# 1. Kísérlet, kimenetel, esemény, valószínűség

**Kísérletnek** nevezzük egy jelenség megfigyelését. A valószínűségszámításban vizsgált kísérletek jellemzően véletlen kísérletek, de lehetnek determinisztikusak, meghatározottak is. Egy kísérlet lehetséges eredményei a **kimenetelek** ($\omega$). Az **eseménytér** ($\Omega$) a kimenetelek halmaza. Az eseménytér bizonyos részhalmazait **eseményeknek** ($A, B, \dots$) nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $A$ esemény **bekövetkezik**, ha a kísérlet kimenetele eleme az $A$ halmaznak. Az események gyűjteményétől ($\mathcal{A}$) megköveteljük, hogy tartalmazza az $\Omega$ alaphalmazt és zárt legyen az elemi halmazelméleti műveletek megszámlálható sokszor való alkalmazására. Tehát az események $\sigma$-algebrát alkotnak, és az $(\Omega, \mathcal{A})$ páros egy mérhetőségi tér. A **valószínűség** vagy **valószínűségi mérték** olyan $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ függvény, melyre teljesül, hogy $P(\Omega) = 1$, továbbá tetszőleges $A_1, A_2, \dots$ páronként kizáró ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$) esemény mellett

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots .$$

Ez utóbbi tulajdonságot **$\sigma$-additívitásnak**, az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast pedig **valószínűségi mértéktérnek** vagy **valószínűségi mezőnek** nevezzük. Egy kísérlet tökéletesen leírható egy alkalmassan megkonstruált valószínűségi mezővel, ugyanis a mező tartalmazza a kísérlet lehetséges kimeneteleit ($\Omega$), az eseményeket ($\mathcal{A}$), valamint az események valószínűségét ($P$). A továbbiakban legyen $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény. A $P$ valószínűség fontosabb tulajdonságai:

- $P(\emptyset) = 0$.
- Ha $B \subseteq A$, akkor $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.
- **Monotonitás.** Ha $B \subseteq A$, akkor $P(B) \leq P(A)$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **Véges additivitás.** Páronként kizáró $A_1, \dots, A_n$ események esetén
$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) .$$
- **Szubadditivitás.** Nem feltétlenül kizáró $A_1, \dots, A_n$ események esetén
$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq P(A_1) + \cdots + P(A_n) .$$
- **Poincaré-formula.** Nem feltétlenül kizáró $A_1, \dots, A_n$ események esetén
$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) =& \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} (-1)^{k+1} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ =& P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \\ & - \big[P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + \cdots + P(A_{n-1} \cap A_n)\big] \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) \\ & - \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) , \end{aligned}$$

vagy ami ezzel ekvivalens

$$P(\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} (-1)^{k+1} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \, .$$

## Feladatok

**1.1.** Az $A_m, B_n, C_p$ események azt jelölik, hogy három könyvsorozat kötetei közül az elsőből $m$, a másodikból $n$, a harmadikból $p$ darab könyvet veszünk, ahol $m, n$ és $p$ nemnegatív egészek. Hogyan lehet formalizálni a következő eseményeket?

**a.** Az első sorozatból pontosan 1, a másodikból pontosan 3 könyvet veszünk.

**b.** Egy könyvet sem veszünk.

**c.** Veszünk könyvet az első sorozatból.

**d.** Vagy veszünk legalább 2 könyvet az első sorozatból, vagy nem veszünk semmit.

**e.** Mindhárom sorozatból veszünk könyvet.

**f.** 5-nél kevesebbet veszünk az elsőből, és 5-nél többet a harmadikból.

**g.** Összesen 2 könyvet veszünk.

**h.** Összesen 2 könyvet veszünk a második és a harmadik sorozatból.

**1.2.** Egy dobókockát 5-ször feldobunk. Mik a kísérlet lehetséges kimenetelei? Jelölje $A_i$, $i = 1, \ldots, 5$ azt az eseményt, hogy az $i$-edik dobás eredménye 6-os. Hány kimenetel esik az egyes $A_i$ illetve az alábbi $B_i$ eseményekbe? Fejezzük ki a $B_i$ eseményeket az $A_i$ események segítségével.

**a.** $B_1 = \{\omega \in \Omega : \text{egyszer sem kapunk 6-ost}\}$

**b.** $B_2 = \{\omega \in \Omega : \text{az ötödik dobásra kapunk először 6-ost}\}$

**c.** $B_3 = \{\omega \in \Omega : \text{legalább egyszer 6-ost dobunk}\}$

**d.** $B_4 = \{\omega \in \Omega : \text{pontosan négyszer dobunk 6-ost}\}$

**e.** $B_5 = \{\omega \in \Omega : \text{az első és az ötödik 6-os, a többi közül valamelyik nem az}\}$

Fogalmazzuk meg szavakkal a $B_1, \ldots, B_5$ események tagadását.

**1.3.** **DeMorgan-azonosságok.** Legyen $A_1, A_2, \ldots$ azonos eseménytéren definiált eseményeknek véges vagy végtelen sorozata. Igazoljuk, hogy

$$\overline{\cup_n A_n} = \cap_n \bar{A}_n \qquad \text{és} \qquad \overline{\cap_n A_n} = \cup_n \bar{A}_n \, .$$

**1.4.** Legyen $A_1, \ldots, A_n$, $n \ge 2$ tetszőleges esemény egy $\Omega$ eseménytéren, továbbá legyen

$$\begin{aligned} B_n &= \{\omega \in \Omega : \omega \text{ az } A_1, \ldots A_n \text{ események közül páratlan soknak eleme}\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \text{az } A_1, \ldots A_n \text{ események közül páratlan sok következik be}\} \, . \end{aligned}$$

Teljes indukcióval mutassuk meg, hogy $A_1 \triangle \cdots \triangle A_n = B_n$ minden $n$-re.

**1.5.** Legyen $A_1, A_2, \ldots$ azonos $\Omega$ eseménytéren értelmezett eseményeknek egy sorozata, és legyen

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \qquad \text{és} \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\,.$$

Amennyiben az eseménysorozatra $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$, akkora a **sorozat limesze** definíció szerint

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n\,.$$

**a.** Mutassuk meg, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A_i \text{ legfeljebb véges sok } i\text{-re}\}\,,$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i \text{ végtelen sok } i\text{-re}\}\,.$$

Milyen tartalmazási reláció áll fenn a két esemény között?

**b.** Az mondjuk, hogy $A_1, A_2, \ldots$ **szűkülő eseménysorozat**, ha $A_i \supseteq A_{i+1}$ teljesül minden $i$-re. Az **eseménysorozat bővülő**, ha $A_i \subseteq A_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$. Mutassuk meg, hogy ezekben az esetekben $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$, továbbá a szűkülő esetben $\lim_n A_n = \cap_n A_n$, a bővülő esetben pedig $\lim_n A_n = \cup_n A_n$.

**1.6.** Próbagyártás után két szempontból vizsgáljuk a késztermékeket. Az $A$ esemény azt jelenti, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott termék anyaghibás, míg $B$ azt, hogy mérethibás. Ismert, hogy $P(A) = 0.15$ és $P(B) = 0.3$, valamint azt is tudjuk, hogy gyártmányok 8%-a nem felel meg egyik szabványnek sem. Mekkora a hibátlan termékek aránya? A termékek hány százaléka anyaghibás, de felel meg a méretszabványnak? Mit jelent az $A \triangle B$ esemény, és mekkora a valószínűsége?

**1.7.** Egy iskola tanulóinak matematika és fizika jegyeit vizsgáljuk. Ismert, hogy a gyerekek 11%-a kapott jelest matematikából, és 9%-uk kapott jelest mindkét tantárgyból. Azt is tudjuk, hogy 0.84 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott tanuló ellenőrzőjében egyik tárgy mellett sem szerepel ötös érdemjegy. A tanulók mekkora hányada kapott jelesnél rosszabb jegyet fizikából? Véletlenszerűen kiválasztva egy gyereket milyen valószínűséggel van jelese fizikából, de ennél rosszabb jegye matematikából? A tanulók mekkora része kapott pontosan egy jelest a vizsgált két tantárgyra?

**1.8.** Egy társaságban jelölje $A$, $B$ és $C$ azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy beszél angolul, németül illetve franciául. Tudjuk, hogy a társaság 35%-a beszél angolul, de 70%-uk nem ért franciául. Mindhárom nyelvet csupán az emberek tizede érti, németül és franciául is a társaság ötöde beszél. Emellett ismertek a következő valószínűségek: $P(B) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.15$, $P(A \cap C) = 0.2$. A társaság mekkora hányada nem beszéli egyik nyelvet sem?

**1.9.** Legyen $P(A) = 0.6$ és $P(B) = 0.9$. Lássuk be, hogy $P(A \cup B) \geq 0.9$ és $P(A \cap B) \geq 0.5$. Illusztráljuk Venn-diagrammal, hogy mikor teljesülnek az egyes egyenlőségek.

**1.10.** Bizonyítsuk be, hogy ha $A$ és $B$ egyazon valószínűségi mezőn definiált események, akkor fennállnak az alábbiak:

**a.** $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$;

**b.** $P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$;

**c.** $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$;

**d.** $P(A)P(\bar{A}) \leq 1/4$;

**e.** $P(A \cap B) - P(A)P(B) \leq 1/4$.

**1.11.** Legyen $A$, $B$ és $C$ tetszőleges esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn.

**a.** Mutassuk meg, hogy ha $P(A \triangle B) = 0$, akkor $P(A) = P(B)$.

**b.** Mutassuk meg, hogy $P(A \triangle C) \leq P(A \triangle B) + P(B \triangle C)$. (Ez a tulajdonság a **háromszög-egyenlőtlenség**.)

**1.12.** Legyen $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Bizonyítsuk be, hogy

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq P(A_1) + \cdots + P(A_n) - (n-1)\,.$$

# 2. Klasszikus valószínűségi mezők

Azt mondjuk, hogy egy kísérletet leíró $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mező **klasszikus valószínűségi mező**, ha a kísérletnek véges sok kimenetele van, az eseménytér minden részhalmaza esemény, valamint minden kimenetelnek ugyanakkora a valószínűsége.

- $|\Omega| < \infty$;
- $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$;
- $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}), \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega.$

Ekkor egy $A$ esemény valószínűsége meghatározható kombinatorikus módszerekkel a

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes eset}}$$

formula segítségével.

**Feladatok**

**2.1.** Feladat a 2006. évi emelt szintű matematika érettségiből.

**a.** Legyen $a_n$ egy mértani sorozat, amelynek az első tagja 5, és a hányadosa 3. Mekkora a valószínűsége, hogy ha ennek a számtani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad?

**b.** Legyen $b_n$ egy számtani sorozat, amelynek az első tagja 5, és a differenciája 3. Mekkora a valószínűsége, hogy ha ennek a számtani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad?

**2.2.** Írjuk le valószínűségi mezővel azt a kísérletet, hogy két dobókockával dobunk egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

**a.** két egyenlő számot dobunk;

**b.** két különböző számot dobunk;

**c.** a dobott számok összege 7;

**d.** legalább az egyik kockán 6-ost dobunk;

**e.** a dobott számok összege 7, és az egyik dobás eredménye 6-os?

**2.3.** Véletlenszerűen összekeverjük a KÖRÖMPÖRKÖLT szó betűit. Írjuk le a kísérletet alkalmas valószínűségi mezővel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszakapjuk az eredeti szót. Mi a valószínusége, hogy a PÖRKÖLT szó részszóként kiolvasható? Miben különbözik a megoldás, ha az azonos betűket megkülönböztetjük, illetve nem különböztetjük meg.

**2.4.** Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül, mindenki rendel egy italt, összesen 3 sört, 4 vörös és 2 fehér bort. A pincér találomra osztja ki az italokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit kért?

**2.5.** Két testvér ugyanabba a 27 fős osztályba jár. Egy gyors sorakozónál mindenki találomra áll be. Mi a valószínűsége, hogy a két testvér között pontosan tizen állnak? Hogyan változik az eredmény, ha körbe állnak?

**2.6.** Írjuk le az ötöslottó-sorsolást alkalmas valószínűségi mezővel. Egy szelvényt kitöltve mekkora valószínűséggel érünk el pontosan $0, 1, \ldots, 5$ találatot?

**2.7.** Írjuk le a hatoslottó-sorsolást egy alkalmas mezővel. Mekkora valószínűségel érünk el pontosan 5, 6 illetve $5 + 1$ találatot?

**2.8.** Feltéve, hogy minden mérkőzéseken egyenlően 1/3-1/3 valószínűséggel nyernek az egyes csapatok illetve születik döntetlen eredmény, írjuk le a TOTO-fogadást egy alkalmas valószínűségi mezővel. Mekkora a 12, a 13 illetve a $13 + 1$ találat esélye? Mekkora valószínűséggel nyerünk pénzt, ha ehez legalább 10 találatot kell elérnünk?

**2.9.** Feldobunk 6 kockát. Mekkora valószínűséggel lesz a számok összege legalább 58?

**2.10.** De Méré lovag feladata: mi a valószínűbb, hogy egy kockával 4-szer dobva legalább egyszer dobunk hatost, vagy hogy két kockával 24-szer dobva legalább egyszer dupla hatost?

**2.11.** Egyes vidékeken a következő népszokás járja: az eladósorban lévő lányok kimennek a rétre, egyikük 6 fűszálat vesz a kezébe, úgy, hogy alul-felül csak a fűszálak végei látszanak. Egy társa alul-felül párosával összeköti a végeket. Ha ezáltal egy összefüggő lánc keletkezik, a hiedelem szerint a lány még abban az évben férjhez megy. Mekkora ennek a valószínűsége?

**2.12.** A következő modelleket a 20. század első évtizedei óta alkalmazzák az elméleti és a statisztikus fizikában. Mindegyik modellben $m$ darab megkülönböztethető vagy nem megkülönböztethető golyót helyezünk el $r$ darab számozott dobozba úgy, hogy minden elrendezés egyformán valószínű. Jelölje $A_{k_1,\ldots,k_r}$ azt az eseményt, hogy a dobozokba rendre $k_1, \ldots, k_r$ golyó kerül.

**a. Maxwell–Boltzmann-statisztika.** A gázmolekulák viselkedését írja le. A golyók egymástól megkülönböztethetőek, és egy-egy dobozba több golyó is kerülhet. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$P(A_{k_1,\ldots,k_r}) = \frac{m!}{k_1! \cdots k_r!} \frac{1}{r^m}.$$

**b. Bose–Einstein-statisztika.** A fotonok viselkedését írhatjuk le a modellel. A golyók egymástól megkülönböztethetetlenek, egy-egy dobozba több golyót is tehetünk. Ekkor

$$P(A_{k_1,\ldots,k_r}) = \frac{1}{\binom{m+r-1}{m}}.$$

**c. Fermi–Dirac-statisztika.** Az elemi részecskék (elektronok, protonok, neutronok) viselkedésének modellje. A golyók megkülönböztethetetlenek, és egy-egy dobozba legfeljebb egy golyó kerülhet. Lássuk be, hogy

$$P(A_{k_1,\dots,k_r}) = \frac{1}{\binom{r}{m}}\,.$$

**2.13.** Tegyük fel, hogy $m$ golyót helyezünk el $r \geq 2$ dobozba. Adjuk meg azon esemény valószínűségét, hogy az első doboz üresen marad, ha a golyók kiosztása

**a.** a Maxwell–Boltzmann;

**b.** a Bose–Einstein;

**c.** a Fermi–Dirac-statisztika szerint történik.

**2.14.** Egy tízemeletes ház a földszinjén 7 ember száll be a felvonóba. Feltehető, hogy az utasok egymástól függetlenül és egyforma valószínűséggel szállnak ki az egyes emeleteken. Mekkora valószínűséggel fog minden utas más emeleten kiszállni?

