BONYOLULTSÁGELMÉLET EGYSZERŰEN

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

Eldöntési probléma

- input: n darab bit (bármit kódolhat: szám(ok)at, gráfot, ...)
- output: 1 bit (igen/nem)

Általános probléma (keresés, számolás, optimalizálás, ...)

- input: n darab bit
- output: több bit is lehet

Hatékony algoritmus

Van olyan p polinom, hogy mindig legfeljebb $p(n)$ lépésben lefut.
(Ha p fokszáma k, akkor ez nagyságrendileg n^k lépést jelent.)

Problémaosztályok

- **P**: azon eldöntési problémák osztálya, melyekre van hatékony algoritmus
- **NP**: azon eldöntési problémák osztálya, melyeknél az „igen” válasz ellenőrzésére van hatékony algoritmus
- co-**NP**: azon eldöntési problémák osztálya, melyeknél a „nem” válasz ellenőrzésére van hatékony algoritmus

Mit jelent az időigény?

Az alábbi táblázat megadja, hogy adott futásidejű algoritmus adott számítási kapacitású architektúrán mekkora inputra fut még le egy napon belül.

	 C64 1Mflops	 Cray Y-MP 1Gflops	 mai GPU 5TFlops	 Tianhe-2 34PFlops	 Föld bolygó 10EFlops
n	86.4G	8.64×10^{13}	4.32×10^{17}	2.94×10^{21}	8.64×10^{23}
$n \log n$	2.75G	2.1×10^{12}	8.1×10^{15}	4.5×10^{19}	1.17×10^{22}
n^2	300k	9.3M	657M	54G	929G
n^3	4420	44.208	756k	14.3M	95M
2^n	36	46	58	71	79
1.1^n	264	336	426	518	578
$n!$	14	16	19	22	24

Amíg Moore törvénye (nagyjából) igaz, addig a polinomidejű algoritmusok egy-egy újabb év elteltével konstansszor több adattal tudnak adott időn belül elbánni.

Forrás: Iván Szabolcs, *Bonyolultságelmélet*, 2022.

https://inf.u-szeged.hu/~szabivan/download/bonyelm/bonyelm-2022.pdf

Problémák összehasonlítása

Azt mondjuk, hogy P_1 legfeljebb olyan nehéz, mint P_2, ha P_1 polinom időben visszavezethető P_2-re.

A „legfeljebb olyan nehéz” reláció reflexív és tranzitív, de nem antiszimmetrikus.

A szimmetrikus része egy ekvivalenciareláció (P_1 és P_2 egyforma nehéz), és az ekvivalenciaosztályokon már részbenrendezést kapunk.

NP-teljesség

Az **NP** problémaosztály fenti részbenrendezésénél

- a legkisebb elem nem más, mint **P**,
- a legnagyobb elem pedig az ún. **NP**-teljes problémák osztálya.

Hasonlóan definiálható a co-**NP**-teljesség is.

Könnyű (**P**-beli) problémák

- lnko kiszámolása
- prímtesztelés (AKS primality test, 2002)
- Euler-vonal keresése
- gráf színezése két színnel
- maximális elemszámú párosítás
- gráf síkbarajzolhatósága

Nehéz (**NP**-teljes) problémák

- Hamilton-út keresése
- gráf színezése három színnel

Problémás problémák (nem tudjuk, milyen nehéz)

- gráfizomorfizmus (Babai László, 2015: szubexponenciális algoritmus)
- prímfaktorizálás
- diszkrét logaritmus kiszámolása

Az egymillió dolláros probléma

$$\mathbf{P} \stackrel{?}{=} \mathbf{NP}$$

Tétel (R. E. Ladner, 1975)

Ha $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, akkor vannak „közepes” nehézségű problémák (olyanok, amik nincsenek **P**-ben, de nem is **NP**-teljesek).

Kényszerkielégítési probléma (Constraint Satisfaction Problem, CSP)

- adott véges sok változó,
- ezeknek kell értéket adni (egy véges A halmazból),
- úgy, hogy bizonyos feltételek teljesüljenek.

Példák CSP-re

- egyenletrendszer megoldása
- gráf színezése adott számú színnel

A CSP algebrai megközelítése

Minden CSP-hez hozzá lehet rendelni műveletek egy halmazát, és a CSP komplexitása a kapott algebrai struktúra tulajdonságaitól függ.

Tétel (T. J. Schaefer, 1978)

Az $A = \{0, 1\}$ halmaz felett minden CSP vagy **P**-beli vagy **NP**-teljes.

Tétel (A. Bulatov, D. Zhuk, 2017)

Bármely véges A halmaz felett minden CSP vagy **P**-beli vagy **NP**-teljes.