A KÍNAI MARADÉKTÉTEL ALKALMAZÁSAI

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

Tartalom

Kínai maradéktétel

A kínai maradéktétel alkalmazásai

Összefüggés a maradékok között?

Összefüggés a maradékok között

Tétel

Tekintsük az alábbi kongruenciarendszert.

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv c_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv c_2 \pmod{m_2} \end{aligned}\right\}$$

- A kongruenciarendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha $\text{lnko}(m_1, m_2) \mid c_1 - c_2$.
- Ha van megoldás, akkor a megoldások egyetlen maradékosztályt alkotnak modulo $\text{lkkt}(m_1, m_k)$.

Nincs összefüggés a maradékok között!

Tétel (Kínai maradéktétel)

Tekintsük az alábbi kongruenciarendszert.

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv c_1 \pmod{m_1} \\ &\vdots \\ x &\equiv c_k \pmod{m_k} \end{aligned}\right\}$$

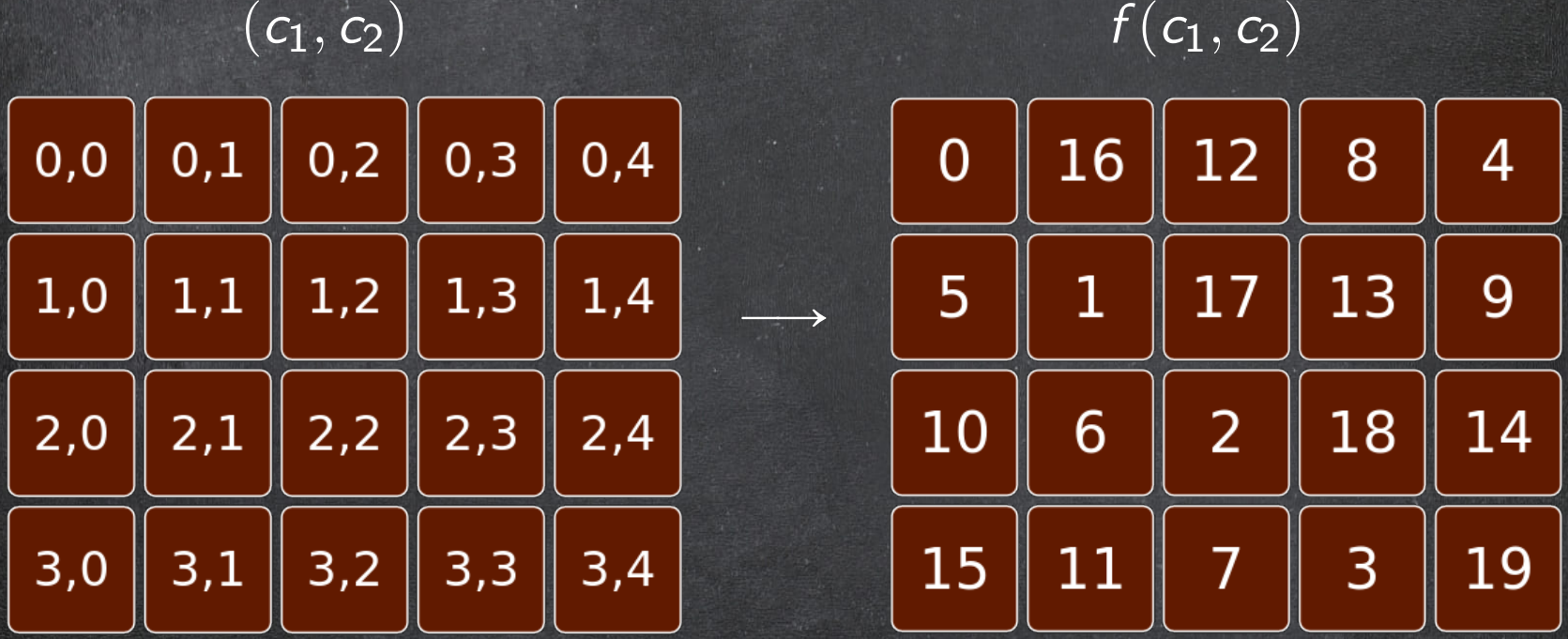
- Ha a modulusok páronként relatív prímek, akkor a $c_1, \ldots, c_k$ számoktól függetlenül mindig van megoldás.
- Modulo $m_1 \cdot \ldots \cdot m_k$ egyetlen megoldás van.