**2.15.** **a. Visszatevés nélküli mintavételezés.** Legyen adva egy $m$-elemű halmaz, melyben $s$ darab első típusú és $m-s$ darab második típusú elem található. A halmazból véletlenszerűen és visszatevés nélkül kiválasztunk $n \leq m$ elemet. Feltehető, hogy a lehetséges $n$-elemű minták egyenlő valószínűséggel realizálódnak. Írjuk le a kísérletet egy alkalmas valószínűségi mezővel. Jelölje $A_k$ azt az eseményt, hogy a mintában pontosan $k$ darab első típusú elem található, és mutassuk meg, hogy

$$P(A_k) = \frac{\binom{s}{k}\binom{m-s}{n-k}}{\binom{m}{n}}\,.$$

**b.** Az a. feladat általánosítása: Tegyük fel, hogy az $m$-elemű alaphalmazban $s_1$ darab első típusú, $s_2$ darab második típusú, stb., $s_l$ darab $l$-dik típusú elem található, ahol $s_1 + s_2 + \cdots + s_l = m$. Visszatevés nélkül kiválasztunk $n$ elemet, most is feltehető, hogy a lehetséges mintákat egyenlő valószínűséggel kapjuk meg. Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt. Legyen $A_{k_1,k_2,\dots,k_l}$ az az esemény, hogy a mintaelemek között pontosan $k_1$ darab első, $k_2$ darab második, stb., $k_l$ darab $l$-dik típusú elem található. Mutassuk meg, hogy

$$P(A_{k_1,k_2,\dots,k_l}) = \frac{\binom{s_1}{k_1}\binom{s_2}{k_2}\cdots\binom{s_l}{k_l}}{\binom{m}{n}}\,.$$

**2.16.** **Visszatevéses mintavételezés.** Tekintsük az előző feladat a. és b. pontjában leírt kísérleteket azzal a módosítással, hogy most a mintaelemeket egymás után vesszük ki, és a húzás után minden elemet azonnal vissza is teszünk. Ebben az esetben elképzelhető, hogy egy adott elemet többször is kiválasztunk, sőt akár az is, hogy a mintában egyetlen elem található $n$-szeres multiplicitással. Adjuk meg a kísérleteket leíró valószínűségi mezőket, és mutassuk meg, hogy

$$P(A_k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\,, \quad p = \frac{s}{m}\,,$$

$$P(A_{k_1,k_2,\dots,k_l}) = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_l!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l}\,, \quad p_i = \frac{s_i}{m}\,.$$

Vegyük észre, hogy a fenti valószínűségek nem függenek közvetlenül az $m, s, s_i$ értékektől, csupán az adott típusú elemek $p, p_i$ részarányától.

**2.17.** Egy dobozban 50 darab szabványos és 50 darab selejtes termék van. Véletlenszerűen kiveszünk 20 terméket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy több hibásat választunk ki, mint szabályosat? Oldjuk meg a feladatot visszatevéses és visszatevés nélküli mintavételezésre is.

**2.18.** Egy 32 lapos kártyacsomagból kihúzunk 6 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy

**a.** lesz köztük ász;

**b.** lesz köztük ász vagy piros;

**c.** lesz köztük ász és piros?

Oldjuk meg a feladatot visszatevéssel és visszatevés nélkül is.

**2.19.** Egy urnában 4 piros golyó található, melyhez hozzáteszünk néhány zöldet, majd kihúzunk két golyót. Legalább hány zöld golyót kell tennünk az urnába, ha azt szeretnénk, hogy legfeljebb 0.1 legyen azon esemény valószínűsége, hogy

**a.** a kiválasztott golyók mindegyike piros;

**b.** a kiválasztott golyók között van piros?

Oldjuk meg a feladatot visszatevéses és visszatevés nélküli húzásra is.

**2.20.** Róbert Gida karácsonyra ajándékot vesz Micimackónak, Malackának, Tigrisnek és Fülesnek. A négy ajándékot beteszi a fa alá. Micimackó jót akar, és elkezdi véletlenszerűen kiosztani az ajándékokat. Mennyi a valószínűsége, hogy végül senki sem a sajátját kapja?

**2.21.** Öt házaspár vesz részt egy szilveszteri táncmulatságon. A társaságban minden férfi minden nővel ugyanannyit táncolt. Egy adott időpontban megfigyelve a táncosokat mennyi annak az esélye, hogy egyik férfi sem a feleségével táncol? Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan két házaspár táncol együtt?

**2.22.** Tekintsük az $\{1, \dots, n\}$ halmaznak egy véletlenszerűen kiválasztott permutációját. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a permutációnak nincs fixpontja? Hová tart a valószínűség, ha $n$ tart a végtelenbe? Mi annak a valószínűsége, hogy a permutációban pontosan $k$ fixpontot találunk?

**2.23.** **a.** Egy szabályos kockát $n$-szer feldonunk. Adjuk meg annak az eseménynek a $p_n$ valószínűségét, hogy a dobások között az $1, 2, \dots, 6$ értékek mind szerepelnek.

**b.** Egy szabályos kockát addig dobunk, míg az $1, 2, \dots, 6$ értékek mindegyike elő nem fordul. Jelölje $q_n$ annak az eseménynek a valószínűségét, hogy ehez pontosan $n$ dobásra van szükség. Határozzuk meg a $q_n$ értéket.

**c.** Oldjuk meg az a. és b. pontot olyan módosítással, hogy két kockával dobunk, és az a célunk, hogy az $(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)$ párok mindegyike szerepeljen.

**2.24.** Egy urnában 1-től $n$-ig számozva $n$ darab lapot helyezünk el. Legyen az $n$ szám prímtényezős felbontása

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l}\,.$$

Az urnából véletlenszerűen kihúzunk egy lapot. Adjuk meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy $n$-hez relatív prím értéket kapunk. Az eredmény felhasználásával bizonyítsuk be az Euler-képlelet, mely szerint az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazban az $n$-hez relatív prím egészek száma

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{l} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

# 3. Geometriai valószínűségi mezők, függetlenség

A klasszikus valószínűségi mezők használata valószínűség számítására nagyon kényelmes abban az értelemben, hogy csak az események, mint halmazok elemszámát kell meghatározni kombinatorikus módszerekkel. Sajnos ez a módszer nem alkalmazható akkor, ha a vizsgált kísérletnek végtelen sok különböző kimenetele van. Ezekben az esetekben hasznos lehet a kísérlet leírására geometriai reprezentációt keresni. Egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mértéktér **geometriai valószínűségi mező**, ha a kimenetelek halmaza a $d$-dimenziós Euklideszi tér véges Lebesgue-mértékű (véges hosszúsággal, területtel, térfogattal bíró) részhalmaza, az események pedig az eseménytér Lebesgue-mérhető részehalmazai. Fontos megjegyezni, hogy ekkor $\mathcal{A} \neq 2^{\Omega}$, tehát az eseménytér nem minden részhalmaza esemény. Az események valószínűségét kedvező terület (hosszúság, térfogat) per összes terület (hosszúság, térfogat) formulával számoljuk. Jelölje $\mathcal{L}^d$ a $d$-dimenziós Euklideszi tér Lebesgue-mérhető halmazait, és legyen $\lambda_d$ a $d$-dimenziós Lebesgue-mérték. Ekkor a modell feltevései formalizálva:

- $\Omega \in \mathcal{L}^d, \quad \lambda(\Omega) < \infty$;
- $\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega : A \in \mathcal{L}^d\}$;
- $P(A) = \lambda_d(A)/\lambda_d(\Omega) =$ kedvező terület/összes terület.

A modell harmadik feltevését **egyenletességi hipotézisnek** nevezzük, minek teljesülését vagy bebizonyítjuk, vagy a probléma megfogalmazása alapján elfogadjuk. Ha az adott feladat szövege szerint a kísérlet kimenetele (mely egy véletlen pont a $d$-dimenziós térben) egyenletes eloszlású valamilyen halmazon, az éppen azt jelenti, hogy teljesül az egyenletességi hipotézis.

Tetszőleges valószínűségi mezőn azt mondjuk, hogy az $A$ és a $B$ esemény **független**, ha

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)\,.$$

Legyen $A_1, \dots, A_n$ azonos $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn megadott esemény. Az $A_i$ események **páronként függetlenek**, ha közülük bármely kettőt kiválasztva azok függetlenek. Az $A_i$ események **teljesen függetlenek**, ha tetszőleges $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ részrendszer esetén

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})\,.$$

Gyakran alkalmazott tétel, hogy páronként illetve teljesen független eseményekből kiindulva tetszőleges sok eseményt a komplementerével helyettesítve az így kapott eseménysorozat is páronként illetve teljesen független lesz.

Tegyük fel, hogy a $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ kísérleteket egyszerre írjuk le egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezővel. Például a két kockával való dobás tekinthető két kísérletnek, melyeket egyszerre tuduk leírni a megismert 36 kimenelt tartalmazó mezővel. Tekintsünk tetszőleges $A_1, \dots, A_n$ eseményeket oly módon, hogy rendre az $A_i$ esemény bekövetkezése csak a $\mathcal{K}_i$ kísérlet kimenetelétől függjön. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ **kísérletek függetlenek**, ha az $A_1, \dots, A_n$ események teljesen függetlenek az események tetszőleges választása mellett.

**Feladatok**

**3.1.** Telente a Dunán keletkező jégtorlaszokat robbantással szüntetik meg. Egy robbantás akkor sikeres, ha a jég legfeljebb 10 cm vastag. A jégtorlasz teljes felülete $3000\,\mathrm{m}^2$, ebből $500\,\mathrm{m}^2$ területen a jég vékonyabb, mint a kritikus 10 cm. Mekkora valószínűséggel lesz egy véletlenszerű helyen elvégzett robbantás sikeres?

**3.2.** Egy focilabdát találomra nekirúgnak egy háznak, amely fala 10 m hosszú és 5 m magas. A házon két darab 2 m × 1.5 m méretű ablak van. Mennyi a valószínűsége, hogy a labda eltalálja az egyik ablakot?

**3.3.** Egyenletes eloszlás szerint elhelyezünk egy pontot a $(0, 3)$ intervallumon. Mekkora valószínűséggel fog a pont az $[1, 2]$ intervallumba esni? Mekkora az $r$ érték, ha tudjuk, hogy a pont 0.2 valószínűséggel esik a 2-nek $r$-sugarú környezetébe?

**3.4.** Az egyetemről busszal vagy villamossal szoktam hazamenni, attól függően, hogy melyik jön hamarabb. Az első járatok reggel 4-kor indulnak, a buszok 10 percenként, a villamosok 6 percenként járnak. Feltehető, hogy a járatok pontosan közlekednek. Mekkora annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 percet kell várnom, ha este 6 és 8 között egy véletlen időpontban állok ki a megállóba?

**3.5.** Egyenletes eloszlás szerint felveszünk egy pontot a $(0, 1)$ intervallumon. Mekkora valószínűséggel lesz a pontnak a végpontoktól mért távolság-négyzetösszege kisebb, mint egy adott $\alpha$ pozitív érték?

**3.6.** Egy egységnyi oldalhosszúságú négyzetre véletlenszerűen rádobunk egy $r < 1/2$ sugarú körlapot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a körlap nem lóg le a négyzetről?

**3.7.** Egy $r$ sugarú kör kerületén megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találomra választunk egy másik pontot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?

**3.8.** Egységsugarú, kör alakú céltáblára lövünk. A találat valószínűsége egyenletes eloszlású a céltáblán. A céltáblát koncentrikus körökkel 10 részre akarjuk osztani úgy, hogy minden részbe egyenlő valószínűséggel essen találat. Mekkorák legyenek a körsugarak?

**3.9.** Egy egyenlő oldalú háromszög belsejében véletlenszerűen választunk egy pontot. Ezt a pontot a háromszög súlypontjából a kerületre vetítjük. Mutassuk meg, hogy a vetület egyenletes eloszlású a kerületen.

**3.10.** Egy $r$ sugarú kör kerületén megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találomra választunk egy másik pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?

**3.11.** Véletlenszerűen felírunk egy $x$ és egy $y$ számot a $(0, 1)$ intervallumból. Mekkora annak a valószínűsége, hogy

**a.** távolságuk nagyobb, mint $1/2$;

**b.** szorzatuk kisebb, mint $1/4$;

**c.** összegük pontosan 1?

**3.12.** Egy üzembe a reggel 8 órától delután 4 óráig tartó munkanap alatt két teherautó érkezik véletlen időpontokban. Az egyiket 2, a másikat 3 óráig tart kirakodni, és a kirakodott autók azonnal továbbindulnak. Mennyi annak az esélye, hogy mindkét autó megérkezik délután 1-ig? Mekkora valószínűséggel fog a két autó találkozni? Milyen valószínűséggel lesz a rakodómunkásoknak legalább 1 óra pihenőidejük a két munka között?

**3.13.** Válasszunk véletlenszerűen egy $a$ számot a $(-u, u)$ és egy $b$ értékeket a $(-v, v)$ intervallumról. Mekkora valószínűséggel lesznek az $x^2 + ax + b = 0$ egyenlet gyökei valósak?

**3.14.** Véletlenszerűen választunk két pontot az egységnégyzet szemközti oldalain. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a pontok távolsága kisebb, mint egy adott pozitív $\alpha$?

**3.15.** Véletlenszerűen eltörünk két helyen egy egységnyi hosszúságú gyufaszálat. Mekkora annak a valószínűsége, hogy

**a.** mindhárom darab rövidebb, mint egy adott pozitív $\alpha$;

**b.** a darabokból háromszög szerkeszthető;

**c.** a darabokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

**3.16.** Adott három egységnyi hosszúságú gyufaszál. Mindegyikből letörünk egy-egy véletlen hosszúságú darabot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy

**a.** mindhárom darab rövidebb, mint egy adott pozitív $\alpha$;

**b.** a darabokból háromszög szerkeszthető;

**c.** a darabokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

**3.17.** Egyenletes eloszlás szerint válasszunk három pontot a $(0, a)$, $a > 1$, intervallumon. Jelöljük ezeket a választás sorrendjében $x, y, z$-vel.

**a.** Mi annak a valószínűsége, hogy a 3-dimenziós Euklideszi térben az $(x, y, z)$ vektornak az origótól vett távolsága kisebb, mint 1.

**b.** Mekkora a valószínűséggel kapunk monoton növekvő sorozatot?

**3.18.** Egy pontszerű objektum radioaktív részecskéket bocsát ki minden irányba, melyek $r$ hosszúságú út megtétele után elnyelődnek a levegőben. A forrástól $x < r$ távolságra elhelyezünk egy részecskeszámláló felületet, mely a modellünkben tekinthető végtelen síknak. A kibocsátott részecskék hány százalékát fogja érzékelni a berendezés?

**3.19.** Háromgyerekes családok körében független-e az az esemény, hogy legfeljebb egy lány van, valamint az, hogy fiú és lány is van a családban? Mit mondhatunk ugyanezekről az eseményekről négygyerekes családokban?

**3.20.** Egymástól függetlenül választok egy $x$ és egy $y$ pontot a $[0, 1]$ intervallumon. Legyen $A$ az az esemény, hogy $x$ kisebb, mint 0.5, $B$ az az esemény, hogy a pontot távolsága legfeljebb 0.1, végül pedig $C$ az az esemény, hogy $x + y$ nagyobb, mint 0.8. Döntsük el, hogy az $A$, $B$ és $C$ esemény közül melyik független melyiktől.

**3.21.** Egy kockát és két pénzdarabot dobunk fel egyszerre. Feltehető, hogy a dobások eredményei függetlenek. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kockán páros számot, az érméken pedig egy fejet és egy írást kapunk?

**3.22.** Egy üzemben három elektromotor működik, melyek egymástól függetlenül az időnek rendre 25, 50 és 80 százalékában üzemelnek. Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlen időpontban

**a.** mindhárom motor működik;

**b.** legalább kettő működik;

**c.** az első és a második áll?

**3.23.** Mennyi annak a valószínűsége, hogy két kockát négyszer egymás után feldobva legalább egyszer 10 a dobott összeg? Hányszor kell feldobnom a kockákat, ha az a célom, hogy a fenti valószínűség legalább 0.9 legyen?

