Sztochasztikus folyamatok

Pap Gyula, Szűcs Gábor

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet, Sztochasztika Tanszék

Utolsó frissítés: 2014. február 8.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Sztochasztikus folyamatok

1.1. Sztochasztikus folyamatok

1.1.1. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ mérhető tér, $X_t : \Omega \to \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{T}$, véletlen elemeknek (azaz $\mathcal{A}$-$\mathcal{F}$ mérhető függvényeknek) egy nem üres $\mathbb{T}$ halmazzal indexezett gyűjteménye. Ekkor az $\mathbb{X}=\{X_t : t\in\mathbb{T}\}$ rendszert **sztochasztikus folyamatnak** nevezzük. A véletlen elemek lehetséges $x \in \mathcal{X}$ értékeit **állapotoknak** hívjuk, az $\mathcal{X}$ halmaz a folyamat **állapottere** vagy **fázistere**. A $\mathbb{T}$ halmaz a folyamat **indexhalmaza** vagy **paraméterhalmaza**, és a t indexet **paraméternek** nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat a $t \in \mathbb{T}$ időpontban az $x \in \mathcal{X}$ **állapotban van**, ha a realizált $\omega \in \Omega$ kimenetel mellett $X_t(\omega) = x$.

Ezen előadás keretei között nem foglalkozunk ilyen általánosságban sztochasztikus folyamatokkal. Nálunk az indexhalmaz álltalában a pozitív félegyenes egy $\mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$ részhalmaza lesz, ugyanis a folyamatokkal különféle véletlen rendszerek időbeli viselkedését kívánjuk leírni. Ebben az esetben a t paramétert **időparaméternek**, vagy röviden csak **időnek** szokás nevezni. Mivel a valós számok halmazán adott egy természetes rendezés, beszélhetünk egy folyamat jövőjéről illetve múltjáról. Amennyiben egy rögzített $t \in \mathbb{T}$ értéket tekintünk jelen időpillanatnak, akkor az $\{X_s : s > t\}$ változók a folyamat jövője, az $\{X_s : s < t\}$ halmaz pedig a folyamat múltja.

A sztochasztikus folyamat állapotterére is teszünk megszorítást. Mi jellemzően valós értékű (ritkán valós vektor értékű) folyamatokkal foglalkozunk, tehát számunkra az állapottér egy $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ (időnként $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$) halmaz lesz. Jelölje rendre $\mathcal{B}$ és $\mathcal{B}^d$ az $\mathbb{R}$ illetve az $\mathbb{R}^d$ tér Borel halmazait. Ekkor az állapottéren a $\mathcal{B}|_{\mathcal{X}} := \mathcal{B} \cap \mathcal{X}$ (magasabb dimenziós esetben a $\mathcal{B}^d|_{\mathcal{X}} := \mathcal{B}^d \cap \mathcal{X}$) Borel halmazok σ-algebrát alkotnak. A továbbiakban legyen $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ a pozitív egészszámok halmaza, és $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$ a nemnegatív egészek halmaza.

1.1.2. Példa. Rögzítsünk egy tetszőleges $p\in(0,1)$ valószínűséget, és tekintsünk $Z_1, Z_2, \dots$ független és azonos eloszlású változókat

$$P\big(Z_n = 1\big) = p\,, \qquad P\big(Z_n = -1\big) = 1 - p\,, \qquad n = 1,2,\dots$$

eloszlással. Legyen X_n, $n = 0,1,\dots$, a kapcsolatos részletösszeg-sorozat, azaz

$$X_0 = 0\,, \qquad X_n = Z_1 + \dots + Z_n\,, \qquad n = 1,2,\dots$$

Ekkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$, és a Z_{n+1} változó független ettől a σ-algebrától. Ez azt jelenti, hogy az $X_0, X_1, \dots, X_n$ változók értékétől függetlenül

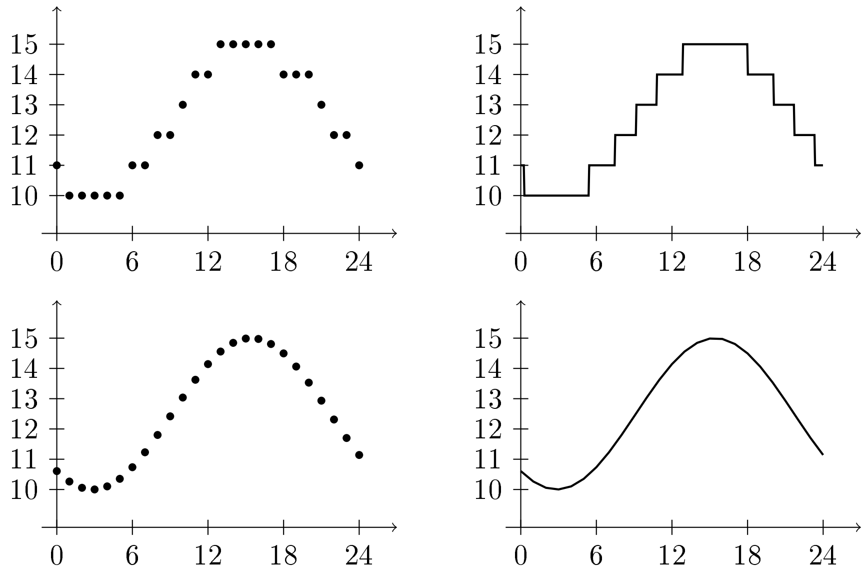
$$P\big(X_{n+1} = X_n + 1\big) = P\big(Z_{n+1} = 1\big) = p\,, \qquad P\big(X_{n+1} = X_n - 1\big) = P\big(Z_{n+1} = 1\big) = 1 - p\,.$$

Azt kapjuk, hogy az $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{T} = \mathbb{N}_0\}$ sztochasztikus folyamat a valós egyenes egész rácspontjain lépked ($\mathcal{X} = \mathbb{Z}$), determinisztikusan a 0 pontból indul, és minden egyes időpontban a korábbi lépésektől függetlenül p valószínűséggel eggyel jobbra ugrik, és $1-p$ valószínűséggel pedig eggyel balra. Az $\mathbb{X}$ folyamatot **(egydimenziós) véletlen bolyongásnak** nevezzük. Ha $p = 1/2$, akkor **szimmetrikus**, egyébként **nem szimmetrikus bolyongásról** beszélünk.

1.1.3. Példa. Ha X_t, $t \in \mathbb{T}$, független és azonos eloszlású véletlen változó nulla várható értékkel, akkor az $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ sztochasztikus folyamatot **fehér zajnak** nevezzük. A fehér zaj a hibának, a külső zavaró tényezőnek a matematikai modellje. Gyakori probléma, hogy mérni kívánunk egy $\mathbb{Y} = \{Y_t : t \in \mathbb{T}\}$ mennyiséget, de ezt eltorzítja a zaj, és ezáltal csak az $\mathbb{Y} + \mathbb{X} = \{Y_t + X_t : t \in \mathbb{T}\}$ folyamatot ismerjük. Ilyenkor a feladat a zaj leválasztása az összegfolyamatról, melyet **szűrési problémának** nevezünk.

1.1.4. Definíció. Legyen $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T} \subseteq [0, \infty)\}$ valós vagy valós vektor értékű sztochasztikus folyamat. Az $\mathbb{X}$ folyamat **diszkrét idejű**, ha $\mathbb{T}$ megszámlálható halmaz. Ekkor általában $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$, tehát a folyamat véletlen változóknak vagy vektorváltozóknak egy sorozata. A folyamat **folytonos idejű**, ha $\mathbb{T}$ a pozitív félegyenes egy véges vagy végtelen részintervalluma. Ekkor jellemzően $\mathbb{T} = [0, \infty)$ vagy $\mathbb{T} = [0,1]$. A sztochasztikus folyamat **megszámlálható** (esetleg **véges**) **állapotterű**, ha az $\mathcal{X}$ állapottér megszámlálható (vagy véges) halmaz. Ekkor az X_t véletlen változók diszkrétek. A folyamat **nem megszámlálható állapotterű**, ha $\mathcal{X}$ nem megszámlálható. Nálunk ebben az esetben az X_t változók abszolút folytonosak lesznek. Az $\mathbb{X}$ folyamatnak egy adott $\omega \in \Omega$ kimenetelhez tartozó **trajektóriája** a $\mathbb{T} \to \mathcal{X}$, $t \mapsto X_t(\omega)$, determinisztikus függvény.

