

**Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet**

**Izoperimetrikus típusú egyenlőtlenségek az
orsókonvexitásban**

Isoperimetric type inequalities in spindle convexity

Szakdolgozat

Készítette:

Siroki Dávid

matematika szakos hallgató

Témavezető:

Vígh Viktor

egyetemi adjunktus

**Szeged
2013**

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. Definíciók, alaptulajdonságok	5
3. Extremális problémák orsókonvex alakzatokkal kapcsolatban	9
3.1 Minimális átmérő.....	9
3.2 Maximális szélesség.....	18
3.3 Minimális és maximális terület.....	25
3.3.1 Alsó becslés.....	25
3.3.2 Felső becslés.....	26
Irodalomjegyzék	28

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Vigh Viktornak, aki észrevételeivel és tanácsaival segítette munkámat, valamint rendelkezésemre bocsátotta a dolgozat elkészüléséhez szükséges szakirodalmat.

1. Bevezetés

A dolgozat során orsókonvex alakzatokkal fogunk foglalkozni, mégpedig orsókonvex körháromszögekkel. A fő részt három izoperimetrikus típusú tétel és annak bizonyítása alkotja. Vizsgálni fogjuk az azonos körülírt körrel rendelkező orsókonvex lemezek minimális átmérőjét. Megmutatjuk, hogy épp a szabályos körháromszög átmérője a minimális. Továbbá látni fogjuk, hogy hol realizálódik ez az átmérő, és ki is számoljuk a hosszát. Majd azonos beírt kör mellett keressük a maximális szélességet a dualitást használva. Meg fogjuk mutatni, hogy az átmérő épp a lemez vastagságával egyezik meg, és meg is adjuk ennek hosszát. Végül pedig adott átmérő esetén számoljuk a maximális és minimális területet.

A konvexitás jól ismert már a középiskolai tanulmányokból is. A H halmaz konvex, ha bármely $X, Y \in H$ pontokra $\overline{XY} \subseteq H$ is teljesül, ahol $\overline{XY}$ az X és Y pontokat összekötő szakaszt jelenti. Az orsókonvexitás fogalma elsőként 1935-ben jelent meg Mayer, német matematikus „Eine Überkonvexität” [1] című munkájában. Szemléletesen egy orsókonvex alakzatra úgy gondolhatunk, mint egységsugarú körlapok metszetére. Az elnevezés is innen ered, ugyanis két ilyen egységsugarú körlap metszete épp egy orsóra hasonlít. Véges sok egységsugarú zárt körlap metszete az $\mathbb{E}^2$ Euklideszi síkon körpoligont alkot. Magasabb dimenzióban gömb-poliéderekről beszélünk, ahol körlapok helyett véges sok egységsugarú gömb metszetét vesszük. Megemlítünk néhány problémát, amelyben ezek az alakzatok fontos szerepet játszanak.

- A Borsuk probléma [2]: minimum hány darabra kell szétvágni a $K \subset \mathbb{E}^d$ kompakt konvex halmazt, hogy az egyes darabok átmérője kisebb legyen, mint K átmérője? Borsuk sejtés: $d + 1$ darabra mindig elegendő. Abban az esetben, ha $d \leq 3$, igaz a sejtés. A síkban a kör, míg térben a gömb példája mutatja, hogy $d + 1$ darabnál kevesebbet nem várhatunk. A sejtést maga Borsuk igazolta a síkban és térben. Magasabb dimenzióban sokáig nyitott maradt a kérdés. A probléma végül megoldódott, ugyanis Jeff Kahn és Gil Kalai bebizonyították, hogy magasabb dimenziókban a Borsuk-sejtés hamis.
- Kneser és Poulsen egymástól függetlenül megfogalmazott sejtése [3] szerint, ha az Euklideszi síkon véges sok körlapot elmozdítunk úgy, hogy minden körlap-pár középpontjának távolsága csökken, akkor az uniójuk (illetve metszetük)

területe nőni (illetve csökkeni) fog. Folytonos mozgásokra vannak eredmények, de a probléma általános esete még nyitott.

- A Vázsonyi probléma kapcsán alapvető tanulmányt is találhatunk a 3-dimenziós gömb-poliéderek topológiai és geometriai tulajdonságairól [4].

Az izoperimetrikus problémát a következőképpen fogalmazhatjuk meg: az összes azonos kerületű, síkbeli, zárt görbék által határolt területek közül keressük a maximálisat. Jól ismert, hogy az azonos kerületű lemezek közül a körnek a legnagyobb a területe. Ezt az állítást szokás az úgynevezett síkbeli izoperimetrikus egyenlőtlenségnek nevezni. Ahhoz, hogy ezt tényleg egyenlőtlenség formába fel tudjuk írni, jelölje k a kerületet t pedig a területet, így a következőnek kell teljesülni $t \leq \frac{k^2}{4\pi}$, hiszen a k kerületű kör sugara $\frac{k}{2\pi}$ és a területe épp $\frac{k^2}{4\pi}$.

A dolgozat első részében definiáljuk azokat a fogalmakat, amelyek később előfordulnak, illetve kimondunk néhány orsókonvexitással kapcsolatos alaptulajdonságot és lemmát, amit be is bizonyítunk. A be nem bizonyított állítások megtalálhatók [5]-ben. A második felét pedig három fő részre osztjuk, amelynek alapját Santaló 1946-ban megjelent cikke [6] szolgáltatja. Az első részben az azonos körülírt körrel rendelkező orsókonvex lemezek minimális átmérőjét keressük, a másodikban adott beírt kör mellett keressük a maximális szélességet, míg végül adott átmérőjű orsókonvex alakzatok minimális és maximális területével foglalkozunk.

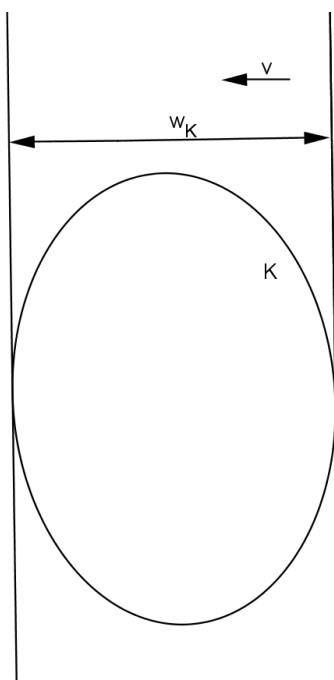
2. Definíciók, alaptulajdonságok

A következő definíciók és alaptulajdonságok [7]-ből valók. Az elkövetkezőkben végig az $\mathbb{E}^2$ Euklideszi síkon fogunk dolgozni. Legyen $A, B \in \mathbb{E}^2$ és $d(A, B)$ jelölje az Euklideszi távolságukat. Ha $d(A, B) < 2$, akkor úgy definiáljuk az A és B által feszített $[A, B]_S$ zárt orsót, mint A -t és B -t összekötő olyan zárt körívek unióját, amelyek sugara legalább 1, és hosszuk legfeljebb π . Ha $d(A, B) = 2$, akkor $[A, B]_S$ az $\overline{AB}$ Thalész-köre, vagyis egy egységsugarú körlap. Ha $d(A, B) > 2$, akkor $[A, B]_S = \mathbb{E}^2$.

2.1 Definíció. A $H \subseteq \mathbb{E}^2$ halmazt orsókonvexnek nevezzük, ha minden $A, B \in H$ esetén $[A, B]_S \subseteq H$.

A $K \subseteq \mathbb{E}^2$ halmazt konvex lemeznek hívjuk, ha K konvex, zárt, korlátos és K -t nem tartalmazza egy egyenes. Az orsókonvex lemez, olyan konvex lemez ami

orsókonvex. Egy H ponthalmaz orsókonvex burkán az őt tartalmazó legszűkebb orsókonvex halmazt értjük, jelölése $\text{conv}_s(H)$. Fontos definiálni még egy konvex lemez támaszegyenesét. Az e egyenes a K konvex lemez támaszegyenese, ha $e \cap K \neq \emptyset$, és az e -hez tartozó egyik e_+ zárt félsík tartalmazza K -t. Az e_+ -t K egy támaszfélsíkjának nevezzük. Egy K konvex lemez $\vec{v}$ irányú szélességének nevezzük a $\vec{v}$ -re merőleges támaszegyenesek távolságát, jele $w_K(\vec{v})$ (1. ábra). Egy P középpontú r sugarú zárt körlap $B(P,r)$ definíció szerint $B(P,r) = \{X \in \mathbb{R}^2 : d(P,X) \leq r\}$. $B(P)$ jelöli a P középpontú egységsugarú körlapot.