**3.24.** Legyenek az $A_1, \dots, A_n$ események teljesen függetlenek, és legyen $p_i = P(A_i)$. Igazoljuk, hogy

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - (1 - p_1) \cdots (1 - p_n)\,.$$

**3.25.** Legyen $\mathcal{K}_1$ illetve $\mathcal{K}_2$ az a kísérlet, hogy feldobok egy piros illetve egy zöld dobókockát. A $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ összetett kísérlet kimeneteleinek halmaza az $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,2,\dots,6\}$ eseménytér. Legyen $\mathcal{A} = 2^\Omega$, és tekintsünk tetszőleges $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ valószínűséget. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ pontosan akkor független, ha $P\{(i,j)\} = 1/36$ minden $(i,j) \in \Omega$ kimenetelre. (Tehát a két kockával való dobás leírására azért választottunk éppen klasszikus valószínűségi mezőt, mert egyedül ez garantálja a két dobás egymástól való függetlenségét, amit az ember józan ésszel elfogad.)

**3.26.** **a.** Válasszunk egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint egy $x$ és egy $y$ pontot a $[0,1]$ intervallumon. Mutassuk meg, hogy ekkor az $(x,y)$ vektor eleget tesz az egyenletességi hipotézisnek a $[0,1] \times [0,1]$ négyzet $(a,b] \times (c,d] \subseteq [0,1]^2$ alakú téglalapjain. Mit mondhatunk az egységnégyzet többi Borel-mérhető részhalmazáról?

**b.** Válasszunk egyenletes eloszlás szerint egy $(x,y)$ pontot az egységnégyzetben. Mutassuk meg, hogy ekkor $x$ illetve $y$ eleget tesz az egyenletességi hipotézisnek a $[0,1]$ intervallumon, továbbá $x$ és $y$ független.

# 4. Feltételes valószínűség

Legyen $A$ és $B$ ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett esemény, és legyen $P(B) > 0$. Az $A$ eseménynek a $B$-re vonatkozó **feltételes valószínűsége** definíció szerint

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\,.$$

A $P(A|B)$ feltételes valószínűség azon háttérinformáció birtokában adja meg az $A$ esemény bekövetkezésének valószínűségét, hogy tudjuk, $B$ bekövetkezik. Megmutatható, hogy az $A$ és a $B$ esemény pontosan akkor független, ha $P(A|B) = P(A)$ vagy $P(B) = 0$. Tehát két esemény függetlensége azt jelenti, hogy az egyik esemény bekövetkezése nem módosítja a másik esemény bekövetkezésének valószínűségét.

Ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett, de nem feltétlenül független $A_1, \ldots, A_n$ események metszetének valószínűsége a **láncszabály** szerint

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\,.$$

Azonos valószínűségi mezőn értelmezett eseményeknek $B_1, B_2, \ldots$ véges vagy végtelen sorozatát **teljes eseményrendszernek** nevezzük, ha

- $B_i \cap B_j = \emptyset\,, i \neq j$ (az események páronként kizáróak)
- $\cup_i B_i = \Omega$ (az események uniója az eseménytér)
- $P(B_i) > 0$ (az események valószínűsége pozitív)

Tehát a $B_1, B_2, \ldots$ felbontás az $\Omega$ eseménytér partíciója pozitív mértékű halmazokra. Legyen $A$ tetszőleges esemény. Ekkor teljesülnek a következő azonosságok:

- **Teljes valószínűség tétele.**
$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$
- **Bayes-formula.**
$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}$$
- **Bayes-tétel.**
$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$$

**Feladatok**

**4.1.** Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Jelölje $A$ azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 7? Mekkora $A$ valószínűsége? Mekkora $A$ valószínűsége, ha tudjuk, hogy

**a.** az összeg páratlan;

**b.** az összeg páros;

**c.** a piros kockával 3-ast dobtunk;

**d.** valamelyik kockával 3-ast dobtunk?

Fentiek közül mely események függetlenek $A$-tól?

**4.2.** **a.** A 32 lapos magyar kártyából visszatevéssel kihúzunk három lapot. Mekkora eséllyel lesz mindhárom lap piros? Mekkora valószínűséggel lesz a harmadik lap piros? Mekkora valószínűséggel lesz a harmadik lap piros, ha az első két lap piros volt?

**b.** Milyen választ adhatunk az a. feladat kérdéseire, ha visszatevés nélkül húzunk.

**4.3.** Az egységnyi hosszú intervallumon egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint választunk két pontot. Milyen valószínűséggel esik mindkét pont a $[0, 0.5]$ intervallumba? Mekkora az esélye ugyanennek, ha tudjuk, hogy a távolságuk kisebb 1/3-nál.

**4.4.** Anna 4 és 5 között végez munkahelyén, Béla 4 és fél 5 között, mindketten véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint. Megbeszélik, hogy Béla hazaviszi Annát. Béla ma előbb végez. Mennyi a valószínűsége, hogy legkésőbb negyed 5-kor el tudnak indulni?

**4.5.** A 32 lapos magyar kártyát egyenlően szétosztjuk négy játékos között. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játékosnak nem jut ász? Mekkora annak a valószínűsége, hogy nem jut neki ász, ha a vele szemben ülőnek nem jutott?

**4.6.** A barátunk 2/3 valószínűséggel tartózkodik kocsmában. Ha kocsmában van, akkor 5 kocsma bármelyikében egyenlő valószínűséggel. Négyben már megnéztük, de nem találtuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az ötödikben megtaláljuk?

**4.7.** Egy kockával addig dobunk, amíg először nem kapunk 6-ost. Feltéve, hogy a szükséges dobások száma páros, mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kellett dobni?

**4.8.** Adjunk meg olyan $A$ és $B$ eseményeket, melyek függetlenek, de nem kizáróak, valamint olyanokat is, melyek kizáróak, de nem függetlenek. Mikor lehet két esemény egyszerre kizáró és független?

**4.9.** Adjunk példát olyan $A$ és $B$ eseményekre, melyekre a $P(A|B) = 1 - P(A|\bar{B})$ egyenlőség teljesül, és olyanokra is, melyekre nem.

**4.10.** Legyen az $A$, $B$ és $C$ esemény teljesen független. Bizonyítsuk be, hogy

$$P(A|B \cap C) = P(A|B) = P(A|C) = P(A)\,.$$

**4.11.** Legyen $P(A) = P(A|B) = 0.25$ és $P(B|A) = 0.5$. Adjuk meg a $P(A \cup B)$ és a $P(\bar{A}|\bar{B})$ valószínűséget. Mit mondhatunk az $\bar{A}$ és a $\bar{B}$ eseményről függetlenség szempontjából?

**4.12.** Ismert, hogy $P(A|B) = 0.7$, $P(A|\bar{B}) = 0.3$ és $P(B|A) = 0.6$. Mennyi $P(A)$?

**4.13.** A tapasztalatok szerint a légi szúnyogpermetezések után az életbenmaradott vérszívok ellenállása nő a vegyszerrel szemben. Ez azt jelenti, hogy míg az első permetezés során a szúnyogok 80 százaléka elpusztul, addig a második és a harmadik permetezés már csak 60 illetve 40 százalékukat öli meg. Milyen eséllyel éli túl egy szúnyog mindhárom permetezést? Milyen valószínűséggel éli túl egy szúnyog a második és a harmadik permetezést, ha az elsőt átvészelte?

**4.14.** Három személy közül egyet szeretnénk igazságosan kisorsolni, ezért három gyufaszál közül kettőnek letörtük a fejét. Egyik személy kezébe veszi a gyufaszálakat ép végükkel kifelé, majd a másik kettő húz egyet-egyet. Aki az épet húzza, az nyer, ha nem húzza senki, akkor az nyer, akinek a kezében voltak a szálak. Igazságos-e a játék, azaz számít-e kinek a kezében van a gyufa és ki húz eloször?

**4.15.** Valamely alkatrész gyártásával egy üzemben négy gép foglalkozik. Az első gép naponta 200 alkatrészt gyárt, a második 320-at, a harmadik 270-et, a negyedik 210-et. Az egyes gépeknél a selejtgyártás valószínűsége rendre 2%, 5%, 3% és 1%. A kész alkatrészeket egy helyen gyűjtik. A gépek napi termeléséből kiveszünk egy alkatrészt és megvizsgáljuk.

**a.** Mekkora valószínűséggel selejtes az alkatrész? Mekkora valószínűséggel nem selejtes?

**b.** A vizsgálat során kiderül, hogy az alkatrész selejtes. Mennyi annak az esélye, hogy a negyedik gép gyártotta?

**c.** Milyen választ adhatunk a b. pont kérdésére, ha az alkatrész nem selejtes?

**d.** Mekkora valószínűséggel származik az alkatrész a harmadik vagy a negyedik gépről, ha selejtes?

**4.16.** Egy bizonyos fajta vetőmag összetételének vizsgálatakor megállapították, hogy négyféle magot tartalmaz, mégpedig 50% az I-es fajtából, 30% a II-esből, 15% a III-asból és 5% a IV-esből tevődik össze. Annak valószínűsége, hogy egy I-es típusú magból legalább 50 szemet tartalmazó kalász fejlődik 0.2. Ugyanez a valószínűség a többi fajtánál rendre 0.5, 0.4 és 0.05.

**a.** Mekkora valószínűséggel fejlődik egy véletlenszerűen kiválasztott magból legalább 50 szemet tartalmazó kalász?

**b.** Feltéve, hogy a magot elvetve a kalász 50 szemnél kevesebbet tartalmazott, milyen valószínűséggel tartozik az egyes típusokba?

**4.17.** Egy gyárban a termékek 90%-a felel meg a súlyszabványnak. A súlyszabványnak megfelelő gyártmányok 80%-a megy át az alakpróbán, a súlyszabványnak nem megfelelő termékek 75%-a bukik meg az alakpróbán.

**a.** A termékek mekkora hányada felel meg mindkét szabványnak? Mekkora hányad megy át az alakpróbán és bukik meg a súlypróbán?

**b.** Véletlenszerűen kiválasztva egy gyártmányt mekkora valószínűséggel bukik meg az alakpróbán?

**c.** Ha a kiválasztott termék átmegy az alakpróbán, akkor milyen valószínűséggel felel meg a súlyszabványnak?

**4.18.** Amennyiben barátnőnk közvetlenül a randevúnk előtt megy fodrászhoz, akkor 90% az esélye, hogy elkésik a találkáról. Tízszer olyan gyakran fordul elő, hogy elkésik, mint az, hogy randevú előtt fodrásznál volt. Ha elkésik, mennyi a valószínűsége, hogy fodrásznál volt?

**4.19.** Adott egy kocka 4 piros és 2 zöld lappal, valamint egy tetraéder 3 zöld és 1 piros lappal. Feldobunk egy szabályos érmét. Ha az eredmény fej, akkor a kockát, egyébként a tetraédert dobjuk fel háromszor.

**a.** Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindhárom dobás piros?

**b.** Mekkora valószínűséggel kapunk a harmadik dobásra piros színt?

**c.** Milyen érmét dobjunk fel, ha azt szeretnénk, hogy a három piros dobás valószínűsége egyenlő legyen a három zöld dobás valószínűségével?

**4.20.** Két urnában piros és zöld golyók vannak. Az első urnában 5 piros és 4 zöld, a másikban 7 piros és 3 zöld.

**a.** Találomra kiválasztunk egy-egy golyót a két urnából, és kicseréljük őket. Ezután kiveszünk egy újabb golyót az első urnából. Mekkora valószínűséggel lesz ez piros?

**b.** Találomra kiválasztunk egy golyót az első urnából, és áttesszük a másodikba. Ezután kihúzunk egy golyót a másodikból, és belerakjuk az elsőbe. Végül kiveszünk egy golyót az első urnából? Mekkora valószínűséggel lesz ez piros?

**4.21.** Két játékos, Péter és Pál, a következő játékot játsza. Péter feldob egy kockát, aztán annyi érmét, amennyi a kockával dobott érték. Ha a kapott fejek száma legalább 2, akkor Péter nyer, egyébként Pál. Kinek kedvez ez a játék?

**4.22.** Egy vadász 30 méter távolságban felfedez egy rókát, és rálő. Ha a róka életben marad, akkor elkezd 10 m/s sebességgel menekülni az ellenkező irányba. A vadász 3 másodperc alatt tölti meg a fegyverét, és ezután újra lő, egészen addig, míg meg nem öli a rókát, vagy az el nem tűnik a látóhatáron. Annak valószínűsége, hogy eltalálja az $x \geq 30$ méter távolságra lévő rókát $675x^{-2}$. Ha találat éri is a rókát, az nem biztos, hogy végzetes, a róka egymástól függetlenül 1/4 valószínűséggel túléli a találatokat. Mekkora valószínűséggel ússza meg a róka a kalandot?

**4.23.** Adott egy végtelen térfogatú üres urna és megszámlálhatóan végtelen sok golyó az $1, 2, \ldots$ értékekkel megszámozva. Éjfél előtt egy perccel fogjuk az $1, 2, \ldots, 10$ számú golyókat, behelyezzük őket az urnába, majd véletlenszerűen kihúzunk egyet. Éjfél előtt fél perccel fogjuk a $11, 12, \ldots, 20$ számú golyókat, behelyezzük őket az urnába, majd véletlenszerűen kihúzunk egyet az urnában található golyók közül. Minden egyes pozitív egész $n$-re éjfél előtt $2^{-n}$ perccel fogjuk a $10n+1, 10n+2, \ldots, 10n+10$ számú golyókat, behelyezzük őket, majd kihúzunk egyet. Ezt így folytatjuk éjfélig. Mutassuk meg, hogy 1 annak a valószínűsége, hogy éjfélkor az urna üres.

# 5. Az igazságos osztozkodás és a játékos csődje

Tegyük fel, hogy két játékos játszik egymás ellen valamilyen nyereményért, de a játék egy külső tényező miatt félbeszakad. Az **igazságos osztozkodás problémája** azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy milyen arányban osszák el a játékosok egymás között a nyereményt, hogy ez tükrözze a játék során már elért pozíciójukat. Akkor nevezzük igazságosnak az elosztást, ha a nyereményt azon valószínűségek arányában bontják fel, hogy az egyes játékosoknak mekkora esélye volt a végső győzelemre a játék félbeszakadásának pillanatában.

Jellemző esete az igazságos osztozkodásnak, mikor a két játékos, Péter és Pál, egymástól független partik sorozatát játsza, melyeket rendre $p$ valószínűséggel nyer meg Péter, és $q$ valószínűséggel Pál. Jelölje $a$ és $b$ a Péter és Pál végső győzelméhez szükséges nyertes partik számát a játék félbeszakadásakor. Ekkor a játék legfeljebb $N = a + b - 1$ parti során véget ért volna, és annak valószínűsége, hogy a játékot végül Péter illetve Pál nyerte volna

$$P(a,b) = \sum_{i=a}^{N} \binom{N}{i} p^i q^{N-i} \qquad \text{és} \qquad Q(a,b) = \sum_{i=0}^{a-1} \binom{N}{i} p^i q^{N-i} .$$

Tehát a teljes nyereményt $P(a,b) : Q(a,b)$ arányban kell felosztani. Amennyiben $p = q = 1/2$, akkor

$$P(a,b) = \sum_{i=a}^{N} \binom{N}{i} \frac{1}{2^N} \qquad \text{és} \qquad Q(a,b) = \sum_{i=0}^{a-1} \binom{N}{i} \frac{1}{2^N} .$$

A fentiekhez hasonló megfogalmazású, de új gondolatokat igénylő probléma a **játékos csődje**. Adott két játékos, Péter és Pál, akik független partik sorozatát játszák. Egy-egy partit rendre $p$ valószínűséggel nyer meg Péter, és $q$ valószínűséggel Pál. A játék kezdetén Péternek $a$, Pálnak $b$ zsetonja van, és addig játszanak, míg egyikük pénze teljesen el nem fogy. A feladat annak meghatározása, hogy mekkora valószínűséggel nyernek az egyes játékosok. Jelölje $P_a(b)$, $Q_a(b)$ és $R_a(b)$ annak a valószínűségét, hogy Péter nyer, veszít, illetve a játék nem ér véget véges sok parti során, valamint legyen $N = a + b$. Ekkor

$$P_a(b) = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^a}{1-(q/p)^N}, & p \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{a}{N}, & p = \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad Q_a(b) = \begin{cases} \frac{1-(p/q)^b}{1-(p/q)^N}, & p \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{b}{N}, & p = \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad R_a(b) = 0 .$$

Gyakran előfordul, hogy Pál egy kaszinót reprezentál, melynek végtelen költségvetése van, vagyis $b = \infty$. Ekkor Péter nem tudja elnyerni Pál összes pénzét, tehát a játékos vagy csődbe jut, vagy végtelen sokáig tart a játék. Ezek valószínűsége

$$Q_a^\infty = \lim_{b\to\infty} Q_a(b) = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^a, & p > \frac{1}{2}, \\ 1, & p \le \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad R_a^\infty = \lim_{b\to\infty} P_a(b) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a, & p > \frac{1}{2}, \\ 0, & p \le \frac{1}{2}. \end{cases}$$

**Feladatok**

**5.1.** A tisztaságra ügyelve dr. Ügyes közjegyző egy szabályos forintost dobál, és ha 'fej', akkor Anita nyer egy pontot, ha pedig 'írás', akkor Bendegúz, akik személyenként 16 000 forintot adtak át dr. Ügyesnek azzal, hogy akinek előbb lesz 10 pontja, az nyeri az összes 32 000 forintot. Amikor 13 dobás után Anitának 7, Bendegúznak pedig 6 pontja van, Ügyes doktor beleejti a forintost a csatornába. Hogyan kell igazságosan elosztani a 32 000 forintot Anita és Bendegúz között? Hogyan kell elosztaniuk a nyereményt, ha a játékosok csak 6 pontig mennek, és a játék félbeszakadásakor Anitának 2, Bendegúznak 4 pontja van?

