

Képtárak felügyelése mozgó örökkel

Szakdolgozat

Csák Attila

Témavezető: dr. Vígh Viktor

Szegedi Tudományegyetem, Természettudományi
és Informatikai Kar

Bolyai Intézet, Geometriai tanszék

2012

Szeged

Tartalmi összefoglaló

A dolgozatban képtárproblémákkal, és ezen belül főként egy speciális esettel, az élőrökkel való megfigyelésükkel foglalkozunk. A vizsgált alapprobléma a következő: Hány őrré van szükségünk, valamint hány őr elegendő, hogy felügyelje a festményeket egy n oldalú képtárban?

A dolgozat bevezető részében összefoglaljuk a dolgozat megértéséhez szükséges fogalmakat és elméleti alapokat, majd áttekintjük a képtárproblémák különböző változatait, amelyeket az alapprobléma megjelenése óta vizsgáltak, és vizsgálnak a mai napig. Ezek után el is érünk a dolgozat fő részéhez, ahol megismerkedünk az élőrökkel, és a hozzájuk kapcsolódó eredmények történeti hátterével. Fő tételünk a spirális sokszögek és az élőrök kapcsolatát vizsgálja. Először alulról, majd felülről becsülve az örök számát megmutatjuk, hogy $\left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor$ élőr esetenként szükséges, és mindig elegendő egy n oldalú spirális sokszög felügyeléséhez. A tétel Shivakumar Viswanathan 1994-es eredménye.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
Bevezető fogalmak	1
Klasszikus képtárproblémák.....	2
Ortogonalis sokszögek.....	3
Lyukas sokszögek.....	3
Erőd- és börtönudvar problémák	4
Megvilágítási problémák	5
Élőrök	7
Élőrökről általános esetben.....	7
Spirális sokszögek	10
Alsó határ	11
Felső határ	13
SV-k meghatározása	14
Irodalomjegyzék	19

Bevezetés

Victor Klee 1973-ban a következő kérdést tette fel:

”Hány őr elegendő, valamint szükséges feltétlenül, hogy felügyelje a festményeket egy n oldalú képtárban?”

Amióta felvette ezt a kérdést, rengeteg tanulmány született erről a matematikában, az első eredmény V. Chvátal nevéhez fűződik. Idővel természetesen más változatai is megjelentek a problémának, amelyben az őrök mozoghatnak, vagy csak korlátozott szögben látnak, de megvilágítási problémaként már korábban is előkerült, ahol egy n oldalú terület teljes megvilágítása a cél.

A megvilágítási problémát az '50-es évek elején Strauss és V. Klee fogalmazta meg. Ők egy tükörfalú, kétdimenziós zárt poligont vizsgáltak, amellyel kapcsolatban két fő kérdésük volt:

- igaz-e, hogy egy tetszőleges pontba elhelyezett fényforrással ugyanúgy bevilágítható az egész terület a visszaverődő sugarakkal, mintha mindent közvetlenül érne a fény?
- szükségszerűen találhatunk-e ilyen pontot?

Az első felét G. W. Tokarsky-nak sikerült megcáfolnia egy 1995-ös kiadványában, míg a második még mindig nyitott kérdés. A képtár- és megvilágítási problémák témaköre egy azóta is élő, gazdagon kutatott területe a matematikának.

Szakedolgozatomban a kérdéshez kapcsolódó eredményeket foglalom össze, külön figyelmet fordítva az élőőrökre. A szakedolgozat alapjául Jorge Urrutia: Art gallery and illumination problems [1] és S.Viswanathan: Tight bounds for the number of edge guards for spiral polygons [2] című cikkei szolgáltak, lásd még [3],[4],[5],[6],[7],[8],[11].

Bevezető fogalmak

Egy P sokszöget $p_1, p_2, \dots, p_n$ csúcsokkal, és az őket összekötő szakaszokkal - amelyeket oldalaknak vagy éleknek nevezünk - adunk meg. Azt mondjuk, hogy P egyszerű, ha oldalai nem keresztezik egymást. Egy tetszőleges sokszög két részre osztja a síkot: az egyik, korlátos tartományt a poligon belsejének, míg a másik, nem korlátos tartományt a külsejének hívjuk. P -t ortogonálisnak nevezzük, ha minden oldala vagy az x , vagy az y tengellyel párhuzamos.

Mivel a képtár- és megvilágítási problémák nagyon hasonlóak, ezért az eredmények eredeti megfogalmazás szerint lesznek feltüntetve. Így nem teszünk különbséget a megvilágítás, láthatóság, őrzés és felügyelés között. Azt mondjuk, hogy egy q pont látható a p pontból, ha az őket összekötő szakaszt teljes egészében tartalmazza P , azaz $[p, q] \subseteq P$. P egy H részhalmaza akkor világítja meg, más szóval őrzi P -t, ha minden $u \in P$ ponthoz létezik olyan H -beli p pont, amelyből u látható.

A dekompozíció fontos szerepet játszik a képtárproblémáknál, így ennek fogalmát is meg kell ismernünk. A $K_1, K_2, \dots, K_m$ sokszögeket a P sokszög dekompozíciójának nevezzük, ha

$P = \bigcup_1^m K_i$ és a K_i sokszögek belsejei páronként diszjunktak. Egy speciális esete a trianguláció. Egy P sokszög T triangulációján olyan diszjunkt háromszögekre való bontását értjük, ahol minden háromszög csúcsa egyben csúcsa P -nek is. Hatékony triangulációs eljárások kidolgozásával főleg az algoritmikus geometriában foglalkoznak. Először Garey, Johnson, Preparata és Tarjan (1978) talált $O(n \ln n)$ idejű algoritmust poligonok triangulációjára, amelyet Tarjan és Wyk 1988-ban továbbfejlesztett, de végül Chazelle (1990) volt az, aki előállt egy lineáris idejű algoritmussal.

Az öröket és fényforrásokat több különböző csoportba sorolhatjuk. A klasszikus képtár-, valamint megvilágítási problémákban főleg az első két őrfajtát használták. Íme, egy rövid lista a leggyakoribb esetekről:

- Pontörök: ők a sokszög belsejében bárhol elhelyezhetők.
- Csúcsörök: ekkor csak a sokszög csúcsaiban rögzíthetők le.
- Élörök: róluk bővebb leírást a fő részben adunk meg, de ilyenkor az ör egy él mentén végez tetszőleges - általában a két csúcs között fel s alá - mozgást, és úgy tekintjük, hogy minden pontot lát, amit valamely időpillanatban lát.
- Mobil/Mozgó örök: itt az örök egy tetszőleges, teljes egészében P -ben található szakasz mentén mozoghatnak. O'Rourke definiálta őket először.
- Pont- és csúcsreflektorok: a reflektorok olyan fényforrások, amelyek nem 360° -ban, hanem korlátozott $0 \leq \alpha \leq 360$ szögben világítanak. A kettő ugyanabban különbözik egymástól, mint az örök esetében. A reflektorok fogalmát J. Urrutia vezette be.

Klasszikus képtárproblémák

A klasszikus képtárproblémák alatt pont-, valamint csúcsörök egyszerű sokszögekbe történő elhelyezését értjük, úgy, hogy azok a poligon belsejének és oldalainak minden pontját lássák. Václav Chvátal 1975-ben a következő tételhez jutott:

1. Tétel: Egy egyszerű n oldalú sokszög felügyeléséhez $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ csúcsör mindig elegendő, és esetenként szükséges is.

Az 1. Tételre 1978-ban Steve Fisk adott egy Chvátalénál egyszerűbb bizonyítást. A bizonyítás három egyszerű lépésben írható le. Először is a sokszöget átlói segítségével háromszögekre bontja, majd megmutatja, hogy a poligon csúcsai ilyen triangulációnál három színnel kiszínezhetők úgy, hogy bármelyik háromszög minden csúcsa különböző színű. Ekkor a színük alapján három osztályba sorolja a csúcsokat. A harmadik lépésben a legkisebb elemszámú színosztály csúcsaiba helyezi az öröket, és így igazolja a tételt, mivel azok az egész poligont megfigyelhetik.

A sokszögeket több különböző osztályba sorolhatjuk. A következőekben bemutatom a képtárproblémáknál leggyakrabban előkerülőket, a hozzájuk kapcsolódó eredményekkel együtt.

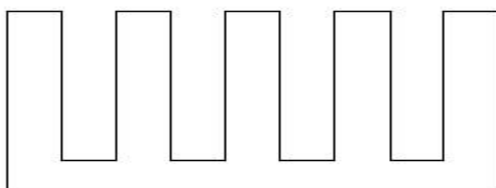
Ortogonalis sokszögek

A bevezetőben említett ortogonalis sokszögek, amelyek minden oldala az x vagy az y tengellyel párhuzamos, nagy népszerűségnek örvendenek a vizsgált problémákban. Ez valószínűleg annak tudható be, hogy a valódi épületek általában ilyenek, és így a kapott eredmények a gyakorlatban is alkalmazhatóak.

