Gyula megmenti a világot

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

Feladat: Hogyan lehet egy 56 literes és egy 15 literes kannával kimérni 7 liter vizet?

Megoldás:

$a = 56$

$b = 15$

-56

-15

0

+56

+15

Feladat: Oldjuk meg az $56x + 15y = 7$ diofantoszi egyenletet.

Megoldás: Hajtsuk végre az euklideszi algoritmust az $a = 56$, $b = 15$ számokra.

$$\begin{array}{rcll}
56 = 3 \cdot 15 + 11 & \Longrightarrow & 11 = & & a - 3b \\
15 = 1 \cdot 11 + \ \ 4 & \Longrightarrow & 4 = b - (a - 3b) & = & -a + 4b \\
11 = 2 \cdot \ \ 4 + \ \ 3 & \Longrightarrow & 3 = (a - 3b) - 2(-a + 4b) & = & 3a - 11b \\
4 = 1 \cdot \ \ 3 + \ \ 1 & \Longrightarrow & 1 = (-a + 4b) - (3a + -11b) & = & -4a + 15b \\
3 = 3 \cdot \ \ 1 + \ \ 0 & & & &
\end{array}$$

Egy trükk: negatív maradékokat is megengedve kevesebb lépés kell.

$$\begin{array}{rcll}
56 = 4 \cdot 15 - 4 & \Longrightarrow & 4 = & & -a + 4b \\
15 = 4 \cdot \ \ 4 - 1 & \Longrightarrow & 1 = 4(-a + 4b) - b & = & -4a + 15b \\
4 = 4 \cdot \ \ 1 + 0 & & & &
\end{array}$$

Ott tartunk, hogy

$$-4a + 15b = 1.$$

Szorozzuk be mindkét oldalt 7-tel:

$$-28a + 105b = 7.$$

Innen kiolvasható az $56x + 15y = 7$ egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$x_0 = -28,\; y_0 = 105.$$

Az általános megoldás:

$$x_t = -28 + 15t, \quad y_t = 105 - 56t \qquad (t \in \mathbb{Z}).$$

t	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
x_t	$\cdots$	-73	-58	-43	-28	-13	2	17	32	$\cdots$
y_t	$\cdots$	273	217	161	105	49	-7	-63	-119	$\cdots$

A „legegyszerűbb” megoldás: $x = 2,\; y = -7$.