„Kínai számrendszer”

Tetszőleges $c_1 \in \{0,1,2,3\}$ és $c_2 \in \{0,1,2,3,4\}$ esetén van megoldása az alábbi kongruenciarendszernek, és a megoldás modulo 20 egyértelműen meghatározott:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv c_1 \pmod 4 \\ x &\equiv c_2 \pmod 5 \end{aligned}\right\}.$$

Tehát egyetlen 0 és 19 közé eső megoldás van; jelölje ezt $f(c_1, c_2)$.



Kínai maradéktétel

Oldjuk meg az alábbi két kongruenciarendszert.

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 4 \\ x &\equiv 0 \pmod 5 \end{aligned}\right\}$$

megoldás: $x \equiv 5 \pmod{20}$

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod 4 \\ x &\equiv 1 \pmod 5 \end{aligned}\right\}$$

megoldás: $x \equiv 16 \pmod{20}$

Állítás

Ekkor az

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv c_1 \pmod 4 \\ x &\equiv c_2 \pmod 5 \end{aligned}\right\}$$

paraméteres kongruenciarendszer megoldása:

$$x \equiv 5c_1 + 16c_2 \pmod{20}.$$

Ellenőrzés

$$5c_1 + 16c_2 \equiv 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 \equiv c_1 \pmod 4 \checkmark$$

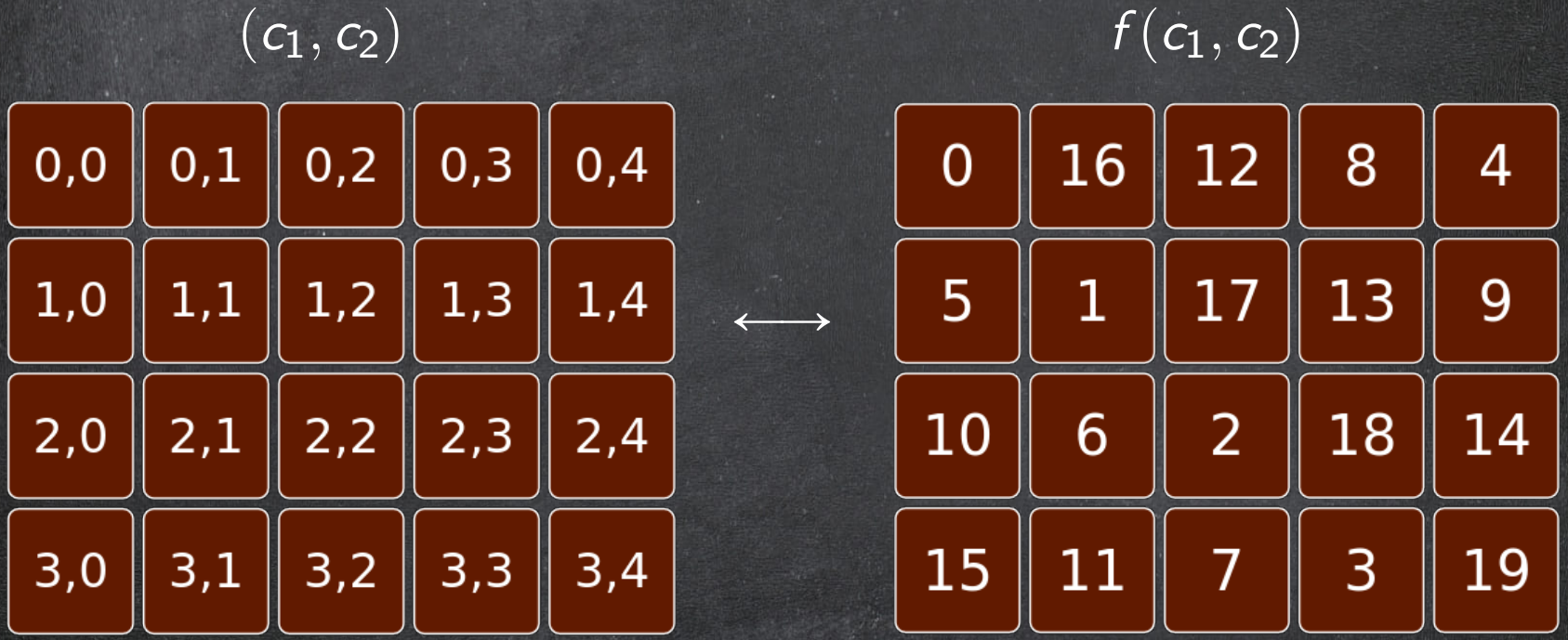
$$5c_1 + 16c_2 \equiv 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 \equiv c_2 \pmod 5 \checkmark$$