Az első jelentős áttörés Kahn, Klawe és Kleitman (1983) nevéhez fűződik, miszerint:

2. Tétel: Minden n csúcsú ortogonalis poligon felügyelhető $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ csúcsőrrel, és tetszőleges n -re van olyan ortogonalis poligon, aminél szükség is van ennyire.

Az 1. ábrán látható poligonnál mindenképp szükség van a tételben említett számú őrrre.



1. ábra

Az ő bizonyításuk hasonló Fiskéhez, azzal az eltéréssel, hogy háromszögek helyett konvex négyszögekre darabolták a poligont. Ezzel egy új tanulmányozásra váró feladatot alapoztak meg, mégpedig az egyenesek által határolt n -szögek négyszögekre bontását. Sack (1984) és Lubiw (1985) eltérő módszerekkel ért el $O(n)$ gyorsaságú négyszögekre daraboló algoritmust. Edelsbrunner, O'Rourke és Welz 1984-ben az ortogonalis sokszögek L-alakú hatszögekre darabolásával kaptak lineáris idő alatt lefutó módszert, amellyel az $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ pontőr helyét algoritmikusan határozták meg.

Lyukas sokszögek

Az őrizendő területekre, legyen az tetszőleges egyszerű vagy ortogonalis poligon bevezethetjük a lyukak fogalmát. Egy P sokszöget, amelyben levő $P_1, \dots, P_m$ diszjunkt poligonok belseje nem tartozik P -hez, azaz a $P - \{P_1 \cup \dots \cup P_m\}$ poligont lyukas sokszögnek nevezzük, ami m lyukat tartalmaz. O'Rourke bizonyította elsőként 1982-ben ezen alakzatokra a következő tételt, ahol az őrköt csak a csúcsokba helyezte el:

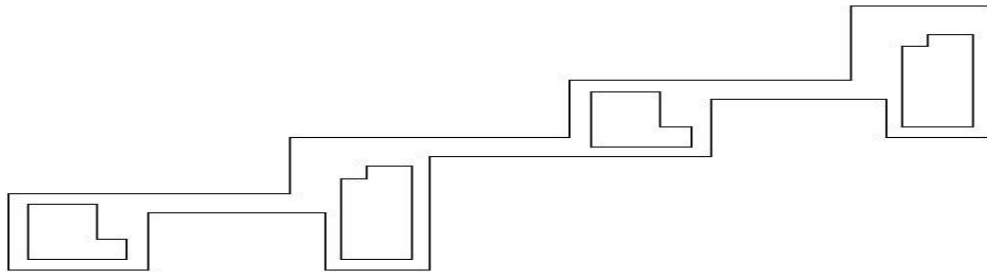
3. Tétel: Minden h lyukkal rendelkező n -szög felügyelhető $\left\lfloor \frac{n+2h}{3} \right\rfloor$ csúcsőrrel.

Shermer próbálta tovább csökkenteni az őrköt számát, és a sejtését, miszerint $\left\lfloor \frac{n+h}{3} \right\rfloor$ csúcsőr is elegendő, $h = 1$ -re sikerült is bebizonyítani, azonban nagyobb h -kra a kérdés még mindig nyitott maradt. Egymástól függetlenül sikerült a Bjorling-Sachs és Souvaine párosnak, valamint a Hoffmann, Kaufmann és Kriegel hármasnak a 4. tételt bizonyítani (1991):

4.Tétel: $\left\lceil \frac{n+h}{3} \right\rceil$ pontőr mindig elegendő egy h lyukkal rendelkező n -szög őrzésére.

Bjorling-Sachs és Souvaine 1995-ben adtak is egy $O(n^2)$ idejű algoritmust az örök elhelyezésére.

Lyukas ortogonális sokszögekre is születtek eredmények. O'Rourke 1982-ben bebizonyította, hogy egy n csúcsú, h lyukkal rendelkező ortogonális poligon esetén $\left\lceil \frac{n+2h}{4} \right\rceil$ csúcsőr mindig elegendő (lásd a 4. tétel), de azt is sejtette, hogy pontőrök esetén már $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ elegendő. 1990-ig ezt Aggarwal csak $h = 1, 2$ esetre látta be, amíg végül Hoffmannak sikerült általánosan is igazolnia. Ugyanakkor csúcsőrökre még mindig O'Rourke értéke a legpontosabb, mivel ismeretes egy-két példa, amelyben $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ ör kevés. T. Shermer sejtése szerint $\left\lceil \frac{n+h}{4} \right\rceil$ csúcsőr mindig elegendő egy h lyukkal rendelkező, n csúcsú ortogonális poligon őrzésére, de ezt belátni már nem sikerült.



2. ábra: Egy ortogonális sokszög, amelynek 44 csúcsa van 4 lyukkal, és szükség van a $\left\lceil \frac{44+4}{4} \right\rceil = 12$ őrré

A következő tétel, amelyet 1993-ban publikáltak a lyukak számától független korlátot ad.

5.Tétel (Hoffmann, Kriegel): $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ csúcsőr mindig képes felügyelni egy lyukas n -szöget.

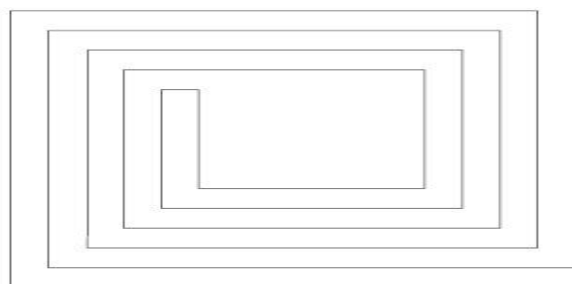
Ezen kívül Hoffmann talált lyukas ortogonális sokszögek olyan osztályát, ami lefedhető $\left\lceil \frac{2n}{7} \right\rceil$ csúcsőrrel, de nem sikerült általános esetre kiterjesztenie.

Erőd- és börtönudvar problémák

A képtárproblémák két további változatát erőd-, illetve a börtönudvar problémáknak nevezzük. Az előbbiben a sokszög külső oldalainak megfigyelése a cél. A $g_1, \dots, g_k$ örök kívülről őrzik P -t, ha $\forall x \in \partial P$ -re $\exists g_i$, hogy $[g_i, x] \cap \text{int}P = \emptyset$, ahol ∂P a sokszög határát, $\text{int}P$ pedig a belsejét jelöli. A börtönudvar problémában egyaránt a külső oldalakat, és a belső területet is felügyelni szeretnénk, minél kevesebb őrral. O'Rourke és Wood (1983) tetszőleges sokszögekre bizonyította be a következőt:

6.Tétel: $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ csúcsőr szükséges és mindig elegendő egy n -szög külső felügyeléséhez.

Aggarwal is tanulmányozta az erődp problémákat ortogonális sokszögekre. 1984-es eredményei alapján $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1$ őr szükséges és elegendő is egy n -csúcsú P ortogonális sokszög külsejének szemmel tartására.



3. ábra: Aggarwal példája, ahol szükséges $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ csúcsőr

Azt az esetet, amikor az őrok a poligonon kívül is elhelyezhetők O'Rourke-kal (1987) dolgozta ki. Arra jutottak, hogy ilyenkor $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ pontőr elegendő és esetenként szükséges egy n -csúcsú sokszög külső őrzésére.

Az első jelentős eredményt börtönudvar problémákban szintén O'Rourke (1983) érte el, amikor bebizonyította, hogy $\min \left\{ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + r, \left\lceil \frac{n + \left\lceil \frac{h}{2} \right\rceil}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil \right\}$ őr mindig elegendő, hogy egy P n -szög külső oldalait és belső területét felügyeljék, ahol r P konkáv, míg h P konvex csúcsainak számát jelöli. Továbbá azt is sejtette, hogy $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ őr mindig elég, ami Börtönudvar sejtésként vált ismertté.

Megvilágítási problémák

Mint a bevezetőm legelején is említettem a megvilágítási problémák alapjául E. Strauss és V. Klee kérdései szolgáltak, miszerint egy tükörfalú kétdimenziós zárt poligon megvilágítható-e egy fényforrással bármely pontból, illetve létezik-e ilyen pont.

Mint az őrok esetében, mivel a kettő majdnem ugyanaz, a megvilágítási problémáknál is különböző lámpafajtákra születtek az eredmények. Vannak olyanok, amelyeket csúcsokba lehet elhelyezni, olyanok, amelyek a sokszög teljes területén lehetnek az éleket is beleértve, olyanok, amelyek lefednek egy egész éleket, azaz a fénycsövek, és ha korlátozott szögben világítanak, akkor a pont- és csúcsreflektorokról beszélünk.