**Megoldás**

Most Anitának $a = 3$, Bendegúznak $b = 4$ nyertes parti kellene a végső győzelemhez. Mivel $p = q = 1/2$ és $N = a + b - 1 = 6$, ezért a 32 000 forintot $P(a, b) : Q(a, b)$, tehát

$$\sum_{i=3}^{6} \binom{6}{i} : \sum_{i=0}^{2} \binom{6}{i}$$

arányban kell felosztani. A Pascal háromszög hetedik sora éppen a kérdéses binomiális együtthatókat tartalmazza, amiből a fenti összegek már könnyen számolhatóak.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&1&&&&& \\
&&&&1&&2&&1&&&& \\
&&&1&&3&&3&&1&&& \\
&&1&&4&&6&&4&&1&& \\
&1&&5&&10&&10&&5&&1& \\
\end{array}$$

$$\underbrace{1 \quad 6 \quad 15}_{22} \qquad \underbrace{20 \quad 15 \quad 6 \quad 1}_{42}$$

Tehát $\sum_{i=3}^{6} \binom{6}{i} = 20 + 15 + 6 + 1 = 42$ és $\sum_{i=0}^{2} \binom{6}{i} = 1 + 6 + 15 = 22$, és így igazságos elosztásban Anitának a 32 000 forint 42/64-ed része, vagyis 21 000 forint, míg Bendegúznak a teljes összeg 22/64-ed része, azaz 11 000 forint jár.

**5.2.** Egy csökött elméjű bolha a sík egész koordinátájú rácspontjain az északkelet felől érkező hőség elől menekül. Minden egyes lépésben 1/2-1/2 valószínűséggel ugrik a szomszédos déli illetve nyugati rácspontra. Ha az $(5, 1)$ pontról indul, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a hamarabb éri el az $x$ tengelyt, mint az $y$ tengelyt? Mi a kérdéses valószínűség értéke, ha a bolha a $(3, 4)$ pontról indul?

**5.3.** Tegyük fel, hogy összekuporgatunk 100 dollárt, és elmegyünk egy kaszinóba, melynek 100 dollár az alaptőkéje. A ruletten játszunk, és az a taktikánk, hogy mindig egy zsetont teszünk a pirosra színre, és ezáltal forgatásonként 18/37 és 19/37 valószínűséggel nyerünk illetve vesztünk egy zsetont.

**a.** Mekkora valószínűséggel nyerjül el a kaszinó teljes tőkéjét, ha 10 dolláros zsetonokkal játszunk? Milyen valószínűséggel megyünk csődbe? Mi annak az esélye, hogy a játék sosem ér véget?

**b.** Mi a helyzet akkor, ha nem 10, hanem 1 vagy 100 dolláros zsetonokkal játszunk?

**c.** Térjünk vissza a 10 dolláros zsetonokhoz. Mekkora tőkét szedjünk össze, ha legalább 0.5 valószínűséggel meg akarjuk koppasztani a bankot? A kaszinó tőkéje továbbra is 100 dollár, tehát 10 zseton.

**d.** Legalább hány zsetonnal kell elkezdenünk a játékot, ha 0.9 valószínűséggel bankot akarunk robbantani? A tőkénket növelve mekkora a maximálisan elérhető valószínűség?

**e.** A kaszinó igazgatója azt szeretné, hogy 10 korlátlan költségvetésű játékosból átlagosan csak 1 tudja hazavinni a teljes kasszát, a maradék kilenc játék pedig végtelen sokáig tartson. Mekkora tőkére van szüksége a kaszinónak?

**f.** Mi a helyzet akkor, ha nekünk csak 10 zsetonunk van, a kaszinónak pedig korlátlan a költségvetése?

**Megoldás**

**a.** Jelölje $NY$, $V$ és $S$ azokat az eseményeket, hogy nyerünk, vesztünk, valamint a játék sosem ér véget. A zsetonok száma mindkét oldalon 10, mi 18/37 valószínűséggel nyerünk egy forgatás során, tehát a játékos csődje modellben $a = b = 10$, $N = 20$, $p = 18/37$, $q = 19/37$. Ekkor $P(NY) = P_{10}(10)$, vagyis

$$P(NY) = \frac{1 - \left(\frac{19/37}{18/37}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{19/37}{18/37}\right)^{20}} = 0.37\,, \quad P(V) = 1 - P(NY) = 0.63\,, \quad P(S) = 0\,.$$

**b.** Ha 1 dolláros zsetonokkal játszunk, akkor mindkét félnek 100 zsetonja van, vagyis $a = b = 100$, amiből $P(NY) = P_{100}(100) = \frac{1-(19/18)^{100}}{1-(19/18)^{200}} = 0.004$. Ha egy darab 100 dolláros zsetont veszünk, akkor $a = b = 1$, így $P(NY) = P_1(1) = \frac{1-(19/18)^1}{1-(19/18)^2} = \frac{18}{37} \approx \frac{1}{2}$. Tehát ha nem nekünk kedvez a játék, egy-egy partiban nagyobb valószínűséggel vesztünk, mint nyerünk ($q > p$), akkor érdemes minél nagyobb tétet használni, és akár egyben feltenni minden pénzünket.

**c.** Tegyük fel, hogy nekünk $a$ zsetonunk van, a kaszinónak pedig $b = 10$. Ekkor

$$P(NY) = P_a(10) = \frac{1 - \left(\frac{19}{18}\right)^a}{1 - \left(\frac{19}{18}\right)^{a+10}} = \frac{1 - x}{1 - \left(\frac{19}{18}\right)^{10} x} > 0.5\,, \text{ ahol } x = \left(\frac{19}{18}\right)^a.$$

$$\begin{aligned}
1 - x &< 0.5 - 0.5\left(\frac{19}{18}\right)^{10} x \\
0.5 &< \left[1 - 0.5\left(\frac{19}{18}\right)^{10}\right] x = 0.14x \\
3.54 &< x = \left(\frac{19}{18}\right)^a \\
a &> \log_{\frac{19}{18}} 3.54 = \ln\frac{19}{18} / \ln 3.54 = 23.38
\end{aligned}$$

Tehát $a \geq 24$ zsetonnal, legalább 240 dollár tőkével indulva már 1/2 valószínűséggel tudjuk hazavinni a kaszinó 100 dollárját.

**d.** A c. pont gondolatmenetével

$$P(NY) = P_a(10) = \frac{1-\left(\frac{19}{18}\right)^a}{1-\left(\frac{19}{18}\right)^{a+10}} = \frac{1-x}{1-\left(\frac{19}{18}\right)^{10}x} > 0.9\,,\ x = \left(\frac{19}{18}\right)^a.$$

$$\begin{aligned} 1-x <& 0.9 - 0.9\left(\frac{19}{18}\right)^{10} x \\ 0.1 <& \left[1-0.9\left(\frac{19}{18}\right)^{10}\right] x = -0.55x \\ -0.18 >& x = \left(\frac{19}{18}\right)^a, \end{aligned}$$

aminek nyilvánvalóan nincs megoldása. Tehát a 0.9 nyerési valószínűség nem érhető el. Nézzük most a játékot a kaszinó szemszögéből. Egy játékos csődje problémát kapunk, melyben a kaszinónak $a = 10$, az ellenfélnek (nekünk) $b$ zsetonja van. Egy-egy forgatás során a kaszinó $p = 19/37$ és $q = 18/37$ eséllyel nyer illetve veszít egy zsetont. A mi győzelmi esélyünk, tehát a kaszinó csődbe jutásának valószínűsége (az új modellben ez $Q_a(b)$) nő, ha a tőkénk ($b$) nő, és a valószínűség akkor maximális, ha $b = \infty$. Ebben az esetben a kaszinó csődjének valószínűsége $Q_a^\infty = (q/p)^a = (18/19)^{10} = 0.58$. Most már érthető, hogy miért nem kaptunk megoldást az előbb. A 0.9 nyerési esély nem érhető el, végtelen tőkével is csupán 0.58 valószínűséggel tudjuk megkoppasztani a kaszinót, és $R_a^\infty = 1 - Q_a^\infty = 0.42$ valószínűséggel fog örökké tartani a játék.

**e.** Úgy kell meghatározni $a$ értékét, hogy a kaszinó csődjének valószínűsége ($Q_a^\infty$) kisebb legyen, mint 0.1. Kapjuk, hogy $(q/p)^a = (18/19)^a < 0.1$, ami pontosan akkor teljesül, ha $a > \log_{18/19} 0.1 = 42.59$. Tehát $a = 43$ zseton, vagyis 430 dollár elég.

**f.** Szemléljük a játékot ismét a saját szemszögünkből. Ekkor $a = 10$, $b = \infty$, $p = 18/37$ és $q = 19/37$. Most $p < 1/2$, ezért $Q_a^\infty = 1$, tehát biztosan csődbe jutunk, és ezen akkor sem segíthetünk, ha megnöveljük $a$ értékét.

**5.4.** Tegyük fel, hogy a kaszinó olyan játékot vezet be, melyen a játékosok 6/11 és 5/11 valószínűséggel nyernek illetve veszítenek egy zsetont. Válaszoljunk az előző feladat kérdéseire ilyen feltételek mellett.

**5.5.** Józsi bácsi kilép záráskor a kocsmából, és 1/2-1/2 valószínűséggel lép egyet jobbra illetve balra. Bolyongását addig folytatja, míg el nem éri a 100 lépésnyire álló házát, vagy bele nem esik a falu másik végén 200 lépésnyire található szakadékba.

**a.** Mekkora valószínűséggel ér haza? Milyen valószínűséggel zuhan bele a szakadékba? Mekkora annak a valószínűsége, hogy bolyongása sosem ér véget?

**b.** Józsi bácsi két régi haragosa, Miska bácsi és Pista bácsi elhatározza, olyan módon redukálják Józsi bá' hazajutásának valószínűségét, hogy ásnak egy mély gödröt a kocsma és a szakadék közé. Hová ássák a gödröt, ha azt szeretnék, hogy Józsi bá' legfeljebb 0.5 valószínűséggel érjen haza?

**c.** Megjelenik Józsi bácsi egy másik haragosa, Béla bácsi is, aki azt javasolja, hogy inkább rombolják le Józsi bá' házát, ekkor ugyanis biztosan a szakadékban köt ki. Igaza van neki?

# 6. Véletlen változók eloszlásfüggvényei

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tetszőleges valószínűségi mező. Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt **véletlen változónak** vagy **valószínűségi változónak** nevezünk, ha **mérhető**, tehát tetszőleges $a$ valós szám esetén az

$$\{X \leq a\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, a]\} \subseteq \Omega$$

halmaz esemény, azaz $\{X \leq a\} \in \mathcal{A}$. A mérhetőség ezen definíciójából következik, hogy bármely valós $a$ és $b$ mellett az

$$\{X = a\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \{a\}\},$$

$$\{a \leq X \leq b\} := \{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) \leq b\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [a, b]\}$$

halmazok is események, illetve eseményt kapunk akkor is, ha a példákban tetszőlegesen elhagyjuk az egyenlőség jeleket. (Sőt, mivel a $(-\infty, a]$ alakú halmazok generálják a Borel halmazok $\sigma$-algebráját a valós egyenesen, azonnal következik, hogy tetszőleges $B \in \mathcal{B}$ Borel halmaz $X$ melletti invezképe, vagyis az

$$X^{-1}(B) = \{X \in B\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

halmaz szintén esemény.)

Az $X$ véletlen változó **eloszlásfüggvénye** az $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F(x) = F_X(x) := P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R},$$

függvény. Egy $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor eloszlásfüggvénye egy változónak, ha

- monoton növekvő,
- minden pontban jobbról folytonos,
- $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ és $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

A tulajdonságokból következik, hogy az eloszlásfüggvénynek minden $x$ pontban létezik $F(x-)$ baloldali határértéke.

**Feladatok**

**6.1.** Tekintsünk egy tetszőleges $X$ véletlen változót, és legyen $F(x) = P(X \le x)$, $x \in \mathbb{R}$, az eloszlásfüggvénye. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a$ és $b$ valós értékek esetén

**a.** $P(X < a) = F(a-)$;

**b.** $P(X = a) = F(a) - F(a-)$;

**c.** $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$;

**d.** $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a-)$;

**e.** $P(X \ge a) = 1 - F(a-)$.

**6.2.** Tekintsük a következő kísérletet. Feldobok egy szabályos pénzérmét. Ha fejet kapok, akkor feldobok egy szabályos dobókockát, és legyen $X$ a kapott érték. Ha írást kapok, akkor $X$ legyen egy véletlenszerűen választott pont a $[0, 4]$ intevallumon. Határozzuk az $X$ változó eloszlásfüggvényét, valamint adjuk meg a következő valószínűségeket: $P(X = 2)$, $P(X = 2.5)$, $P(X \ge 6)$, $P(2 \le X \le 3)$, $P(4 < X < 5)$, $P(X$ egész szám$)$.

**6.3.** Feldobok egy szabályos dobókockát. Ha az eredmény 1 vagy 2, akkor az $X$ értéket a $(1, 3]$ intervallumról választom az egyenletességi hipotézisnek megfelelően. Egyébként feldobok két szabályos érmét, és $X$ a kapott fejek száma. Adjuk meg $X$ eloszlásfüggvényét, továbbá határozzuk meg a következő események valószínűségét:

**a.** $\{X$ nagyobb, mint $2\}$;

**b.** $\{X$ határozottan 1 és 2 közé esik$\}$;

**c.** $\{X$ egész szám$\}$;

**d.** $\{X$ irracionális$\}$;

**6.4.** A $c$ paraméter mely értékei mellett kapunk eloszlásfüggvényt? Ábrázoljuk a függvényt.

**a.**

$$F(x) = c + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} x \,, \quad x \in \mathbb{R}\,;$$

**b.**

$$F(x) = \begin{cases} 1 - c^{-[x]}\,, & x \ge 0\,, \\ 0\,, & x < 0\,; \end{cases}$$

**c.**

$$F(x) = \begin{cases} x/(1 + x^c)\,, & x \ge 0\,, \\ 0\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

# 7. Diszkrét véletlen változók

Az $X$ véletlen változó **diszkrét**, ha az értékkészlete véges vagy megszámlálhatóan végtelen számosságú. Mi jellemzően egész értékű változókkal fogunk dolgozni. Egy $X$ diszkrét véletlen változó **eloszlása** vagy **súlyfüggvénye** a

$$p_{x_k} := P(X = x_k)\,, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

valószínűségek sorozata. Egy $p_{x_k}$ sorozat pontosan akkor eloszlása egy diszkrét változónak, ha

- $p_{x_k} \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots;$
- $\sum_k p_{x_k} = 1.$

Egy $X$ diszkrét véletlen változó **várható értéke** az

$$E(X) := \sum_k x_k P(X = x_k)$$

összeg. A várható érték azt mutatja meg, hogy átlagosan mekkora értéket vesz fel a véletlen változó. Ha a $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény mérhető, akkor

$$E(t(X)) = \sum_k t(x_k) P(X = x_k)\,.$$

A $t(x) = (x - E(X))^2$ transzformációt alkalmazva az $X$ változó **varianciája** vagy **szórásnégyzete**

$$\mathrm{Var}(X) = D^2(X) := E(X - E(X))^2 = \sum_k (x_k - E(X))^2 P(X = x_k)\,,$$

de a variancia általában kényelmesebben számolható a

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_k {x_k}^2 P(X = x_k) - \left[\sum_k x_k P(X = x_k)\right]^2$$

formulával. Az $X$ véletlen változó **szórása** a variancia $D(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ gyöke, ami azt fejezi ki, hogy átlagosan mennyi az $X$ változó eltérése a várható értéktől.