„Kínai számrendszer”

Az f függvény és inverze formálisan így festenek:

$$f : \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,\ldots,19\}$$
$$(c_1, c_2) \mapsto 5c_1 + 16c_2 \bmod 20$$

$$\{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3,4\} \leftarrow \{0,1,2,\ldots,19\} : f^{-1}$$
$$(x \bmod 4, x \bmod 5) \leftarrow\!\shortmid x \bmod 20$$



Tartalom

Kínai maradéktétel

A kínai maradéktétel alkalmazásai

Számolás „kínai számrendszerben”

Tegyük fel, hogy sok számolást kell végeznünk 0 és 2047 közötti számokkal.

Válasszunk néhány kicsi, páronként relatív prím modulust, amelyeknek szorzata nagyobb, mint 2047:

$$m_1 = 5,\ m_2 = 7,\ m_3 = 8,\ m_4 = 9, \qquad m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4 = 2520.$$

Oldjuk meg az alábbi négy kongruenciarendszert:

$x \equiv 1 \pmod 5$	$x \equiv 0 \pmod 5$	$x \equiv 0 \pmod 5$	$x \equiv 0 \pmod 5$
$x \equiv 0 \pmod 7$	$x \equiv 1 \pmod 7$	$x \equiv 0 \pmod 7$	$x \equiv 0 \pmod 7$
$x \equiv 0 \pmod 8$	$x \equiv 0 \pmod 8$	$x \equiv 1 \pmod 8$	$x \equiv 0 \pmod 8$
$x \equiv 0 \pmod 9$	$x \equiv 0 \pmod 9$	$x \equiv 0 \pmod 9$	$x \equiv 1 \pmod 9$
megoldás:	megoldás:	megoldás:	megoldás:
$x \equiv 2016 \pmod{2520}$	$x \equiv 1800 \pmod{2520}$	$x \equiv 945 \pmod{2520}$	$x \equiv 280 \pmod{2520}$

Számolás „kínai számrendszerben”

Ennek alapján az

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv c_1 \pmod 5 \\ x &\equiv c_2 \pmod 7 \\ x &\equiv c_3 \pmod 8 \\ x &\equiv c_4 \pmod 9 \end{aligned}\right\}$$

paraméteres kongruenciarendszer megoldása:

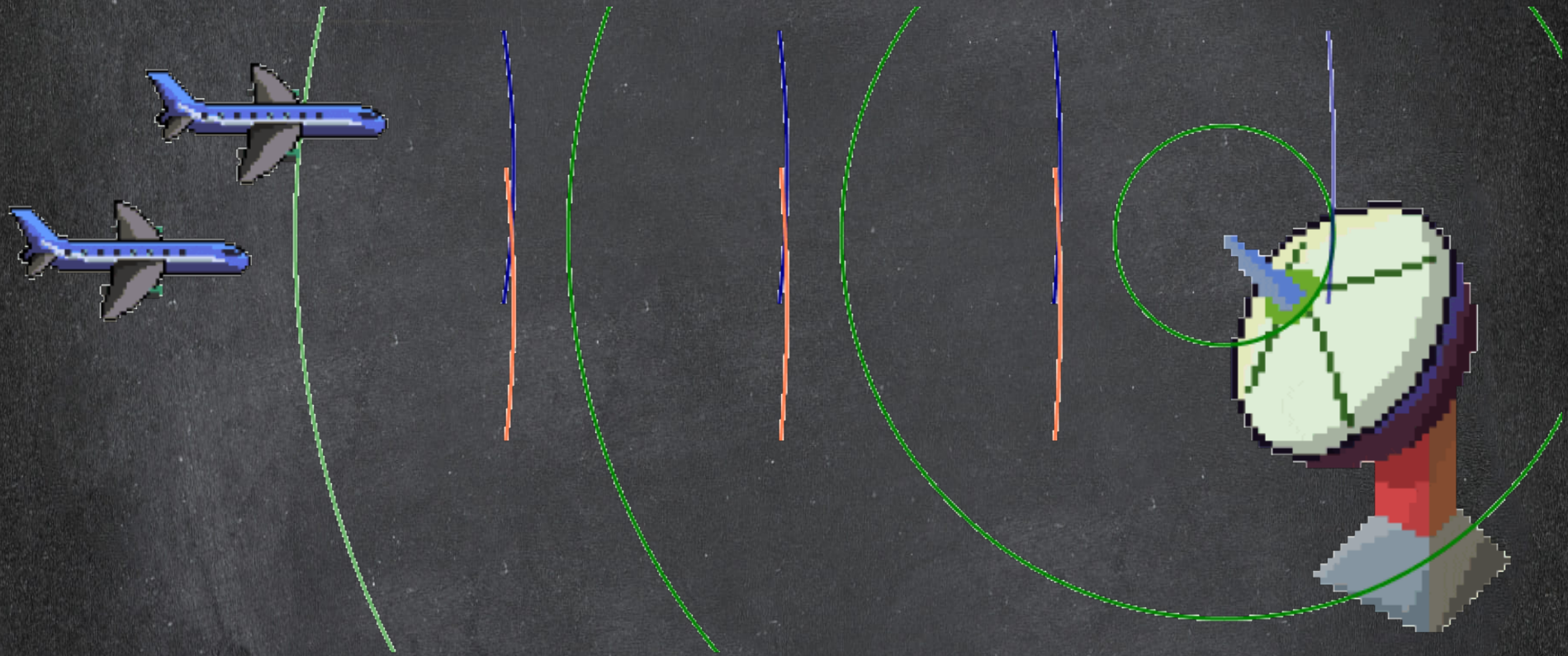
$$x \equiv 2016 \cdot c_1 + 1800 \cdot c_2 + 945 \cdot c_3 + 280 \cdot c_4 \pmod{2520}.$$