Az 1970-es évek közepéig az világos volt, hogy egy kompakt konvex halmaz külső megvilágítása 3 fényforrással megtehető. 1977-ben azonban Fejes Tóth László egy publikációjában a következő kérdést és tételt fogalmazta meg:

„Ha $F = \{S_1, \dots, S_n\}$, ahol S_i , $i = 1, \dots, n$ diszjunkt, kompakt, konvex halmazok, akkor hány fényforrást kell $S_1 \cup \dots \cup S_n$ komplementerében elhelyezni, hogy azok az összes S_i határát megvilágítsák?”

Erre a 7. Tétel adott választ.

7. Tétel: Bármely $F = \{S_1, \dots, S_n\}$ $n > 1$ darab diszjunkt, kompakt, konvex halmaz esetén $\max(2n, 4n - 7)$ lámpa $S_1 \cup \dots \cup S_n$ komplementerében elhelyezve esetenként szükséges, de mindig elegendő, hogy megvilágítsák F elemeinek határát.

A csúcs- és pontörökre kimondott eredmények az előző részekben elhangzott sokszögekre minden esetben átfogalmazhatóak csúcsokba, valamint belső- és élpontokba elhelyezett lámpákra. Azonban megvizsgálták a problémát úgy is, ha a lámpák nem 360° -ban világítanak. Ha egy lámpa csak meghatározott $\alpha \geq 0$ szögben világít, akkor a szakirodalmak reflektorként hivatkoznak rájuk. Tehát α -szögű R reflektoron egy c csúcsú, α -szögű szögtartományt értünk. R megvilágítja p pontot, ha a $[p, c]$ szakasz teljes egészében benne van a sokszögben és a szögtartományban is. Egy elhíresült probléma, melyet J. Urrutia vetett fel így hangzik:

A 3-reflektor megvilágítási probléma: Legyen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$, és vegyünk egy konvex P sokszöget. Elhelyezhető-e 3 reflektor, amelyek legfeljebb $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ szögekkel világítanak, és egy pontba maximum egyet használhatunk fel úgy, hogy P teljes egészében kivilágított legyen?

A válasz igen, minden esetben megvalósítható ilyen 3 reflektoros megvilágítás, amit Jorge Urrutia bizonyított.

Említést érdemel Estivill-Castro és Urrutia ortogonális sokszögekre vonatkozó tétele is. Edelsbrunner, O'Rourke és Welz adott $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ pontőrt felhasználó algoritmust, amivel felügyelnek egy ortogonális sokszöget, de Estivill-Castro és Urrutia azt is bebizonyította, hogy elegendő $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ reflektor, melyek 90° -os szögben világítanak. Ezen felül a többiek megoldásával ellentétben ők a reflektorokat nem a poligon belsejében, hanem az éleken helyezték el.

Számos további érdekes eredményt lehetne még említeni a témában, az érdeklődő olvasónak ajánlom [1],[11] munkákat. A dolgozat fő részében az élörökről született eredményeket összegzem, valamint S. Viswanathan eredményét bizonyítom, miszerint a spirális poligonok őrzéséhez $\left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor$ élőr esetenként szükséges, és mindig elegendő.

Élőrök

Élőrökről általános esetben

Toussaint 1981-ben definiálta az élőröket: Az e élőr látja a $q \in P$ pontot, ha $\exists p \in e$ pontja, hogy p látja q -t, azaz a $[p, q] \subseteq P$.

Kérdés: Hány élőr szükséges és elegendő egy n csúcsú képtár felügyeléséhez?

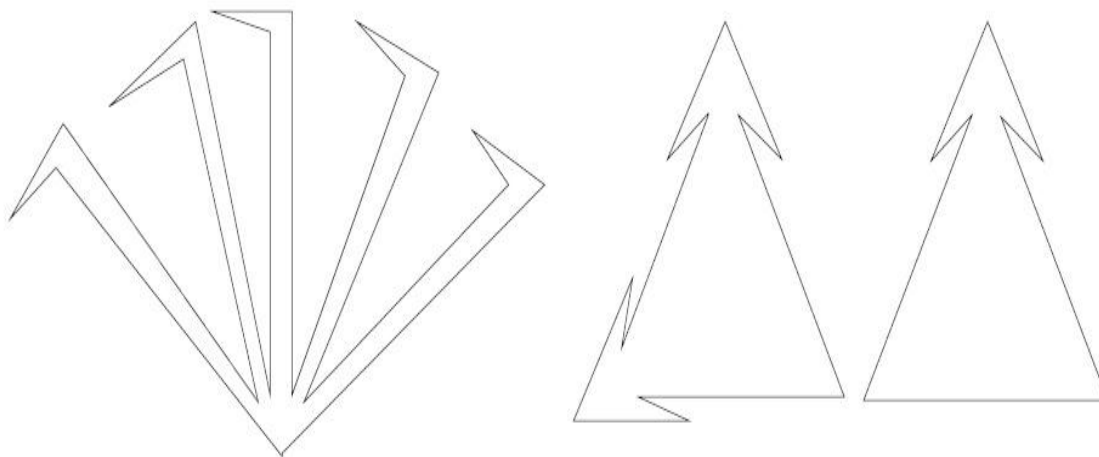
Egy másik elgondolásban engedélyezzük fénycsövek használatát, amelyek egy oldal teljes hosszát átérlik. Ilyenkor a kérdés a következő:

Hány fénycső kell ahhoz, hogy egy n oldalú sokszög minden oldalát megvilágítsunk vele?

Ez természetesen csak az élőrök ekvivalens megfelelője a megvilágítási problémakör szóhasználatával.

Mivel Toussaint vezette be őket, ezért hozzá is látott tanulmányozásukhoz, és a következő, mai napig bizonyítatlan sejtéshez jutott:

1. Sejtés: Kevés kivételtől eltekintve, $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ élőr mindig elegendő egy n csúcsú sokszög őrzésére.

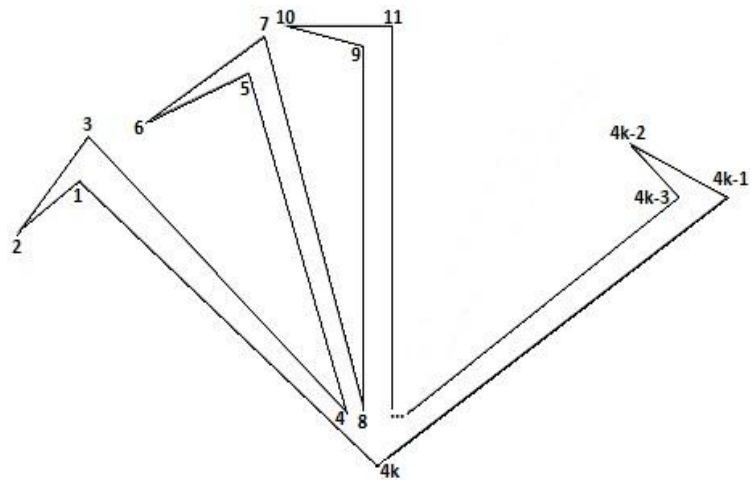


4. ábra: Egy sokszög, ahol szükség van $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ őrrre, és Paige és Shermer kivételt képző példái

A 4. ábrán látható sokszögek közül az elsőnél –ahogyan azt hamarosan látni fogjuk– szükség van $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ élőrre. A második kettő olyan példa, ahol az $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ élőr kevésnek bizonyul. Más ellenpéldák nem ismertek.

Állítás: A 5. ábra „karmos” sokszögének felügyeléséhez $k = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ élőr szükséges.

Bizonyítás: Az örök szempontjából a $4i - 2$, $i = 1, \dots, k$ alakú csúcsok az érdekesek ebben a sokszögben. Ahhoz, hogy a $4i - 2$ alakú csúcsokat szemmel tarthassák, egy őrt kell állítanunk a $[4i - 4, 4i - 3]$, $[4i - 3, 4i - 2]$, $[4i - 2, 4i - 1]$ és $[4i - 1, 4i]$ alakú élek egyikére. Viszont az is látszik az ábráról, hogy ezen élőrök közül egyik sem látja a



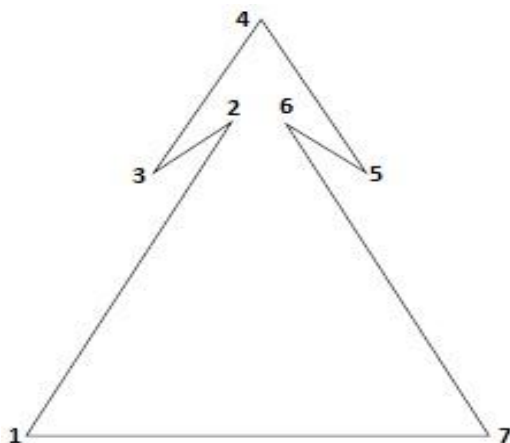
5. ábra

$4(i + 1) - 2$ csúcsot. Tehát minden i , $i = 1, \dots, k$ esetén kell egy őrt alkalmaznunk, így összesen k őrt használunk fel. Ezzel beláttuk az állítást.