1.1.5. Példa. Megmérjük a külső (véletlen) hőmérsékletet egy $\mathbb{T} \subseteq [0,24]$ indexhalmaz által meghatározott időpontokban, és legyen X_t, $t \in \mathbb{T}$, a mérések eredménye. Ekkor az $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ rendszer egy sztochasztikus folyamat. Ha a hőmérsékletet mondjuk óránként egyszer mérjük meg, akkor $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}_0$ diszkrét halmaz, tehát $\mathbb{X}$ diszkrét idejű folyamat. Ha a hőmérsékletet folyamatosan mérjük, tehát $\mathbb{T} = [0,24]$, akkor a folyamat folytonos idejű. Ha a mérést egy digitális hőmérővel végezzük, akkor a lehetséges értékek halmaza elméletileg megszámlálható, gyakorlatilag véges, (mivel a digitális hőmérő is elolvad elegendően magas hőmérsékleten.) Ha analóg hőmérőt használunk, és képesek vagyunk az értékeket tetszőleges pontossággal leolvasni, akkor a folyamat állapottere nem megszámlálható.



1.2. Filtráció és megállási idő

Tegyük fel, hogy adott egy véletlen kísérlet, és az ezt leíró $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező. Tegyük fel továbbá, hogy valamilyen forrásból rendelkezünk valamennyi információval arra nézve, hogy mi lehet a kísérlet aktuális kimenetele. Ez nem feltétlenül jelenti azt, hogy pontosan tudjuk, melyik $\omega \in \Omega$ következett be, csupán annyit, hogy képesek vagyunk szűkíteni a lehetséges kimenetelek körét. Ebben az alfejezetben néhány olyan eszközt vezetünk be, melyek segítségével ez az információ matematikailag kezelhetővé válik.

1.2.1. Definíció. Legyen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ tetszőleges rész-σ-algebra. A továbbiakban azt mondjuk, hogy **ismerjük az $\mathcal{F}$ σ-algebrát**, ha a rendelkezésre álló információ elegendő ahhoz, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ eseményről el tudjuk dönteni, hogy a kísérlet aktuális végrehajtásakor bekövetkezett, vagy nem.

1.2.2. Lemma. *Legyen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ tetszőleges rész-σ-algebra, és tegyük fel, hogy az $\{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ véletlen változók generálják $\mathcal{F}$-et, tehát $\mathcal{F} = \sigma(X_t : t \in \mathbb{T})$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *Ismerjük az $\mathcal{F}$ σ-algebrát.*

(ii) *Ismerjük minden X_t, $t \in \mathbb{T}$, változó értékét.*

(iii) *Ismerjük minden $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}$ mérhető véletlen változó értékét.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(iii) Tegyük fel, hogy ismerjük az $\mathcal{F}$ σ-algebrát, és legyen $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ tetszőleges $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}$ mérhető véletlen változó. Ekkor minden $y \in \mathbb{R}$ esetén $\{y\} \in \mathcal{B}$, amiből a mérhetőség miatt

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y\} = Y^{-1}\big(\{y\}\big) \in \mathcal{F} .$$

Ezt azt jelenti, hogy minden egyes y értékről el tudjuk dönteni, hogy az $\{Y = y\}$ esemény bekövetkezett vagy nem, amiből már következik, hogy ismerjük az Y változó értékét.

(iii)⇒(ii) Azonnal következik abból a tényből, hogy az X_t, $t\in\mathbb{T}$, változók mérhetőek az általuk generált σ-algebrára nézve.

(ii)⇒(i) Legyen $\mathcal{F}'\subseteq\mathcal{A}$ azon események a halmaza, melyekről el tudjuk dönteni, hogy bekövetkeztek vagy nem, ha ismerjük az X_t, $t\in\mathbb{T}$, változók értékét. Nyilvánvaló, hogy az $\mathcal{F}'$ halmazrendszer σ-algebra, mely tartalmazza az $\{X_t\in B\}=X_t^{-1}(B)$ eseményt minden $B\in\mathcal{B}$ és $t\in\mathbb{T}$ mellett. Ekkor

$$\mathcal{F}=\sigma(X_t:t\in\mathbb{T})\subseteq\mathcal{F}'\,,$$

vagyis az X_t, $t\in\mathbb{T}$, változók ismeretében bármely $A\in\mathcal{F}$ eseményről el tudjuk dönteni, hogy bekövetkezett-e. □

1.2.3. Példa. Tekintsük azt a kísérletet, hogy egymástól függetlenül feldobunk két szabályos dobókockát. Ezt a kísérletet leírja az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mező, ahol

$$\Omega=\big\{(k,l):k,l=1,\dots,6\big\}\,,\qquad \mathcal{A}=2^{\Omega}\,,\qquad P\big(\{\omega\}\big)=1/36\,,\quad \omega\in\Omega\,.$$

Legyen $X(\omega)=k$, $Y(\omega)=l$, $\omega=(k,l)\in\Omega$, a két dobás értéke, továbbá tekintsük az

$$\mathcal{F}=\big\{B\times\{1,2,3,4,5,6\}:B\subseteq\{1,\dots,6\}\big\}\subseteq\mathcal{A}$$

σ-algebrát. Ekkor $\mathcal{F}=\sigma(X)$, tehát $\mathcal{F}$ ismerete ekvivalens X aktuális értékének ismeretével. Ha Z jelöli az X változó kettővel vett maradékát, akkor Z szintén $\mathcal{F}$ mérhető, tehát $\mathcal{F}$ ismeretében Z értékét is meg tudjuk mondani. Ez nem meglepő, hiszen Z az X változónak egy mérhető függvénye, és így X ismeretében Z értéke egyértelműen meghatározható. Viszont Z nem generálja az $\mathcal{F}$ σ-algebrát, tehát kevesebb információt tartalmaz, mint az $\mathcal{F}$. Ez a gyakorlatban úgy jelenik meg, hogy hiába ismerjük a Z változót, ebből az X dobás értékét nem tudjuk megmondani. Mivel Y független az X változótól, $\mathcal{F}$ ismeretében semmit sem tudunk mondani Y értékéről.

1.2.4. Definíció. Legyen $\{\mathcal{F}_t:t\in\mathbb{T}\}$ az $\mathcal{A}$ rész-σ-algebráinak egy bővülő rendszere, tehát legyen $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{A}$ σ-algebra olyan módon, hogy $\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t$, ha $s\leq t$. Ekkor az $\{\mathcal{F}_t:t\in\mathbb{T}\}$ rendszert **filtrációnak** vagy **szűrésnek** nevezzük. Az $\mathbb{X}=\{X_t:t\in\mathbb{T}\}$ sztochasztikus folyamat **adaptált** az $\{\mathcal{F}_t:t\in\mathbb{T}\}$ szűréshez, ha az X_t változó mérhető az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrára nézve minden $t\in\mathbb{T}$ esetén. A folyamat mindig adaptált az $\mathcal{F}_t^{\mathbb{X}}=\sigma(X_s:s\leq t)$ filtrációhoz, melyet az $\mathbb{X}$ által **generált filtrációnak** vagy **természetes filtrációnak** nevezünk.

Amikor egy filtrációval dolgozunk, akkor adott $t\in\mathbb{T}$ esetén $\mathcal{F}_t$ a t időpontban rendelkezésünkre álló információt tartalmazza, azt, hogy mit tudunk a múltról és a jelenről. Az $\mathcal{F}_t$ σ-algebra pontosan azoknak az eseményeknek a halmaza, melyek bekövetkezése csak a múlttól és a jelentől függ, és egy változó pontosan akkor $\mathcal{F}_t$ mérhető, ha értéke szintén csak a múlttól és a jelentől függ. A filtráció fogalma azt fejezi ki, hogy az időben előre haladva egyre több információt gyűjtünk, egyre több eseményről tudjuk eldönteni, hogy bekövetkezik-e, és ezáltal egyre több változónak tudjuk megmondani az értékét. Ha az $\mathbb{X}$ sztochasztikus folyamat adaptált a szűréshez, akkor minden t időpontban az $\mathcal{F}_t$ σ-algebra elég információt tartalmaz ahhoz, hogy megmondhassuk az X_s, $s\leq t$, változók értékét. Ha ezen túl a filtráció a folyamat által generált szűrés, akkor $\mathcal{F}_t$ pontosan annyi információt tartalmaz, mint amennyit az X_s, $s \le t$, változók. Fontos megjegyezni, hogy létezhet olyan Y változó, mely értékét akkor sem tudjuk meghatározni, ha minden $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{T}$, σ-algebrát ismerünk. Például, ha egy $\mathbb{X}$ folyamat által generált szűrést tekintünk, és az X_t, $t \in \mathbb{T}$, változók nem határozzák meg teljesen Y értékét, akkor ezt az értéket a teljes $\{\mathcal{F}_t^{\mathbb{X}} : t \in \mathbb{T}\}$ filtráció ismeretében sem tudjuk megmondani.