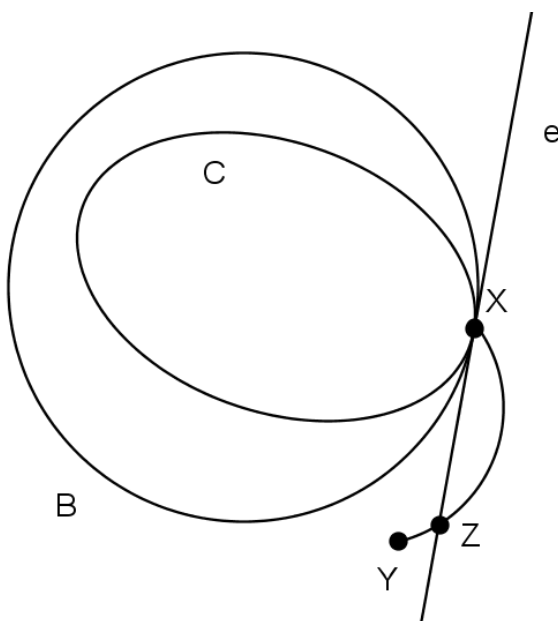
1. ábra

Jelöljük a H halmaz határát ∂H -val. P középpontú r sugarú körlemez szférája definíció szerint $S(P,r) = \{X \in \mathbb{R}^2 : d(P,X) = r\}$, vagy másként írva $S(P,r) = \partial B(P,r)$. Tehát jelen esetben a P középpontú r sugarú körlemez szférája egy P középpontú r sugarú zárt körvonal.

2.2 Lemma. Legyen $C \subseteq \mathbb{E}^2$ orsókonvex halmaz és legyen e ennek egy támaszegyenese az $X \in \partial C$ pontban. Ekkor az a zárt egységsugarú körlemez, amelyet e az X pontban érint, és amely e ugyanazon oldalán fekszik mint C , tartalmazza C -t.

Bizonyítás. Legyen B az az egységekör, amelyet e X -ben érint és e ugyanazon félsíkjában van mint C . Megmutatjuk hogy $B \supseteq C$.

Tegyük fel, hogy C nincs benne a B -ben. Tehát van egy olyan Y pont, amelyre teljesül, hogy $Y \in C$, de $Y \notin B$. Akkor, amint a 2. ábra is mutatja, van egy rövidebb egységsugarú körív, amely X -et és Y -t összeköti, és nem metsz bele B -be, de teljes egészében C -ben van. Az e egyenest X -ben érintő és e_+ -ba belemetsző körlemezéből pontosan egy van, B . Mivel $Y \notin B$, ezért az X -et és Y -t összekötő körvonalat e még egy Z pontban metszi. Ezért e nem támasztja C -t, ami viszont ellentmondás, ugyanis e -t úgy választottuk, hogy C támaszegyenese legyen.



2. ábra

■

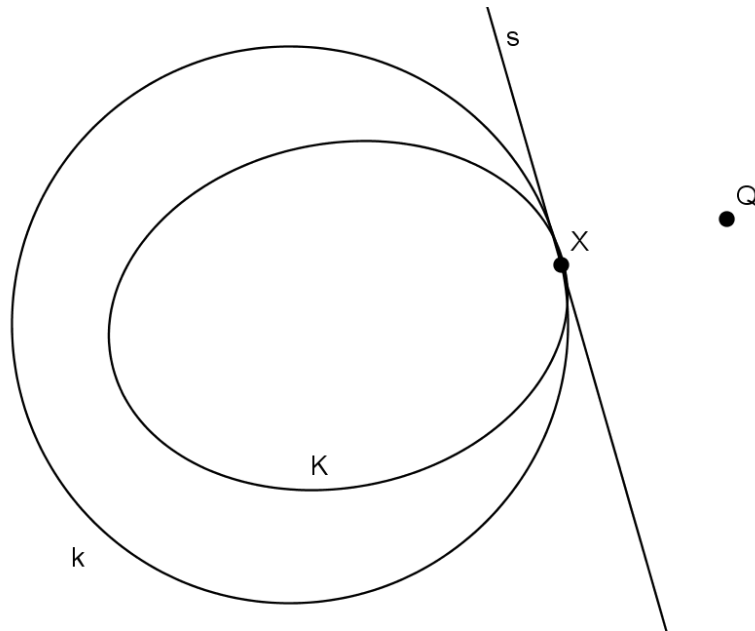
2.3 Lemma. K kompakt konvex lemez orsókonvex, akkor és csak akkor, ha K egységsugarú zárt körlapok metszete, azaz K kompakt konvex lemez orsókonvex, akkor és csak akkor, ha

$$K = \bigcap_{B(P) \supseteq K} B(P).$$

Bizonyítás. Először nézzük azt az irányt, amikor tudjuk, hogy K orsókonvex. Ekkor azt kell bizonyítanunk, hogy K előáll egységsugarú zárt körlapok metszeteként. Jelöljük $B(P)$ -k metszetét J -vel. A $K = J$ egyenlőség teljesüléséhez meg kell mutatni, hogy $K \subseteq J$ illetve $J \subseteq K$.

A $K \subseteq J$ teljesül, mert K minden $B(P)$ -nek része volt, tehát ezek metszetének is biztosan része lesz.

A $J \subseteq K$ esetet indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan Q pont, hogy $Q \in J \setminus K$. Ekkor létezik K és Q közt egy szeparációs egyenes (s), amely egyenest el tudjuk úgy tolni, hogy K -t egy X pontban támassza. Azonban ekkor a 2.2 lemma alapján létezik egy K -t tartalmazó és a szeparációs egyenest X -ben érintő egységsugarú körlap. Tehát K körrel (k) is szeparálható Q -tól. Viszont akkor ez a körlap tartalmazza J -t, mivel az az összes egységsugarú körlap metszete volt. De akkor $Q \notin J$, ami ellentmondás, vagyis $J \subseteq K$ is igaz.



3. ábra

Tehát a $K \subseteq J$ és a $J \subseteq K$ is teljesül, amiből következik, hogy $K = J$. Ezzel az egyik irányt beláttuk.

A másik bizonyítandó irány esetén tudjuk, hogy $K = \bigcap_{B(P) \supseteq K} B(P)$ és meg kell mutatnunk, hogy ekkor K orsókonvex. Legyen $X, Y \in K$. Ekkor minden $B(P)$ estén, amelyre $K \subseteq B(P)$, igaz hogy $X, Y \in B(P)$. $B(P)$ orsókonvexitása miatt $[X, Y]_S \subseteq B(P)$ is teljesül. Mivel ez minden $B(P)$ -re igaz, így $\bigcap B(P)$ -re is igaz lesz, $[X, Y]_S \subseteq \bigcap B(P)$, ami pedig pont azt jelenti, hogy K orsókonvex. A másik irányt is beláttuk, azaz bizonyítottuk a lemmát.

■

Az orsókonvexitás további elemi tulajdonságai iránt érdeklődőknek ajánljuk a [7] cikket.

3. Extremális problémák orsókonvex alakzatokkal kapcsolatban.

Számos minimumra és maximumra vonatkozó problémát lehet tanulmányozni konvex alakzatokkal kapcsolatban. Ebben a részben Santaló [6] cikke alapján három izoperimetrikus típusú problémát vizsgálunk.

A következő szakaszban azokat az orsókonvex alakzatokat fogjuk vizsgálni, amelyeknek megegyezik a körülírt körük.