■

Most legyen n olyan, amire $4(k - 1) < n < 4k$. Ha a fenti ábráról töröljük a $(4k - 3)$. csúcsot, akkor $(4k - 4)$. csúcs egyenesen a $(4k - 2)$.-hez fog csatlakozni. Azt tudjuk, hogy a $(4k - 4)$. csúcsig $k - 1$ őrré volt szükségünk, és az utolsó 4 csúcs által alkotott sokszög konvex lesz, amiről tudjuk, hogy egy pontból is felügyelhető. Tehát ha az első lépésben úgy választjuk az élet, hogy az tartalmazza a $(4k)$. csúcsot, és lássa róla az őrt a 2.-at, vagy az utolsó előttlépésben a $[4k - 5, 4k - 4]$ élet választjuk, akkor nem lesz szükségünk egy újabb őrré és így $k - 1 = \left\lfloor \frac{4k-1}{4} \right\rfloor$ is elegendő. Ha a $(4k - 2)$. csúcsot töröljük, akkor a $4k - 3$ a $4k - 1$ -hez fog csatlakozni, ami szintén az előző esethez vezet, mivel konvex négyszöget alkot az utolsó 4 csúcs. A $(4k - 1)$. és a $(4k)$. csúcsot azért nem törölhetjük, mert akkor már nem lenne egyszerű a sokszög. Így beláttuk, hogy minden n -re létezik egyszerű sokszög, amely felügyeléséhez $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ élőr szükséges.

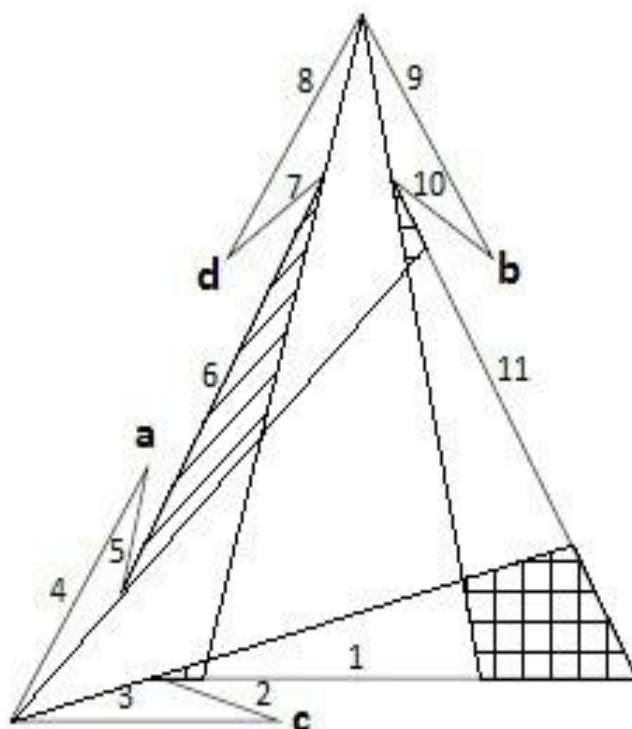
Állítás: A 4. ábra 2. és 3. alakzata nem felügyelhető 2, illetve 1 élőrrel.



Először a 3.-at bizonyítjuk, mert az egyszerűbb. Tegyük fel, hogy 1 őrt elegendő. Ha ezt az őrt az $[1, 7]$ élre helyezzük, akkor világos, hogy nem látjuk a 3-as és 5-ös csúcsokat. Ha az $[1, 2]$ oldalt választjuk, akkor ugyan látjuk az 1, 2, 3, 4, 6 és 7-es csúcsokat és az ezeket összekötő oldalakat, de az 5-ös csúcs kiesik a látóterünkéből. Mivel az alakzat szimmetrikus a legfelső csúcson keresztül húzott függőleges vonalra, a $[6, 7]$ választása sem megfelelő, mert a 3-as csúcs marad ki. A $[2, 3]$ vagy $[5, 6]$ oldalak

választása esetén az 5-ös, illetve 3-as csúcsok nem látszanak. Már csak a [3,4] és [4,5] maradt hátra. Ha a [3,4]-est választjuk, akkor az 1-es csúcs esik ki a látószögünkéből. Ismételten a szimmetriára hivatkozva, az [4,5]-ös él sem megfelelő a 7-es csúcs miatt. Tehát egy élörrel ez a sokszög nem felügyelhető, de kettő már mindenképpen megfelelő, hiszen, ha például a [1,2] és [4,5] éleket választjuk, akkor az őrk ezekről minden oldalt látnak.

Már csak a 2. alakzat maradt hátra. Tegyük fel, hogy 2 őrk képes felügyelni a sokszöget. Először is azt kell észrevennünk, hogy ahhoz, hogy lássuk az **a** csúcsot biztosan kell a 3,4,5 és 6-os élek valamelyikére egy őrt helyeznünk, míg ha a **b**-t akarjuk megfigyelni, akkor a 8,9,10 és 11-es élek egyikére. Tehát az biztos, hogy ezen két, $A = \{3,4,5,6\}$ és $B = \{8,9,10,11\}$ élcsoporthoz kell kiválasztanunk az őrk helyét. Ám ez még nem elég, mert ha a **c** csúcsot is meg akarjuk figyelni, akkor azt csak a 3-as és 4-es oldalak mentén tehetjük meg, ezért $A = \{3,4\}$. Ugyanígy a **d** csúcsához a 8-as vagy a 9-es oldalbeli őrré lesz szükségünk, így $B = \{8,9\}$. Ha a 3-as és 8-as éleket választjuk, akkor az ábrán is látható függőleges vonalas terület marad felügyeletlen. Ugyanakkor a 3-as és 9-es élek sem megfelelőek, mert ekkor a kockás terület esik ki az őrk látóteréből. Ha a 4-es és 8-as oldal lesz az őrk útvonalai, akkor a 6-os oldal és a ferde vonalas terület marad felügyeletlen. Az utolsó lehetőség a 4-es és 9-es élek, de itt a vízszintes vonalakkal jelölt részt nem látják az őrk, így beláttuk, hogy két élör nem képes felügyelni egy ilyen alakú képtárat.



Az első előrelépést az 1. sejtéssel kapcsolatban O'Rourke érte el, de ő olyan mobil őrköt használt, amelyek nem az éleken, hanem átlók mentén közlekedtek, és így bizonyította a következő tételt:

8. Tétel: $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ mobil őrk mindig elegendő, és esetenként szükséges egy n -szög felügyeléséhez.

Bizonyítása tulajdonképpen P_n csúcsszáma szerinti teljes indukcióval történt. Először belátta az állítást egészen 9 csúcús sokszögek esetéig, majd az ennél nagyobb n -eknél P_n egy T triangulációját vizsgálta. Megmutatta, hogy ez a feldarabolás két részre osztja a sokszöget, méghozzá egy P' , valamint egy P'' -re, melyek közül az egyik, mondjuk P' , 5-8 csúcsot tartalmazott P_n -ből. Ezek után keres egy megoldást P' -re, ami használható P'' bármely

lefedésével, és a kettő uniója a teljes P_n -re megoldást ad. Ez a módszer lineáris idő alatt elvégezhető.

Egy érdekes probléma jelent meg ekkor, amely gráfelméleti szempontból vizsgálta ezt a témakört. Ehhez először definiálnunk kell a gráfok, valamint az ezeken értelmezett Hamilton út fogalmát. Egyszerű gráfnak egy $G(V, E)$ párt értünk, ahol V -t a gráf csúcsainak, míg E -t az éleinek nevezzük, ahol $E \subseteq \binom{V}{2}$. Az olyan gráfokat, amelyek realizálhatóak a síkban, azaz, ha lerajzolhatóak úgy, hogy az élgörbéknek a csúcsokon kívül nincs közös pontjuk, síkgráfoknak nevezzük. A síkgráfok élei diszjunkt tartományokra, úgynevezett lapokra osztják a síkot. Útnak az olyan $v_1, \dots, v_k$ csúcsok sorozatát hívjuk, amelyekre $v_i \neq v_j$, ha $i \neq j$, valamint $[v_i, v_{i+1}] \in E$ minden i -re, $i = 1, \dots, k-1$. Egy utat pedig akkor nevezünk Hamilton útnak, ha az a gráf minden csúcsát pontosan egyszer tartalmazza. Ezek után rátérhetünk a triangulációs gráfok fogalmára. Az olyan síkgráfokat nevezzük triangulációs gráfnak, amelyeknek n csúcsa, $2n-3$ éle van, létezik benne Hamilton út, és a lapjait háromszögek alkotják.