1.2.5. Példa. Legyen $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{T} = \mathbb{N}_0\}$ a véletlen bolyongás a generált filtrációval. Ekkor az $\mathcal{F}_n^{\mathbb{X}} = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ σ-algebra pontosan annyi információt tartalmaz, mint az $X_0, \ldots, X_n$ változók, hiszen $\mathcal{F}_n^{\mathbb{X}}$ ismerete ekvivalens $X_0, \ldots, X_n$ értékének ismeretével. Ebből jön, hogy $\{X_{20} = 4\} \notin \mathcal{F}_{10}^{\mathbb{X}}$, és hogy X_{20} nem mérhető az $\mathcal{F}_{10}^{\mathbb{X}}$ σ-algebrára nézve, ugyanis a 10. lépésben még nem rendelkezünk elég információval ahoz, hogy eldöntsük, hol leszünk 20. lépésben. Ezzel szemben $\{X_{20} = 4\} \in \mathcal{F}_{30}^{\mathbb{X}}$, és az X_{20} változó $\mathcal{F}_{30}^{\mathbb{X}}$ mérhető, hiszen a 30 időponthoz viszonyítva a 20 már a múlt, és a múltat ismerjük. Ha ezen túl Y az egész bolyongástól független változó, mondjuk egy kockadobás, akkor a teljes $\{\mathcal{F}_n^{\mathbb{X}} : n \in \mathbb{N}\}$ filtrációban sincs elég információ ahhoz, hogy megmondhassuk Y értékét.

Definíció szerint egy τ véletlen változó egy olyan $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, mely $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ mérhető. Ennek a definíciónak gyakran egy általánosabb változatát alkalmazzuk, mely megengedi, hogy a τ leképezés egy legfeljebb nulla mértékű halmazon végtelen értéket vegyen fel, vagy akár ne is legyen definiálva. A későbbi munkánk során szükségünk lesz ezen fogalomnak egy még általánosabb kiterjesztésére, melyben a τ akár egy pozitív mértékű halmazon is felveheti a végtelent értékül.

A továbbiakban jelölje $\overline{\mathbb{R}} := (-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ a plusz végtelen ponttal kibővített valós egyenest, és tekintsük a $\overline{\mathcal{B}} := \sigma(\mathcal{B}, \{+\infty\})$ generált σ-algebrát az $\overline{\mathbb{R}}$ téren. Könnyen megmutatható, hogy ekkor

$$\overline{\mathcal{B}} = \big\{ B, B \cup \{+\infty\} : B \in \mathcal{B} \big\} .$$

A valós függvénytanból ismert definíció szerint egy $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény mérhető, (precízebben: $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$ mérhető,) ha tetszőleges $D \in \overline{\mathcal{B}}$ Borel-halmaz esetén $\tau^{-1}(D) \in \mathcal{A}$. Legyen

$$\Omega_0 = \tau^{-1}(\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \Omega_+ = \tau^{-1}\big(\{+\infty\}\big) .$$

A következő állítás egy szükséges és elegendő feltétel a τ mérhetőségére.

1.2.6. Állítás. *Egy $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény pontosan akkor $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$ mérhető, ha $\Omega_+ \in \mathcal{A}$, és a $\tau|_{\Omega_0} : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ megszorítás $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ mérhető.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy a τ függvény $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$ mérhető. Ekkor $\{+\infty\} \in \overline{\mathcal{B}}$, amiből azonnal következik, hogy $\Omega_+ \in \mathcal{A}$. Mivel τ pontosan az Ω_0 eseményen véges, kapjuk, hogy tetszőleges $B \in \mathcal{B}$ esetén

$$(\tau|_{\Omega_0})^{-1}(B) = \tau^{-1}(B) \in \mathcal{A} ,$$

azaz a $\tau|_{\Omega_0}$ megszorítás $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ mérhető.

A fordított irányhoz tegyük fel, hogy $\Omega_+ \in \mathcal{A}$, és $\tau|_{\Omega_0}$ mérhető. Jegyezzük meg ismét, hogy tetszőleges $D \in \overline{\mathcal{B}}$ halmaz felírható $D = B$ vagy $D = B \cup \{+\infty\}$ alakban, ahol $B \in \mathcal{B}$ egy megfelelően választott Borel-halmaz. Most

$$\tau^{-1}(B) = (\tau|_{\Omega_0})^{-1}(B) \in \mathcal{A}\,,$$

valamint

$$\tau^{-1}\big(B \cup \{+\infty\}\big) = \tau^{-1}(B) \cup \tau^{-1}\big(\{+\infty\}\big) = (\tau|_{\Omega_0})^{-1}(B) \cup \Omega_+ \in \mathcal{A}\,,$$

ami azt jelenti, hogy τ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$ mérhető. □

1.2.7. Definíció. Egy $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ leképezés **kiterjesztett véletlen változó**, ha $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$ mérhető. Ha $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ nemnegatív, akkor létezik az

$$E\big(\tau \mathbb{1}_{\Omega_0}\big) = \int_{\Omega_0} \tau \,\mathrm{d}P \in [0, \infty]$$

várható érték, és a τ kiterjesztett véletlen változó **várható értéke** definálható az

$$E(\tau) := \int_{\Omega} \tau \,\mathrm{d}P = E\big(\tau \mathbb{1}_{\Omega_0}\big) + \infty \cdot P(\Omega_+) = \begin{cases} E\big(\tau \mathbb{1}_{\Omega_0}\big)\,, & P(\Omega_+) = 0\,, \\ +\infty\,, & P(\Omega_+) > 0\,, \end{cases}$$

formulával. (Legyen $\infty \cdot 0 = 0$.)

Megmutatható, hogy a véges véletlen változókhoz hasonlóan a kiterjesztett véletlen változók halmaza is zárt bizonyos műveletekre. Ha $h : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvény, akkor $h(\tau)$ is mérhető, valamint megszámlálható sok kiterjesztett véletlen változó összege, szorzata, infimuma és szuprémuma is kiterjesztett véletlen változó. Szintén megmutatható, hogy a most bevezetett várható érték lineáris és monoton kiterjesztése a véges véletlen változók várható értékének.

1.2.8. Definíció. Egy $\tau : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$ kiterjesztett véletlen változó **megállási idő** az $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T}\}$ filtrációra nézve, ha $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ minden $t \in \mathbb{T}$ esetén. Továbbá, τ megállási idő az $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ sztochasztikus folyamatra nézve, ha megállási idő a folyamat által generált filtrációra nézve.

Az előző definíció egy nagyon egyszerű és szép tulajdonságot takar. A τ változó akkor megállási idő, ha tetszőleges $t \in \mathbb{T}$ időpontban pusztán csak a múlt és a jelen ismeretében el tudjuk dönteni, hogy τ aktuális értéke a „múltban vagy a jelenben van”, azaz $\tau \le t$, vagy a „jövőben”, tehát $\tau > t$. Ha létezik olyan t időpont, hogy az eddigi történéseknek, tehát az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrának az ismerete nem elegendő ahhoz, hogy egyértelműen döntsünk, ugyanis τ értékét a jövő vagy más külső tényező is befolyásolja, akkor a változó nem megállási idő.

1.2.9. Példa. A $\tau(\omega) = t_0$, $\omega \in \Omega$, konstansváltozó megállási idő az $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T}\}$ filtrációra nézve tetszőleges $t_0 \in \mathbb{T}$ esetén. Ugyanis $t < t_0$ esetén $\{\tau \le t\} = \emptyset \in \mathcal{F}_t$, és ha $t \ge t_0$, akkor $\{\tau \le t\} = \Omega \in \mathcal{F}_t$.