3.1 Minimális átmérő

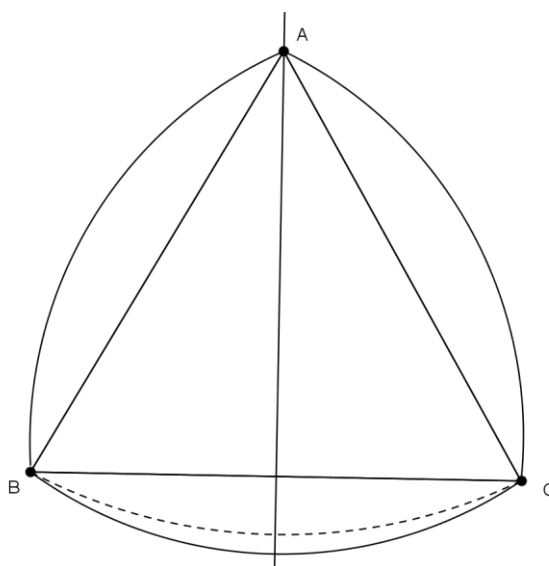
Tekintsük az orsókonvex lemezek közül az azonos körülírt körrel rendelkezőket, és ezek közt keressük a minimális átmérőjűt. Emlékeztetőül, egy konvex alakzat körülírt köre egy olyan minimális sugarú kör, amely tartalmazza az alakzatot. Ismert, hogy azon konvex alakzatok közül, amelyeknek a körülírt körük megegyezik, a szabályos háromszögnek minimális az átmérője. [6]

Nézzük, mi történik az orsókonvex lemezek esetében. Legyen H egy orsókonvex lemez, amely befoglalható egy C_R , R sugarú körbe úgy, hogy C_R a minimális H -t tartalmazó kör. Ekkor H és C_R helyzete a következőképpen alakulhat. Egyik lehetséges esetben ∂H és ∂C_R metszete két pont. Megmutatjuk, hogy ekkor az a két pont átellenes C_R -ben. Ugyanis tegyük fel, hogy nem átellenesek. Ekkor H elmozgatható C_R -ben oly módon, hogy C_R sugara csökkenthető legyen. Ha ∂H és ∂C_R metszete két pont akkor H átmérője $2R$. A továbbiak igazolják, hogy ez nem az extremális eset. A második esetben ∂H és ∂C_R metszete legalább három pont. Ekkor választhatunk a metszetben három pontot (A , B , C) úgy, hogy olyan háromszöget alkossanak, amely tartalmazza C_R középpontját és C_R határát három körívre osztja: $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ és $\widehat{CA}$. Ha az ABC háromszög csúcsait egységsugarú körívvel kötjük össze, akkor olyan körháromszöget kapunk, ami benne van H -ban, ezért az átmérője megegyezik H átmérőjével, vagy kisebb annál. Mivel a körháromszög körülírt köre C_R , ezért a minimális átmérő megtalálásának problémája C_R -be írható körháromszögek átmérőjére egyszerűsödött.

Természetesen minden körháromszög orsókonvex. A három egyenlő körívből álló körháromszöget szabályos körháromszögnek nevezzük.

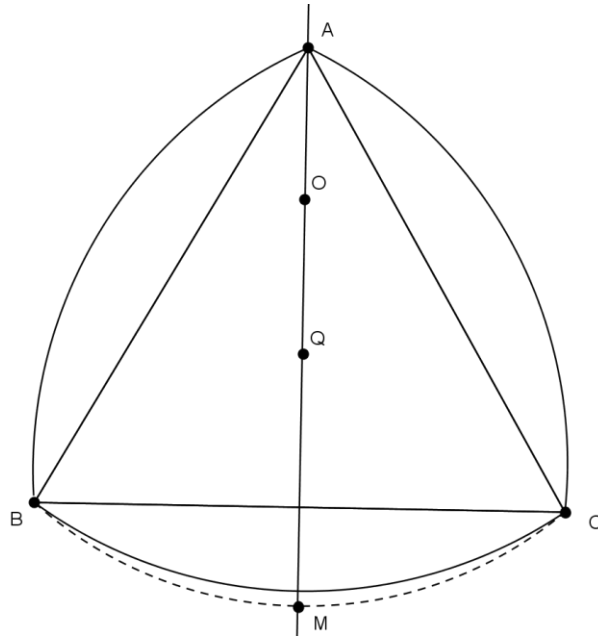
3.1.1 Tétel. A C_R körülírt körrel rendelkező körháromszögek közül épp a szabályos körháromszögnek minimális az átmérője.

Bizonyítás. Mindenekelőtt megkeressük, hogy hol van a C_R -be írható szabályos körháromszög átmérője. Erre azért van szükség, mert attól függően, hogy az ABC szabályos körháromszög ívei illetve az ABC háromszög oldalaira rajzolt egységsugarú körívek egymáshoz képest hogy helyezkednek le, máshol realizálódik az átmérő. A két ív helyzetét pedig az ABC háromszög $a = R \cdot \sqrt{3}$ oldalhossza határozza meg. Ha az ABC szabályos háromszög oldalaira a szemközti csúcsokból a sugarú köríveket rajzolunk, akkor a kapott alakzatot Reuleaux-háromszögnek nevezzük. Az első esetben, ha a háromszög oldalhossza nem nagyobb, mint 1, akkor az egységsugarú körív (az ábrán a szaggatott ív) a Reuleaux-háromszög ívein belül halad, ekkor az átmérő épp az ABC háromszög egyik oldala (4. ábra).



4. ábra

Ellenkező esetben, azaz ha a háromszög oldalhossza nagyobb, mint 1, a körívek helyzete az előző fordítottja lesz, és ekkor az átmérő az $\overline{AM}$ szakasszal fog megegyezni (5. ábra), ahol M az AO egyenes és a BC egységsugarú körív metszéspontja és O a B -t C -vel összekötő egységsugarú körív középpontja.

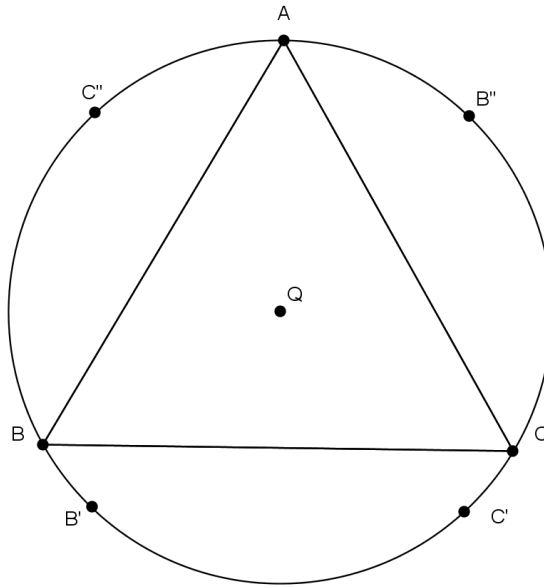


5. ábra

Ezek után térjünk rá a tétel bizonyítására. Legyen ABC egy C_R -be írható szabályos körháromszög. Továbbá tekintsünk egy másik $A'B'C'$ körháromszöget, amelynek szintén C_R a körülírt köre, C_R középpontja pedig Q . Feltehető, hogy B', C' pontok a $\widehat{BC}$, R sugarú rövidebb köríven vannak, és teljesül hogy $\widehat{BC} > \widehat{B'C'}$. Továbbá rögzítsük B', C' pontokat úgy hogy $\overline{B'C'}$ párhuzamos legyen $\overline{BC}$ -szal. Továbbiakban mindig feltesszük, hogy $A'B'C'$ körháromszög így van elhelyezve a C_R körben. Ahhoz hogy teljesüljön, hogy $A'B'C'$ körháromszög is tartalmazza Q -t, A' pontnak B'' és C'' pontokat összekötő R sugarú köríven kell lennie, ahol B'' és C'' pontok a B' és C' pontok Q pontra vett átellenes pontjai. Legyen B_1 az a pont, ahol a $B'O'$ egyenes metszi C_R körvonalat, ahol O' a $\widehat{B'C'}$ egységsugarú körív középpontja. Ekkor két esetet különböztethetünk meg.

