Valószínűségszámítás

1. feladatsor

Események, valószínűségi mező, klasszikus valószínűségi mező

1. Fejezzük ki az A, B, C halmazokkal az alábbi eseményeket!

a. Az A, B, C események közül pontosan $k \in \{1, 2, 3\}$ következik be.

b. Az A, B, C események közül legalább k következik be.

c. Az A, B, C események közül legfeljebb k következik be.

2. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ tetszőleges események. Mit jelent az $A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_n$ esemény?

Megj.: A $\circ$ a szimmetrikus differenciát jelöli, azaz $A \circ B = (A - B) \cup (B - A)$. *(5szerzős, 1.1.7)*

3. Igazoljuk az alábbi formulák helyességét!

a. $A \circ B = (A \cup B) - A \cap B$;

b. $A \cap (B - C) = A \cap B - A \cap C$;

c. $A - (A - (B - C)) = A \cap B \cap C^c$;

d. $A \cup B = A \circ B \circ (A \cap B)$.

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n$ események esetén

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \dots + \mathbf{P}(A_n) - (n - 1).$$

(5szerzős, 1.2.2)

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre

a. $\mathbf{P}(A \circ C) \leq \mathbf{P}(A \circ B) + \mathbf{P}(B \circ C)$;

b. ha $\mathbf{P}(A \circ B) = 0$ akkor $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$;

c. $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C)| \leq \mathbf{P}(B \circ C)$.

(5szerzős, 1.2.3 és 1.2.4)

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A és B eseményre

$$|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Mikor van egyenlőség? *(5szerzős, 1.2.5)*

7. Igazoljuk, hogy tetszőleges A és B eseményre

$$\mathbf{P}^2(A \cap B) + \mathbf{P}^2(A \cap B^c) + \mathbf{P}^2(A^c \cap B) + \mathbf{P}^2(A^c \cap B^c) \geq \frac{1}{4}.$$

Mikor van egyenlőség?

8. Adjuk meg a lottóhúzást leíró valószínűségi mezőt! Mennyi annak a valószínűsége, hogy pont 3 találatunk lesz? Mennyi a valószínűsége, hogy lesz találatunk?

9. Mekkora a valószínűsége, hogy az ötöslottón kihúzott számok között nem lesznek egymást követők?

10. Két szabályos kockát r-szer feldobunk. Legyen p_r annak a valószínűsége, hogy az $(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)$ mindegyike legalább egyszer előfordul. Határozzuk meg p_r-et! *(5szerzős, 1.2.13)*

11. Sorban elhelyezett n dobozba találomra berakunk N golyót úgy, hogy az összes elhelyezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy az első k doboz egyike sem üres? *(5szerzős, 1.2.14)*

12. Egy csomag francia kártyát megkevertünk, majd egyesével kihúzzuk a lapokat. Hanyadik helyen legvalószínűbb a második ász?

13. Egy kertész három juhar-, négy tölgy- és öt nyírfát ültetett egy sorba véletlen sorrendben, mindegyik fát egyenlő valószínűséggel választva. Mennyi annak a valószínűége, hogy nem kerül egymás mellé két nyír?

14. Egy urnában k-féle színű golyó van, mindegyik színűből ugyanannyi darab. Egyenként húzunk a golyókból úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és minden húzásnál bármelyik golyó ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kihúzásra.

a. Mennyi annak a q_n valószínűsége, hogy legalább n húzás kellett ahhoz, hogy minden szín előforduljon?

b. Mennyi annak a p_n valószínűsége, hogy n húzás során minden szín előfordult, és ez az n-edik húzásnál következik be először (vagyis az első $(n - 1)$ húzás során csak $(k - 1)$ szín fordult elő) ?

(5szerzős, 1.2.15)

15. Három kockával dobva mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4? Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt, ha 3 különböző kockával dobunk, ill. ha 3 egyformával!

16. Egy szabályos érmét addig dobunk, amíg kétszer egymás után azonos oldalára nem esik. Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt! Határozzuk meg a következő események valószínűségét:

a. $\{$ legfeljebb 6-ot kell dobni $\}$;

b. $\{$ páros sokat kell dobni $\}$.

17. Hét törpe közül Hófehérke leültet ötöt egy kör alakú asztalhoz. Tegyük fel, hogy az összes lehetséges elrendezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy Morgó és Kuka nem kerül egymás mellé?