1.2.10. Példa. Legyen $\mathbb{X}=\{X_n:n\in\mathbb{T}=\mathbb{N}_0\}$ a véletlen bolyongás, és tekintsük a folyamat által generált $\{\mathcal{F}_n^{\mathbb{X}}=\sigma(X_0,\dots,X_n):n\in\mathbb{N}\}$ filtrációt. Tetszőleges $a>0$ egész érték mellett legyen

$$\tau_1=\min\{n\in\mathbb{N}:X_n=a\}\,,\qquad \tau_2=\min\{n\in\mathbb{N}:X_{n+1}=X_n-1\}\,,$$

ahol $\min\emptyset=\infty$. Ekkor τ_1 az a érték első elérési ideje, míg τ_2 a folyamat első lokális maximumának a helye. Vegyük észre, hogy bármely $n\in\mathbb{N}$ időpontra

$$\{\tau_1\le n\}=\{\exists m\le n:X_m=a\}=\bigcup_{m=0}^{n}\{X_m=a\}\in\mathcal{F}_n^{\mathbb{X}}=\sigma(X_0,\dots,X_n)\,,$$

vagyis az $X_0,\dots,X_n$ változók ismeretében egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy az a értéket elértük már, vagy sem. Tehát τ_1 megállási idő a filtrációra, és ezáltal a bolyongásra nézve. Természetesen előfordulhat, hogy a folyamat sosem éri el az a értéket, ekkor $\tau_1=\infty$.

Alkalmazzuk most a véletlen bolyongásnak az 1.1.2. Példában bevezetett definícióját, tehát legyen

$$X_0=0\,,\qquad X_n=Z_1+\dots+Z_n\,,\quad n=1,2,\dots\,,$$

ahol $Z_1,Z_2,\ldots:\Omega\to\{-1,+1\}$ független és azonos eloszlású véletlen változó. Ekkor

$$\begin{aligned}\{\tau_2\le n\}&=\big\{\exists m\le n:X_{m+1}=X_m-1\big\}=\big\{\exists m\le n:Z_{m+1}=-1\big\}\\&=\bigcup_{m=0}^{n}\{Z_{m+1}=-1\}\notin\sigma(Z_1,\dots,Z_n)=\sigma(X_0,\dots,X_n)=\mathcal{F}_n^{\mathbb{X}}\,,\end{aligned}$$

hiszen hiába ismerjük az $\mathcal{F}_n^{\mathbb{X}}$ σ-algebrát, a függetlenség miatt a $Z_1,\dots,Z_n$ változók semmit sem mondanak Z_{n+1} értékéről. Mindez azt jelenti, hogy τ_2 nem megállási idő a véletlen bolyongásra nézve.

1.2.11. Állítás. *Legyen $\{\mathcal{F}_t:t\in\mathbb{T}\}$ filtráció az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, és legyen $\tau:\Omega\to\mathbb{T}\cup\{+\infty\}$ kiterjesztett véletlen változó. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *τ megállási idő a filtrációra nézve.*

(ii) *$\{\tau>t\}\in\mathcal{F}_t$ minden $t\in\mathbb{T}$ esetén.*

Ha ezen felül $\mathbb{T}=\mathbb{N}_0$, akkor az előzőekkel az is ekvivalens, hogy

(iii) *$\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n$ minden $n\in\mathbb{N}_0$ esetén.*

Bizonyítás. (i)$\Leftrightarrow$(ii) A σ-algebrák definíciójából azonnal következik, hogy tetszőleges $t\in\mathbb{T}$ esetén $\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$ pontosan akkor teljesül, amikor $\{\tau>t\}=\overline{\{\tau\le t\}}\in\mathcal{F}_t$.

(i)$\Rightarrow$(iii) Legyen $n\in\mathbb{N}_0$ tetszőleges. Ha $n=0$, akkor $\{\tau=n\}=\{\tau\le n\}\in\mathcal{F}_n$. Ha $n\ge1$, akkor (i) miatt $\{\tau\le n-1\}\in\mathcal{F}_{n-1}\subseteq\mathcal{F}_n$, amiből

$$\{\tau=n\}=\{\tau\le n\}\setminus\{\tau\le n-1\}\in\mathcal{F}_n\,.$$

(iii)$\Rightarrow$(i) Tetszőleges $m\le n$ nemnegatív egészek esetén $\{\tau=m\}\in\mathcal{F}_m\subseteq\mathcal{F}_n$, és így

$$\{\tau\le n\}=\bigcup_{m=0}^{n}\{\tau=m\}\in\mathcal{F}_n\,.\qquad\square$$

1.2.12. Definíció. Legyen $\tau:\Omega\to\mathbb{T}\cup\{+\infty\}$ megállási idő az $\{\mathcal{F}_t:t\in\mathbb{T}\}$ filtrációra nézve. Az

$$\mathcal{F}_\tau=\big\{A\in\mathcal{A}:A\cap\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t,t\in\mathbb{T}\big\}\subseteq\mathcal{A}$$

halmazt **pre-$\boldsymbol{\sigma}$-algebrának**, vagy a **$\boldsymbol{\tau}$ előtti események $\boldsymbol{\sigma}$-algebrájának** nevezzük.

Tekintsünk jelennek egy tetszőlegesen rögzített $t\in\mathbb{T}$ időpontot. Mivel τ megállási idő, adódik, hogy $\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$, tehát a t időpontban tisztán csak a múlt ismeretében el tudjuk dönteni, hogy a τ érték a „múltban vagy a jelenben” vagy a „jövőben van”. A pre-σ-algebra definíciója szerint A akkor τ előtti esemény, ha $\tau\le t$ esetén az A eseményről is tudunk nyilatkozni, el tudjuk dönteni, hogy bekövetkezik, vagy nem, és ehhez nem kell ismernünk a jövőt, csak az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrát, tehát a múltat és a jelent. Ez egyben azt is jelenti, hogy a τ idő utáni történéseknek nincsen hatása az A esemény bekövetkezésére. A bekövetkezése vagy be nem következése csak attól függ, hogy mi történik a τ időpontig. Innen jön a „τ előtti esemény” elnevezés. Mivel a pre-σ-algebra ezen eseményeknek a halmaza, $\mathcal{F}_\tau$ pontosan a τ véletlen időpontban rendelkezésünkre álló információt tarlamazza.

A következő állítás a pre-σ-algebra néhány fontosabb tulajdonságát fogalmazza meg. Mindenekellőtt megmutatjuk, hogy $\mathcal{F}_\tau$ tényleg σ-algebra, ugyanis ez nem következik triviálisan a definícióból. Az (i) pont második állítása szerint $\mathcal{F}_\tau$ ismeretében meg tudjuk mondani τ értékét. A (ii) állítás azt tisztázza, hogy az $\mathcal{F}_\tau$ jelölés konzisztens a filtráció jelölésével. Végül a (iii) pont szerint ha τ mindig ρ előtti időpont, akkor a τ pillanatban nem rendelkezhetünk több információval, mint a ρ időpontban.