I. eset

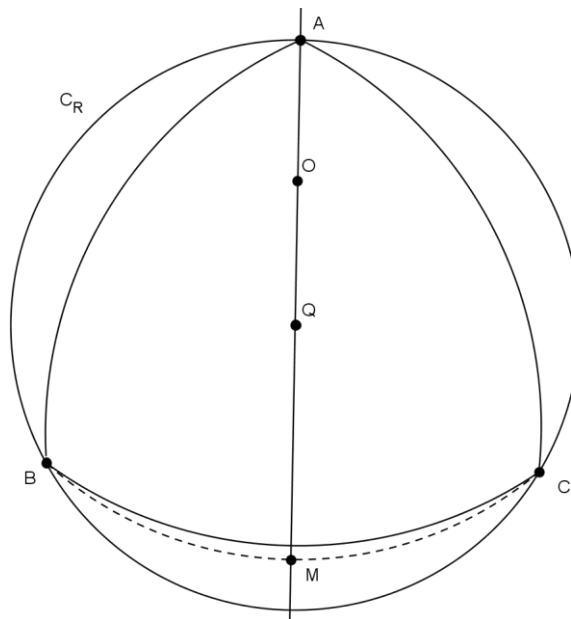
Az első esetben $1 \geq \overline{AB}$. Ebben az esetben, az előzőek szerint, az ABC szabályos körháromszög átmérője $\overline{AB}$. Megmutatjuk, hogy a következő egyenlőtlenség áll fenn $\overline{AB} < \overline{A'B'}$. Ismert, hogy 180° -nál kisebb szögek esetén, egy köríven az egymáshoz közelebb lévő pontokat összekötő szakaszok hossza a rövidebb. Mivel $\widehat{AB}$ ív rövidebb, mint $\widehat{A'B'}$ ív, így az előző állítás szerint $\overline{AB} < \overline{A'B'}$. Tehát az így kapott $A'B'C'$ körháromszög átmérője nagyobb, mint a szabályosé volt.



6. ábra

II. eset

A második esetben $1 < \overline{AB}$. Ekkor a szabályos körháromszög átmérője az $\overline{AM}$ szakasz.

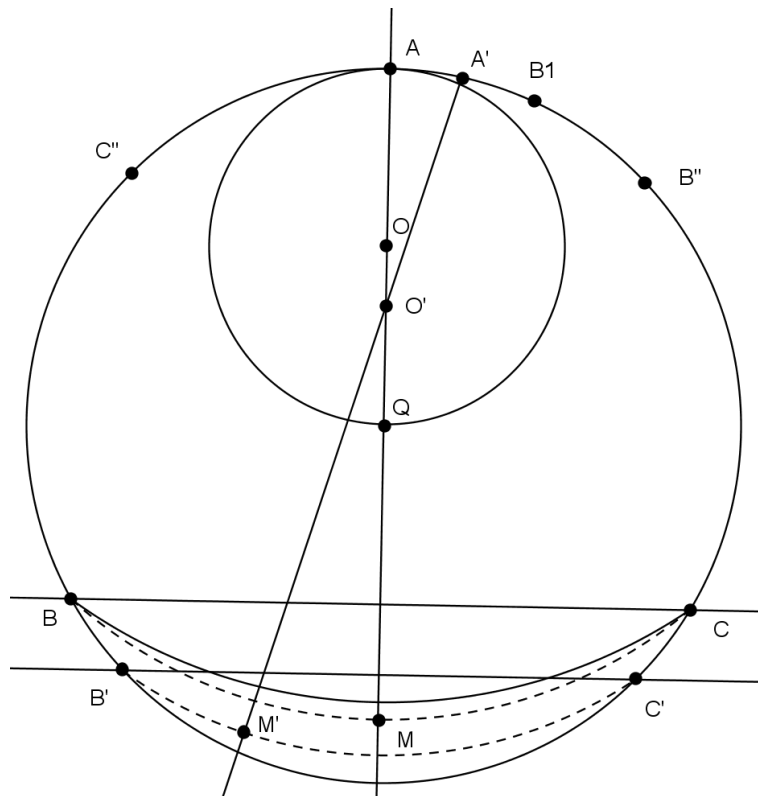


7. ábra

Ha O az egységsugarú körív középpontja, amely B -t és C -t összeköti, akkor $\overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM}$ ahol $\overline{OM} = 1$, azaz $\overline{AM} = \overline{AO} + 1$.

A szimmetria miatt elég csak az egyik körívre számolni, legyen most A' az $\widehat{AB''}$ köríven.

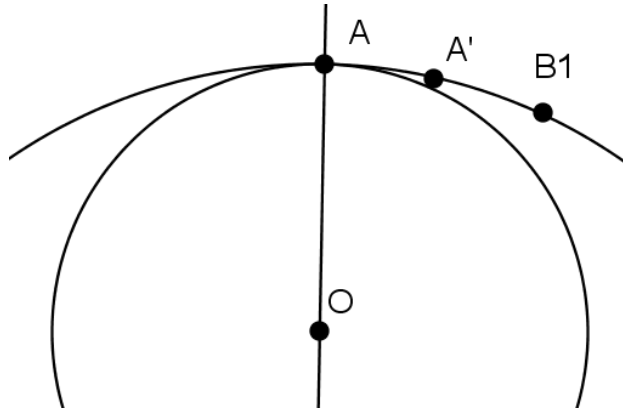
Két lehetséges esetet különböztetünk meg.



8. ábra

1. eset

Ha A' a $\widehat{B_1A}$ köríven van (8. ábra), akkor $A'B'C'$ körháromszög átmérője legalább $\overline{A'M'} = \overline{A'O'} + \overline{O'M'}$, ahol M' az $A'O'$ egyenes és a $\widehat{B'C'}$ körív metszéspontja és $\overline{O'M'} = 1$, tehát $\overline{A'M'} = \overline{A'O'} + 1$. Ekkor tekintsük a következő egyszerű számítást. $\overline{A'M'} = \overline{A'O'} + 1 > \overline{AO'} + 1$, mert $\overline{A'O'} > \overline{AO'}$, ugyanis ha O' pontból $O'A$ sugárral kört rajzolunk, A' a körön kívülre esik (9. ábra).

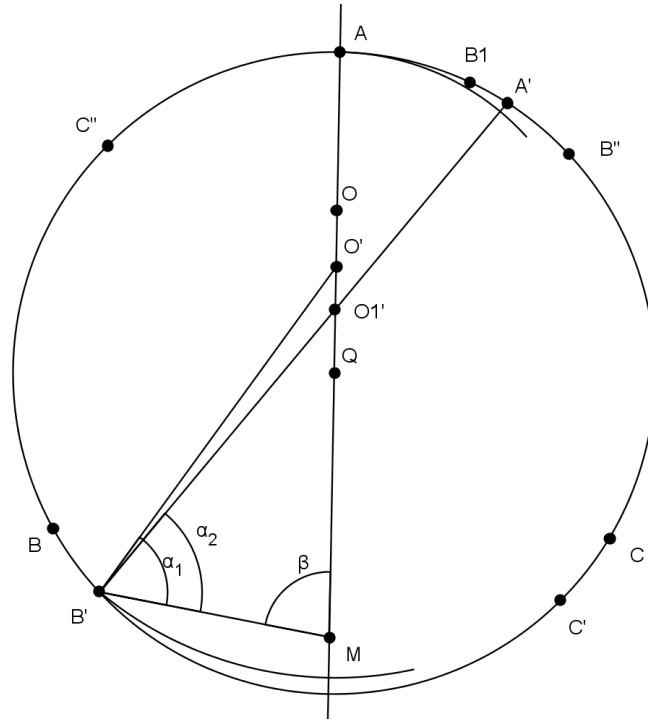


9. ábra

Folytatva az egyenlőtlenséget igaz az is, hogy $\overline{AO'} + 1 > \overline{AO} + 1 = \overline{AM}$, mivel O és O' egy egyenesre esik A -val és O közelebb van A -hoz, hiszen O a $\widehat{BC}$ egységsugarú körív középpontja, míg O' a $\widehat{B'C'}$ egységsugarú körív középpontja és $\widehat{B'C'}$ a $\widehat{BC}$ körív „alatt” helyezkedik el, így a középpontja is $\widehat{BC}$ középpontja „alatt” van (lásd 8. ábra). Egybevéve az egyenlőtlenségeket láthatjuk, hogy a következő összefüggésre jutottunk $\overline{A'M'} > \overline{AM}$. Vagyis ismét nagyobb átmérőt kaptunk, mint a szabályos körháromszög esetén.