Megjegyezzük, hogy a várható érték és a variancia nem csak diszkrét, hanem tetszőleges véletlen változó esetén definiálható, de az általános definíciót ezen kurzus keretei között nem tárgyaljuk. Legyen $X$ és $Y$ tetszőleges véletlen változó, és tekintsünk egy $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvényt. Ha $X$ és $Y$ azonos eloszlású, tehát megegyezik az eloszlásfüggvényük, akkor $E(t(X)) = E(t(Y))$. Ebből azonnal következik, hogy azonos eloszlású változókra $E(X) = E(Y)$ és $D^2(X) = D^2(Y)$.

Legyen $X, X_1, \ldots X_n$ tetszőleges változó, $a$ és $b$ pedig tetszőleges valós konstans. A várható érték és a variancia fontosabb tulajdonságai:

- $E(aX + b) = aE(X) + b.$
- $D^2(aX + b) = a^2 D^2(X).$
- $E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n).$
- Ha $X_1, \ldots, X_n$ páronként független, akkor $D^2(X_1 + \cdots + X_n) = D^2(X_1) + \cdots + D^2(X_n).$

**Feladatok**

**7.1.** Hogyan válasszuk meg a $c$ paraméter értékét, hogy az alábbi számsorozat egy egész értékű $X$ véletlen változó $p_k = P(X = k)$ eloszlása legyen? Ábrázoljuk az $X$ változó eloszlásfüggvényét, határozzuk meg várható értékét és szórását.

**a.** $p_k = c\,, \quad k = a, a+1, \ldots, b\,, \quad a, b \in \mathbb{N}\,;$

**b.** $p_k = cp^k\,, \quad k = 0, 1, \ldots\,, \quad 0 < p < 1\,;$

**c.** $p_k = c\lambda^k/k!\,, \quad k = 0, 1, \ldots\,, \quad \lambda > 0\,;$

**d.** $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,, \quad k = 0, \ldots, c\,, \quad n \in \mathbb{Z}^+\,, \quad 0 < p < 1\,.$

**7.2.** Adjunk meg olyan $p_k$, $k = 1, 2, \ldots$ súlyfüggvényt, hogy a kapcsolatos véletlen változó várható értéke végtelen legyen. Definiáljuk a $q_k$ eloszlássorozatot olyan módon, hogy a változó érték véges, de a szórás végtelen legyen.

**7.3.** Egy marketingakció keretében egy adott termék vásárlásakor dobhatsz egy szabályos dobókockával. Ha hatost dobsz, akkor egy 500 forint értékű szakácskönyvet, ha négyest vagy hármast, akkor egy 100 forint értékű bögrét, ha pedig kettest, akkor egy 20 forintos hűtőmágnest kapsz ajándékba. Ha egyest dobsz, akkor semmit sem nyertél. Írjuk fel a nyeremény értékének eloszlását, eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását.

**7.4.** Adott két értékpapír, melyeket azonos áron, 1000 forintért lehet megvásárolni. Egy év múlva az első papír értéke $800, 1200$ vagy $1600$ forint lehet rendre $0.2, 0.6$ és $0.2$ valószínűséggel. A másikat $400, 1200$ vagy $2000$ forintos áron adhatjuk el, mely árak valószínűsége rendre $0.3, 0.4$ és $0.3$.

**a.** Mennyi az egyes értékpapírok várható hozama, tehát az jövőbeni ár és a vételár különbségének várható értéke? Te melyik befektetést választanád? Az értékpapírok árfolyamkockázatát a varianciával szokták számszerűsíteni. Adjuk meg a két értékpapír árfolyamkockázatát.

**b.** 1000 forintos vételárért egy olyan portfóliót állítunk össze a két értékpapírból, melyben $0 \leq a \leq 1$ az első papír aránya. Határozzuk meg a portfólió várható hozamát és kockázatát, ha a két papír árfolyammozgása független.

**7.5.** Feldobok két dobókockát, és a nagyobb értékből kivonom a kisebbet. Határozzuk meg a különbség eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását.

**7.6.** Egy terráriumban három hörcsög él, melyek egymástól függetlenül az időnek $1/2$, $1/3$ és $1/4$ részében alszanak. Jelölje $X$ az ébren lévő hörcsögök számát egy véletlen időpontban. Adjuk meg $X$ eloszlását, várható értékét és szórását.

**7.7.** A kosárlabdában bizonyos esetekben $1 + 1$ büntetődobás jár a szabálytalanságot elszenvedő félnek. Ez azt jelenti, hogy a játékos kap egy szabad dobást, és ha ez sikeres, akkor még egyet. Tegyük fel, hogy a játékos egymástól függetlenül $0.6$ valószínűséggel értékesíti a büntetőket. Adjuk meg a sikeres dobások számának eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását.

**7.8.** A férfi kézilabda-bajnokság rájátszásában a Pick és a Veszprém 3 győzelemig tartó mérkőzéssorozaton dönteni el a bajnoki cím sorsát. Tegyük fel, hogy a csapatok a többi találkozó eredményétől függetlenül 1/2-1/2 eséllyel nyernek meg egy-egy meccset. Adjuk meg a lejátszott mérkőzések számának eloszlását, várható értékét és szórását.

**7.9.** Egy ládában 4 pár különböző színű, tehát összesen 8 cipő található. Véletlenszerűen kiveszünk közülük 4 darabot. Jelölje $X$ a kiválasztott cipőpárok számát. Adjuk meg $X$ eloszlását, várható értékét és szórását.

**7.10.** Egy pénzérmét dobálunk egészen addig, míg nem kapunk palindrom dobássorozatot, vagyis olyan fej-írás sorozatot, mely fordított sorrendbenn tekintve azonos önmagával. (Például: FIIIF.) A legelső dobás után még nem állunk meg. Adjuk meg a szükséges dobások számának várható értékét és szórását.

**7.11.** Két játékos felváltva dob kosárra egészen addig, amíg valamelyikük dobása sikeres nem lesz. Az első játékos 0.5, a második 0.6 valószínűséggel talál a kosárba egy-egy dobás során. Jelölje $X$ a szükséges dobások számát. Adjuk meg $X$ várható értékét és szórását.

**7.12.** Feldobok egy pénzérmét. Ha az eredmény fej, akkor még egyszer, ha írás, akkor még kétszer dobom fel újra. Adjuk meg az összesen kapott fejek számának eloszlását, várható értékét és szórását.

**7.13.** **a.** Adott két urna. Az elsőben 5 piros és 4 zöld, a másodikban 7 piros és 3 zöld golyó található. Véletlenszerűen kihúzunk egy golyót az első urnából, és áttesszük a másikba, majd húzunk egy golyót az első urnából, és beledobjuk az első urnába. Adjuk meg az első urnában található piros golyó számának várható értékét és szórását.

**b.** Oldjuk meg az a. feladatot azzal a módosítással, hogy egy-egy golyót veszünk ki a két urnából, és kicseréljük őket.

**7.14.** Matematikai értelemben egy játékot akkor tekintünk igazságosnak, ha a játék várható nyereménye egyenlő a belépési díjjal, vagyis nulla a várható nettó nyeremény. Egy játék igazságos ára a nyeremény várható értéke, tehát az az összeg, melyet a játék elején befizetve a játék igazságos.

**a.** Az európai rulettasztalokon 37 mező található 0-tól 36-ig számozva. Ezek közül 18 fekete, 18 piros színű, és a 0-ás mező színe zöld. Ha a piros színre teszel, és találsz, akkor a téted kétszeresét kapod vissza, egyébként elbukod a feltett pénzt. 100 forintos téttel játszva mennyi a várható nyereményed? Kinek kedvez a játék? Hogyan lehetne módosítani a szabályokat, hogy a játék igazságos legyen?

**b.** A játékos feldob 16 szabályos érmét, majd a bank kiszámítja a következő értéket. A dobott fejek számából levon 8-at, majd a különbséget elosztja 4-gyel. A játékos nyer egy forintot a banktól, ha az eredmény 0, 1 vagy $-1$, egyébként a játékos egy forintot fizet a banknak. Kinek kedvez a játék? Mennyi a játék igazságos ára?

**c.** A játékos feldob egy kockát. Ha páratlan számot dob, veszít 20 forintot, ha 6-ost dob, nyer 80 forintot, ha pedig 2-est vagy 4-est dob, akkor újból dobhat. A második dobásnál 20 forintot nyer, ha párost, és 40 forintot veszít, ha páratlant dob. Adjuk meg a nyeremény eloszlását és eloszlásfüggvényét. Állapítsuk meg, hogy a játék a játékos számára előnyös, hátrányos vagy igazságos. Adjuk meg a játék igazságos árát.

**7.15.** Egy urnában 4 cédula van. Egy cédulán 0, két másikon 1, az utolsón pedig 5 áll. Háromszor húzunk visszatevéssel. Jelölje $X$ a kihúzott cédulákon álló számok szorzatát. Adjuk meg $X$ várható értékét és szórását.

**7.16.** Egy adott pozíció betöltésére három pályázat érkezik. A pályázatok közül a győztest egy öttagú bizottság választja ki egyszerű szavazással. Feltehető, hogy a bizottság tagjai egymástól függetlenül szavaznak, és mindegyikük azonos eséllyel választja az egyes jelölteket. Adjuk meg a legtöbb szavazatot kapott pályázat(ok)ra érkezett voksok számának eloszlását és várható értékét.

**7.17.** Hatszor dobok egy kockával. Adjuk meg a dobott számok összegének várható értékét és szórását. Határozzuk meg a legkisebb érték eloszlását. Mennyi a különböző eredmények számának várható értéke és szórása?

**7.18.** Legyen $X_1, \ldots X_5$ a lottósorsoláson kihúzott öt nyerőszám a húzás sorrendjében, és jelölje $X_k^*$ az öt nyertes szám közül a $k$-adik legkisebbet, $k = 1, \ldots, 5$.

**a.** Adjuk meg az $X_k$ változók eloszlását, várható értékét és szórását. Függetlenek-e ezek a változók?

**b.** Milyen értékeket vehet fel az $X_k^*$ véletlen változó? Határozzuk meg $X_k^*$ eloszlását, várható értékét és szórását. Függetlenek-e az $X_k^*$ változók?

**c.** Mennyi az öt nyerőszám összegének várható értéke és szórása?

**d.** Mik lennének a válaszok az a., b. és c. pont kérdéseire, ha a lottósorsolást visszatevéses mintavételezéssel végeznék, tehát egy-egy számot többször is ki lehetne húzni?

# 8. Nevezetes diszkrét eloszlások

**Bernoulli kísérletnek** nevezzük az olyan kísérleteket, melyeknek csupán két kimenetele van, egy $p$ valószínűségű kedvező, és egy $1-p$ valószínűségű kedvezőtlen, ahol $0 \leq p \leq 1$ tetszőlegesen rögzített paraméter. Ha az $X$ változót úgy definiáljuk, hogy legyen 1 az értéke, ha a kísérlet kimenetele kedvező, és legyen 0, ha az eredmény kedvezőtlen, akkor a változó **Bernoulli eloszlást** követ $p$ paraméterrel. (Az ilyen változókat szokták **indikátorváltozónak** is nevezni.) A Bernoulli eloszlás súlyfüggvénye, várható értéke és szórásnégyzete

$$P(X=0) = 1-p\,, \quad P(X=1) = p\,, \qquad E(X) = p\,, \qquad D^2(X) = p(1-p)\,.$$

Tekintsünk $n$ darab független Bernoulli kísérletet, és jelölje $X$ a kedvező kimenetelek számát. Ekkor $X$ **binomiális eloszlást** követ $n$ és $p$ paraméterrel. A binomiális eloszlás tipikus példája a visszatevéses mintavételezés, ahol $X$ a kiválasztott selejtes darabok száma. Az $X$ változó eloszlása, várható értéke és szórásnégyzete

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,,\ k = 0, \ldots, n\,, \qquad E(X) = np\,, \qquad D^2(X) = np(1-p)\,.$$

Fontos megjegyezni, hogy a bemutatott eloszlások nem alkalmasak a visszatevés nélküli mintavételezés leírására, hiszen ez esetben nem pontosan ugyanazt a kísérletet ismételjük meg több alkalommal. Legyen adva egy $m$ elemszámú alaphalmaz, melyben $s$ darab első típusú és $m-s$ darab második típusú elem található. A halmazból véletlenszerűen és visszatevés nélkül kiválasztunk $n \leq m$ elemet, és jelölje $X$ a kihúzott első típusú elemek számát. Ekkor az $X$ változó **hipergeometrikus eloszlást** követ, és súlyfüggvénye, várható értéke, valamint szórásnégyzete

$$P(X=k) = \frac{\binom{s}{k}\binom{m-s}{n-k}}{\binom{m}{n}}\,, \qquad E(X) = \frac{ns}{m}\,, \qquad D^2(X) = n\frac{m-n}{m-1}\frac{s}{m}\Big(1-\frac{s}{m}\Big)\,.$$

Tekintsük ismét független $p$ paraméteres Bernoulli kísérleteknek egy sorozatát. Legyen $X$ azon kísérletnek a sorszáma, mikor először kapunk kedvező kimenetelt. Ekkor az $X$ változó **geometriai eloszlást** követ $p$ paraméterrel, és

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1}p\,,\ k = 1, 2, \ldots\,, \qquad E(X) = \frac{1}{p}\,, \qquad D^2(X) = \frac{1-p}{p^2}\,.$$

Az $X$ változó **Poisson eloszlást** követ $\lambda > 0$ paraméterrel, ha eloszlása

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ekkor $E(X) = D^2(X) = \lambda$. A Poisson eloszlást jellemzően ritkán bekövetkező események és műszaki hibák számának leírására alkalmazzuk.

Legyen $X$ tetszőleges nemnegatív egész értékű véletlen változó, és tekintsünk egy olyan Bernoulli kísérletet, mely $0 \leq p \leq 1$ valószínűséggel ad kedvező kimenetelt. Végezzük el a kísérletet egymástól függetlenül $X$ alkalommal, és legyen $Y_1$ illetve $Y_2$ a kapott kedvező illetve kedvezőtlen kimenetelek száma. Ekkor $X = Y_1 + Y_2$, és az $Y_1$ és $Y_2$ változót az $X$ változó $p$ valószínűség szerinti **Bernoulli felbontásának** nevezzük. Fontos megjegyezni, hogy $Y_1$ és $Y_2$ nem feltétlenül binomiális, hiszen az összesen elvégzett kísérletek száma véletlen, nem egy rögzített $n$ érték. Ekkor a Poisson eloszlásra teljesül az alábbi két tulajdonság.

- Ha az $X_1, \dots, X_n$ változók teljesen függetlenek, és $X_i$ rendre $\lambda_i$ paraméteres Poisson, akkor $X_1 + \cdots + X_n$ eloszlása $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ paraméteres Poisson.
- Ha $X$ Poisson eloszlást követ $\lambda$ paraméterrel, és $Y_1$ és $Y_2$ az $X$ változó $p$ valószínűség szerinti Bernoulli felbontása, akkor $Y_1$ és $Y_2$ Poisson eloszlású rendre $p\lambda$ és $(1-p)\lambda$ paraméterrel, továbbá $Y_1$ és $Y_2$ független.

**Feladatok**

**8.1.** 20xx-ben a futball Európabajnokság döntőjében a parádés magyar csapat a mindent eldöntő tizenegyespárbajra készül az olasz válogatottal szemben. Fiaink egymástól függetlenül rendre $p = 0.8$ valószínűséggel értékesítik a büntetőket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább négy magyar gólnak fog örülni a népes magyar szurkolótábor az öt büntetőrúgás során? Várhatóan hány gól fog születni? Milyen $p$ érték esetén teljesül, hogy legalább 0.9 annak az esélye, hogy a fiúk mindegyiket bevarrják?