1.2.13. Állítás. *Ha τ és ρ megállási idő az $\{\mathcal{F}_t:t\in\mathbb{T}\}$ filtrációra nézve, akkor teljesülnek az alábbiak.*

(i) *Az $\mathcal{F}_\tau$ halmazrendszer σ-algebra, és a τ változó $\mathcal{F}_\tau$-$\mathcal{B}$ mérhető.*

(ii) *Ha $\tau(\omega)=t_0\in\mathbb{T}$ minden $\omega\in\Omega$ kimenetel esetén, akkor $\mathcal{F}_\tau=\mathcal{F}_{t_0}$.*

(iii) *Ha $\tau(\omega)\le\rho(\omega)$ minden $\omega\in\Omega$ kimenetel esetén, akkor $\mathcal{F}_\tau\subseteq\mathcal{F}_\rho$.*

Bizonyítás. (i) A definícióból jön, hogy az $\mathcal{F}_\tau$ halmazrendszer tartalmazza az üres halmazt. Szintén a definíció alkalmazásával kapjuk, hogy $\mathcal{F}_\tau$ zárt a komplementerképzésre és megszámlálható unióra nézve, ugyanis tetszőleges $A,A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{F}_\tau$ események mellett

$$\overline{A}\cap\{\tau\le t\}=\{\tau\le t\}\setminus\big(A\cap\{\tau\le t\}\big)\in\mathcal{F}_t\,,\qquad t\in\mathbb{T}\,,$$

és

$$\big(A_1\cup A_2\cup\cdots\big)\cap\{\tau\le t\}=\big(A_1\cap\{\tau\le t\}\big)\cup\big(A_2\cap\{\tau\le t\}\big)\cup\cdots\in\mathcal{F}_t\,,\qquad t\in\mathbb{T}\,.$$

Tehát az $\mathcal{F}_\tau$ halmazrendszer egy σ-algebra. Legyen $s\in\mathbb{T}$ tetszőleges érték. Ekkor bármely $t\in\mathbb{T}$ esetén

$$\{\tau\le s\}\cap\{\tau\le t\}=\{\tau\le\min(s,t)\}\in\mathcal{F}_{\min(s,t)}\subseteq\mathcal{F}_t\,,$$

amiből az $\mathcal{F}_\tau$ pre-σ-algebra definícióját alkalmazva kapjuk, hogy $\{\tau\le s\}\in\mathcal{F}_\tau$. Mivel az s tetszőleges érték volt, a τ változó $\mathcal{F}_\tau$ mérhető.

(ii) Most tetszőleges $t \in \mathbb{T}$ mellett $\{\tau \leq t\} = \Omega$, ha $t \geq t_0$, és $\{\tau \leq t\} = \emptyset$, ha $t < t_0$. Amennyiben $A \in \mathcal{F}_{t_0}$, akkor $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ minden t esetén, azaz $A \in \mathcal{F}_\tau$. Ha viszont $A \notin \mathcal{F}_{t_0}$, akkor $A \cap \{\tau \leq t_0\} = A \notin \mathcal{F}_{t_0}$, és így $A \notin \mathcal{F}_\tau$.

(iii) Tekintsünk tetszőleges $A \in \mathcal{F}_\tau$ eseményt és $t \in \mathbb{T}$ értéket. Ekkor $\{\rho \leq t\} \subseteq \{\tau \leq t\}$, és $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, amiből következi, hogy

$$A \cap \{\rho \leq t\} = A \cap \big(\{\tau \leq t\} \cap \{\rho \leq t\}\big) = \big(A \cap \{\tau \leq t\}\big) \cap \{\rho \leq t\} \in \mathcal{F}_t \,.$$

Ekkor a pre-σ-algebra definícióját alkalmazva kapjuk, hogy $A \in \mathcal{F}_\rho$, azaz $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\rho$. □

1.2.14. Állítás. *Ha* $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$, *és* $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ *megállási idő, akkor*

$$\mathcal{F}_\tau = \big\{A \in \mathcal{A} : A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\big\} \,.$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ a jobb oldalon felírt halmazrendszert, és legyen $A \in \mathcal{F}_\tau$ és $n \in \mathbb{N}_0$ tetszőleges. Ha $n = 0$, akkor az $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebra definíciójából $A \cap \{\tau = n\} = A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Ha $n \geq 1$, akkor $A \cap \{\tau \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$, és ezáltal

$$A \cap \{\tau = n\} = A \cap \big(\{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\}\big) = \big(A \cap \{\tau \leq n\}\big) \setminus \big(A \cap \{\tau \leq n-1\}\big) \in \mathcal{F}_n \,.$$

A két eset alapján az $\mathcal{F}$ halmazrendszer definíciójából $A \in \mathcal{F}$, és azáltal $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}$.

A fordított irányú tartalmazáshoz legyen $A \in \mathcal{F}$ tetszőleges, továbbá vegyük észre, hogy $m \leq n$ nemnegatív egészek esetén $A \cap \{\tau = m\} \in \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n$. Ekkor

$$A \cap \{\tau \leq n\} = \bigcup_{m=0}^{n} \big(A \cap \{\tau = m\}\big) \in \mathcal{F}_n$$

tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ mellett, amiből $A \in \mathcal{F}_\tau$, és azáltal $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_\tau$. □

2. fejezet

Diszkrét idejű Markov-láncok

2.1. Diszkrét idejű Markov-láncok definíciói

Ebben a fejezetben diszkrét idejű és megszámlálható állapotterű $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ folyamatokkal fogunk foglalkozni. Az egyszerűség kedvéért, ha csak az adott probléma mást nem diktál, a folyamatokat a nemnegatív egész számokkal indexeljük, (azaz $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$,) és feltesszük, hogy az állapotok egész értékek ($\mathcal{X} \subseteq \mathbb{Z}$,) vagy (vektorértékű folyamatok esetén) egész rácspontok ($\mathcal{X} \subseteq \mathbb{Z}^d$). Mivel Markov-láncok esetén az állapottérre $\mathcal{I}$ a bevett jelölés, a továbbiakban mi is ezt fogjuk alkalmazni $\mathcal{X}$ helyett.

2.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ sztochasztikus folyamat rendelkezik a **Markov-tulajdonsággal**, amennyiben tetszőlegesen rögzített $n \in \mathbb{N}_0$ egész és $i_0, \dots, i_n, j \in \mathcal{I}$ állapotok mellett ha $P(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) > 0$, akkor

$$P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\big) = P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n\big) .$$

A fenti tulajdonságot úgy is szokták mondani, hogy a folyamatnak **nincsen memóriája**, és ekkor az $\mathbb{X}$ folyamatot **diszkrét idejű Markov-láncnak** nevezzük.

Legyen $n \in \mathbb{N}_0$ és $i, j \in \mathcal{I}$ tetszőleges. Abban az esetben, ha $P(X_n = i) > 0$, akkor a

$$p_{i,j}(n+1) := P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i\big)$$

feltételes valószínűség jól definiált, és azt fejezi ki, hogy ha a Markov-lánc az n-dik lépésben az i állapotban van, akkor mekkora valószínűséggel fog a következő lépésben a j-be ugrani. Azonnal jön, hogy

$$\sum_{j \in \mathcal{I}} p_{i,j}(n+1) = \sum_{j \in \mathcal{I}} P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i\big) = 1 .$$

Ezzel szemben, ha $P(X_n = i) = 0$, akkor a $p_{i,j}(n+1)$ valószínűséget nem tudjuk ilyen módon definiálni. Mindazonáltal mi mégis szeretnénk valamilyen módon értelmezni ezt a valószínűséget, ugyanis a későbbiekben kényelmetlen lenne mindig azt vizsgálgatni, hogy az X_n változó mely $i \in \mathcal{I}$ állapotokat veheti fel értékül, és melyeket nem. Vegyük észre, hogy a $p_{i,j}(n+1)$ feltételes valószínűség konkrét értékének abban az értelemben nincs is jelentősége, hogy a feltételben szereplő esemény majdnem biztosan nem következik be. Akár azt is mondhatnánk, hogy a $p_{i,j}(n+1)$ valószínűség legyen 1, vagyis legyen 1 annak az esélye, hogy a folyamat a j állapotba ugrik, ha előtte az n-dik lépésben az i állapotban volt. Technikai okokból nem ezt a megoldást választjuk, hanem azt mondjuk, hogy a valószínűségek tetszőleges módon definiálhatóak úgy, hogy a $p_{i,j}(n+1)$, $j \in \mathcal{I}$, értékek eloszlást alkossanak, tehát teljesüljön

$$p_{i,j}(n+1) \geq 0\,, \qquad j \in \mathcal{I}\,, \qquad \text{és} \qquad \sum_{j\in\mathcal{I}} p_{i,j}(n+1) = 1\,.$$

2.1.2. Definíció. Rögzített $n \in \mathbb{N}$ mellett a $p_{i,j}(n)$, $i,j \in \mathcal{I}$, valószínűségeket az $\mathbb{X}$ Markov-lánc n-dik lépéshez tartozó **egylépéses átmenetvalószínűségeinek** nevezzük. Az átmenetvalószínűségek által alkotott

$$\mathbf{P}(n) = \big[p_{i,j}(n)\big]_{i,j\in\mathcal{I}}$$

mátrix a lánc n-dik lépéshez tartozó **átmenetvalószínűség-mátrixa**, vagy röviden **átmenetmátrixa**. A Markov-lánc **kezdeti eloszlása** az $\alpha = [\alpha_i]_{i\in\mathcal{I}}$ sorvektor, melynek általános eleme $\alpha_i = P(X_0 = i)$.