2. eset

Ebben az esetben A' a $\widehat{B_1B''}$ köríven van. Az $A'B'C'$ körháromszög átmérője pedig legalább $\overline{A'B'}$. Legyen O_1' pont az $A'B'$ egyenes és az AM egyenes metszéspontja. Ekkor $\overline{O_1'A'} > \overline{O_1'A}$, ugyanis O_1' a Q középpont felett, vele egy egyenesen helyezkedik el, így A biztosan közelebb lesz hozzá, mint A' , mert A is rajta van az $O_1'Q$ egyenesen. Továbbá $\overline{O_1'B'} > \overline{O_1'M}$ egyenlőtlenség is teljesül. Ennek megmutatásához használjuk a 10. ábra jelöléseit. Legyen $O'B'M$ háromszög B' csúcsánál fekvő szög α_1 és az M -nél fekvő β . A háromszög oldalai közt az $\overline{O'M} < \overline{O'B'}$ összefüggés teljesül, s felhasználva, hogy a háromszögben a hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van, azt kapjuk, hogy $\beta > \alpha_1$. Tekintsük ezután $O_1'B'M$ háromszöget. Legyen a B' csúcsnál fekvő szög α_2 . Mivel az O_1' pont az O' pont alatt van, így az α_2 szög kisebb lesz, mint az α_1 szög. A szögek közötti két összefüggést egybevéve azt kapjuk, hogy $\alpha_2 < \beta$, ezért az $O_1'B'M$ háromszög oldalaira igaz lesz, hogy $\overline{O_1'B'} > \overline{O_1'M}$.



10. ábra

Ezeket felhasználva az átmérőre a következőket írhatjuk.

$$\overline{A'B'} = \overline{O_1'A'} + \overline{O_1'B'} > \overline{O_1'A} + \overline{O_1'M} = \overline{AM}$$

$$\overline{A'B'} > \overline{AM}$$

Ebben az esetben is nagyobb átmérőt kaptunk, mint a szabályos esetben. Ezzel a lehetséges esetek vizsgálata befejeződött.

■

Valóban arra az eredményre jutottunk, hogy az azonos körülírt körrel rendelkező körháromszögek közül a szabályos körháromszögnek minimális az átmérője. A tétel kimondása előtt részleteztük, hogy miért elég csak a körháromszögek esetében vizsgálni a problémát. Így most általánosítva kimondhatjuk, hogy bármely orsókonvex alakzatra, amelynek körülírt köre C_R , R sugarú kör, a minimális átmérőjű épp a C_R körbe írható szabályos körháromszög.

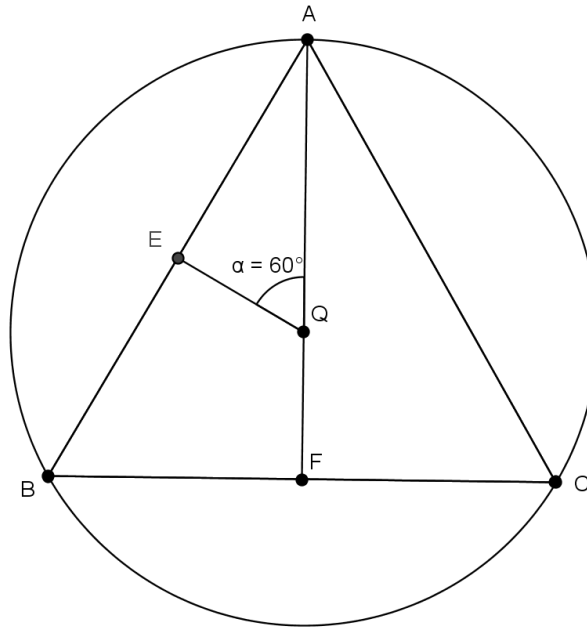
Nézzük, ezek alapján mit mondhatunk egy D átmérőjű szabályos körháromszögről, amely egy R sugarú körbe van írva. Elemi geometriai számításokkal a 3.1.1 tételben is használt két eset szerint az R sugarra és a D átmérőre a következők igazak.

Ha $\overline{AB}$ nem nagyobb, mint 1, és $\overline{AQ} = R$, akkor $\overline{AE} = R \cdot \sin 60^\circ = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, ami épp $\overline{AB}$ fele, mert E felezőpontja $\overline{AB}$ -nak. Ezért

$$\overline{AB} = 2 \cdot R \cdot \sin 60^\circ = R \cdot \sqrt{3}$$

$$1 \geq R \cdot \sqrt{3}$$

Továbbá ebben az esetben az átmérő egyenlő az oldallal, $D = \overline{AB}$, azaz $D = R \cdot \sqrt{3}$.



11. ábra

Ha $\overline{AB}$ nagyobb, mint 1. Akkor $1 < R \cdot \sqrt{3}$, ehhez hozzávéve, hogy a körháromszög orsókonvex, azaz előáll egységsugarú körlapok metszeteként, a sugárra a következő megszorítást tehetjük.

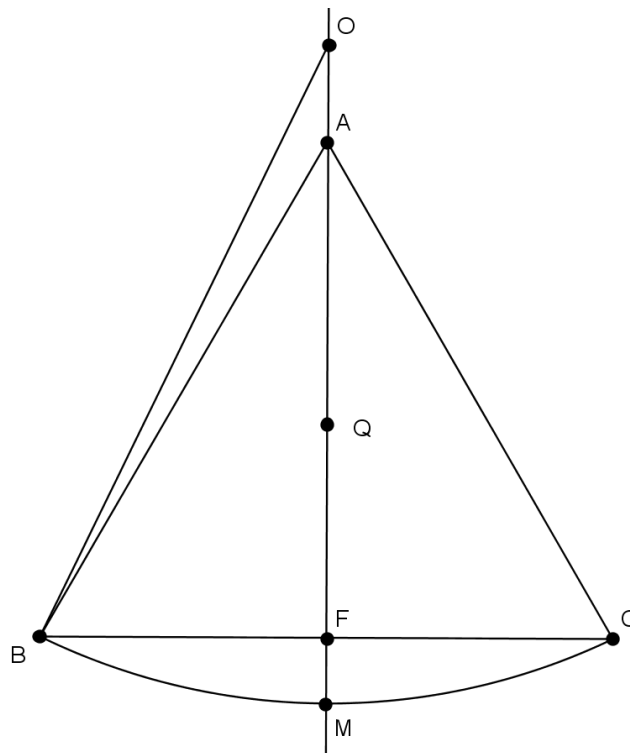
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq R \leq 1$$

Az átmérő pedig a következőképpen számolható a 11. ábrán látható jelölések alapján, ahol Q az R sugarú kör középpontja, O a $\widehat{BC}$ egységsugarú körív középpontja, F a BC szakaszfelező pontja, M pedig az AQ egyenes $\widehat{BC}$ körívvel vett metszéspontja. Legyen ABC szabályos háromszög, amelynek oldala $R \cdot \sqrt{3}$, ekkor ennek magassága $\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$, jelen esetben ez $\frac{3 \cdot R}{2}$, amely $\overline{AF}$ szakasznak felel meg. Ahhoz hogy átmérőt, azaz $\overline{AM}$ szakasz hosszát meg tudjuk mondani, szükségünk van még $\overline{FM}$ hosszára, jelöljük ezt x -nek, és

legyen $\overline{OM}$ hossza d . Alkalmazva a Pithagorasz-tételt OBF háromszögben $d = \sqrt{1^2 - \frac{3}{4} \cdot R^2}$. Ekkor $x = 1 - d = 1 - \sqrt{1^2 - \frac{3}{4} \cdot R^2}$ és $\overline{AM} = \overline{AF} + \overline{FM} = \frac{3}{2} \cdot R + 1 - \sqrt{1^2 - \frac{3}{4} \cdot R^2}$. Tehát az R sugarra és a D átmérőre az alábbiak teljesülnek.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq R \leq 1$$

$$D = \frac{3}{2} \cdot R + 1 - \sqrt{1^2 - \frac{3}{4} \cdot R^2}$$



12. ábra

Hasonlóan, mint az előző tételnél, itt is tudunk általánosítani az orsókonvex alakzatokra. Így a következő tételt kaptuk.

3.1.2 Tétel. Az összes orsókonvex alakzatra, amelynek átmérője D , és körülírt körének sugara R , a következő egyenlőtlenségek teljesülnek.

$$\text{Ha } 1 \geq R \cdot \sqrt{3}, \text{ akkor } D \geq \sqrt{3} \cdot R$$

$$\text{Ha } \frac{1}{\sqrt{3}} \leq R \leq 1, \text{ akkor } D \geq \frac{3}{2} \cdot R + 1 - \sqrt{1^2 - \frac{3}{4} \cdot R^2}$$

3.2 Maximális szélesség

Keressük, az ugyanazon kör köré írható orsókonvex lemezek közül a maximális szélességűt. Ezt a kört konvex lemezek esetén beírt körnek nevezzük, így a következőkben orsókonvex lemezek esetén is ezt az elnevezést fogjuk használni. Egy K konvex lemez $W(K)$ szélességén a $\min w_K(\vec{v})$ mennyiséget, $\Delta(K)$ vastagságán a $\max w_K(\vec{v})$ mennyiséget értjük.