18. Egy sakktáblán találomra elhelyezünk 8 bástyát. Mi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat?

19. Egyes vidékeken elterjedt a következő babona: egy lány 6 fűszálat fog a markába úgy, hogy azok a kezéből mindkét irányban kiállnak. Egy másik lány mindkét oldalon páronként összecsomózza a fűszálakat. Ha így egy zárt lánc keletkezik, akkor arra következtetnek, hogy a lány a következő évben férjhez megy. Ha a csomózás teljesen véletlenszerűen történik, mennyi a valószínűsége, hogy zárt láncot kapunk. Mi a helyzet $2n$ fűszál esetén? *(5szerzős, 1.3.29)*

20. Mennyi a valószínűsége, hogy a kör kerületén adott $2n$ pontot találomra párokba szedve és mindegyik pár két pontját húrral összekötve a kapott n számú húr közül egyik sem metszi a másikat? *(Schweitzer, 1952, 6)*

21. A parti tüzérség 1 km távolságban felfedez egy ellenséges cirkálót, és elkezd rá tüzelni, percenként egy lövést adva le. A cirkáló az első lövés leadásakor menekülni kezd 60 km/h sebességgel. A találat valószínűsége x km távolság esetén $0,75\,x^{-2}$. Ha egy lövés talált, akkor még mindig $1/4$ valószínűséggel a cirkáló nem süllyed el, és tovább menekül. Mekkora valószínűséggel menekül el a cirkáló? *(Schweitzer, 1950)*

22. Veszünk egy elég nagy urnát, és éjfél előtt fél perccel 1-től 10-ig számozott golyókat rakunk bele, majd rögtön kiveszünk egyet. Éjfél előtt $1/4$ perccel az urnába 11-től 20-ig számozott golyókat teszünk, majd rögtön kiveszünk egyet. Ezt így folytatjuk éjfélig. Hány golyó lesz az urnában pontban éjfélkor, ha

a. az i-edik lépésben az i-edik golyót vesszük ki?

b. az i-edik lépésben a $10 \cdot i$-edik golyót vesszük ki?

c. véletlenül vesszük ki a golyót?

23. Vegyünk két olyan kockát, melyeken annak a valószínűsége, hogy i-t dobunk, p_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, ahol $p_i \geq 0$ és $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$. Választhatók-e a valószínűségek úgy, hogy két kockával dobva minden összeg 2-től 12-ig egyformán valószínű legyen?

Bolyongás 2–dimenzióban. Olyan sorozatokat fogunk vizsgálni, melyek véges sok plusz egyből és mínusz egyből állnak. Tekintsünk az $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sorozatot, melyben p db 1 és q db -1 szerepel, $p+q = n$. Jelölje $s_k = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ ezek részletösszegét. Az $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sorozatot egy törtvonallal ábrázoljuk: a törtvonal k-adik lépésének meredeksége ε_k és k-adik szögpontjának ordinátája s_k. Jelölje $N_{n,x}$ az origóból az (n, x) pontba vezető utak számát.
24. Határozzuk meg $N_{n,x}$ értékét!

25. Ballot–tétel. Legyenek n és x pozitív egészek. Igazoljuk, hogy az origóból az (n, x) pontba vezető olyan $(s_1, s_2, \ldots, s_n = x)$ utak száma, melyre $s_1 > 0, s_2 > 0, \ldots, s_n > 0$ pontosan $\frac{x}{n} N_{n,x}$.

A továbbiakban a fent leírt törtvonalra úgy gondolunk, mint egy bolyongó részecske pályájára. Jelölje $X_1, X_2, \ldots$ az egyes lépéseket és $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. Feltesszük, hogy a részecske n lépése során előforduló 2^n útvonal egyformán valószínű.
26. Mennyi $\mathbf{P}(S_n = r)$ valószínűség? Legyen $u_{2k} = \mathbf{P}(S_{2k} = 0)$ és $f_{2k} = \mathbf{P}(S_2 \neq 0, \ldots, S_{2k-2} \neq 0, S_{2k} = 0)$. Határozzuk meg u_n-et, és igazoljuk, hogy

$$u_{2n} = f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + \cdots + f_{2n} u_0.$$

Valószínűségszámítás

2. feladatsor

Gamma- és béta-függvény, de Moivre–Laplace-tétel, geometriai valószínűség

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\Gamma(p+1) \sim \left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^p \sqrt{2\pi p}.$$

Ennek segítségével igazoljuk, hogy $\Gamma(p+h)/\Gamma(p) \sim p^h$, amint $p \to \infty$.

Segítség: Használjuk a Stirling-formula bizonyításának módszerét!

2. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ez alapján igazoljuk a **Wallis–formulát**: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$.

3. De Moivre is tudta, hogy $n! \sim (n/\mathrm{e})^n \sqrt{n}c$, ahol c valamilyen pozitív konstans. A Wallis–formula segítségével igazoljuk, hogy $c = \sqrt{2\pi}$! (Stirling is így csinálta 1733-ban.)