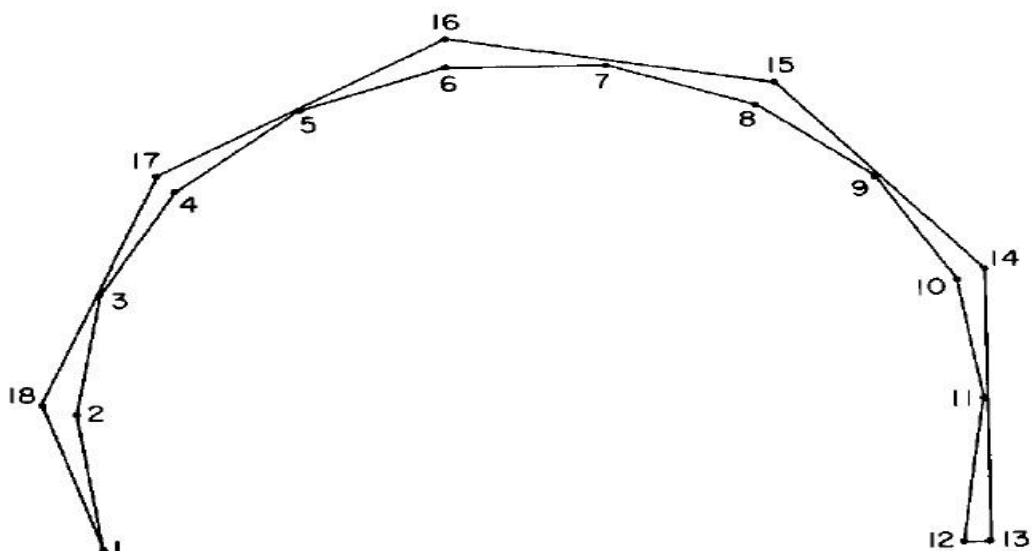
O'Rourke felfedezte, hogy vannak olyan n csúcsú triangulációs gráfok, amelyek realizációjában $\left\lfloor \frac{2n}{7} \right\rfloor$ élőr szükséges a háromszögek felügyelésére. Shermer később talált olyan példákat, ahol $\left\lfloor \frac{3n}{10} \right\rfloor$ élőr kell is a feladatra. Mivel ez a szám nagyobb, mint $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$, ez arra enged következtetni, hogy Toussaint sejtését triangulációval nem tudjuk eredményesen bizonyítani. Shermer nemrégiben megoldotta a triangulációs gráfok őrzésének problémáját, és a következő eredményre jutott:

9. Tétel: Három gráf kivételével $\left\lfloor \frac{3n}{10} \right\rfloor$ élőr mindig elegendő, esetenként szükséges egy n csúcsú triangulációs gráf megfigyelésére.

Spirális sokszögek

Sokszögek egy bizonyos csoportjáról, a spirális poligonokról ez idáig nem esett szó, amikkel kapcsolatban I. Bjorling-Sachs [9] és S. Viswanathan [2],[10] ért el eredményeket. Mindketten igazolták, hogy $\left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor$ élőr elegendő a felügyelésükhöz. Egyébként az ortogonális változatukra Bjorling-Sachs 1993-ban azt is bebizonyította, hogy $\left\lfloor \frac{n-2}{6} \right\rfloor$ élőr mindig képes a szemmel tartásukra.

Egy spirális poligon olyan sokszög, amelyben legfeljebb egy reflex lánc van. Reflex láncon csúcsok olyan sorozatát értjük, amelyeket élek kötnek össze, és minden csúcs belső szöge nagyobb, mint 180° . A szükséges és elegendő csúcsőrök száma egy ilyen sokszög esetén $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Annak bizonyítására, hogy szükség van ennyi csúcsőrré egy úgynevezett „torz fésű” példára volt szükség, az pedig, hogy elegendő is $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ csúcsőr, Chvátal tételéből adódik, amit az előzőekben már említettem.



6. ábra: A "torz fésű" sokszög

Az 6. ábrán látható sokszögnél azért lesz szükség ennyi őrre, mert az $\{1,2,3,18\}$, $\{3,4,5,17\}$,..., $\{9,10,11,14\}$ alkotta konkáv deltoidok őrzéséhez mindig kell egy, valamint a 11, 12, 13 csúcsok által alkotott háromszöghöz is. A részletes bizonyítás O'Rourke könyvében [11] olvasható.

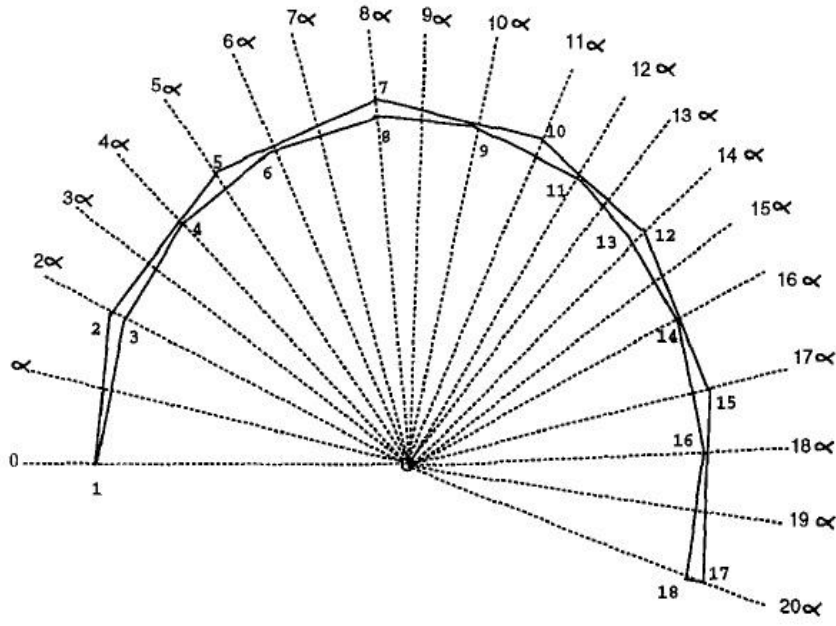
Fő tétel: $\left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor$ élőr mindig elegendő, és esetenként szükséges egy spirális sokszög őrzéséhez.

A fő tétel bizonyításánál először alulról, majd felülről becsüljük ezt az értéket. Aggarwalnak sikerült bebizonyítania ugyanezt az eredményt mobil őrökre, akik az átlók mentén járőröznek, de ők kevésbé vannak korlátozva mozgás terén, mint az élőrök, mivel azok bármely két csúcs között mozoghatnak, amelyeket összekötő szakasz a poligon belsejében van. Minden élőr egyben mobil őr, de fordítva nem igaz, ennél fogva a minimális élőrök száma egyértelműen következik Aggarwal tételéből, de most egy másik irányból közelítjük meg ennek bizonyítását, és Viswanathan 1994-ben leközlött eredményeit mutatjuk be.

A bizonyítás tulajdonképpen két részből áll. Az első részben megmutatja, hogy van olyan spirális sokszög, amelyben szükség van $\left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor$ élőrre, majd azt, hogy bármelyikben elegendő ennyi. Innentől kezdve, ha nem is írom ki, de őr alatt is élőrt értek, hacsak nem tüntetem fel másképpen.

Alsó határ

A fő példánk egy $n = (5k - 2)$ csúcsú sokszög lesz, amely $(3k - 1)$ csúcsa egy körvonalon helyezkedik el egymástól egyenlő távolságokra, a többi $(2k - 1)$ csúcs pedig szintén egymástól azonos távolságra egy kicsit nagyobb koncentrikus körön. A kisebb körön elhelyezkedő csúcsok az óramutató járásával megegyező irányban egy reflex láncot alkotnak, amíg a másik körvonalon elhelyezkedők láncá éppen konvex. Ez a két lánc, a végpontjaiknál összekötve spirális poligont ad nekünk. (lásd 7. ábra)



7. ábra: A példa sokszög $n = 5 \times 4 - 2 = 18$ csúccsal

A reflex lánc csúcsai:

$$r_i = (-\rho_{belső} \cos(2i\alpha), \rho_{belső} \sin(2i\alpha)), \text{ ahol } i = \{1, 2, \dots, (3k - 3)\}$$

A konvex lánc csúcsai:

$$c_{-1} = (-\rho_{belső}, 0)$$

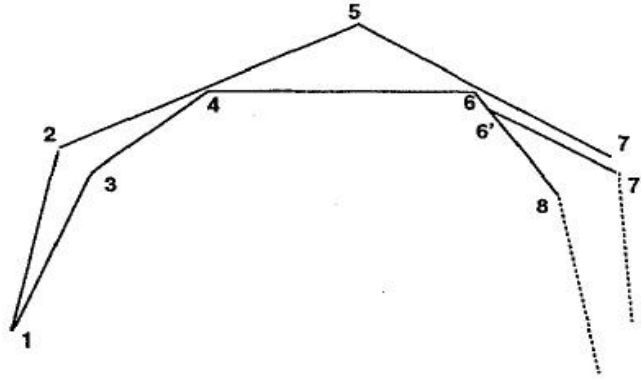
$$c_i = (-\rho_{külső} \cos((3i + 2)\alpha), \rho_{külső} \sin((3i + 2)\alpha)), \text{ ahol } i = \{0, 1, 2, \dots, (2k - 2)\}$$

$$c_{2k-1} = (-\rho_{belső} \cos((6k - 2)\alpha), \rho_{belső} \sin((6k - 2)\alpha))$$

$\rho_{belső}$ -t és $\rho_{külső}$ -t elég közel választjuk meg egymáshoz, így az élek, amelyek szomszédosak a konvex lánc v csúcsaival, majdnem elérik a reflex lánc v mindkét oldalára eső csúcsait.