Konvex lemez beírt köre egy olyan maximális sugarú kör, amelyet még tartalmaz a lemez. Ebben az esetben a feladat, megtalálni az adott r sugarú beírt körrel rendelkező háromszögek közül a legnagyobb szélességűt. A megoldás a szabályos háromszög [6].

Nézzük orsókonvex lemezek esetében mit mondhatunk. Fontos megjegyezni, hogy Santaló cikkében [6] az $\overline{AB} > 1$ eset tárgyalása hibás! A feladatot visszavezetjük a 3.1 szakaszban igazoltakra. Elsőként megmutatjuk, hogy egy konvex lemez átmérője megegyezik a vastagságával, majd az azonos beírt körrel rendelkező körháromszögek esetén vizsgáljuk, hogy hol realizálódik a vastagság, végül kiszámoljuk a hosszát.

3.2.1 Lemma. Konvex lemez átmérője egyenlő a vastagságával.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az átmérő nem nagyobb illetve nem kisebb, mint a vastagság. Jelöljük K konvex lemez átmérőjét $D(K)$ -val, vastagságát pedig $\Delta(K)$ -val.

- i. $D(K) \leq \Delta(K)$. Legyen A, B az átmérő két végpontja és húzzuk meg A -ban és B -ben az $\overline{AB}$ -re vett merőlegeseket. Tegyük fel, hogy a merőlegesek valamelyike belemetsz a lemezbe. Ekkor e két egyenes távolság tovább növelhető, azaz a távolságuk nagyobb, mint az átmérő, ami pedig pont azt jelenti, hogy a lemez vastagsága meghaladja az átmérő hosszát.
- ii. $D(K) \geq \Delta(K)$. Triviálisan teljesül.

■

3.2.2 Definíció. Legyen S egy orsókonvex lemez, ekkor S duálisa $S^* = \{P \mid S \subseteq B(P)\}$.

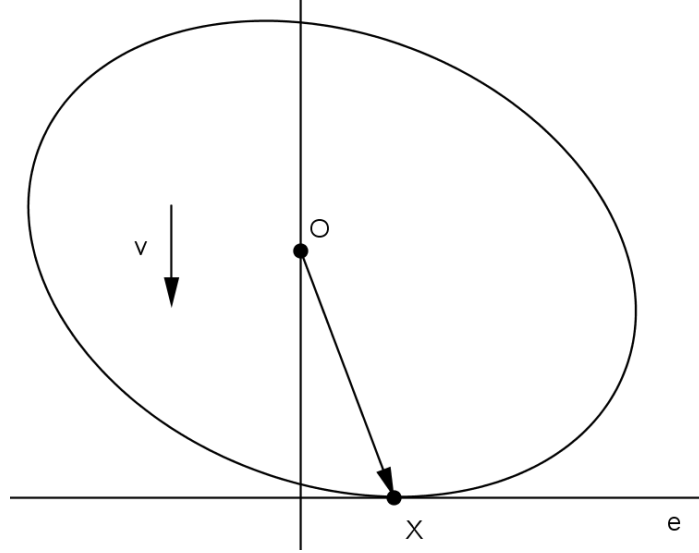
3.2.3 Állítás. S^* orsókonvex, $S^{**} = S$.

Bizonyítás. $S^* = \{P \mid S \subseteq B(P)\} = \{P \mid \forall X \in S: |PX| \leq 1\} = \bigcap_{X \in S} B(X)$

■

Egy orsókonvex lemez $\vec{v}$ irányú szélességét ($w(\vec{v})$) már definiáltuk, adjuk meg ezt a szélességet támaszfüggvény segítségével. A támaszfüggvény a konvex geometria egyik fontos eszköze. Legyen S egy orsókonvex lemez, $\vec{v}$ egy rögzített egységvektor és legyen O az origó. A támaszfüggvény:

$$h_S(\vec{v}) := \sup_{X \in S} \langle \vec{v}, \overrightarrow{OX} \rangle$$



13. ábra

A skalárszorzatból is látható, hogy a maximális értéke épp akkor lesz, amikor X az $e_{\vec{v}}$ egyenes és a lemez metszéspontja, ahol $e_{\vec{v}}$ a $\vec{v}$ irányvektorra merőleges S -t támasztó egyenes.

Az irányvektorral ellentétes irányú támaszfüggvény legyen $h_S(-\vec{v})$, ekkor S , $\vec{v}$ irányú szélessége

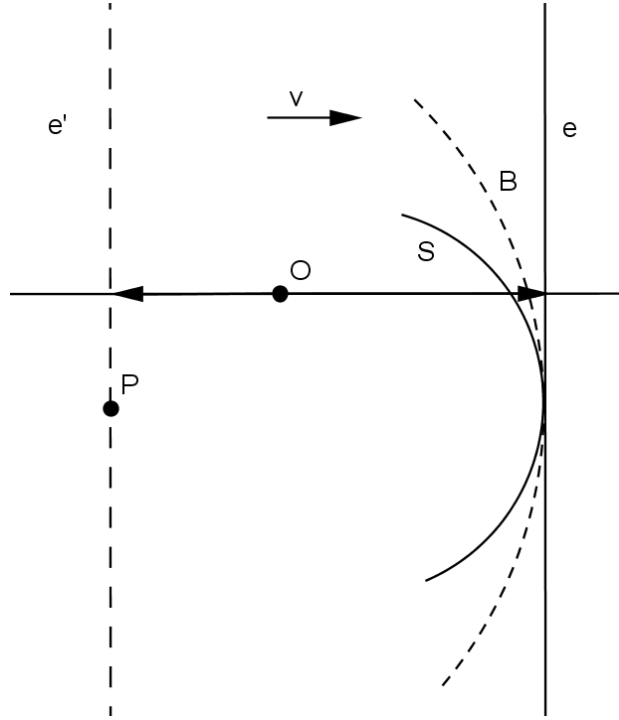
$$w_S(\vec{v}) = h_S(\vec{v}) + h_S(-\vec{v}).$$

3.2.4 Állítás. Legyen S orsókonvex lemez, S^* pedig a duálisa, ekkor

$$h_S(\vec{v}) + h_{S^*}(-\vec{v}) = 1.$$

Bizonyítás. Legyen $\vec{v}$ egy egységvektor, e pedig egy $\vec{v}$ -re merőleges, S -t támasztó egyenes. Ekkor a 2.2 lemma alapján létezik egy $B(P)$ egységsugarú kör, amely tartalmazza S -t és ugyanabban a pontban érinti, mint e . Vegyünk egy e' P -n átmenő e -vel párhuzamos egyenest. Azaz $d(e', e) = 1$, vagyis e' bal partján nem lehet pont, mert

az már biztos nem lenne eleme S^* -nak, S^* definíciója miatt, másrészt $P \in S^*$. Ezért valóban teljesül az állítás.



14. ábra

■

Ezt felhasználva S duálisának is kiszámoljuk a $\vec{v}$ irányú szélességét.

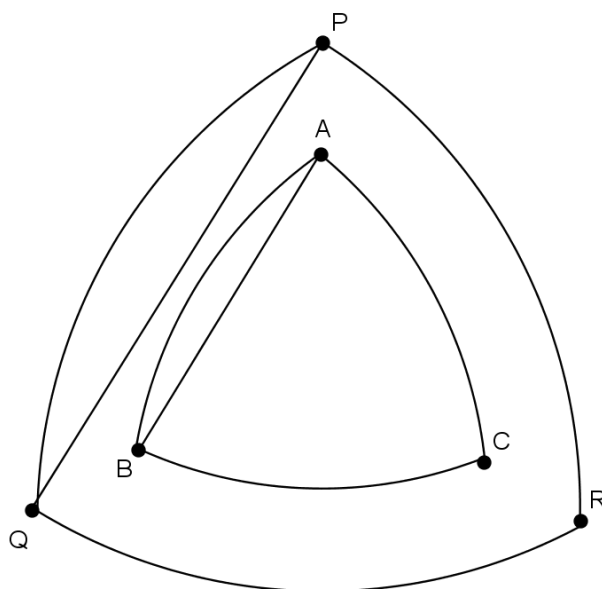
$$w_{S^*}(\vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} h_{S^*}(\vec{v}) + h_{S^*}(-\vec{v}) = 1 - h_S(-\vec{v}) + 1 - h_S(\vec{v}) = 2 - (h_S(-\vec{v}) + h_S(\vec{v})) = 2 - w_S(\vec{v}).$$

3.2.5 Következmény. $w_{S^*}(\vec{v}) = 2 - w_S(\vec{v})$.

Az eredeti probléma az adott beírt körrel rendelkező körháromszögek maximális szélességének keresése. A dualitást használva ennek a problémának is megfogalmazhatjuk a duálisát, ami a következőképpen néz ki. Adott körülírt körrel rendelkező körháromszögek minimális vastagságának keresése. Ezzel számunkra egyszerűsödött a probléma, mivel a 3.1-es részben épp a körháromszögek minimális átmérőjével foglalkoztunk, azt pedig, hogy az átmérő megegyezik a vastagsággal a 3.2.1 lemmában már beláttuk.