4. A béta–függvény (vagy elsőfajú Euler–féle integrál).

a. Bizonyítsuk be, hogy $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ véges minden $x > 0, y > 0$ esetén, és $B(x,y) = B(y,x)$.

b. Mutassuk meg, hogy $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. (Vagyis, ha a Gamma–függvényt a faktoriális folytonos kiterjesztésének tekintjük, akkor a Béta–függvény a binomiális együttható folytonos kiterjesztése.)

5. Egy szabályos dobókockát feldobunk 200-szor. Jelölje S_n a dobott hatosok számát. Adjuk meg pontosan, majd a de Moivre– Laplace tétellel közelítve a $\mathbf{P}(30 < S_n \leq 40)$ valószínűséget!

6. Egy szabályos érmét n-szer földobunk. Adjuk meg a

$$\mathbf{P}\left\{\frac{n}{2} - c\sqrt{n} < S_n < \frac{n}{2} + c\sqrt{n}\right\}$$

valószínűségek közelítő értékét! Mit kapunk a $c \to 0$ ill. $c \to \infty$ esetben?

7. Egy étteremben kétféle menü közül lehet választani. A vendégek 5/6 valószínűséggel A menüt, 1/6 valószínűséggel B menüt választanak. Egy adott napon 500 vendég érkezik. A vendéglős 420 A és 100 B menüt készített elő. Feltételezve, hogy a vendégek egymástól függetlenül választanak, mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut olyan menü, amilyet kér?

8. Egy szerencsejátékon a nyerési esélyed 1/11. Ha nyersz, visszakapod a feltett tétet és még nyereményként annak kilencszeresét. Elegendő sok kezdőtőkével indulva ezer alkalommal felteszel 1–1 petákot. Mi a valószínűsége, hogy ezer játszma után még legalább annyi pénzed van, mint kezdetben volt?

9. Chicago és Los Angeles között két vasútvonal van, melyek mindegyikén egy-egy vonat közlekedik. Mindkét vonat egyidőben indul, lényegében egyformán kényelmes és k személyes. Tegyük fel, hogy 1000 utas egymástól függetlenül $1/2-1/2$ valószínűséggel választ vonatot. Legalább mekkora legyen az ülőhelyek k száma, hogy 0,01-nél kisebb legyen annak a valószínűsége, hogy lesz olyan utas, akinek nem jut ülőhely?

10. Budapesten meg akarják állapítani a dohányosok p arányát. Ehhez kiválasztanak n egyént úgy, hogy minden választásnál mindenki ugyanakkora valószínűséggel kerül kiválasztásra, és csak ezek közt nézik meg a dohányosok k számát. Legalább mekkora legyen az n, hogy a kapott $p' = k/n$ arány legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 0,005 hibával közelítse a valódi p arányt, akármi is $p \in (0,1)$?

11. A $[0,1]$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott ponttal három részre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a. mindhárom szakasz hossza nagyobb, mint 1/4?

b. mindhárom szakasz hossza kisebb mint 1/2?

c. a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

d. a szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

12. Válasszuk az X, Y pontokat egymástól függetlenül a $(0,1)$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy az

$$x^2 + Xx + Y = 0$$

egyenletnek valós gyökei lesznek?

13. András és Betti munkaideje egymástól függetlenül egy-egy du. 4 és 6 közötti egyenletes eloszlású időpontban ér véget. Munkaidejük végeztével mindketten elmennek egy, munkahelyüktől azonos távolságra levő kávézóba, ahol elfogyasztanak egy csésze kávét. András esetében ez 10 perc, Betti esetében 20. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

14. Tekintsünk egy egységnyi kerületű kört, és ennek egy rögzített pontját. Válasszunk további két pontot a körvonalon egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a három pont által meghatározott háromszög fedi a kör középpontját?

15. Egy egységnégyzet két szemközti oldalán véletlenül választunk egy-egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy távolságuk négyzete kisebb, mint 3/2?

16. Egy kör kerületén egymástól függetlenül, egyenletesen választunk 4 pontot: A, B, C, D. Mennyi a valószínűsége, hogy az AB és CD húrok metszik egymást? *(KöMaL 2012)*

17. Egy kör kerületén válasszunk n pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka tartalmazza a kör középpontját? Mennyi ez a valószínűség, ha a pontokat a kör belsejében választjuk függetlenül, egyenletes eloszlás szerint?

18. Egy négyzet belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a választott pont közlebb van valamelyik oldalhoz, mint 1/4?

Valószínűségszámítás

3. feladatsor

Feltételes valószínűség, függetlenség

1. Az 52 lapos franciakártyából kiosztanak 13 lapot. Legyen A az az esemény, hogy pontosan 2 ászt kaptunk. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(A|B_i)$ feltételes valószínűségeket, ha

(a) B_1 azt jelenti, hogy van legalább egy ászunk;

(b) B_2 azt jelenti, hogy a kőr ász nálunk van;

(c) B_3 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első ász;

(d) B_4 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első a kőr ász.