Ezzel a képlettel könnyen tudunk oda-vissza váltani „kínai számrendszerre”.

Tfh. ezt kell kiszámolnunk: $22 \cdot 47 + 83 = ?$

		mod 5	mod 7	mod 8	mod 9
22	$\rightsquigarrow$	2	1	6	4
47	$\rightsquigarrow$	2	5	7	2
83	$\rightsquigarrow$	3	6	3	2
162371117	$\leftsquigarrow$	72	114	455	101

Távolságmérés radarral



A kép forrása:

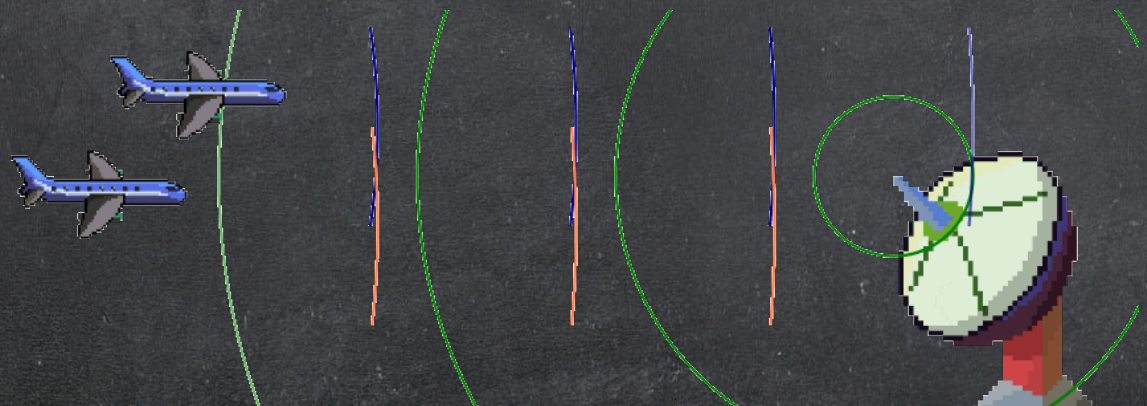
https://prove-me-wrong.com/2019/08/13/radars-and-the-chinese-remainder-theorem/.

Távolságmérés radarral

Ha a radar 30 kHz-es frekvencián működik, akkor másodpercenként 30 000 impulzust bocsát ki. Tehát két implulzus között $\frac{1}{30\,000}$ másodperc telik el; ezalatt a rádióhullám által megtett út

$$\frac{1}{30\,000}\,\mathrm{s} \cdot 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 10\,\mathrm{km}.$$

Ha két tárgy (pl. repülőgép) távolsága 5 km, akkor egyszerre érkeznek vissza a róluk visszavert hullámok, ezért nem tudunk különbséget tenni közöttük. Ezért egy 30 kHz-es radarral „modulo 5 km” tudunk csak távolságot mérni. Ha 5, 7, 8, 9 km-es távolságnak megfelelő frekvenciákon is elvégezzük a mérést, akkor $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$ km-en belül nem lesz két repülő, amit összetévesztünk.