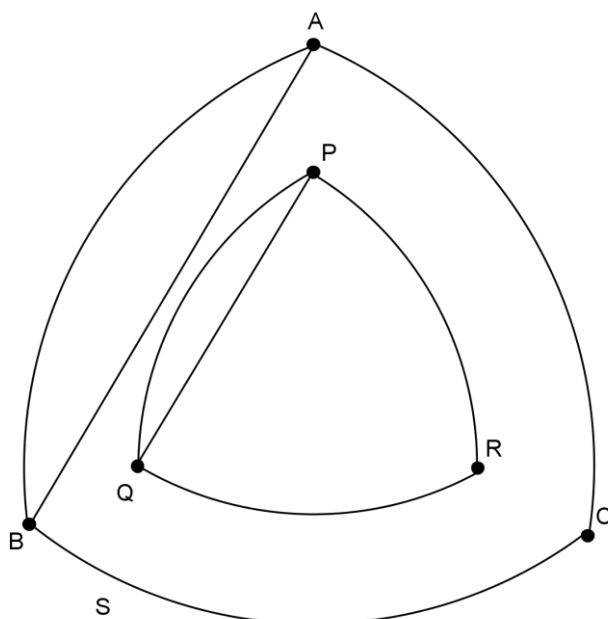
Legyen S egy körháromszög A , B és C csúcsokkal. Nézzük hogyan alakul S duálisa $\overline{AB}$ hosszától függően.

Ha $\overline{AB} \leq 1$. Akkor a körháromszög csúcsait összekötő egységsugarú körívek középpontjai a körháromszögön kívülre esnek, jelölj most ezeket a középpontokat P , Q és R . S duálisát ezeknek a középpontoknak az orsókonvex burka adja, azaz PQR pontok által meghatározott körháromszög (15. ábra).



15. ábra

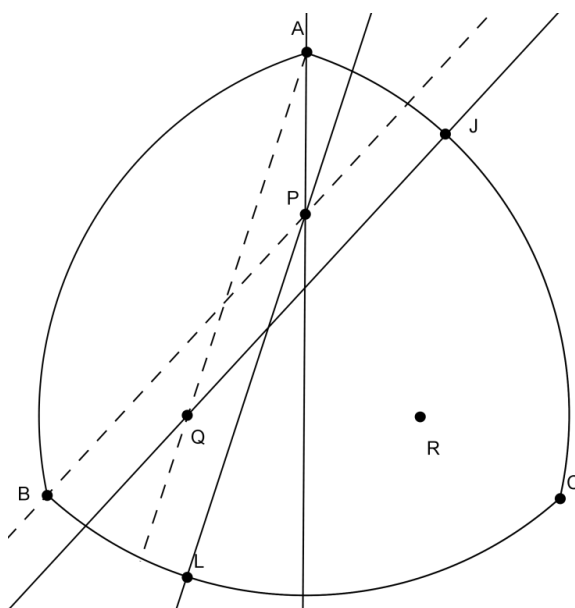
Ha $\overline{AB} > 1$. Akkor éppen fordított a helyzet, mivel ekkor a körívek középpontjai az S körháromszögön belülré esnek, ami azt jelenti, hogy S^* az S -ben lesz (16. ábra).



16. ábra

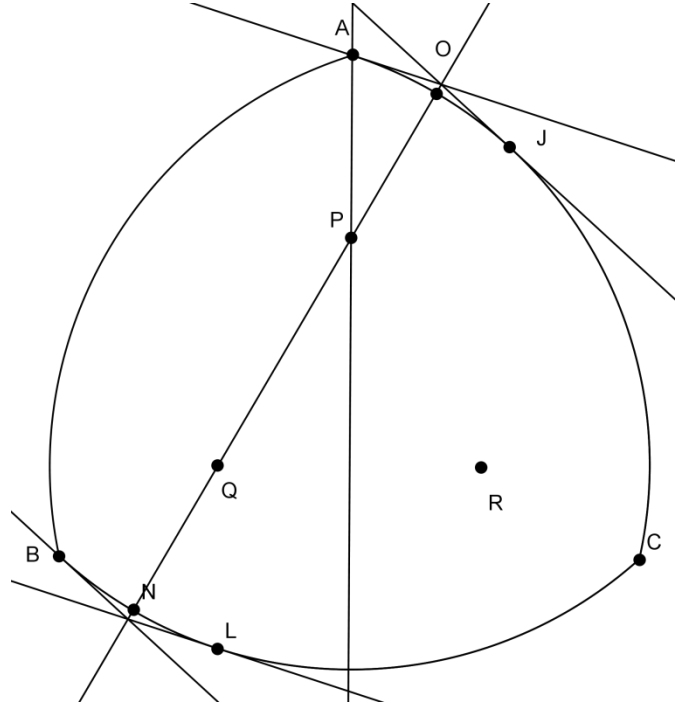
1. eset

Vegyük az S körháromszöget, amelynek csúcsai A , B és C pontok. Továbbá P , Q és R legyenek a S^* csúcsai. Húzzunk párhuzamost AQ egyenessel P -n keresztül, ennek a párhuzamosnak a metszete a $\widehat{BC}$ ívvel legyen L , hasonlóan húzzunk párhuzamost BP egyenessel is Q -n keresztül, ekkor a kapott pont az $\widehat{AC}$ íven legyen J (17. ábra).



22

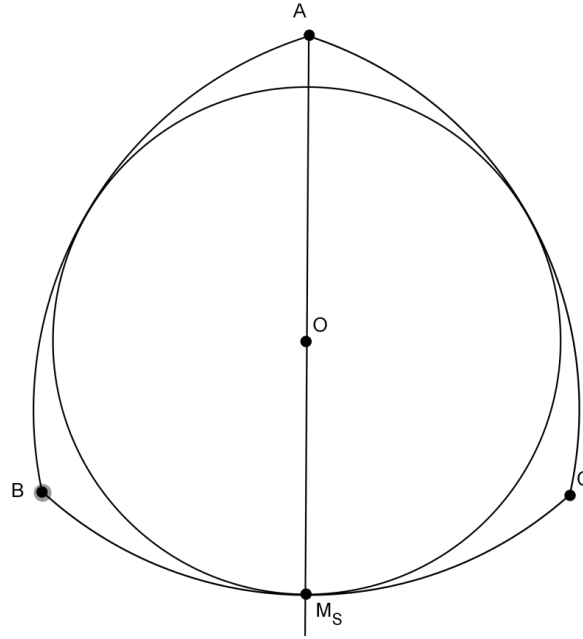
Ezek után húzzuk be az érintőket az A, B, J és N pontokba és kössük össze az érintők metszéspontjaiból keletkező két pontot, ez az egyenes a körháromszöget két pontban metszi O és N (18. ábra). Tulajdonképpen O és N az $\widehat{AJ}$ és $\widehat{BL}$ körívek felezőpontjai, mivel a szerkesztés, amely alapján megkaptuk J és L pontokat szimmetrikus volt P -re és Q -ra. Tehát P és Q pontok rajta vannak ON egyenesre, ami azt jelenti, hogy S körháromszög szélessége az $\overline{ON}$ szakasz.



