitása nem triviális.

## Kérdés

*Igaz-e, hogy a jobboldali kifejezés a  $d_{ij} = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|$  távolságok monoton függvénye?*

Tegyük fel, hogy mindegyik  $d_{i,j}$  távolság a  $t$  paraméter sima függvénye. Ekkor a fenti egyenlet jobboldalának (RHS) deriváltja

$$\frac{d}{dt} \text{RHS} = \sum_{i < j} \left( \sum_{\{i,j\} \subseteq I \subseteq \underline{N}} (-1)^{|I|} \frac{\pi^{n/2} m_i m_j}{M_I^{n/2+1}} e^{-\frac{\sum_{k < l \in I} m_k m_l d_{kl}^2}{M_I}} \right) (d_{ij}^2)'$$

Az unió várható értéke a  $d_{ij}$  távolságok monoton függvénye, ha a  $(d_{ij}^2)'$  deriváltak együtthatói nemnegatívak.

A kérdés tehát az, hogy

$$\sum_{\{i,j\} \subseteq I \subseteq N} (-1)^{|I|} \frac{\pi^{n/2} m_i m_j}{M_I^{n/2+1}} e^{-\frac{\sum_{k < l \in I} m_k m_l d_{kl}^2}{M_I}} \geq 0?$$

## Észrevétel

Ha a  $d_{kl}(t_0)$  távolságok realizálhatók, mint az  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N \in \mathbb{E}^{n+2}$  pontok közti távolságok, akkor a  $B_i^{n+2} = B_i^{n+2}(\mathbf{u}_i, r_i)$  véletlen gömbökre

$$\begin{aligned} E(\text{Vol}_{n+2}(B_i^{n+2} \cap B_j^{n+2} \setminus \bigcup_{k \notin \{i,j\}} B_k^{n+2})) \\ = \sum_{\{i,j\} \subseteq I \subseteq N} (-1)^{|I|} \left( \frac{\pi}{M_I} \right)^{n/2+1} e^{-\frac{\sum_{k < l \in I} m_k m_l |r_k - r_l|^2}{M_I}} \geq 0. \end{aligned}$$

## Következmény

$E(\text{Vol}(\bigcup_i B_i))$  nem csökken, ha a centrumok közt van egy folytonos expanszió  $\mathbb{E}^{n+2}$ -ben.

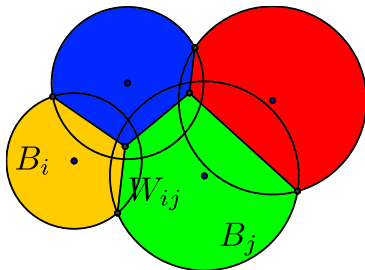
$\mathbb{E}^n$ -beli gömbökre hasonlítsuk össze a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E(\text{Vol}(\bigcup_{i=1}^N B(\mathbf{p}_i, r_i))) \\ &= \sum_{i < j} \left( \sum_{\{i,j\} \subseteq I \subseteq N} (-1)^{|I|} \frac{\pi^{n/2} m_i m_j}{M_I^{n/2+1}} e^{-\frac{\sum_{k < l \in I} m_k m_l d_{kl}^2}{M_I}} \right) (d_{ij}^2)' \end{aligned}$$

és

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\bigcup_{i=1}^N B(\mathbf{p}_i, r_i)) = \sum_{i < j} \text{Vol}_{n-1}(W_{ij}) d'_{ij},$$

képleteket, ahol  $W_{ij}$  az  $i$ -edik és  $j$ -edik gömb csonkolt Dirichlet–Voronoi-cellái közti fal térfogata.



## Kérdés

*Igaz-e, hogy*

$$E(\text{Vol}_{n-1}(W_{ij})) = \left( \sum_{\{i,j\} \subseteq I \subseteq \underline{N}} (-1)^{|I|} \frac{\pi^{n/2} m_i m_j}{M_I^{n/2+1}} e^{-\frac{\sum_{k < l \in I} m_k m_l d_{kl}^2}{M_I}} \right) 2d_{ij}?$$