1. Lemma: Az előző módon létrehozott spirális sokszögben $\left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor$ előre van szükség.

Bizonyítás: Ahhoz, hogy az 1-es csúcsot lássuk, mindenképpen kell egy őrtenünk az $[1, 2], [1, 3], [2, 5]$, vagy a $[3, 4]$ élek egyikére. A $[2, 5]$ él megfelelő választásnak bizonyulhat, hiszen erről látunk mindent, amit a másik három élről összesen láthatnánk, szóval ez lesz az optimális, ha minimalizálni is akarjuk az őrök számát. A 8. ábrára pillantva láthatjuk, hogy a $[2, 5]$ élről belátható az 1, 3, 4, 6, 7, 5 és 2 csúcsokat tartalmazó rész spirál, amit nevezzük SSP-nek.



8. ábra

Most vegyünk két pontot $6'$ és $7'$, amelyek nagyon közel vannak a $6, 7$ pontokhoz, de az SSP -n kívül. Ha töröljük SSP -t, és összekötjük a $6', 7'$ pontokat, akkor az így kapott sokszög konstrukciója hasonló az eredetihez, csak $n' = (n - 5)$ csúcsa lesz. Ezeket a lépéseket egészen addig ismételhetjük, amíg $n' > 3$, és minden lépésben 5 csúcsot törölünk. $\left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor$ lépésig tart, hogy n' kevesebb legyen, mint 3, és minden lépésben csak egy őrt használunk fel. Ebből következik, hogy legkevesebb $\left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor$ előre lesz szükségünk, ha az egész sokszöget felügyelni akarjuk.

■

10. Tétel: $\left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor$ előre van szükségünk spirális sokszögek őrzésénél.

Bizonyítás: Az 1. lemma alapján az már világos számunkra, hogy a tétel igaz lesz $n = (5k - 2)$ csúcsú sokszögek esetén. Minden n -re, amire $(5k - 2) < n < (5(k + 1) - 2)$, ha megkonstruálunk a fenti módon egy $n' = (5(k + 1) - 2)$ csúcsú spirális sokszöget, és elkezdjük a csúcsait visszafelé törölgetni. Először mindig a konvex lánc utolsó, belső körön levő elemét kell törölnünk, mert különben önmetsző lenne a sokszögünk, majd a konvex és reflex lánc elemeit felváltva. $(n' - n)$ csúcsot törölve összesen mindkét lánc végéről, valamint a láncvégeket összekapcsolva egy spirális n -szöget kapunk. Az, hogy $\left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor$ előre biztosan szükségünk van ennél a poligonnál, abból következik, hogy ennyi kell az $n'' = (5k - 2)$ csúcsú poligonnál, ami része ennek a sokszögnek, mert:

$$\left\lfloor \frac{n''+2}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor, \text{ ha } n'' = (5k - 2) \text{ és } (5k - 2) < n < (5(k + 1) - 2).$$

■

Felső határ

Definíció: SV jelöljön egy minimum 7 csúcsból álló láncot, ami része egy spirális sokszögnek, és az általuk elzárt részt - ha összekötjük a két végét - egy őrrrel be tudjuk látni.

11. Tétel: $\left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor$ élőr mindig elegendő bármilyen spirális poligon felügyelésére.

Bizonyítás: Majd szükségünk lesz egy módszerre, amivel megtaláljuk az SV -ket a sokszögben, de ezt a későbbiekre hagynám. Tegyük fel, hogy beláttuk, hogy minden spirális poligonban létezik SV . Ekkor két részre osztjuk a poligont, és így kapjuk SV -t és a $(P - SV)$ láncot. SV ekkor 2 csúccsal csatlakozik a másik részhez, amelyeket nevezzünk el v -nek valamint v' -nek. Kössük össze ezt a két csúcsot egy d átlóval, majd húzzunk be még egy d -vel párhuzamos szakaszt ehhez a d átlóhoz nagyon közel: d' . Ezek az átlók két részre osztják a poligont. Az egyik S , ami igazából az SV részpoligon a d átlóval, a másik pedig S' , ami $(P - SV)$ d' -vel. Mivel P felosztásánál egyik részben sem bántottuk a reflex láncot, ezért S és S' ugyanúgy spirálisak maradtak. Így kaptunk egy k csúcsú S , és egy $(n - k + 2)$ csúcsú S' sokszöget, ahol $k \geq 7$. 2-t a v és v' duplázása miatt kellett hozzáadni. Most hagyjuk el S -t, hogy csak az S' maradjon.

Ekkor S őrzéséhez csak egy őrt használtunk fel, és már csak a csökkentett csúcsszámú S' sokszöget kell vizsgálnunk. Az előző lépéseket folyamatosan ismételve csökkentjük a sokszög méretét, ameddig az teljesen el nem tűnik. Minden lépésnél eltöröltünk legalább 7 csúcsot és hozzáadtunk 2-t. Így legalább 5-tel kevesebb lett mindig, kivéve az utolsó lépést, mert ott legfeljebb 7 csúcsot vehetünk el. Tehát $\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor$ lépés után már csak egy maximum 7 csúcsú spirális sokszögünk maradt, ami pedig teljes egészében látható egy őr számára. Ez igaz, hiszen az SV létezésénél lényegében bizonyítjuk, hogy minden sokszög, ami része egy spirális poligonnak, és legfeljebb 7 csúcsa van, egy őrral felügyelhető.

Mivel minden lépésben csupán egy őrt használtunk fel, ezért a szükséges élőrök száma $\left\lfloor \frac{n-3}{5} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor$.

■

SV-k meghatározása

Jelöljük el a P spirális sokszög reflex láncának csúcsait és oldalait $r_1, r_2, r_3, \dots$ illetve $e_1, e_2, e_3, \dots$, a konvex lánc csúcsai pedig $c_1, c_2, c_3, \dots$ indexekkel a 9. ábrán látható módon.

2. Lemma: Ha $[c_k, r_i]$ részhalmaza P -nek, akkor vagy a $[c_k, r_{i+1}]$ vagy $[c_{k+1}, r_i]$ is részhalmaza.

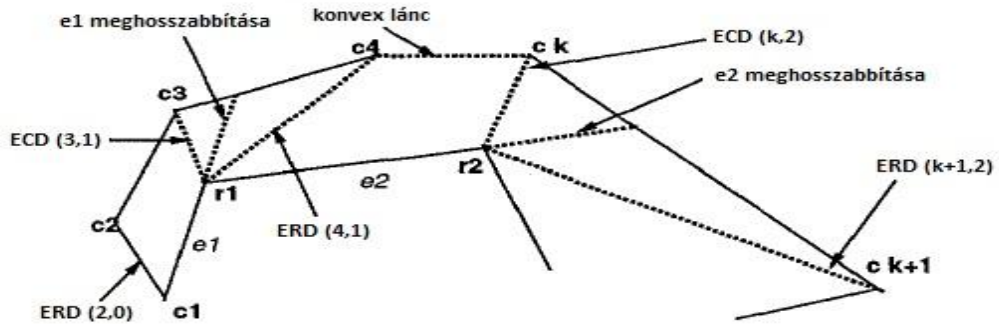
Bizonyítás: Ha $[c_k, r_i]$ részhalmaza P -nek, az azt jelenti, hogy sem a $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ csúcsok konvex lánc, sem a $r_1, r_2, \dots, r_{i-1}$ -ből álló reflex lánc nem keresztezheti a $[c_k, r_i]$ szakaszt. Így nem keresztezheti a $[c_k, r_{i+1}]$ vagy pedig a $[c_{k+1}, r_i]$ szakaszt. A $[c_k, r_{i+1}]$ szakaszt azért nem tudja keresztezni se az $r_{i+2}, r_{i+3}, \dots$ reflex, se a $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots$ konvex lánc, mert ha megtennék, akkor sérülne a reflex lánc konkáv vagy a konvex lánc konvex tulajdonsága.

Tehát csak r_i tud a két pont közötti szakasz útjába kerülni. Amennyiben ez nem így van, akkor $[c_k, r_{i+1}] \subseteq P$, és így teljesül a lemma.