18. ábra

2. eset

Legyen $\overline{AB} \leq 1$. Ekkor hasonlóan, mint az előző esetnél, vegyük $S(ABC)$ duálisát. Most $R(PQR)$ ívei az $S^*(PQR)$ ívein belül haladnak. $S^*(PQR)$ oldalhossza nagyobb lesz, mint 1, azaz $\overline{PQ} > 1$. Szintén hivatkozva a 3.1.1 tétel bizonyítására a minimális átmérő $\overline{PM}$ szakasz, ahol M az $S^*(PQR)$ körháromszög P csúcsát a körháromszög középpontjával összekötő egyenes és a $\widehat{QR}$ körív metszete. Nézzük S esetében hol lesz ez a vastagság. Ennél az esetnél valamivel egyszerűbb ezt megállapítani. Mivel az eredeti körháromszög beírt körének és a duális körülírt körének középpontja egybeesik, legyen ez a pont O , továbbá a dualizálás a párhuzamosságot megőrzi, így S^* $\overline{PM}$ átmérőjével párhuzamos egyenes, amely átmegy a középponton csak a P és M pontok által meghatározott egyenes lehet. Tehát ebben az esetben S vastagsága $\overline{AM}_S$ szakasz lesz, ahol M_S a $\widehat{BC}$ körív és AO egyenes metszéspontja.



19. ábra

Végül számoljuk ki, milyen hosszúak ezek a szakaszok, felhasználva az orsókonvex lemez és duálisának szélessége közti összefüggést. Az első esetben S^* átmérője épp $\overline{PQ}$ szakasz, aminek hosszát a 3.1-es részből ismerjük, $\overline{PQ} = R \cdot \sqrt{3}$, ahol R az S^* körülírt körének sugara. Ekkor S vastagsága

$$\Delta(S) = 2 - \Delta(S^*) = 2 - R \cdot \sqrt{3}.$$

A második esetben S^* átmérője $\overline{PM}$ szakasz, amelynek hosszát szintén a 3.1-es részből ismerjük, $\overline{PM} = \frac{3}{2} \cdot R + 1 - \sqrt{1^2 - \frac{3}{4} \cdot R^2}$. Ekkor S vastagsága

$$\Delta(S) = 2 - \left(\frac{3}{2} \cdot R + 1 - \sqrt{1^2 - \frac{3}{4} \cdot R^2} \right) = 1 - \frac{3}{2} \cdot R + \sqrt{1^2 - \frac{3}{4} \cdot R^2}.$$

Ezek a formulák R -t tartalmazzák, ami a körháromszög duálisának körülírt körének sugara volt, azonban nekünk az eredeti háromszög beírt köre adott, amelynek segítségével R -t kifejezhetjük: $R = 1 - r$. Így a két esetben az összefüggések a következőképpen alakulnak.

$$\text{Ha } r \leq \frac{3-\sqrt{3}}{3}, \text{ akkor } \Delta(S) \leq 2 - (1 - r) \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{Ha } r \geq \frac{3-\sqrt{3}}{3}, \text{ akkor } \Delta(S) \leq 1 - \frac{3}{2} \cdot (1 - r) + \sqrt{1^2 - \frac{3}{4} \cdot (1 - r)^2}.$$

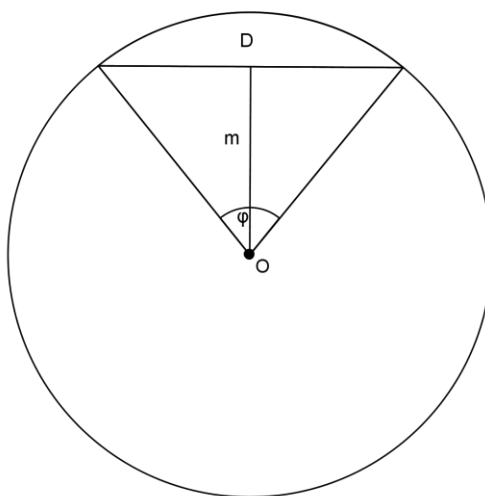
3.3 Minimális és maximális terület

Egy adott D átmérőjű orsókonvex lemez minimális és maximális területét becsljük alulról illetve felülről.

3.3.1 Alsó becslés

Egy D átmérőjű orsókonvex lemez területe legalább akkora, mint az átmérő két végpontja által alkotott orsó, ugyanis ez biztosan a lemezben van. Nézzük, hogyan számolhatjuk ki egy ilyen orsó területét.

Először vegyünk egy egységsugarú körlapot, és annak egy φ középponti szöghöz tartozó körcikkét. A körcikk két részre bontható. Egy egyenlő szárú háromszögre, amelynek szárai egységnyi hosszúak és alapja D , illetve ennek a háromszögnek az alapján lévő „sapkára”. Ez a „sapka” tulajdonképpen a D átmérőjű orsó fele. Így kiszámolva a körcikk területét és abból kivonva ezt az egyenlő szárú háromszöget, épp a D átmérőjű orsó területének felét kapjuk.



20. ábra

A Pithagorasz-tétel alkalmazásával a háromszög m magassága kiszámolható:

$$m = \sqrt{1^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{D^2}{4}}.$$

Így háromszög területe:

$$T_{\Delta} = \frac{D}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{D^2}{4}}.$$

A φ középponti szöghöz tartozó körcikk területe:

$$T_{cikk} = \frac{\varphi}{2} \cdot \pi = \frac{\varphi}{2} = \frac{2 \cdot \arcsin \frac{D}{2}}{2} = \arcsin \frac{D}{2}.$$

Ezek alapján a D átmérőjű orsó területe:

$$T_{orsó} = 2 \cdot (T_{cikk} - T_{\Delta}) = 2 \cdot \left(\arcsin \frac{D}{2} - \frac{D}{4} \cdot \sqrt{4 - D^2} \right).$$

Tehát egy D átmérőjű, S orsókonvex lemez területe:

$$T_S \geq 2 \cdot \left(\arcsin \frac{D}{2} - \frac{D}{4} \cdot \sqrt{4 - D^2} \right).$$

3.3.2 Felső becslés

Az izodiametrális egyenlőtlenség [8] miatt a D átmérőjű orsókonvex lemez területe, legfeljebb $\frac{D^2}{4} \cdot \pi$. Megjegyezzük, hogy az izodiametrális egyenlőtlenség az izoperimetrikus egyenlőtlenség azonnali következménye.

Tehát a D átmérőjű S orsókonvex lemez területére a következőt kaptuk:

$$2 \cdot \left(\arcsin \frac{D}{2} - \frac{D}{4} \cdot \sqrt{4 - D^2} \right) \leq T(S) \leq \frac{D^2}{4} \cdot \pi.$$

Végül nézzük, milyen korlátok közé szoríthatjuk egy D átmérőjű orsókonvex lemez W szélességét.

Triviálisan teljesül, hogy az átmérő mindig nagyobb vagy egyenlő, mint a szélesség:

$$W \leq D$$

Alsó korlátot pedig az előző területszámításnál használt körcikk segítségével kapunk. Ugyanis az ott kapott m magasságot 1-ből kivonva épp az orsó szélességének felét kapjuk.

Tehát az orsó szélessége:

$$W = 2 - \sqrt{4 - D^2}.$$

Vagyis az alsó becslés:

$$W \geq 2 - \sqrt{4 - D^2}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget tovább alakítva a következő összefüggéshez jutunk:

$$4 \geq \frac{W^2 + D^2}{W}.$$

Irodalomjegyzék

- [1] Anton E. Mayer, *Eine Überkonvexität*, Math. Z. 39 (1935), no. 1, 511-531.
- [2] János Pach and Pankaj K. Agarwal, *Combinatorial Geometry*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons Inc., New York, 1995. A Wiley-Interscience Publication.
- [3] Károly Bezdek and Robert Connelly, *Pushing disks apart – the Kneser-Poulsen conjecture in the plane*, J. Reine Angew. Math. 553 (2002), 221-236.
- [4] Y. S. Kupitz, H. Martini, and M. A. Perles, *Ball polytopes and the Vázsonyi problem*, Acta Math. Hungar. 126 (2010), no. 1-2, 99-163.
- [5] Hajós György, *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, 1966.
- [6] L. A. Santaló: *Sobre Figuras Planas Hiperconvexas*, Summa Bras. Math. 1 (1946), 221-239.
- [7] Károly Bezdek, Zsolt Lángi, Márton Naszódi, and Peter Papez, *Ball-polyhedra*, Discrete Comput. Geom. 38 (2007), no. 2, 201-230.
- [8] <http://www.math.ntnu.no/~hanche/blog/isodiametric.pdf>, 2013.05.14.

Alulírott Siroki Dávid kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

2013.05.18.