**8.2.** Egy dobozban 5 piros és 8 fehér golyó van. Kihúzunk 7 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy páros számú pirosat húzunk ki? Mennyi a kihúzott piros golyók számának várható értéke? Oldjuk meg a feladatot visszatevéses és visszatevés nélküli húzásra is.

**8.3.** Egy halastóban ismeretlen számú, $N$ darab hal van. Egy nap kifognak 100 halat, megjelölik, majd visszadobják őket. A következő napon ismét kifognak 100 halat. Legyen $X$ a második napon kifogott megfelölt halak száma. Adjuk meg $X$ várható értékét és szórását. Ha a második napon 20 megjelölt halat fognak ki, akkor milyen becslést adhatunk $N$ értékére?

**8.4.** A valószínűségszámítás tárgyból egy-egy próbálkozás során rendre 0.6 valószínűséggel teszek sikeres vizsgát. Jelölje $X$ az első sikeres vizsga sorszámát. Adjuk meg $X$ várható értékét. Mennyi annak az esélye, hogy három vizsgaalkalom nem elegendő a kurzus teljesítéséhez?

**8.5.** Két szabályos dobókockával addig dobunk ismételten, míg a kockákon látható értékek összege legalább 10 nem lesz. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb két dobásra lesz szükség? Milyen $k$ egészre teljesül, hogy legalább 0.9 annak az esélye, hogy $k$ dobás elegendő? Adjuk meg a szükséges dobások számának várható értékét és szórását.

**8.6.** Egy gyümölcsösben az egy fák található gyümölcsök száma Poisson eloszlást követ 20 várható értékkel. Egy nyári éjszakán a vihar egymástól függetlenül rendre 0.75 valószínűséggel lerázza az egyes gyümölcsöket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott fán legfeljebb 2 gyümölcs marad? Milyen választ adhatunk ugyanerre a kérdésre, ha a fa alatt 30 lerázott gyümölcsöt találunk? Adjuk meg a megmaradt gyümölcsök számának várható értékét.

**8.7.** A könyvekben az egy oldalon található nyomtatási hibák száma közelítőleg Poisson eloszlást követ. Annak az esélye, hogy egy oldalon van nyomtatási hiba 0.1. Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott oldalon legalább két hiba található? Mennyi annak az esélye, hogy egy 100 oldalas könyvben legfeljebb 3 hiba van? Várhatóan hány hiba van egy ilyen könyvben?

**8.8.** Egy tesztvizsgán az oktató egy 5000 kérdést tartalmazó feladatgyűjteményből választ ki 20 példát. Minden kérdésre négy lehetséges válasz közül kell kiválasztani a megfelelőt. Egy hallgató a könyv kérdéseinek felére tudja a helyes választ. A feladatok 10 százalékáról azt hiszi, hogy tudja a helyes választ, de téved, ilyenkor rossz választ jelöl meg. A többi feladat esetében nincs ötlete, ilyenkor véletlenszerűen jelöl meg egyet a négy lehetséges válasz közül.

**a.** Mekkora annak a valószínűsége, hogy nem lesz olyan kérdés, amire tippelnie kell? Mi az ilyen kérdések számának várható értéke? Mekkora a valószínűsége, hogy a feladatsor pontosan 10 olyan példát tartalmaz, amire tippelnie kell?

**b.** Mekkora valószínűséggel ad a vizsgázó helyes választ egy-egy feladatra? Mi annak a valószínűsége, hogy legalább 18 feladatot helyesen old meg? Mekkora a helyesen megválaszolt kérdések számának várható értéke?

**c.** Milyen választ adhatunk az a. pont kérdéseire, ha a feladatgyűjtemény csak 50 kérdést tartalmaz?

**8.9.** **a.** Mennyi a telitalálat valószínűsége az ötöslottón? Mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább két találatunk lesz? Mennyi a találataink számának várható értéke és szórása?

**b.** Ha minden héten egy szelvénnyel játszunk, akkor annak nagyobb a valószínűsége, hogy az első héten legalább kettesünk lesz, vagy annak, hogy semmit sem nyerünk három évig? Mennyi annak az esélye, hogy az elkövetkező 20 évben lesz telitalálatunk? Hány éven át kell játszanunk, ha azt szeretnénk hogy legalább 0.9 valószínűséggel legyen telitalálatunk ezen idő alatt? Várhatóan hanyadik héten érjük el az első telitalálatot?

**c.** Mennyi annak az esélye, hogy a nyerőszámok közül pontosan kettő kisebb, mint 31? Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindegyik nyerőszám nagyobb, mint 60?

**8.10.** Az égbolt egy adott méretű, véletlenszerűen kiválasztott szeletén a csillagok száma Poisson eloszlást követ 5 várható értékkel. Az égen látható csillagok 80 százaléka a vörös törpe típusba tartozik.

**a.** Mennyi annak a valószínűsége, hogy az égboltnak egy adott méretű szeletén nem találunk csillagot? Ha véletlenszerű megfigyelések sorozatát végezzük egészen addig, míg olyan szeletet nem találunk, melyen van csillag, akkor mennyi annak az esélye, hogy 3-nál több szeletet kell megvizsgálni? Mennyi a szükséges megfigyelések számának várható értéke?

**b.** Milyen választ adhatunk az a. pont kérdéseire, ha kétszer akkora méretű szeleteket vizsgálunk?

**c.** Adjuk meg az egy szeleten található vörös törpék számának várható értéket és szórását. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy szeleten legalább 3 vörös törpét találunk? Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy szeleten legalább 3 vörös törpét találunk, ha a szeleten mást típusú csillag nem látható? Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy szeleten legalább 3 vörös törpét találunk, ha a szeleten összesen 5 csillagot találunk?

**8.11.** Tíz focista egy-egy lövéssel teszi próbára egy kapus tudását. Mennyi a gólok számának várható értéke és szórása, ha a játékosok egymástól függetlenül rendre $p_1, \dots, p_{10}$ valószínűséggel találnak a kapuba?

**8.12.** A kupongyűjtő problémája. Egy csokoládéfajta csomagolásában kuponokat rejtettek el, összesen 4 fajtát. Minden csokoládé egy kupont tartalmaz, és az egyes kuponok gyakorisága azonos. A kupongyűjtő egészen addig vásárolja az újabb és újabb csokoládékat, amíg össze nem gyűjt 4 különböző kupont. Jelölje $X$ az ehez szükséges csokoládék számát. Adjuk meg $X$ várható értékét és szórását, valamint általánosítsuk a problémát $n$ kuponra.

**8.13.** Tekintsünk egy véletlen permutációt az $\{1, \dots, n\}$ alaphalmazon. Adjuk meg a fixpontok számának várható értékét és szórását.

**8.14.** $N$ golyót egymástól függetlenül szétosztunk $M$ urnába olyan módon, hogy minden golyó azonos valószínűséggel kerül az egyes urnákba. Adjuk meg az üresen maradt urnák számának várható értékét és szórását.

**8.15.** A légitársaságok a kihasználtság érdekében több jegyet adnak el elővételben, mint amennyi hely van a repülőgépen. Ezt arra alapozzák, hogy átlagosan az utasok 5 százaléka nem jelenik meg beszálláskor. Természetesen időnként előfordul, hogy valaki nem fér fel a gépre, ilyenkor őt kárpótolják. Legyen adva egy 70 férőhelyes gép, melyre 72 jegyet adott el a légitársaság. A jegyek 50 000 forintba kerültek, és ha valaki nem fér fel a gépre, akkor a jegy árának kétszeresét fizetik neki vissza.

**a.** Mekkora valószínűséggel lesz olyan utas, aki nem fér fel a gépre? Adjuk meg a lemaradt utasok számának várható értékét és szórását.

**b.** Mennyi a cég várható nettó bevétele, tehát mekkora a jegyeladásokból származó bevétel és a kifizetett kártérítés különbségének várható értéke? Mekkora lenne a bevétel, ha csak 50 jegyet adtak volna el?

**8.16.** Ebben feladatban a kötelező gépjármű felelőségbiztosítás bónusz-málusz rendszerét fogjuk modellezni.

**a.** Egy kötelező gépjármű felelőségbiztosítás feltételei a következők. A biztosított az első évben $A$ forintot fizet. Ha az autós egy adott évben nem okoz balesetet, akkor a következő évben fizetendő biztosítási díj az előző évi összeg $\lambda$-szorosa $(0 < \lambda < 1)$. Ezzel szemben, ha az adott évben karambolozott, akkor az előző évi díj $\mu$-szörösét kell fizetnie $(\mu > 1)$. Legyen $p$ annak a valószínűsége, hogy egy adott évben balesetet okozok, és jelölje $X_n$ az $n$-dik évben fizetendő biztosítási díjat. Adjuk meg $X_n$ eloszlását és várható értékét. Mennyi az $E(X_n)$ sorozat határértéke? Hosszútávon milyen autósoknak kedvez ez a biztosítási konstrukció?

**b.** Egy másik társaság a következő díjkonstrukciót vezeti be. Belépéskor itt is $A$ forintot kell fizetni, és a balesetmentes évet itt is úgy jutalmazzák, hogy az éves díj az előző évinek $\lambda$-szorosára csökken. Viszont, ha az autós balesetett okozott, akkor nem csupán egy $\mu$-szörös emelés a büntetése, hanem a következő évben ismét $A$ forintot kell befizetnie. Válaszoljunk az a. pont kérdéseire ilyen feltételek mellett.

# 9. Folytonos véletlen változók

Legyen $X$ tetszőleges véletlen változó, és legyen $F(x)$ az eloszlásfüggvénye. Azt mondjuk, hogy $X$ **folytonos eloszlású** változó, ha létezik $f(y)$, $y \in \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

minden $x$ pontban. Ha létezik ilyen $f(y)$ függvény, akkor őt **sűrűségfüggvénynek** nevezzük, és az eloszlásfüggvényből deriválással kapható meg: $f(y) = F'(y)$. Egy $f(y)$ függvény pontosan akkor sűrűségfüggvénye egy folytonos változónak, ha

- $f(y) \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1$.

Ha az $X$ változó eloszlása folytonos, akkor az eloszlásfüggvénye folytonos függvény, és $P(X = x) = 0$ minden $x$-re. Emellett tetszőleges $a$ és $b$ valós számok esetén

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(y)\,dy\,.$$

A folytonos eloszlású $X$ véletlen változó **várható értéke** definíció szerint

$$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\,dy\,,$$

míg ha $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető, akkor a $t(X)$ transzformált változó várható értéke

$$E\big(t(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} t(y) f(y)\,dy\,.$$

Az $X$ változó **varianciája** vagy **szórásnégyzete** a diszkrét esethez hasonlóan

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) = D^2(X) := E\big((X - E(X))^2\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(y - E(X)\big)^2 f(y)\,dy \\ = E\big(X^2\big) - \big(E(X)\big)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)\,dy - \left[\int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\,dy\right]^2,\end{aligned}$$

és $X$ **szórása** most is variancia gyöke $D(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Az $X$ változó **egyenletes eloszlású** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, paraméterekkel, ha az $X$ pont eleget tesz az egyenletességi hipotézisnek az $[a, b]$ intervallumon. Jelölésben: $X \sim \mathrm{E}(a, b)$. Az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye és eloszlásfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a)\,, & a \leq x \leq b\,, \\ 0\,, & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0\,, & x < a\,, \\ (x-a)/(b-a)\,, & a \leq x \leq b\,, \\ 1\,, & x > b\,, \end{cases}$$

várható értéke $E(X) = (a + b)/2$, szórásnégyzete $D^2(X) = (b - a)^2/12$.

Az $X$ véletlen változó **exponenciális eloszlású** $\lambda > 0$ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye és eloszlásfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Jelölésben: $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Az várható érték $E(X) = 1/\lambda$, szórásnégyzet $D^2(X) = 1/\lambda^2$.

**Feladatok**

**9.1.** Mi legyen a $c$ konstans értéke, hogy sűrűségfüggvényt kapjunk? Határozzuk meg a kapcsolatos véletlen változó eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását.

**a.** $f(y) = c/y^k$, $0 \leq y \leq 1$, $\quad k \in \mathbb{N}$;

**b.** $f(y) = c/[a^2 + (y-b)^2]$, $y \in \mathbb{R}$, $\quad a, b > 0$;

**c.** $f(y) = ce^{-y^2/2}$, $y \in \mathbb{R}$.

**9.2.** Legyen $X$ egyenletes eloszlású a $[-1, 4]$ intevallumon. Adjuk meg $2X$, $3 - X$, $|X|$ és $X^2$ eloszlásfüggvényét és várható értékét.

**9.3. a.** Válasszunk véletlenszerűen egy $p$ pontot az egységnyi oldalhosszúságú négyzetben, és legyen $X$ a legközelebbi oldaltól mért távolság. Adjuk meg $X$ sűrűségfüggvényét, várható értékét, szórását, valamint az $\{1/4 < X < 3/4\}$ esemény valószínűségét.

**b.** Oldjuk meg az a. feladatot azzal a módosítással, hogy $X$ a $p$ pontnak a legközelebbi csúcstól való távolsága.

**9.4. a.** Adott egy egységnyi magasságú és egységnyi alapkörsugarú egyeneskúp. Az egyenletességi hipotézisnek megfelelően választunk egy pontot az alapkörön. Jelölje $X$ a pontnak a kúp csúcsától vett távolságnégyzetét. Adjuk meg $X$ várható értékét, szórását, valamint annak a valószínűségét, hogy $X$ nagyobb, mint 1.5.

**b.** Véletlenszerűen választunk egy pontot az előző kúp belsejében. Legyen $Y$ a pontnak az alapkörtől mért távolsága. Adjuk meg az $Y$ változó várható értékét és szórását. (Az $r$ sugarú és $m$ magasságú kúp térfogata $mr^2/3$.)

**9.5.** Az egyenletességi hipotézisnek megfelelően törjünk kettőbe egy egységnyi hosszúságú gyufaszálat.

**a.** Adjuk meg a rövidebb, illetve a hosszabb darab hosszúságának eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását. Mekkora valószínűséggel esik a rövidebb darab hossza 1/4 és 3/4 közé?

**b.** Jelölje $X$ a kapott darabok hosszának négyzetösszegét. Adjuk meg $X$ várható értékét és szórását. Mekkora valószínűséggel lesz $X$ nagyobb, mint 1.2?

**9.6.** Anna és Gábor elhatározzák, hogy megbeszélik a Valószínűségszámítás gyakorlat dolgozazatfeladait. A találkozó helyszínére egymástól függetlenül és véletlen időpontokban érkeznek 2 óra és fél 3 között. Jelölje $X$ illetve $Y$ az előbb illetve az utóbb érkező fél érkezési idejét. Adjuk meg $X$ és $Y$ várható értékét.

**b.** Várhatóan mennyi időt kell várnia az előbb érkezőnek a másikra? Mennyi annak a valószínűsége, hogy a várakozás időtartama 15 percnél hosszabb?

**9.7.** Feldobok egy kockát, legyen $X$ a dobott érték. Ezután az egyenletességi hipotézisnek megfelelően választok egy $Y$ pontot a $(0, X)$ intervallumon. Adjuk meg az $Y$ változó sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását. Mekkora valószínűséggel lesz az $Y$ érték 2-nél nagyobb?

**9.8.** **a.** Véletlenszerűen választunk egy-egy pontot a 2 oldalhossúságú négyzet két szemközti oldalán. Jelölje $X$ a pontok távolságnégyzetét. Adjuk meg $X$ várható értékét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok távolsága nagyobb, mint 1.2?

**b.** Oldjuk meg az a. feladatot azzal a módosítással, hogy a két pontot egy szomszédos oldalpáron vesszük fel.

**c.** Véletlenszerűen választunk két pontot a 2 oldalhosszúságú négyzet kerületén. Adjuk meg a pontok távolságnégyzetének várható értékét.

**9.9.** Véletlenszerűen és egymástól függetlenül választunk két pontot a 2 oldalhosszúságú négyzet belsejében. Adjuk meg a pontok távolságának várható értékét.