Ha r_i mégis útban van c_k és r_{i+1} között, akkor sem az $r_{i+1}, r_{i+3}, \dots$ reflex, sem a $c_{k+2}, c_{k+3}, \dots$ konvex lánc nem keresztezheti a $[c_{k+1}, r_i]$ szakaszt, mert ha megtennék, akkor sérülne a reflexivitásuk, illetve konvexitásuk. Még c_k sem tud útban lenni, mert ha ez így lenne, akkor sérülne a konvexitás ebben a pontban. Ezek után pedig már egy csúcs sem kerülhet a két pont közti szakaszra, ami igazolja a lemmát, így $[c_{k+1}, r_i] \subseteq P$.

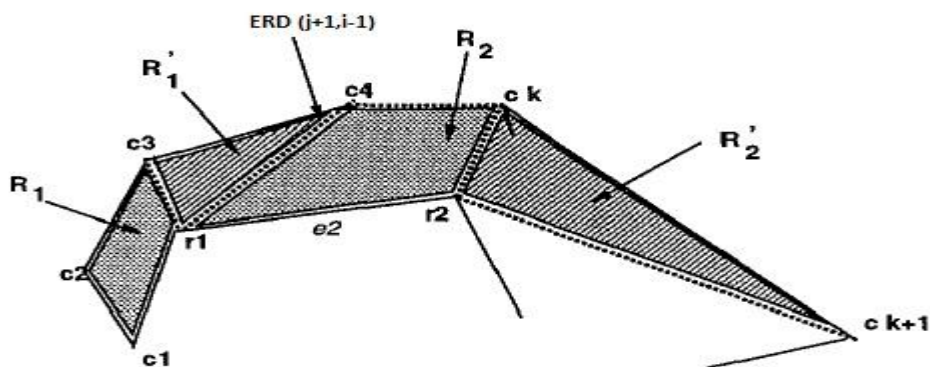
■

Definíciók: Tekintsük az r_i reflex csúcsot. Az e_i oldal r_i -n túli meghosszabbítása messe a $[c_k, c_{k+1})$ oldalt. Ekkor $ECD_{k,i}$, azaz e_i kiterjesztett konvex átlója a $[c_k, r_i]$ átló. Szemléletesen c_k az utolsó olyan konvex csúcs, amire $r_{i-1}r_i c_k \nlessdot$ konvex. $ERD_{k+1,i}$ pedig az e_i kiterjesztett reflex átlója a c_{k+1} és r_i csúcsok között, amennyiben létezik ilyen. Ha nem létezik, akkor $ERD_{k+1,i} \equiv ECD_{k,i}$. Másik csúcsokra nem definiáljuk az ECD és ERD átlókat.



9. ábra: Példa az ECD és ERD átlókra

Jelölje R_i az $ERD_{j+1,i-1}$ átló által levágott, azaz $c_{j+1}, c_{j+2}, \dots, c_k, ECD_{k,i}$ és e_i élek által határolt sokszöget, amíg R'_i az $ECD_{k,i}$, $[c_k, c_{k+1}]$ és $ERD_{k+1,i}$ által határolt háromszög. Ha $ERD_{k+1,i} \equiv ECD_{k,i}$, akkor R'_i csupán az $ECD_{k,i}$ él, ami őrzés szempontjából nem lényeges.



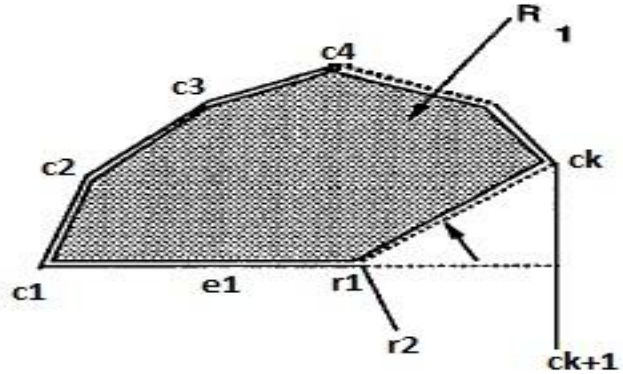
10. ábra: R_i és R'_i , ha $j = 3$ és $i = 2$

R_i konvex lesz, hiszen a $c_{i+1}r_{i-1}r_i \nlessdot$ és az $r_{i-1}r_i c_k \nlessdot$ szögek konvexek, és a többi csúcsa pedig a konvex láncban helyezkedik el. R'_i pedig háromszög mivolta miatt nem lehet konkáv.

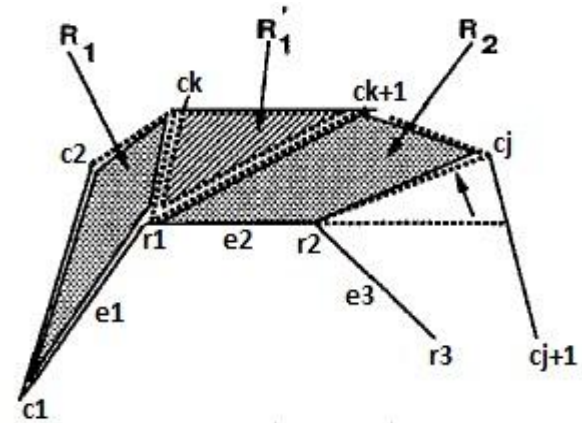
3. Lemma: Minden spirális sokszögben létezik SV .

Bizonyítás: Egy tetszőleges spirális poligont véve négy lehetséges eseten keresztül bizonyítjuk be, hogy mindig található SV .

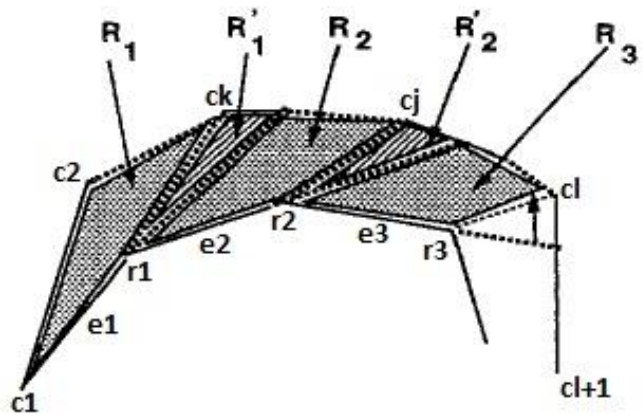
1. eset: Tekintsük R_1 -et. Tehát ha R_1 -nek legalább 6 csúcsa a konvex láncon helyezkedik el, akkor SV a konvex lánc első hat, valamint a reflex lánc első csúcsát köti össze. Ebben az esetben egy konvex sokszöget kaptunk, így akárhová elhelyezve egy őrt, az belátja az egészet. Ilyenkor c_k lesz v , és r_1 lesz v' . Ha 6-nál kevesebb csúcs van a konvex láncon, akkor a 2. eset következik. A képen az $k \geq 5$ eset látható.



2. eset: Ha SV -nek öt csúcsa van a konvex láncról, akkor az első kettő reflex láncbéli csúcsot kell mellé választanunk. Tekintsük R_1, R_1' és R_2 -t. Ennek a három sokszögnek a definícióból adódóan van egy közös csúcsuk, nevezetesen r_1 . Ha ebbe a csúcsba helyezzük el az őrt, akkor az szemmel tarthatja mindegyik oldalt. Ilyenkor mindegy, melyik r_1 -et tartalmazó élre helyezzük, hiszen az élörök úgy vannak megkonstruálva, hogy a csúcsokból is szabadon belássanak mindent. Ilyenkor c_j lesz v , és r_2 lesz v' . Amennyiben kevesebb, mint 5 csúcs van a konvex láncon, akkor a 3. esetet kell megvizsgálnunk. (A képen $k \leq 4 \leq j$)

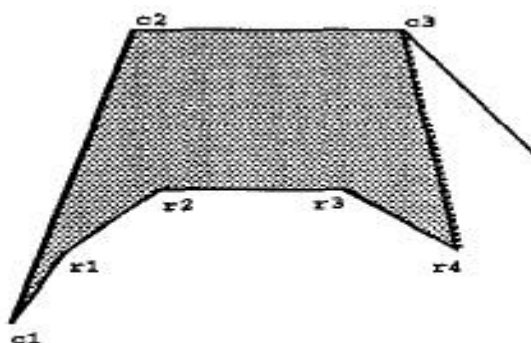


3. eset: Ha SV négy csúcsa van a konvex láncról, akkor a reflex lánc első 3 csúcsával alkot egy ilyen sokszöget. Ebben az esetben 5 konvex poligont kapunk: R_1, R_1', R_2, R_2' és R_3 . Ekkor R_1, R_1' és R_2 -nek van egy közös csúcsa, méghozzá r_1 , valamint R_2' és R_3 -nak is, ami r_2 . Így, ha az $[r_1, r_2] = e_2$ élre helyezzük az őrt, akkor az képes felügyelni SV -t. Ilyenkor c_l lesz v , és r_3 a v' . Ha kevesebb, mint négy csúcs van a konvex láncról, akkor a 4-es esethez jutunk. Az ábrán $k \leq j \leq 3 \leq l$.