Titokmegosztás kongruenciákkal (emlék 2021-ből)

Waldhauser Tamás (CD6GZI) 02/24/2021 11:44 AM

Az ellenség egy vírust telepített a Discordra, ami hétfőn törölni fogja a Dimat 2 szervert. A vírust egy 4 számjegyből álló titkos kóddal lehet leállítani. A kód annyira titkos, hogy senki nem tudja a világon. Az ellenségnek van három ügynöke: a 49-es, a 64-es és a 81-es ügynök. Mindhárom ügynök tudja a titkos kód maradékát modulo a saját sorszáma. WT riadóztatta a legjobb embereit, a gyakorlatvezetőket, akik rögtön munkához láttak: átkutatták az *U* univerzum minden részhalmazát, és sikerült is elfogniuk mindhárom ügynököt. Az ügynököket válogatott diszkrét kínzásoknak vetették alá, így sikerült vallomásra bírni őket.

> 49-es ügynök: „*Jaj, ne! Még egy diofantoszi egyenletet nem bírok ki! Inkább elárulom, amit tudok: 34.*”
> 64-es ügynök: „*Csak kongruenciákkal ne kínozzatok, inkább vallok: 14.*”
> 81-es ügynök: „*Kiskorom óta rettegek az ismétléses kombinációktól! 38 a titkos számom, de úgysem mentek vele semmire.*”

Majd meglátjuk! – dörzsölte a kezét WT. – A gyakorlatvezetők már kimerültek az ügynökvadászatban és a kínvallatásban, úgyhogy most a második legjobb embereimet, a hallgatókat állítom rá az ügyre. Három xp-t kap, aki elsőként megfejti a vírust hatástalanító kódot!

Titokmegosztás kongruenciákkal (emlék 2021-ből)

Waldhauser Tamás (CD6GZI) 02/25/2021 8:14 AM

> WT kában ébredt. Az álom foszlányai még ott kavarogtak a fejében, de nem tudta összerakni őket. Valami furcsa volt a szobában. Tikk-takk-tikk-takk... A falióra ketyegése, ami máskor oly megnyugtató háttérzajt adott az előadás-videókhoz, most fenyegetően hangzott. Egy időzitett bomba ketyegésére emlékeztette. És ekkor beugrott: sajnos csak álom volt, hogy sikerült az ügynököket elfogni és @NO U megfejtette a kódot! A veszély még nem múlt el. A rádió bemondta a pontos időt és a dátumot. Csütörtököt mondott. Nagyon kevés már az idő, az *U* halmaz pedig óriási, és csak 8 gyakvezér van. Képtelenség hétfőig levadászni mindhárom ügynököt. Talán kettőt sikerülhet elkapni, ha csak arra a kettőre koncentrálnak.

Melyik kettőt lenne jó elkapni? Tudni kell, hogy a vírus egy hibázást megenged, de másodszorra muszáj a jó kódot megadni, különben mindennek vége... 3 xp-t adok annak, aki megmondja **és megindokolja**, hogy melyik két ügynököt kellene elkapni.