2. Elhelyezünk N golyót n dobozba úgy, hogy az összes n^N elhelyezés egyformán valószínű. Feltéve, hogy az első dobozban van golyó, mennyi a valószínűsége, hogy K golyó van benne?

3. Egy kockával addig dobunk, míg először kapunk hatost. Feltéve, hogy a szükséges dobások száma páros, mennyi a valószínűsége, hogy kétszer kellett dobnunk?

4. Tegyük fel, hogy egy alkatrész meghibásodásának valószínűsége a $(t, t+h)$ intervallumban, feltéve, hogy t ideig működött, $a(t)h+o(h)$. Határozzuk meg annak a $p(t)$ valószínűségét, hogy az alkatrész legalább t ideig működött!

5. Aladár a pénzét három egyforma borítékban tartja. Az elsőben két ezerforintos, a másodikban egy ezer- és egy kétezerforintos, a harmadikban egy ezer és három kétezerforintos van. Aladár találomra kivesz egy borítékot, és onnan egy bankjegyet. Mennyi a valószínűsége, hogy ezerforintost húzott?

6. Van n darab urnánk, melyek mindegyikében a fehér és b piros golyó van. Az első urnából kihúzunk egy golyót, áttesszük a másodikba; majd a másodikból húzunk egyet és átrakjuk a harmadikba, … . Végül az n-edik urnából húzunk egyet. Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy az utolsó urnából fehér golyót húzunk, feltéve, hogy az elsőből fehéret húztunk. Igazoljuk, hogy

$$p_n = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}(a+b+1)^{1-n}.$$

7. Feldobunk n egyforma dobókockát, melyeken a hatos valószínűsége $p \in (0, 1)$. Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy páratlan sok hatost dobtunk. Határozzuk meg p_n-et!

8. Egy fiú és egy lány megbeszéli, hogy két utca kereszteződésénél találkoznak egy meghatározott időpontban. Elfelejtik megbeszélni, hogy a négy sarok közül melyiknél várnak egymásra. Az útkereszteződés nagyon forgalmas, nem lehet átlátni a többi sarokra. Mindketten pontosan érkeznek, és ha a másik nincs ott, akkor 2,5 perc után átmennek a szomszédos sarkok valamelyikére, 1/2–1/2 valószínűséggel. Ez fél percet vesz igénybe, majd ha megint nem találkoztak, akkor 2,5 perc után megint sarkot váltanak. Először mindketten 1/4 valószínűséggel választanak sarkot. Természetesen az is találkozásnak számít, ha egymással szembe jönnek az úttesten.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy az első percen belül találkoznak?

(b) Mennyi annak a p_n valószínűsége, hogy az első $3n$ percen belül találkoznak?

(c) Mennyi annak az r_n valószínűsége, hogy pontosan a $3n$-edik percben találkoznak?

(d) Igazoljuk, hogy egy valószínűséggel véges időn belül találkoznak.

9. Szindbádnak jogában áll N háremhölgy közül egyet kiválasztania oly módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat. Tegyük fel, hogy egyértelmű szigorúan monoton szépségi sorrendet tud felállítani, és a háremhölgyek bármely elvonulási sorrendje egyformán valószínű. Szindbád k hölgyet elenged, majd kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonultnál. Mennyi a valószínűsége, hogy a legszebb hölgyet választja ki? Milyen k esetén lesz ez a valószínűség a legnagyobb, ha N elég nagy?

10. Shanille O'Keal büntetőket dobál egy kosárpályán. Az elsőt bedobja, a másodikat nem. Ezek után annak a valószínűsége, hogy egy büntetőt bedob, megegyezik az eddig sikeres dobásainak részarányával. Mi annak a valószínűsége, hogy az első 100 dobásból pontosan 50 sikeres?

11. Egy cukrászdában 3 cukrász A, B és C süt süteményt, és a sütemények 2, 3 illetve 5%-át rontják el. A sütemények 50%-át A, 30 %-át B, 20%-át pedig C készíti. Mennyi a valószínűsége, hogy A sütötte a süteményt, feltéve, hogy az rossz?

12. A sztochasztika tanszék egyik oktatója p valószínűséggel szokott bejönni a tanszékre. Ha ismerőseinek azt mondta, hogy aznap bejön, akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k-an keresik telefonon $e^{-\mu}\mu^k/k!$, ha pedig azt mondta, hogy nem, akkor $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k = 0, 1, \ldots$, $0 < \lambda < \mu$. Feltéve, hogy k hívás érkezett, mennyi a valószínűsége, hogy aznap bent volt az oktató? Vizsgáljuk a $k \to \infty$ esetet.