Egy $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ diszkrét idejű Markov-lánc valószínűségelméleti szempontból tökéletesen jellemezhető az α kezdeti eloszlással és a $\mathbf{P}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, átmenetmátrixokkal. A kezdeti eloszlás azt határozza meg, hogy a folyamat mekkora valószínűséggel indul az egyes $i \in \mathcal{I}$ állapotokból, míg az átmenetmátrixok a folyamat dinamikáját írják le, azt, hogy a lánc az egyes lépésekben honnan hová mekkora valószínűséggel ugrik át.

2.1.3. Definíció. Legyen $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}_0$ tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\alpha = [\alpha_i]_{i\in\mathcal{I}}$ sorvektor **eloszlás**, ha elemei nemnegatívak, és az elemek összeges 1. Egy $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{i,j\in\mathcal{I}}$ négyzetes mátrixot **sztochasztikus mátrixnak** nevezünk, ha az elemei minden sorban eloszlást alkotnak.

2.1.4. Állítás. *Tetszőleges diszkrét idejű Markov-lánc esetén az α kezdeti eloszlás eloszlás, a $\mathbf{P}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, átmenetmátrixok pedig sztochasztikus mátrixok.*

Bizonyítás. Azonnal következik az α_i és $p_{i,j}(n)$ valószínűségek definíciójából. □

2.1.5. Példa. Tekintsük az 1.1.2. Példában bevezetett $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ egydimenziós véletlen bolyongást. Tehát, egy rögzített $p \in (0,1)$ paraméter mellett tekintsünk $Z_1, Z_2, \ldots$ független véletlen változókat, melyek eloszlása $P(Z_n = +1) = p$, $P(Z_1 = -1) = 1-p$, $n \in \mathbb{N}$, és legyen

$$X_0 := 0\,, \qquad X_{n+1} := X_n + Z_{n+1} = Z_1 + \cdots + Z_{n+1}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Azonnal látszik, hogy ez egy Markov-lánc, ugyanis az, hogy az $(n+1)$-dik lépésben a folyamat hová lép tovább és mekkora valószínűséggel, csak attól függ, hogy melyik állapotban van az n időpillanatban. Formális számítással azt kapjuk, hogy ha tetszőleges $n\in\mathbb{N}_0$ időpont valamint $i_0,\dots,i_n,j\in\mathcal{I}=\mathbb{Z}$ állapotok mellett az $\{X_0=i_0,\dots,X_n=i_n\}$ eseménynek pozitív a valószínűsége, tehát bekövetkezhet, akkor a $Z_1,Z_2,\dots$ változók függetlensége miatt

$$\begin{aligned}&P\big(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i_n,\dots,X_0=i_0\big)=P\big(Z_{n+1}=j-i_n\,|\,Z_n=i_n-i_{n-1},\dots,Z_1=i_1-i_0\big)\\&=P\big(Z_{n+1}=j-i_n\big)=P\big(Z_{n+1}=j-i_n\,|\,Z_1+\dots+Z_n=i_n\big)=P\big(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i_n\big)\,.\end{aligned}$$

Ez pedig definíció szerint azt jelenti, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat Markov-lánc. Nyilvánvaló, hogy a folyamat kezdeti eloszlása a 0 pontban degenerált eloszlás, továbbá a fenti számítások szerint az átmenetvalószínűségek

$$p_{i,j}(n+1)=P\big(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i\big)=P\big(Z_{n+1}=j-i\big)=\begin{cases}p\,, & j=i+1\,,\\ 1-p\,, & j=i-1\,,\\ 0\,, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Jegyezzük meg, hogy az átmenetvalószínűségek nem függnek az n időponttól.

2.1.6. Példa (A Pólya-féle urnamodell)**.** Legyen adva egy urna, benne pedig két golyó, egy piros és egy fehér. A továbbiakban minden egyes lépésben véletlenszerűen kihúzunk egy golyót az urnából, majd visszatesszük azt, és beteszünk még egy olyan színű golyót, mint amilyet kihúztunk. Ezáltal minden lépésben eggyel nő az urnában található golyók száma.

Jelölje X_n annak az eseménynek az indikátorát, hogy az n-dik lépésben kihúzott golyó piros. Ekkor az $\mathbb{X}=\{X_n:n\in\mathbb{N}\}$ sorozat nem Markov-lánc, ugyanis

$$P\big(X_3=1\,|\,X_2=1,X_1=1\big)=\frac{3}{4}\neq\frac{1}{2}=P\big(X_3=1\,|\,X_2=1,X_1=0\big)\,.$$

Ha az $\mathbb{X}$ folyamat Markov-lánc lenne, akkor a fenti valószínűségeknek egyenlőeknek kellene lennie a $p_{1,1}(3)$ átmenetvalószínűséggel, és ezáltal egymással is.

Legyen Y_n a piros golyók száma az n-dik lépés végrehajtása után, és tekintsük az $\mathbb{Y}=\{Y_n:n\in\mathbb{N}_0\}$ sorozatot. Ekkor tetszőleges $n\in\mathbb{N}_0$ és $i_0,\dots,i_n,j\in\mathcal{I}=\mathbb{N}$ értékek esetén, ha a feltételben szereplő esemény bekövetkezhet, akkor

$$P\big(X_{n+1}{=}j\,|\,X_n{=}i_n,\dots,X_0{=}i_0\big)=\begin{cases}i_n/(2+n)\,, & j=i_n+1\,,\\ 1-i_n/(2+n)\,, & j=i_n\,,\\ 0\,, & \text{egyébként,}\end{cases}=P\big(X_{n+1}{=}j\,|\,X_n{=}i_n\big)\,.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az $\mathbb{Y}$ folyamatnak nincsen memóriája, nem „emlékszik” arra, hogy korábban mely állapotokat látogatta meg, azaz a sorozat Markov-lánc a fenti átmenetvalószínűségekkel. A folyamat kezdeti eloszlása az 1 állapotban degenerált eloszlás.

2.1.7. Példa (Többlépéses Markov-láncok)**.** Tegyük fel, hogy az $\mathbb{X}=\{X_n:n\in\mathbb{N}_0\}$ folyamat nem Markov-lánc, de véges hosszúságú a memóriája. Ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan rögzített $p\geq 1$ egész érték, hogy tetszőleges $n\geq p-1$ időpont és $i_0,\dots,i_n,j\in\mathcal{I}$ állapotok esetén

$$P\big(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i_n,\dots,X_0=i_0\big)=P\big(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i_n,\dots,X_{n-p+1}=i_{n-p+1}\big)\,.$$

Az ilyen sorozatokat **többlépéses Markov-láncnak** nevezzük. A továbbiakban megmutatjuk, hogy ilyenkor definiálhatunk egy másik folyamatot, ami már Markov-lánc lesz, és amiből az $\mathbb{X}$ folyamat visszafejthető.