**9.10.** Egy műszaki berendezés élettartama exponenciális eloszlást követ 1 év várható értékkel. Amennyiben a berendezés tönkremegy, azonnal kicseréljük egy újra. Az egyes berendezések élettartama független.

**a.** Mekkora valószínűséggel bír ki egy új berendezés 1 évet? Mekkora valószínűséggel bír ki egy berendezés további egy évet, ha már 100 éve üzemel?

**b.** Várhatóan mennyi idő múlva megy tönkre a 10-dik berendezés? Mekkora ezen időtartam szórása?

**9.11.** A tesztek szerint a Toyota csapat Forma 1-es versenyautójának kilométerekben mért élettartama exponenciális eloszlást követ 500 kilométeres átlaggal. A sportág szabályai szerint egy autónak két egymást követő versenyt kell kibírnia?

**a.** Mennyi annak a valószínűsége, hogy az autó nem bír ki egy 300 kilométeres versenyt?

**b.** Feltéve, hogy az autó kibírta az első versenyt, mennyi annak az esélye, hogy egy másik 300 kilóméteres versenyt is kibír?

**9.12.** Van egy növényünk, évente 3 centimétert nő, ha fény éri, de elpusztul a sötétben. A növény most 10 centiméter magas, és köszöni szépen, jól van. Betesszük őt egy sötét szobába egy égő villanykörtével, és magára hagyjuk. A körte élettartama exponenciális eloszlást követ 3 év várható értékkel. Adjuk meg a növény maximális magasságának eloszlását, valamint ezen magasság várható értékét és szórását! Mennyi annak az esélye, hogy a növény valaha eléri az 1 méteres magasságot?

**9.13.** A rádióaktív anyagok atomjainak élettartama exponenciális eloszlást követ. A 60-as tömegszámú kobalt izotóp felezési ideje 5.26 év, tehát az ilyen atomoknak a fele bomlik le 5.25 év alatt. Jelölje $X$ a $^{60}$Co izotóp élettartamát. Mennyi $X$ várható értéke?

**9.14.** Egy $X$ véletlen változó ***k*-adik momentuma** az $M_k = E(X^k)$ várható érték. Adjuk meg a $\lambda > 0$ paraméteres exponenciális eloszlás $k$-dik momentumát.

# 10. A normális eloszlás és a centrális határeloszlás-tétel

Az $X$ véletlen változó **normális eloszlást** követ $\mu$ és $\sigma^2$ paraméterrel ($\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$), ha sűrűségfüggvénye

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az $X$ változó eloszlásfüggvénye, várható értéke és szórásnégyzete

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \qquad E(X) = \mu, \qquad D^2(X) = \sigma^2.$$

Mivel az $f(t)$ sűrűségfüggvénynek nem létezik analitikus függvények segítségével zárt alakban felírható primitív függvénye, a normális eloszlás eloszlásfüggvénye szintén nem írható fel zárt alakban. Egy $X$ változó esetén az $(X - E(X))/D(X)$ változót az $X$ **standardizáltjának** nevezzük. Ha $X$ normális eloszlású, akkor a standardizáltja $\mu = 0$ várható értékű és $\sigma = 1$ szórású normális, melyet **standard normálisnak** nevezünk. A standard normális változót általában $Z$-vel, a sűrűségfüggvényét $\varphi(t)$-vel, az eloszlásfüggvényét $\Phi(x)$-szel jelöljük.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}, \qquad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt.$$

Megjegyezzük, hogy $\varphi(t)$ szimmetrikus az $t = 0$ pontra, és ezért $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.

Legyen az $X$ változó binomiális eloszlású $n$ és $p$ paraméterrel, továbbá legyen $q = 1 - p$. Az alábbi tételek azt mondják ki, hogy az $X$ változó standardizáltja nagy $n$-re közelítőleg standard normális eloszlást követ.

- **deMoivre-féle lokális határeloszlás-tétel.**

$$P(X = k) \to \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}, \quad n \to \infty,$$

- **de Moivre–Laplace-tétel.**

$$P\left(a < \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \to P(a < Z \le b) = \Phi(b) - \Phi(a), \quad n \to \infty.$$

A de Moivre–Laplace-tétel egy általánosítása a **centrális határeloszlás-tétel (CHT)**. Tekintsünk $X_1, X_2, \ldots$ független és azonos eloszlású véletlen változókat, melyek közös várható értéke $E(X)$ és közös szórása $D(X)$ véges. Ekkor

$$P\left(a < \frac{(X_1 + \cdots + X_n) - nE(X)}{\sqrt{n}D(X)} \le b\right) \to P(a < Z \le b) = \Phi(b) - \Phi(a), \qquad n \to \infty.$$

Tehát nagy $n$-re az $X_1 + \cdots + X_n$ összeg standardizáltja megközelítőleg normális eloszlást követ.

**Feladatok**

**10.1.** A skót bakák mellkas körmérete normális eloszlást követ 88 cm várható értékkel és 5 cm szórással. A bakák hány százaléka fér bele a 83-as zubbonyba?

**10.2.** Az IQ-teszteket úgy állítják össze, hogy a teszt eredménye a népességen belül normális eloszlást kövessen 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. A népesség hány százaléka dicsekedhet 145 feletti intelligencia-hányadossal? Adjunk meg egy olyan $(100 - a, 100 + a)$ intervallumot, melybe a lakosság 90 százalékának intelligencia-hányadosa beleesik.

**10.3.** Egy üzemben a kétliteres üdítő töltését két gép végzi. A töltött mennyiség mindkét gép esetében 2 liter várható értékű normális eloszlást követ. Az üvegbe töltött mennyiség szórása az első gépnél 1.4 dl, a másiknál 0.8 dl. Az üvegek 60 százalékát tölti az első gép. Az üvegek mekkora hányadában marad el az üdítő mennyisége legalább 1 decivel a névleges tartalomtól.

**10.4.** A majmok ébredését vizsgálva azt látjuk, hogy 10 százalékuk 4:30 előtt, 20 százalékuk 9:15 után mászik le a fáról. Feltételezve, hogy a majmok ébredése normális eloszlást követ, mekkora annak a valószínűsége, hogy kedvencünk 7 és 8 óra között kel fel?

**10.5.** Egy adott áramforrás feszültségét szeretnénk megmérni. A mérési hibák miatt a mérés eredménye normális eloszlást követ, melynek várható értéke az ismeretlen feszültség, szórása pedig a mérőberendezés pontosságára jellemző mennyiség. Néhány mérés után a kapott eredmények 2 százaléka kisebb, mint 7 V, és 84 százaléka kisebb, mint 7.75 V. Mekkora az áramforrás feszültsége? A mérések hány százaléka esett 7.3 V és 7.6 V közé?

**10.6.** A SOLE Rt üzemében az automata 1 liter várható értékű normális eloszlás szerint adagolja a literes kiszerelésű tejet. Az előírások szerint a dobozok legfeljebb 5 százaléka tartalmazhat 0.98 liternél kevesebb tejet?

**a.** Mekkora lehet az adagolás szórása?

**b.** Sajnos az adagológépen csak a tej mennyiségének várható értéke állítható be, a szórás rögzített technológiai paraméter, melynek értéke 0.02 liter. Mekkora várható értéket állítsanak be, hogy megfeleljenek az előírásoknak?

**10.7.** Feldobunk 500 dobókockát. Adjunk becslést annak valószínűségére, hogy pontosan 100 hatost kapunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 100 hatost kapunk? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melybe 0.9 valószínűséggel beleesik a kapott hatósok száma.

**10.8.** Egy raktárban a termékek 10 százaléka selejtes. Visszatevéses mintavételezéssel kiválasztunk 100 mintadarabot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közöttük pontosan 10 selejtes lesz? Mennyi annak az esélye, hogy 10-nél kevesebb selejteset találunk?

**10.9.** Egy 40 000 lakosú kisváros polgármester-választásán két jelölt indul, akik egyformán szimpatikusak minden szavazó számára, tehát feltehető, hogy a lakosok egymástól függetlenül 1/2-1/2 valószínűséggel szavaznak a jelöltekre. Feltehetjük, hogy mindenki elmegy szavazni. Mi a valószínűsége annak, hogy a két jelöltre leadott voksok száma közti különbség legfeljebb 40 szavazat?

**10.10.** Egy étteremben kétféle menü közül lehet választani. A tapasztalatok szerint átlagosan a vendégek hatoda választják az A menüt, a többiek a B menüt rendelik. Egy adott napon 500 vendég érkezik, a vendéglős 100 A menüt és 420 B menüt készített elő. Feltételezve, hogy a vendégek véletlenül és egymástól függetlenül választanak a két menü között, mi a valószínűsége, hogy a vendéglős mindenkinek tud olyan menüt adni, mint amilyet az illető rendelt?

**10.11.** Egy útvonalon két, egymással versengő légitársaság (A és B) indít járatokat. Mivel a járatok nagyjából egyszerre indulnak, és azonos színvonalú szolgáltatást nyújtanak, feltehetjük, hogy az utasok egymástól függetlenül és véletlenszerűen (például pénzfeldobással) döntenek arról, hogy melyik cégnél vegyék meg a jegyet. Egy adott napon 400 utas akar utazni, és mindkét cég $k$ személyes gépet üzemeltet. Mekkora legyen $k$ értéke, hogy legfeljebb 0.01 legyen annak a valószínűsége, hogy az A társaság helyhiány miatt kénytelen nála jelentkező utast a konkurenciához átirányítani? Mekkora legyen $k$ értéke, ha azt akarjuk, hogy 0.01 valószínűséggel mindkét gépre felférjenek az oda jelentkezett utasok?

**10.12.** Véletlenországban egy bank pénztáránál az egyik napon előreláthatóan 60 ügyfél vesz ki pénzt. A pénztárnál az átlagos kifizetés ügyfelenként 50 tallér, 20 tallér szórással. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a nap folyamán legfeljebb 2700 tallárt vesznek fel az ügyfelek? Legalább mennyi pénzt tartson a kasszájában a pénztáros, hogy 0.95 valószínűséggel minden fennakadás nélkül tudja teljesíteni a kifizetéseket?

**10.13.** Feldobok 100 dobókockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 335 és 365 között van? Adjunk egy olyan $(3.5-a, 3.5+a)$ alakú intervallumot, melybe a dobott értékek átlagára 0.95 valószínűséggel beleesik.

**10.14.** Egy kísérlet lehetséges kimenetelei a 0, 2, 4 és 8 számok, rendre 0.125, 0.5, 0.25 és 0.125 valószínűséggel. Mennyi annak az esélye, hogy a kísérletet 1000-szer elvégezve a kimenetelek átlaga 2.98 és 3.04 közé esik?

**10.15.** Egy adott típusú izzó élettartama a gyári tesztelések szerint exponenciális eloszlást követ 2500 óra várható értékkel. Veszünk 100 darab izzót, és addig használjuk őket, míg tönkre nem mennek.

**a.** Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy izzó legalább 2500 órán át működik?

**b.** Mekkora annak a valószínűsége, hogy az izzók átlagos élattartama nagyobb, mint az élettartamuk várható értéke?

**10.16.** Egy acélkábelen a méterenként előforduló anyaghibák száma Poisson eloszlást követ 1/4 várható értékkel. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy 1000 méteres darabon

**a.** pontosan 200 anyaghibát találunk;

**b.** 200-nál több anyaghibát találunk?

# 11. A Markov- és a Csebisev-egyenlőtlenség, a nagy számok Bernoulli-féle törvénye

Legyen $X$ tetszőleges véletlen változó, és legyen $c > 0$ tetszőleges valós konstans. Ekkor teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek.

- **Markov-egyenlőtlenség.**
$$P(|X| \geq c) \leq \frac{E(|X|)}{c}.$$

- **Csebisev-egyenlőtlenség.**
$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{D^2(X)}{c^2}$$

Ha $X$ binomiális eloszlást követ $n$ és $p$ paraméterrel, akkor a Csebisev egyenlőtlenség a **nagy számok Bernoulli-féle (gyenge) törvényét** adja:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq c\right) \leq \frac{p(1-p)}{nc^2}.$$

**Feladatok**

**11.1.** Egy pozitív értékű véletlen változó várható értéke 10, szórása 2. Legfeljebb mekkora valószínűséggel vesz fel 20-nál nagyobb értéket? Legalább mekkora valószínűséggel esik az $[5, 15]$ intervallumba?

**11.2.** Az $X$ véletlen változó $F(x)$ eloszlásfüggvényéről tudjuk, hogy $F(0) = 0$ és $F(10) = 0.8$.

**a.** Adjunk becslést $X$ várható értékére.

**b.** Tegyük fel, hogy $X$ várható értéke 5. Adjunk becslést a változó szórására.

**11.3.** Feldobok 100 dobókockát. A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével becsüljük meg annak valószínűségét, hogy a számok összege 335 és 365 közé esik. Oldjuk meg a feladatot a centrális határeloszlás-tétel alkalmazásával is, és hasonlítsuk össze az eredményeket.

**11.4.** Egy nagyváros lakosságának általunk ismeretlen $p$ hányada dohányzik. Ezt a $p$ értéket akarjuk közelítőleg meghatározni a következő módon. Megállítunk az utcán $n$ embert, és megkérdezzük, hogy dohányoznak-e. A dohányosok számát $X$-szel jelölve a nagy számok törvénye szerint a $\hat{p} = X/n$ hányados jó becslése a $p$ aránynak.

**a.** Milyen nagynak kell választanunk az $n$ mintaméretet, ha az a célunk, hogy a megfigyelt $\hat{p}$ relatív gyakoriság legalább 0.95 valószínűséggel 0.01 hibahatáron belül közelítse a valódi $p$ értéket? Más szóval adjunk meg olyan $n$ pozitív egészet, hogy

$$P(|\hat{p} - p| \leq 0.01) \geq 0.95$$

teljesüljön minden $0 < p < 1$ értékre? A kérdésre válaszoljunk a nagy számok Bernoulli-féle törvényének felhasználásával, illetve a de Moivre–Laplace-tétel alkalmazásával is.

**b.** Tegyük fel, hogy $n = 10\,000$ embert kérdezünk meg, és közülük 2 500 dohányzik. Milyen becslést adhatunk az ismeretlen $p$ értékre? Szerkesszünk meg egy olyan intervallumot, melybe $p$ legalább 90 százalék bíztonsággal beleesik.

**11.5.** Az amerikai elnökválasztás előtt a Gallup közvéleménykutató társaság meg kívánja becsülni a Demokrata párti szavazók arányát New Hempshire és Texas államban. A korábbi felmérések szerint a Demokrata párti szavazók aránya mindkét államban 40 és 60 százalék között van. Céljuk, hogy az arányokat mindkét államban 0.99 valószínűséggel 2 százalék hibahatáron belül állapítsák meg. New Hempshire államban 1.2 millió, Texasban 12 millió szavazásra jogosult állampolgár él. E számok alapján a Gallup statisztikusa azt állítja, hogy Texasban tízszer akkora mintát kell megfigyelni, mint New Hempshire-ben.

**a.** Igaza van-e a statisztikusnak? Mekkora mintát kell megfigyelni az egyes államokban?

**b.** Hányszorosára kell növelni a mintaméretet, ha meg kívánjuk felezni a hibahatárt, tehát 1 százalék pontosságú eredményt akarunk?

# 12. Diszkrét véletlen vektorváltozók

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tetszőleges valószínűségi mező, és tekintsünk $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$ véletlen változókat. Ekkor az $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektorfüggvényt ***n*-dimenziós véletlen vektorváltozónak** nevezzük.

Az $X$ **vektorváltozó diszkrét**, ha megszámlálható sok különböző értéket vesz fel. A diszkrét vektorváltozókat az **eloszlásukkal**, másnéven **súlyfüggvényükkel** írjuk le, ami

$$p(x_1, \ldots, x_n) = P\big(X = (x_1, \ldots, x_n)\big) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)\,.$$

Ezt a súlyfüggvényt szokás az $X_1, \ldots, X_n$ változók **együttes eloszlásának** is nevezni. Egy $p(x_1, \ldots, x_n)$ függvény pontosan akkor eloszlása egy $n$-dimenziós vektorváltozónak, ha

- $p(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$,
- $\sum_{x_1, \ldots, x_n} p(X_1, \ldots, x_n) = 1$.