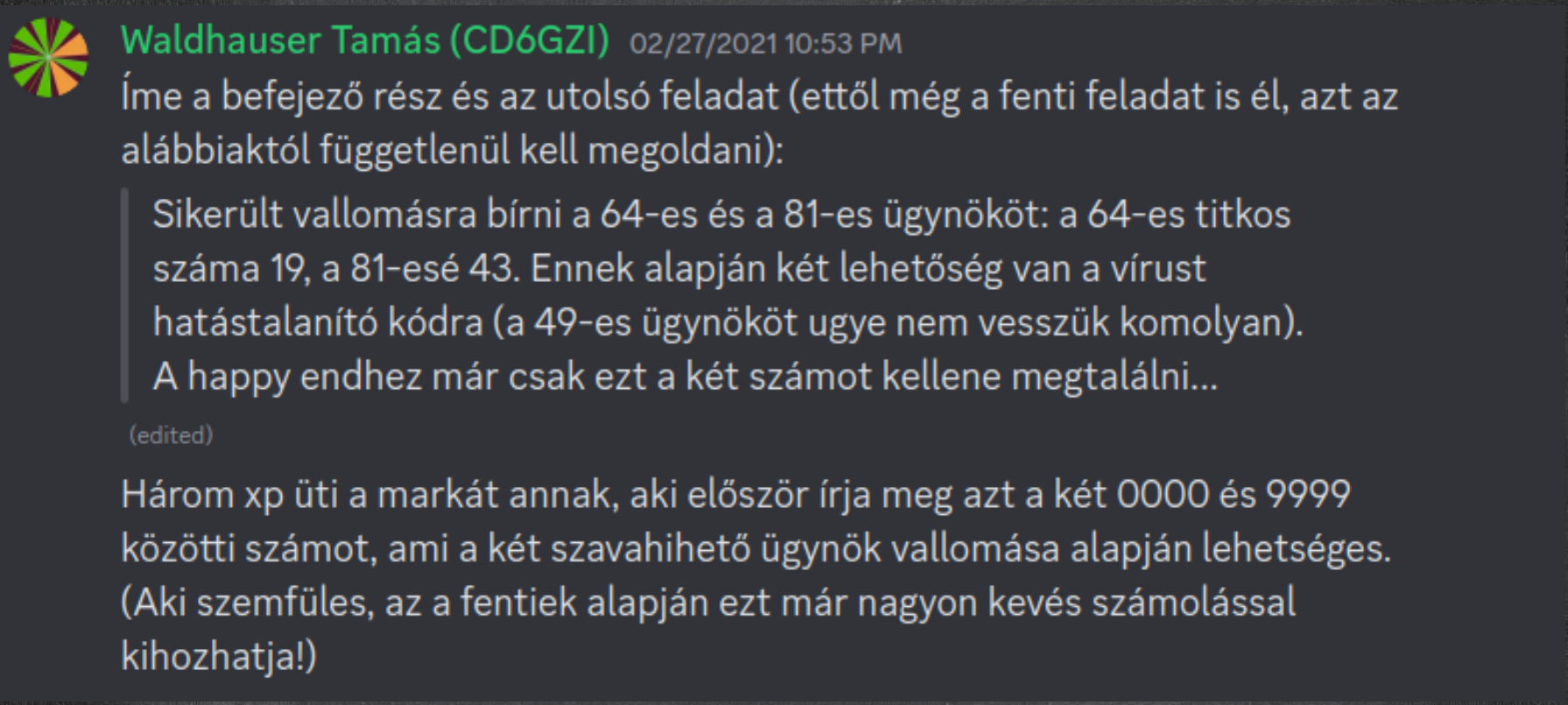
Titokmegosztás kongruenciákkal (emlék 2021-ből)

Waldhauser Tamás (CD6GZI) 02/27/2021 1:50 PM

A történet harmadik része:

> A gyakorlatvezetők kitartóan átvizsgálták az *U* halmaz minden zegét-zugát, és végül transzfinit indukcióval sikerült elkapniuk a 64-es és a 81-es ügynököt. Még javában folyt a vallatásuk, amikor váratlanul beállított a 49-es azzal, hogy átáll a mi oldalunkra, és önként elárulja, amit tud. Majd bolondok leszünk hinni neki! Szépen kivallatjuk a másik kettőt, és legfeljebb második próbálkozásra megvan a kód. És ha a vírus mégsem enged két próbálkozást, és törli a Discord-szerverünket, akkor sincs tragédia: szépen átköltözünk a CooSpace-re. Persze nem lesz olyan jó, mint a Discord, de majd kibírjuk valahogy. Ez az ostoba 49-es viszont az életével játszik: ha olyan számot mond, ami a másik két ügynök vallomásának ellentmond, akkor a Maróti-féle nagyfeszültségű elektronikus tesztnek vetjük alá. Azt még senki sem élte túl... Vajon mekkora kockázatot vállal a 49-es ügynök, ha hazudik?

Titokmegosztás kongruenciákkal (emlék 2021-ből)



Waldhauser Tamás (CD6GZI) 02/27/2021 10:53 PM

Íme a befejező rész és az utolsó feladat (ettől még a fenti feladat is él, azt az alábbiaktól függetlenül kell megoldani):

> Sikerült vallomásra bírni a 64-es és a 81-es ügynököt: a 64-es titkos száma 19, a 81-esé 43. Ennek alapján két lehetőség van a vírust hatástalanító kódra (a 49-es ügynököt ugye nem vesszük komolyan).
> A happy endhez már csak ezt a két számot kellene megtalálni...

(edited)

Három xp üti a markát annak, aki először írja meg azt a két 0000 és 9999 közötti számot, ami a két szavahihető ügynök vallomása alapján lehetséges. (Aki szemfüles, az a fentiek alapján ezt már nagyon kevés számolással kihozhatja!)

Lásd még:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Secret_sharing_using_the_Chinese_remainder_theorem`