Legyen $Y_n = (X_n, \dots, X_{n-p+1})^\top$, és tekintsük az $\mathbb{Y} = \{Y_n : n \geq p-1\}$ vektor értékű sztochasztikus folyamatot. Látszik, hogy az $\mathbb{Y}$ folyamatból az $\mathbb{X}$ sorozat visszafejthető, és jegyezzük meg, hogy ha $\mathcal{I}$ jelöli az $\mathbb{X}$ folyamat állapotterét, akkor az $\mathbb{Y}$ sorozat az $\mathcal{I}^p$ halmazból veszi fel az értékeit. Egy általános $\underline{i} \in \mathcal{I}^p$ vektor esetén legyen $\underline{i} = (i_1, \dots, i_p)^\top$. Most megmutatjuk, hogy $\mathbb{Y}$ Markov-lánc. Tekintsünk tetszőleges $n \geq p-1$ és $\underline{j}, \underline{i}_n, \dots, \underline{i}_{p-1} \in \mathcal{I}^p$ vektorokat olyan módon, hogy az $\{Y_n = \underline{i}_n, \dots, Y_{p-1} = \underline{i}_{p-1}\}$ eseménynek pozitív legyen a valószínűsége. Ekkor az $\mathbb{Y}$ sorozat definíciója miatt a kiválasztott vektor értékű állapotok komponensei között szoros kapcsolatnak kell lennie, és szintén a definícióból

$$\big\{Y_n = \underline{i}_n, \dots, Y_{p-1} = \underline{i}_{p-1}\big\} = \big\{X_n = i_{n,1}, \dots, X_{n-p+1} = i_{n,p}, X_{n-p} = i_{n-1,p}, \dots X_0 = i_{p-1,p}\big\} =: A\,.$$

Különböztessünk meg két esetet. Ha $\underline{j} = (j_1, i_{n,1}, \dots, i_{n-p+2,1})^\top$ valamilyen $j_1 \in \mathcal{I}$ értékre, akkor az $\mathbb{Y}$ folyamat és a többlépéses Markov-láncok definíciója szerint

$$\begin{aligned}
&P\big(Y_{n+1} = \underline{j} \mid Y_n = \underline{i}_n, \dots, Y_{p-1} = \underline{i}_{p-1}\big) \\
&\quad = P\big(X_{n+1} = j_1, X_n = i_{n,1}, \dots, X_{n-p+2} = i_{n,p-1} \mid A\big) \\
&\quad = P\big(X_{n+1} = j_1 \mid X_n = i_{n,1}, \dots, X_{n-p+1} = i_{n,p}, X_{n-p} = i_{n-1,p}, \dots X_0 = i_{p-1,p}\big) \\
&\quad = P\big(X_{n+1} = j_1 \mid X_n = i_{n,1}, \dots, X_{n-p+1} = i_{n,p}\big) \\
&\quad = P\big(X_{n+1} = j_1, X_n = i_{n,1}, \dots, X_{n-p+2} = i_{n,p-1} \mid X_n = i_{n,1}, \dots, X_{n-p+1} = i_{n,p}\big) \\
&\quad = P\big(Y_{n+1} = \underline{j} \mid Y_n = \underline{i}_n\big)\,.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy most pontosan a Markov-tulajdonságot bizonyítottuk be a kiválasztott vektorokra. Ezzel szemben, ha $\underline{j}$ nem áll elő $(j_1, i_{n,1}, \dots, i_{n-p+2,1})^\top$ alakban valamilyen $j_1 \in \mathcal{I}$ értékre, akkor nyilvánvaló, hogy a fenti formula mindkét oldala egyenlő nullával. Ez pedig azt jelenti, hogy a Markov-tulajdonság tetszőleges állapotok esetén teljesül, tehát az $\mathbb{Y}$ folyamat Markov-lánc.

A következő állításban a diszkrét idejű Markov-láncok néhány ekvivalens definícióját fogalmazzuk meg és bizonyítjuk be.

2.1.8. Tétel. *Tekintsünk egy $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ megszámlálható állapotterű sztochasztikus folyamatot, és legyen*

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)\,, \qquad \mathcal{G}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

(i) *Az $\mathbb{X}$ folyamat diszkrét idejű Markov-lánc.*

(ii) *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ egész, $i, j \in \mathcal{I}$ állapotok és $B \in \mathcal{F}_n$ esemény mellett*

$$P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i, B\big) = P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i\big)\,,$$

valahányszor az $\{X_n = i\} \cap B$ esemény valószínűsége pozitív.

(iii) *Tetszőleges* $n,m\in\mathbb{N}_0$ *egészek,* $i,j_n,\ldots,j_{n+m}\in\mathcal{I}$ *állapotok és* $B\in\mathcal{F}_n$ *esemény mellett*

$$P\big(X_{n+m}=j_{n+m},\ldots,X_n=j_n \mid X_n=i,B\big)=P\big(X_{n+m}=j_{n+m},\ldots,X_n=j_n \mid X_n=i\big)\,,$$

valahányszor az $\{X_n=i\}\cap B$ *esemény valószínűsége pozitív.*

(iv) *Tetszőleges* $n\in\mathbb{N}_0$ *egész,* $i\in\mathcal{I}$ *állapot és* $A\in\mathcal{G}_n$ *illetve* $B\in\mathcal{F}_n$ *események mellett*

$$P\big(A \mid X_n=i,B\big)=P\big(A \mid X_n=i\big)\,,$$

valahányszor az $\{X_n=i\}\cap B$ *esemény valószínűsége pozitív.*

(v) *Tetszőleges* $n,m\in\mathbb{N}_0$ *egészek és* $g:\mathcal{I}^{m+1}\to\mathbb{R}$ *korlátos függvény esetén*

$$E\Big[g\big(X_n,\ldots,X_{n+m}\big) \mid X_n,\ldots,X_0\Big]=E\Big[g\big(X_n,\ldots,X_{n+m}\big) \mid X_n\Big]\,.$$

2.1.9. Megjegyzés. A következő bizonyításban és a későbbi munkák során is több alkalommal szükségünk lesz egy egyszerű észrevételre. Tekintsünk tetszőleges $Y_1,\ldots,Y_n$ véletlen változókat, melyek az $\mathcal{I}$ állapottéren veszik fel értéküket, és legyen $A\in\sigma(Y_1,\ldots,Y_n)$ tetszőleges esemény. Ekkor a generált σ-algebrák definíciója szerint valamely $D\in\mathcal{B}^n$ Borel-halmazra

$$A=(Y_1,\ldots,Y_n)^{-1}(D)=\big\{(Y_1,\ldots,Y_n)\in D\big\}=\big\{(Y_1,\ldots,Y_n)\in D\cap\mathcal{I}^n\big\}\,.$$

Az $\mathcal{I}$ halmaz megszámlálhatóságából következik, hogy $\mathcal{J}:=D\cap\mathcal{I}^n$ is megszámlálható, és így A felírható diszjunkt eseményeknek egy megszámlálható uniójaként az alábbi alakban:

$$A=\bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathcal{J}}\big\{Y_1=i_1,\ldots,Y_n=i_n\big\}\,.$$

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Tegyük fel, hogy pozitív a $\{X_n=i\}\cap B$ esemény valószínűsége, és tekintsük a B eseménynek a 2.1.9. Megjegyzésben bevezetett

$$B=\bigcup_{(i_0,\ldots,i_n)\in\mathcal{J}}\big\{X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n\big\}$$

reprezentációját. Jelölje $\mathcal{J}^*$ azon $(i_0,\ldots,i_n)\in\mathcal{J}$ vektorok halmazát, melyekre

$$i_n=j \qquad \text{és} \qquad P\big(X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n\big)>0\,.$$

Ekkor a láncszabály és a Markov-tulajdonság alkalmazásával

$$\begin{aligned}
P\big(X_{n+1}=j,X_n=i,B\big)&=\sum_{(i_0,\ldots,i_n)\in\mathcal{J}}P\big(X_{n+1}=j,X_n=i,X_n=i_n,\ldots,X_0=i_0\big)\\
&=\sum_{(i_0,\ldots,i_n)\in\mathcal{J}^*}P\big(X_{n+1}=j,X_n=i_n,\ldots,X_0=i_0\big)\\
&=\sum_{(i_0,\ldots,i_n)\in\mathcal{J}^*}P\big(X_n=i_n,\ldots,X_0=i_0\big)P\big(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n,\ldots,X_0=i_0\big)\\
&=\sum_{(i_0,\ldots,i_n)\in\mathcal{J}^*}P\big(X_n=i_n,\ldots,X_0=i_0\big)p_{i_n,j}(n+1)=P\big(X_n=i,B\big)p_{i,j}(n+1)\,.
\end{aligned}$$

Ebből átosztás után a feltételes valószínűség definíciójával már következik a (ii) állítás.