Az $X$ diszkrét vektorváltozó **perem-** vagy **marginális eloszlásai** az $X_1, \ldots, X_n$ véletlen változók eloszlásai, melyek megkaphatóak a

$$P(X_i = x_i) = \sum_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n} P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

képlettel. A vektorváltozó $X_1, \ldots, X_n$ komponensei **függetlenek**, ha tetszőleges $x_1, \ldots, x_n$ értékek esetén

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n)\,.$$

Ha a $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény mérhető, akkor a $t(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ transzformált véletlen változó várható értékét az

$$E\big(t(X)\big) = \sum_{x_1, \ldots, x_n} t(x_1, \ldots, x_n) P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

formulával számolhatjuk.

Legyen $V$ és $W$ diszkrét véletlen változó. A két változó **kovarianciája**

$$\mathrm{Cov}(V, W) = E\Big[[V - E(V)][W - E(W)]\Big] = E(VW) - E(V)E(W)\,,$$

ahol a $t((V, W)) = VW$ transzformált vektorváltozó várható értéke

$$E(VW) = \sum_{v,w} vwP(V = v, W = v)\,.$$

Ha $V$ és $W$ szórása pozitív, akkor a változók **korrelációja** vagy **korrelációs együtthatója**,

$$r(V, W) = \frac{\mathrm{Cov}(V, W)}{D(V)D(W)}\,,$$

míg ha valamelyik szórás 0, akkor $r(V, W) = 0$. A korrelációs együttható a változók közötti függőség erősségét fejezi ki.

A kovariancia és a korreláció fontosabb tulajdonságai:

- $\mathrm{Cov}(V,W) = \mathrm{Cov}(W,V)$, $r(V,W) = r(W,V)$,
- $\mathrm{Cov}(aV+b,W) = a\,\mathrm{Cov}(V,W)$,
- $\mathrm{Cov}(U+V,W) = \mathrm{Cov}(U,W) + \mathrm{Cov}(V,W)$,
- $\mathrm{Cov}(V,V) = \mathrm{Var}(V)$,
- $-1 \le r(V,W) \le 1$,
- Ha $V$ és $W$ független, akkor $r(V,W) = 0$,
- Ha $|r(V,W)| = 1$, akkor a változók között $W = aV+b$ lineáris kapcsolat van valamilyen $a,b$ valós konstansokkal, ahol $a > 0$, ha a korreláció $+1$, és $a < 0$, ha a korreláció $-1$.

Egy $X$ diszkrét vektorváltozó **várható érték vektora** a komponensek várható értékeit tartalmazó vektor

$$E(X) = \Big(E(X_1), \ldots, E(X_n)\Big)\,,$$

míg a vektorváltozó **kovarianciamátrixa** a komponensek páronkénti kovarianciáit tartalmazó mátrix:

$$\mathrm{Cov}(X) = \Big(\mathrm{Cov}(X_i,X_j)\Big)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X_1,X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1,X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathrm{Cov}(X_2,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n,X_1) & \mathrm{Cov}(X_n,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_n,X_n) \end{pmatrix}.$$

## Feladatok

**12.1. a.** Tekintsünk egy kísérletet, melynek $m$ lehetséges kimenetele van, és a kimenetelek valószínűsége $p_1, \ldots, p_m$, ahol $p_1 + \cdots + p_m = 1$, $p_1, \ldots, p_m \ge 0$ tetszőleges értékek. Jelölje rendre $X_k$ a $k$-dik kimenetel gyakoriságát a kísérlet $n$-szeri egymástól független végrehajtása után. Ekkor az $(X_1, \ldots, X_n)$ vektorváltozó **polinomiális eloszlást** követ. Mutassuk meg, hogy az eloszlás súlyfüggvénye

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!} p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}\,, \qquad k_1 + \cdots + k_m = n\,,$$

valamint algebrai eszközökkel határozzuk meg a peremeloszlásokat. Függetlenek-e az $X_1, \ldots, X_n$ változók?

**b.** Legyen adva $l$ darab diszjunkt halmaz, bennük rendre $s_1, \ldots, s_l$ elem. A halmazok $m = s_1 + \cdots + s_l$ elemű uniójából visszatevés nélkül kiválasztunk $n \le m$ elemet. Ha $X_k$ jelöli a $k$-dik halmazból kiválasztott elemek számát, akkor az $(X_1, \ldots, X_m)$

változó **polihipergeometrikus eloszlást** követ. Mutassuk meg, hogy a vektorváltozó súlyfüggvénye

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m) = \frac{\binom{s_1}{k_1} \cdots \binom{s_m}{k_m}}{\binom{m}{n}}, \qquad k_1 + \cdots + k_m = n,$$

továbbá adjuk meg a peremeloszlásokat. Mit mondhatunk az $X_1, \ldots, X_m$ változókról függetlenség szempontjából?

**12.2.** Adott egy 10 cm sugarú kör alakú céltábla, melyet koncentrikus körökkel 10 darab 1 cm szélességű sávra osztunk. Az egyes sávok pontértéke belülről kifelé haladva $10, 9, \ldots, 1$ pont. Egy fegyverrel lövünk a céltáblára addig, míg 100 darab találatot el nem érünk. Feltehető, hogy a találatok függetlenek és egyenletes eloszlást követnek a céltáblát.

**a.** Mekkora valószínűséggel lesz a találatok között pontosan 20 darab 5-pontos, 20 darab 2-pontos és 60 darab 1-pontos? Mekkora eséllyel érünk el minden pontértékből pontosan 10 találatot? Mekkora valószínűséggel lövünk pontosan 3 alkalommal 10-pontot és 5 alkalommal 9-pontos területre?

**b.** Adjuk meg az 8-pontos lövések számának várható értékét, valamint annak az esélyét, hogy legalább 20 darab 8-pontos találatunk lesz.

**12.3.** Az ötöslottó sorsoláson mennyi annak a valószínűsége, hogy a nyerőszámok közül pontosan 2 kisebb, mint 31? Mennyi annak az esélye, hogy pontosan 2 nagyobb, mint 50? Mennyi a két esemény együttes bekövetkezésének a valószínűsége? Független-e egymástól a két esemény?

**12.4.** **a.** Egy 32 lapos kártyapakliból visszatevéssel kihúzunk 8 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 pirosat, 2 zöldet és 1 tököt húzunk? Mekkora valószínűséggel kapunk minden színből pontosan 2 lapot? Mennyi annak az esélye, hogy pontosan 4 zöldet és 2 makkot kapunk? Mennyi a kihúzott pirosak számának várható értéke?

**b.** Válaszoljunk az a. feladat kérdéseire azzal a módosítással, hogy a mintavételezést visszatevéssel végezzük.

**12.5.** Az alábbi táblázat egy $X$ és egy $Y$ véletlen változó $P(X = x, Y = y)$ együttes eloszlását tartalmazza. Határozzuk meg a $c$ paraméter értékét. Adjuk meg a peremeloszlásokat, és írjuk fel az $(X, Y)$ vektorváltozó várható érték vektorát és kovarianciamátrixát. Mennyi az $X2^Y$ változó várható értéke? Mit mondhatunk az $X$ és $Y$ közötti függőség erősségéről?

**a.**

| $x$ \ $y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 4c | 0 | 4c |
| 5 | 0 | 6c | 6c |

**b.**

| $x$ \ $y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 4c | 6c | 10c |
| 5 | 6c | 9c | 15c |

**12.6.** Egy piros érme egyik oldalára 0-t a másik oldakára 1-t írunk. Hasonló módon egy zöld érme egyik oldalára 0, a másik oldalára pedig 5-ös kerül. Ezután egyszer feldobjuk az érméket.

**a.** Legyen $X$ illetve $Y$ a piros illetve a zöld érmével dobott érték. Adjuk meg $X$ és $Y$ együttes eloszlását és a peremeloszlásokat. Határozzuk meg az $(X, Y)$ vektor várható érték vektorát és korrelációmátrixát. Mit mondhatunk a vektorváltozó komponenseiről függetlenség szempontjából?

**b.** Módosítsuk az a. feladatot annyiban, hogy egyszeri feldobás után $X$ jelölje a kapott 0-k, $Y$ pedig a kapott nem 0-k számát.

**12.7.** **a.** Feldobok két szabályos dobókockát. Legyen $X$ a dobott értékek minimuma, $Y$ pedig a számok maximuma. Határozzuk meg $X$ és $Y$ együttes eloszlását, valamint az $X$ és az $Y$ változó peremeloszlását. Írjuk fel az $(X, Y)$ vektorváltozó várható érték vektorát és kovarianciamátrixát.

**b.** Oldjuk meg az a. feladatot azzal a módosítással, hogy $X$ a dobott értékek összege, $Y$ pedig a számok külömbsége.

**12.8.** Először véletlenszerűen választok egy $X$ egész értéket 1 és 5 között, tehát egy értéket az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazból. Ezután véletlenszerűen választok egy $Y$ egész számot 1 és $X$ között. Adjuk meg $X$ és $Y$ együttes eloszlását, valamint $X$ és $Y$ peremeloszlását. Mennyi $X$ és $Y$ várható értéke? Függetlenek-e a változók, és ha nem, akkor mennyi a korrelációs együttható értéke?

**12.9.** Legyen az $X$ véletlen változó várható értéke 10, szórása 4, az $Y$ változó várható értéke 4, szórása 3. Adjuk meg a $2X + 3Y$ változó várható értékét és szórását, ha

**a.** $X$ és $Y$ független;

**b.** $r(X, Y) = 0.2$;

**c.** $r(X, Y) = -1$.

**12.10.** Adott két vállalati részvény a tőzsdén. Az I. értékpapír jelenlegi árfolyama 10 000 forint, a II. részvény darabját 20 000 forintért lehet megvásárolni. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egy év múlva az I. részvény lehetséges árfolyamai 8 000, 12 000 illetve 16 000 forint, melyek valószínűsége rendre 0.3, 0.4 és 0.3. A II. értékpapírt egy év múlva 18 000, 22 000 vagy 26 000 forintért lehet eladni, mely árak esélye 0.25, 0.5 illetve 0.25. Egymillió forintért összeállítunk egy olyan potfoliót, melyben 40% az I. értékpapír értékaránya. Legyen $X$ a portfolió értéke egy év múlva.

**a.** Feltéve, hogy a két értékpapír árfolyama független, adjuk meg $X$ várható értékét és szórását.

**b.** Tegyük fel, hogy a két árfolyam nem független, hanem az árfolyamok közötti korrelációs együttható 0.5. Adjuk meg $X$ várható értékét és szórását ilyen feltételek mellett. Mi a helyzet akkor, ha a korreláció $-0.5$?

**12.11.** Legyen $X$ és $Y$ független Poisson eloszlású véletlen változó $\lambda$ illetve $\mu$ paraméterrel.

**a.** Adjuk meg az $(X, Y)$ vektor eloszlását, várható értékét és kovarianciamátrixát.

**b.** Határozzuk meg $X + Y$ és $XY$ várható értékét és szórását, valamint a két változó kovarianciáját.

# 13. Folytonos véletlen vektorváltozók

Legyen $X$ és $Y$ véletlen változó egy tetszőleges $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Az $(X, Y)$ vektorváltozó **eloszlásfüggvénye**, vagy másnéven $X$ és $Y$ **együttes eloszlásfüggvénye** az

$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y)\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

függvény. Ekkor tetszőleges $a \le b$ és $c \le d$ valós számok esetén

$$\begin{aligned} P\big((X,Y) \in (a,b] \times (c,d]\big) &= P(a < X \le b, c < Y \le d) \\ &= F(b,d) - F(a,d) - F(c,b) + F(a,c)\,. \end{aligned}$$

Az $(X, Y)$ vektorváltozó **folytonos** eloszlású, ha létezik $f(s,t)$, $s, t \in \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\, dt ds\,.$$

Ekkor az $f(s,t)$ függvényt az $(X, Y)$ vektorváltozó **sűrűségfüggvényének**, vagy másnéven $X$ és $Y$ **együttes sűrűségfüggvényének** nevezzük. Egy $f(s,t)$ függvény pontosan akkor sűrűséfüggvénye valamilyen vektorváltozónak, ha

- $f(s,t) \ge 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t)\, dt ds = 1$.

A sűrűségfüggvény segítségével

$$P(a < X \le b, c < Y \le d) = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(s,t)\, dt ds\,,$$

továbbá az $X$ és az $Y$ változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t)\, dt \qquad \text{és} \qquad f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t)\, ds\,.$$

Az így kapott $f_X(s)$ és $f_Y(t)$ függvényt az $(X, Y)$ vektorváltozó **perem-** vagy **marginális sűrűségfüggvényeinek** is szokás nevezni. A vektorváltozó komponensei ($X$ és $Y$) pontosan akkor függetlenek, ha

$$f(s,t) = f_X(s) f_Y(t)$$

teljesül. Amennyiben $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, akkor a $t(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változó várható értéke meghatározható az

$$E\big(t(X,Y)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(s,t) f(s,t)\, dt ds$$

formulával. Ezek alapján a kovarianciaszámításnál megjelenő $XY$ szorzat várható értéke

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} st f(s,t)\, dt ds\,.$$

**Feladatok**

**13.1.** A Tisza és a Maros vízhozama a Maros torkolata felett közelítőleg normális eloszlást követ $660\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ és $160\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ átlaggal. A folyók vízhozama erősen ingadozó, a két szórás $200\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ illetve $50\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. A folyók együttes vízhozama szintén normális eloszlást követ.

**a.** Feltéve, hogy a két folyó vízhozama független, adjuk meg a Tisza vízhozamának várható értékét és szórását a Belvárosi hídnál.

**b.** Milyen választ adhatunk az a. kérdésre, ha a két vízhozam közötti korreláció értéke 0.6. Mennyi a várható érték és a szórás akkor, ha a korrelációs együttható $-0.4$. Vajon a három lehetőség közül melyik áll legközelebb a valósághoz? Miért?

**c.** Mindhárom esetben határozzuk meg, hogy átlagosan egy évből hány napon keresztül nagyobb a vízhozam, mint $1500\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$.

**13.2.** Tekintsük az alábbi $f(x,y)$ függvényt. Mennyi legyen a $c$ valós paraméter értéke, hogy a függvény egy $(X,Y)$ vektorváltozó sűrűségfüggvénye legyen? Adjuk meg a marginális sűrűségfüggvényeket, továbbá a vektorváltozó várható értékét és kovarianciamátrixát. Független-e egymástól az $X$ és az $Y$ változó?

**a.**

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y)\,, & 0 \le x, y \le 1\,, \\ 0\,, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

**b.**

$$f(x,y) = \begin{cases} c(4xy+2x+2y+1)\,, & 0 \le x, y \le 1\,, \\ 0\,, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

**13.3.** Egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint választok egy $X$ és egy $Y$ értéket a $[0,1]$ intervallumon, és legyen $U = \min(X,Y)$ és $V = \max(X,Y)$. Mind az $(X,Y)$, mind az $(U,V)$ vektorváltozó esetében határozzuk meg

**a.** a vektorváltozó eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét;

**b.** a marginális sűrűségfüggvényeket;

**c.** a várható érték vektort és a kovarianciamátrixot;

**d.** annak a valószínűségét, hogy a két komponens egyenlő;

**e.** annak az esélyét, hogy a vektorváltozó a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(0,1)$ csúcsok által határolt háromszögbe esik.

**13.4.** Véletlenszerűen választok egy $p = (X,Y)$ pontot az egységnyi sugarú körlapon. Adjuk meg az $(X,Y)$ vektor sűrűségfüggvényét, a marginális sűrűségfüggvényeket és a két komponens várható értékét. Bátrabbak nekimehetnek a korrelációs együtthatónak is.

**13.5.** Legyen $X$ és $Y$ független és exponenciális eloszlású rendre $\lambda$ és $\mu$ paraméterrel.

**a.** Adjuk meg $X$ és $Y$ együttes eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

**b.** Határozzuk meg $\min(X,Y)$ és $\max(X,Y)$ eloszlásfüggvényét.

**c.** Mekkora valószínűséggel vesz fel $X$ kisebb értéket, mint $Y$. Mennyi annak az esélye, hogy a két változó egyenlő?