13. Legyen $(1-p)p^n$ annak a valószínűsége, hogy egy almafán n virág van, $n = 0, 1, \ldots$. Tegyük fel, hogy minden virágból α valószínűséggel lesz érett gyümölcs. Feltéve, hogy a fán r alma van, mennyi a valószínűsége, hogy n virág volt?

14. Pinokkiónak kilenc akadályon kell sikerrel túljutnia, hogy fabábuból kisfiúvá változhasson. Ha egy akadályon elbukik, akkor vissza kell mennie az előzőhöz, ha az elsőn bukik el, örökre fabábu marad. Pinokkió nem tanul a kudarcokból, ezért az egyes akadályokon a siker valószínűsége $1/10, 2/10, \ldots$, $9/10$. Milyen sorrendben helyezze el a Kékhajú Tündér az akadályokat, hogy Pinokkió a legnagyobb eséllyel lehessen igazi kisfiú. Mennyi ekkor a valószínűség? *(KöMaL, 2001, B.3441)*

15. Egy egységnyi hosszú szakaszon találomra választunk kettő pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét pont a szakasz egy előre adott végpontjához van közelebb, ha tudjuk, hogy a két választott pont távolsága kisebb, mint 1/3?

16. Jókedvében Mátyás király kegyelmet ajánl velencei rabjának, ha a rab két egyforma urna közül az egyikből kihúz egy ezüstgolyót. Megengedi neki, hogy 50 ezüst- és 50 aranygolyót úgy osszon el a két urnába, ahogy akarja. Ezután Mátyás udvari bolondja találomra választ egy urnát, a rab pedig abból találomra egy golyót. Hogyan ossza el a rab a két urnába a golyókat, ha kedves az élete? Ekkor mekkora az esélye a szabadulásra?

17. Háromszor feldobunk egy szabályos érmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Függetlenek-e A és B.

18. Adjunk példát olyan A, B, C eseményekre, melyek páronként függetlenek, de nem függetlenek.

19. Válasszunk találomra az $1, 2, \ldots, n$ számok közül úgy, hogy mindegyiket $1/n$ valószínűséggel választjuk. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a választott szám p-vel osztható.

(a) Igazoljuk, hogy ha p_1 és p_2 relatív prím és $p_1p_2|n$, akkor A_{p_1} és A_{p_2} függetlenek.

(b) Igazoljuk, hogy

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

ahol $\varphi(n)$ az Euler–féle függvény, azaz $\varphi(n)$ az n-nél kisebb n-hez relatív prím pozitív egészek száma.

20. Legalább hány lottószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy egy sorsolásnál a telitalálat valószínűsége legalább 1/2 legyen? Legalább hány hétig kell játszani egyetlen szelvénnyel, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer volt telitalálatunk legalább 1/2 legyen?

Valószínűségszámítás

4. feladatsor

Véletlen változók, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény

1. Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

(a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{1+x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$

(b) $F(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$

2. Milyen a, b értékek esetén lesz eloszlásfüggvény

(a) $F(x) = a + b \arctan x$?

(b) $F(x) = \mathrm{e}^{-a\mathrm{e}^{-bx}}$?

3. Legyen $F(x)$ eloszlásfüggvény. Igazoljuk, hogy

$$G_1(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{és} \quad G_2(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} F(t)\,\mathrm{d}t$$

is az!

4. Adjunk példát olyan F eloszlásfüggványre, mely tiszta ugrófüggvény, és bármely $a < b$ esetén $F(b) - F(a) > 0$!

5. Az alábbi számsorozatok közül melyek alkotnak valószínűségeloszlást?

(a) $p^k q^2$, ahol $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$, $k = 1, 2, \ldots$;

(b) $\frac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$;

(c) $3^k / k! \mathrm{e}^{-3}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

6. Sűrűségfüggvény-e?

(a) $f(x) = (I_{(0,1)}(x) \sin x)/2$;

(b) $f(x) = I_{(1,\infty)}(x) x^{-2}$;

(c) $f(x) = I_{(0,\infty)}(x) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, ahol $\lambda > 0$.

(d) $f(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}$.

7. Határozzuk meg az ötöslottón kihúzott legkisebb szám eloszlását, várható értékét és szórását!

8. A $(0,1)$ intervallumon találomra kijelölünk három pontot. Határozzuk meg a középső nullától vett távolságának eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

9. Válasszunk az egységnégyzetben egy pontot véletlenszerűen. Legyen X a pontnak a négyzet határától vett távolsága. Adjuk meg X eloszlásfüggvényét, várható értékét, szórását!

10. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ véletlen változók függetlenek és azonos eloszlásúak, melyre $\mathbf{P}(X_i = k) = 1/3,\ k \in \{0,1,2\}$. Adjuk meg az $Y = X_1 X_2 \cdots X_n$ szorzat eloszlását!

11. Válasszunk két számot egymástól függetlenül az egyenletességi hipotézis szerint a $(-1,1)$ intervallumból! Adjuk meg a két szám maximumának eloszlásfüggvényét! Számoljuk ki a várható értéket és a szórást is!

12. Egy telefonfülke előtt állunk, és várjuk, hogy az előttünk beszélő befejezze a beszélgetést. Az illető véletlentől függő ideig beszél, az időtartam sűrűségfüggvénye (percben mérve) $\mathrm{e}^{-(x/3)}/3$, $x > 0$.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés 3 percnél tovább tart?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés $t+3$ percnél tovább tart, feltéve, hogy t percnél tovább tart?

13. Tegyük fel, hogy az X vv örökifjú, azaz tetszőleges $t, s > 0$ esetén

$$\mathbf{P}\left\{X > t+s | X > t\right\} = \mathbf{P}\left\{X > s\right\}.$$

Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét!

14. Legyen a X véletlen változó sűrűségfüggvénye $f(x) = c/x^2$, ha $x > 1$.

(a) Határozzuk meg c értékét!

(b) Adjuk meg X várható értékét (ha létezik)!

(c) Mennyi $\mathbf{P}(X > 4)$?

(d) Legyen $Y = 1/X$. Adjuk meg Y eloszlás–, és sűrűségfüggvényét!

15. Egy szabályos kockával n-szer dobunk. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Határozzuk meg az együttes eloszlásukat!

16. Valamely növényfajta magjaiból álló mintában a hibás magok száma λ paraméterű Poisson–eloszlású vv. Minden mintát 3 technikus vizsgál meg egymás után, hogy eltávolítsák a hibás magokat. Az i-edik technikus $p_i < 1$ valószínűséggel veszi észre a hibás magokat; döntései az egyes magokra nézve függetlenek, és az egyes technikusok is egymástól függetlenül döntenek. Határozzuk meg az el nem távolított hibás magok eloszlását!

17. Egy városban 200 taxi közlekedik. Telefonon taxit rendelünk, és ha van szabad taxi, akkor a központ a legközelebbit hozzánk küldi. Feltesszük, hogy a taxik egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint helyezkednek el a városban, és mindegyik egymástól függetlenül $2/3$ valószínűséggel foglalt. Továbbá egy taxi helyzete a városon belül független attól, hogy foglalt-e vagy sem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legközelebbi szabad taxi 1 km-es körzetünkben legyen (mely nem nyúlik ki a városból), feltéve, hogy van szabad taxi? A város területe $28,26\,\mathrm{km}^2$.

18. Egy szabályos kockával N-szer dobunk, ahol $N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ vv. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Adjuk meg az együttes eloszlást!

19. Legyen az (X, Y) vv. eloszlása egyenletes az egységkörben. Határozzuk meg az együttes eloszlásfüggvényt és a peremeloszlások sűrűségfüggvényeit!

20. Legyen az X és Y vv-k együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y), & \text{ha}(x,y) \in (0,1)^2\,, \\ 0, & \text{különben}\,. \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat!

21. Láttuk, hogy abszolút folytonos vvv peremeloszlásai abszolút folytonosak. Igazoljuk, hogy ez nem megfordítható, azaz mutassunk X, Y abszolút folytonos vv-kat, melyek együttes eloszlása nem abszolút folytonos!

22. Lássuk be, hogy ha az (X, Y) vvv abszolút folytonos, akkor $\mathbf{P}(X = Y) = 0$. Az együttes sűrűségfüggvénnyel írjuk fel a $\mathbf{P}(X \le Y)$ valószínűséget!

23. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független vv-k $F_1, F_2, \ldots, F_n$ eloszlásfüggvénnyel. Adjuk meg az $m_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ vv-k eloszlását!

Valószínûségszámítás

5. feladatsor

Várható érték, szórás, nevezetes eloszlások

1. Legyen $X_n \sim \text{Binom}(n, p_n)$, ahol $np_n \to \lambda > 0$. Határozzuk meg X_n határeloszlását, azaz a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X_n = k\}$ értékeket!

2. Geometriai eloszlás. Legyen $\mathbf{P}(A) = p \in (0, 1)$. Egy kísérletet addig ismétlünk, míg az A esemény be nem következik. Jelölje X a szükséges ismétlések számát. Adjuk meg X eloszlását, várható értékét, szórását!

3. Legyen X pozitív egész értékû véletlen változó, melyre teljesül a diszkrét örökifjú tulajdonság, azaz

$$\mathbf{P}\{X > k + l | X > l\} = \mathbf{P}\{X > k\}.$$

Mutassuk meg, hogy $X \sim \text{Geom}(p)$!