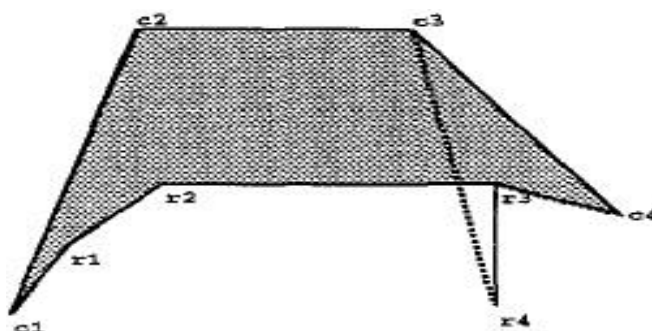
4. eset: Ebben az esetben kevesebb, mint 4 csúcs van a konvex láncon. Az egyszerűbb tárgyalás érdekében két további részesetre bontjuk.

4.a: A konvex csúcsok száma mindössze 3, és $[c_3, r_3]$ P -ben van.

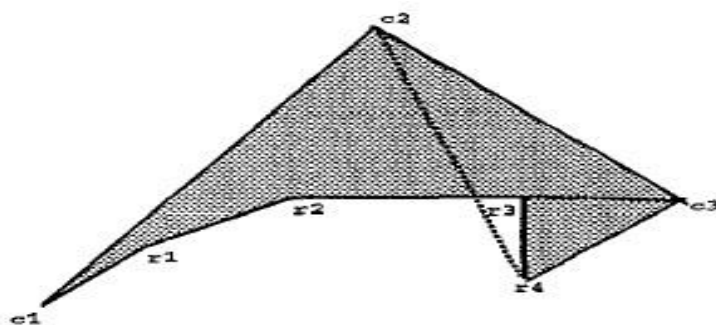


Ha a $[c_3, r_4]$ is P -ben van, akkor tekintsük $R_1, R_1', R_2, R_2', R_3$ valamint a $c_3 r_3 r_4$ háromszöget. Mindegyikük tartalmazza a c_2 vagy a c_3 csúcsok egyikét. Ez azért van, mert az e_1, e_2, e_3 élek meghosszabbításai mind metszik a $[c_2, c_3]$ vagy a $[c_3, c_4]$ éleket. Így ha a $[c_2, c_3]$ élre helyezzük az őrt, az látja majd mind a hat sokszöget. Ekkor c_3 lesz v , és r_4 a v' .

Ha a $[c_3, r_4]$ nem részhalmaza P -nek, akkor a $[c_4, r_3]$ élnek annak kell lennie a 2. lemma alapján. Ekkor tekintsük ismét R_1, R_1', R_2, R_2' és R_3 -at. Ismét mindegyikük tartalmazza c_2 , illetve c_3 csúcsok valamelyikét, így a $[c_2, c_3]$ él ismét megfelelő választás lesz az őrt elhelyezésére, hiszen onnan belátja az összes poligont. Itt c_4 a v , és r_3 lesz v' .

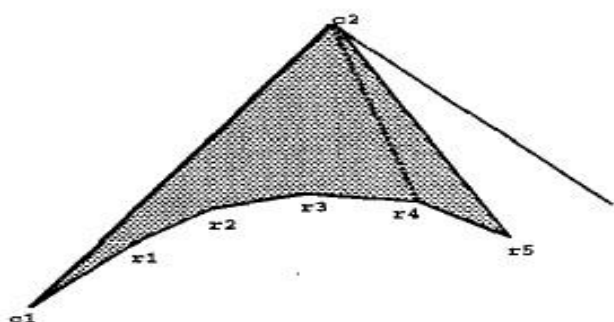


4.b: A konvex csúcsok száma 2, és $[c_2, r_3]$ a P részhalmaza.



Ha a $[c_2, r_4]$ nem részhalmaza P -nek, akkor a $[c_3, r_3]$ biztosan az a 2. lemma alapján, ami a 4.a esthez vezet.

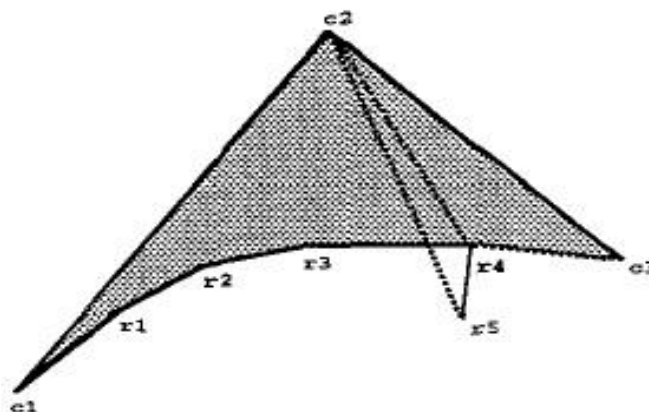
Ha a $[c_2, r_4]$ él mégis részhalmaza P -nek, akkor vizsgáljuk $[c_2, r_5]$ átlót.



Amennyiben $[c_2, r_5] \subseteq P$, tekintsük az $R_1, R_1', R_2, R_2', R_3$ sokszögeket, valamint a $c_2 r_3 r_4$ és a $c_2 r_4 r_5$ háromszögeket. Egy őrt helyezve a $[c_2, c_3]$ élre beláthatjuk ezen konvex sokszögeket, mivel a c_2 mindegyikük csúcsa lesz. Azért tartalmazza mindegyikük, mert az e_1, e_2 és e_3

oldalak meghosszabbításai metszik a $[c_2, c_3]$ élet, és a c_2 két háromszögnek is csúcsa. Ekkor c_2 és r_5 lesz v , illetve v' .

Ha $[c_2, r_5] \not\subseteq P$, akkor a $[c_3, r_4]$ -nek benne kell lennie a 2. lemma alapján. Most tekintsük $R_1, R_1', R_2, R_2', R_3$ sokszögeket, valamint a $c_2 r_3 r_4$ és a $c_2 r_4 c_3$ háromszögeket. Ugyanarra az eredményre jutunk, mint az előbb, mivel c_2 ismét csúcsa lesz mindegyik poligonnak, így a $[c_2, c_3]$ jó választás. Ekkor c_3 és r_4 lesz v és v' .



Ezzel a bizonyítás végére is értünk, hiszen az összes lehetséges esetet megvizsgáltuk. Ezek alapján pedig minden spirális poligonban található SV .

■

A 10-es és 11-es tételek következményeképpen, mivel a felső és alsó határ is egybeesik, a spirális sokszögek mindig felügyelhetők $\left\lfloor \frac{n+2}{5} \right\rfloor$ élőrrel, ami a fő tételünk állítása volt.

Irodalomjegyzék

- [1] Jorge Urrutia: Art gallery and illumination problems. *Handbook of Computational Geometry*, (2000).
- [2] S.Viswanathan: Tight bounds for the number of edge guards for spiral polygons. *Journal of Geometry*, Vol. 51, Issue 1-2, pp 178-186 (1994).
- [3] Iliana Bjorling-Sachs: Edge guards in rectilinear polygons. *Computational Geometry: Theory and Applications*, Vol. 11, Issue 2, pp 111-123 (1998).
- [4] Iliana Bjorling-Sachs: A tight bound for edge guards in monotone polygons. *Computational Geometry*, Vol. 11, Nr. 2, pp 111-123 (1998).
- [5] Joseph O'Rourke: Galleries need fewer mobile guards: A variation on Chvátal's theorem. Johns Hopkins University. Electrical Engineering and Computer Science Dept. Technical report (1982).
- [6] Feng-Chu Lai, Gerard J. Chang: An upper bound for the Transversal Numbers of 4-Uniform Hypergraphs. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, Vol. 50, Issue 1, pp 129 – 133 (1990).
- [7] R.V. Subramaniam, A.A. Diwan: A counterexample for the sufficiency of edge guards in star polygons. *Inf. Process. Lett.*, Vol. 40, Nr. 2, pp 97-99 (1991).
- [8] Xuehou Tan: Edge guards in straight walkable polyons. *Int. J. Comput. Geometry Appl.*, Vol. 9, Nr. 1, pp 63-80 (1999).
- [9] I. Bjorling-Sachs: Variations on the Art Gallery Theorem Ph.D. thesis. Rutgers University (1993).
- [10] S. Viswanathan: The edge guard problem for spiral polygons. *Proc. Fifth Canadian Conference on Computational Geometry*, pp 103-108 (1993).
- [11] Joseph O'Rourke: Art gallery theorems and algorithms, *International Series of Monographs on Computer Science*, Book 3, (1987).

Nyilatkozat

Alulírott Csák Attila kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Csák Attila