4. Legyenek X, Y, Z független, $\text{Geom}(p)$ eloszlású vv-k. Adjuk meg a következõ valószínûségeket:

(a) $\mathbf{P}(X = Y)$;

(b) $\mathbf{P}(X \geq 2Y)$;

(c) $\mathbf{P}(X + Y \geq Z)$.

5. Legyen $U = \min\{X, Y\}$ és $V = X - Y$, ahol X, Y független, $\text{Geom}(p)$ vv-k. Igazoljuk, hogy U és V függetlenek. [Ez jellemzi is a geometriai eloszlást.]

6. Egy urnában egy piros és egy fehér golyó van. Visszatevéssel húzunk az urnából, minden húzás után még egy piros golyót teszünk az urnába. Jelölje X_f annak a kísérletnek a sorszámát, amikor elõször húztunk fehéret. Adjuk meg X_f eloszlását, várható értékét!

7. Legyen X nemnegatív egész értékû vv, és tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(X) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq i).$$

8. Egy halastóban N hal van. Kihalászunk M halat, megjelöljük õket, és visszaeresztjük a tóba. Bizonyos idõ elteltével, miután jól elkeveredtek, kihalászunk n-et. Ezek között legyen a megjelöltek száma X. A teljes halállomány N meghatározására az $Mn/(X + 1)$ becslést használjuk.

Számítsuk ki ennek a várható értékét és szórását! Miért nem a logikusabb Mn/X becslést használjuk?

9. Kupongyûjtõ probléma. Egy N különbözõ elembõl álló sokaságból visszatevéses mintát veszünk. Jelölje S_r azt a véletlen számot, ahány elemet kellett húznunk, hogy kapjunk r különbözõ elemet. Határozzuk meg S_r várható értékét, szórását, majd adjunk ezekre kezelhetõ aszimptotikus egyenlõséget.

Útmutatás: Vezessük be az $X_k = S_{k+1} - S_k$ változót.

10. Egy urnában N golyó van, megszámozva 1-tõl N-ig. Visszatevéssel n elemû mintát veszünk. Jelölje X a legnagyobb mintaelemet. Adjuk meg X eloszlását, várható értékét, és az utóbbira adjunk aszimptotikát. Ha N értéke ismeretlen, hogyan lehetne becsülni?

11. Egy gombafajta spórái nyolcelemû lánc alakjában keletkeznek. A lánc különbözõ részekre szakadhat, mind a hét lehetséges helyen egymástól függetlenül p valószínûséggel. Határozzuk meg az i spórából álló láncok várható értékét!

Egy tényleges kísérlet során 7251 spórát számoltak meg, melyek $N = 907$ láncból származtak (5 spóra elveszett). A spórák 1975 láncra szakadtak szét. Adjunk becslést p értékére!

12. Jelölje S_n n elem véletlen permutációja során a fixpontok számát. Határozzuk meg S_n várható értékét és szórását!

13. Vérvizsgálatot végeznek N embernél. Egyszerre k ember vérét összeöntik és analizálják. Ha az eredmény negatív, akkor egy vizsgálat elég k embernek, ha pozitív, akkor a k személyt egyenként is meg kell vizsgálni, és így $k+1$ vizsgálat kellett. A vizsgálat eredménye egymástól függetlenül p valószínûséggel pozitív.

(a) Mennyi a valószínûsége, hogy k ember vérét együtt vizsgálva, az eredmény pozitív?

(b) Jelölje X a szükséges vizsgálatok számát! Mennyi X várható értéke?

(c) Minimalizáljuk $\mathbf{E}(X)$-et k függvényeként!

(d) Lássuk be, hogy a kapott k közel van $1/\sqrt{p}$-hez, és a várható érték $2N\sqrt{p}$ körül lesz.

14. Legyen $f(x,y) = c(x+y)$, $0 \le x, y \le 1$, egy (X,Y) vektorváltozó sûrûségfüggvénye. Mennyi c értéke? Adjuk meg a peremeloszlásokat, várható érték vektort, kovarianciamátrixot! Számoljuk ki Xe^Y várható értékét!

15. Legyen X és Y független Poisson eloszlású véletlen változó λ illetve μ paraméterrel. Határozzuk meg $X+Y$ és XY várható értékét és szórását, valamint a két változó kovarianciáját.

16. Legyen az X és Y változók együttes sûrûségfüggvénye

$$f(x,y) = 6\mathrm{e}^{-2x-3y} \quad (x,y>0)\,,$$

0, különben. Határozzuk meg az együttes és marginális eloszlásfüggvényeket! Adjuk meg a kovarianciamátrixot!

17. Legyen X és Y együttes sûrûsége f, ahol

(a) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-x(1+y)}$, ha $x,y \geq 0$;

(b) $f(x,y) = 6xy^2$, ha $x,y \geq 0$ és $x+y \leq 1$;

(c) $f(x,y) = 2xy + x$, ha $x,y \in (0,1)$;

(d) $f(x,y) = (x+y)^2 - (x-y)^2$, ha $x,y \in (0,1)$.

Határozzuk meg a kovarianciamátrixot!

18. Egy kockát n-szer feldobunk. Mekkora az egyes és hatos dobások számának kovarianciája és korrelációja?

19. Egy könyvben, az egyes oldalakon levõ sajtóhubák száma Poisson(2) eloszlást követ. Határozzuk meg a sajtóhubák várható értékét és szórását!

20. Egy szövet 100 méterében átlagosan 5 hiba van. Három méteres darabokra vágnak 300 m hosszú szövetet. Várhatóan hány hibátlan darab lesz?

21. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású, átlagosan 2 évig mûködik. Mennyi a valószínûsége, hogy legalább egy évig fog mûködni egy új villanykörte? És egy már fél éve mûködõ? Mennyi idõt él meg a villanykörték 90%-a?

22. Egy munkadarabokat készítõ gép 40 cm-re van beállítva. A hiba normális eloszlást követ 0 várható értékkel. Annak a valószínûsége, hogy egy munkadarab nagyobb, mint 40,5 cm, 0,05. Mennyi a szórás?

Valószínűségszámítás

6. feladatsor

Várható érték; változótranszformációk

1. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Visszatevés nélkül kihúzunk 10 golyót. Határozzuk meg a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórását!

2. Egy szabályos érmével 100-szor dobunk. Jelölje X a különböző FF sorozatok számát. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!

3. A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlást követ. A macskák 10%-a könnyebb, mint 1,5 kg, és 20%-a nehezebb, mint 7 kg. Mekkora a 6 kg-nál nehezebb macskák aránya?

4. Határozzuk meg $1/(X+1)$ várható értékét, ha

(a) $X \sim \text{Binom}(n, p)$;

(b) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$;

(c) X geometriai eloszlású;

(d) X hipergeometriai eloszlású.

5. Legyen $X \sim \text{Egyenletes}(-1, 1)$ eloszlású vv. Határozzuk meg a következő vv-k sűrűségfüggvényeit:

(a) $|X|$;

(b) X^2;

(c) e^X.

6. Legyen $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ eloszlású vv. Határozzuk meg a következő vv-k sűrűségfüggvényeit:

(a) $2X+3$;

(b) X^3;

(c) $\sqrt{X}$.

7. Legyen $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf, és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a csúcsok egy sorrendje. Minden csúcsra feldobunk egy szabályos érmét, ha az fej akkor a csúcs az A halmazba, különben a B halmazba kerül. Határozzuk meg az A és B halmazok közt futó élek számának várható értékét!

8. A $G = (V, E)$ gráf jó síkra rajzolása egy olyan lerajzolás, ahogy mindenki lerajzol egy gráfot, azaz két él véges sok pontban metszi egymást és egy ponton kettőnél több él nem halad át. Egy gráf metszési száma, $\mathrm{cr}(G)$, a lehető legkevesebb metszést adó jó lerajzolásnál keletkezett metszések száma. Igazoljuk, hogy

$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{e^3}{64v^2},$$

ahol e az élek v a csúcsok száma. (Ajtai, Chvatal, Newborn, Szemerédi)

Útmutatás: Tekintsünk egy véletlen G' részgráfot, melyben minden csúcsot egymástól függetlenül $p \in (0,1)$ valószínűséggel tartunk meg. Jelölje X a G optimális lerajzolásában a G' metszéseinek számát.(Nyilván $X \geq \mathrm{cr}(G')$.) Határozzuk meg az $\mathbf{E}(v(G')), \mathbf{E}(e(G'))$ és $\mathbf{E}(X)$ értékeket, alkalmazzuk az Euler–tételből adódódó $\mathrm{cr}(G) \geq e - 3v + 6$ becslést, végül legyen $p = 4v/e$.

9. Ramsey tételkör. $R(k)$ a legkisebb olyan N, hogy ha egy N csúcsú teljes gráf éleit pirossal és kékkel színezzük, akkor lesz egyszínű k-klikk. Mutassuk meg, hogy $2^{k/2} \leq R(k) \leq 2^{2k}$ (Erdős)!

Útmutatás: A fölső becslés konstruktív, nem kell hozzá véletlen. Az alsó becsléshez színezzük véletlenül az éleket, és számoljuk ki a k-klikkek számának várható értékét! (Konstruktív bizonyítás az alsó becslésre nem ismert.)