(ii)⇒(iii) Ismét tegyük fel, hogy pozitív a $\{X_n = i\} \cap B$ esemény valószínűsége. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk be. Az $m = 0$ esetben az egyenlőség nyilvánvaló, hiszen mindkét oldal 0 vagy 1 attól függően, hogy a j_n állapot azonos-e az i állapottal. Tegyük fel, hogy az egyenlőség teljesül m-re, és lássuk az $m+1$ esetet. A láncszabály, a (ii) pont és az indukciós feltevés alkalmazásával

$$\begin{aligned}
&P\big(X_{n+m+1} = j_{n+m+1}, \dots, X_n = j_n \,|\, X_n = i, B\big) P\big(X_n = i, B\big) \\
&= P\big(X_{n+m+1} = j_{n+m+1}, \dots, X_n = j_n, X_n = i, B\big) \\
&= P\big(X_{n+m+1} = j_{n+m+1} \,|\, X_{n+m} = j_{n+m}, \dots, X_n = j_n, X_n = i, B\big) \\
&\qquad \cdot P\big(X_{n+m} = j_{n+m}, \dots, X_n = j_n \,|\, X_n = i, B\big) P\big(X_n = i, B\big) \\
&= P\big(X_{n+m+1} = j_{n+m+1} \,|\, X_{n+m} = j_{n+m}\big) \\
&\qquad \cdot P\big(X_{n+m} = j_{n+m}, \dots, X_n = j_n \,|\, X_n = i\big) P\big(X_n = i, B\big) \\
&= P\big(X_{n+m+1} = j_{n+m+1} \,|\, X_{n+m} = j_{n+m}, \dots, X_n = j_n, X_n = i\big) \\
&\qquad \cdot P\big(X_{n+m} = j_{n+m}, \dots, X_n = j_n, X_n = i\big) P\big(X_n = i, B\big) / P\big(X_n = i\big) \\
&= P\big(X_{n+m+1} = j_{n+m+1}, X_{n+m} = j_{n+m}, \dots, X_n = j_n \,|\, X_n = i\big) P\big(X_n = i, B\big) \,.
\end{aligned}$$

Innen azonnal jön a bizonyítani kívánt egyenlőség az $m+1$ esetre.

(iii)⇒(iv) Tekintsük a

$$\mathcal{H}_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} \sigma(X_n, \dots, X_{n+m})$$

halmazalgebra egy tetszőleges $A \in \mathcal{H}_n$ elemét. Ekkor valamely $m \in \mathbb{N}_0$ egész érték mellett $A \in \sigma(X_n, \dots, X_{n+m})$, és a 2.1.9. Megjegyzésből következik, hogy A felírható egy

$$A = \bigcup_{(j_n, \dots, j_{n+m}) \in \mathcal{J}} \big\{X_n = j_n, \dots, X_{n+m} = j_{n+m}\big\}$$

megszámlálható diszjunkt unióban. A tömörség kedvéért ezt az uniót $A = \cup_k A_k$ alakban fogjuk kezelni, ahol természetesen $A_k \in \sigma(X_n, \dots, X_{n+m})$ minden k esetén. Ekkor a (iii) pont eredményét alkalmazva

$$P\big(A \,|\, X_n = i, B\big) = \sum_k P\big(A_k \,|\, X_n = i, B\big) = \sum_k P\big(A_k \,|\, X_n = i\big) = P\big(A \,|\, X_n = i\big) \,.$$

Mivel a $\mathcal{H}_n$ halmazalgebra generálja a $\mathcal{G}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ σ-algebrát, a Carathéodory-tételből azonnal következik az állítás.

(iv)⇒(v) A g függvény korlátos, így az állításban szereplő várható értékek jól definiáltak. Tetszőleges $i_0, \dots, i_n \in \mathcal{I}$ állapotok esetén, ha

$$P\big(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\big) > 0 \,,$$

akkor a (iv) pont szerint

$$\begin{aligned}
&E\Big[g\big(X_n,\dots,X_{n+m}\big)\,\big|\,X_n=i_n,\dots,X_0=i_0\Big]\\
&=\sum_{j_n,\dots,j_{n+m}\in\mathcal{I}} g(j_n,\dots,j_{n+m})P\big(X_{n+m}=j_{n+m},\dots,X_n=j_n\,\big|\,X_n=i_n,\dots,X_0=i_0\big)\\
&=\sum_{j_n,\dots,j_{n+m}\in\mathcal{I}} g\big(j_n,\dots,j_{n+m}\big)P\big(X_{n+m}=j_{n+m},\dots,X_n=j_n\,\big|\,X_n=i_n\big)\\
&=E\Big[g\big(X_n,\dots,X_{n+m}\big)\,\big|\,X_n=i_n\Big]\,,
\end{aligned}$$

amiből már következik az állítás.

(v)⇒(i) Legyen $m=1$ és tekintsük a

$$g:\mathcal{I}^2\to\mathbb{R}\,,\qquad g(x,y)=\begin{cases}1\,, & y=j\,,\\ 0\,, & y\neq j\,,\end{cases}$$

függvényt. Ekkor, amennyiben a feltétel valószínűsége pozitív,

$$\begin{aligned}
P\big(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i_n,\dots,X_0=i_0\big)&=E\Big[g(X_n,X_{n+1})\,|\,X_n=i_n,\dots,X_0=i_0\Big]\\
&=E\Big[g(X_n,X_{n+1})\,|\,X_n=i_n\Big]=P\big(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i_n\big)\,.
\end{aligned}$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. □

Az előző tétel (iv) állítását úgy is meg szokták fogalmazni, hogy a jelenre feltételesen a múlt és a jövő független egymástól. Tekintsük ugyanis a

$$\text{Jelen}=\{X_n=i\}\,,\qquad \text{Jövő}=A\in\sigma(X_n,X_{n+1},\dots)\,,\qquad \text{Múlt}=B\in\sigma(X_0,\dots,X_n)\,,$$

eseményeket. Ekkor a (iv) pont szerint

$$P\big(\text{Jövő}\,|\,\text{Jelen},\text{Múlt}\big)=P\big(\text{Jövő}\,|\,\text{Jelen}\big)\,.$$

Jegyezzük meg, hogy a feltételes valószínűség elemi tulajdonságait alkalmazva megmutatható, hogy ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$P\big(\text{Jövő},\text{Múlt}\,|\,\text{Jelen}\big)=P\big(\text{Jövő}\,|\,\text{Jelen}\big)P\big(\text{Múlt}\,|\,\text{Jelen}\big)\,,$$

ami pedig ekvivalens azzal, hogy

$$P\big(\text{Múlt}\,|\,\text{Jelen},\text{Jövő}\big)=P\big(\text{Múlt}\,|\,\text{Jelen}\big)\,.$$

2.2. Homogén Markov-láncok

A fejezet további részében olyan Markov-láncokkal foglalkozunk, melyek átmenetvalószínűségei időben állandóak, tehát a folyamat az $n\in\mathbb{N}$ időparamétertől függetlenül mindig azonos eséllyel lép át egy adott állapotból egy másikba.

2.2.1. Definíció. Legyen $\mathbb{X}=\{X_n : n\in\mathbb{N}_0\}$ diszkrét idejű Markov-lánc. Azt mondjuk, hogy a folyamat **időhomogén**, vagy röviden csak **homogén**, ha tetszőleges $n,m\in\mathbb{N}_0$ egészek és $i,j\in\mathcal{I}$ állapotok esetén ha

$$P(X_n=i)>0 \qquad \text{és} \qquad P(X_m=i)>0\,,$$

akkor

$$P\big(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i\big)=P\big(X_{m+1}=j\,|\,X_m=i\big)\,.$$

Ha a folyamat olyan, hogy az n és az m időpontban is pozitív valószínűséggel tartózkodik az i állapotban, akkor a

$$p_{i,j}(n+1)=P\big(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i\big)\,, \qquad p_{i,j}(m+1)=P\big(X_{m+1}=j\,|\,X_m=i\big)\,,$$

átmenetvalószínűségek jól definiáltak és megegyeznek tetszőleges $j\in\mathcal{I}$ állapot esetén. Ezzel szemben az előző alfejezetben láttuk, hogy ha az m érték olyan, hogy az $\{X_m=i\}$ eseménynek nulla a valószínűsége, akkor a $p_{i,j}(m+1)$ átmenetvalószínűség nem definiálható a $P(X_{m+1}=j|X_m=i)$ formulával. Ehelyett ebben az esetben a $p_{i,j}(m+1)$, $j\in\mathcal{I}$, értékek tetszőlegesen válaszhatóak úgy, hogy eloszlást alkossanak. Amennyiben a Markov-lánc homogén, akkor tekintsünk egy olyan $n\in\mathbb{N}_0$ értéket, melyre $P(X_n=i)>0$, és legyen

$$p_{i,j}(m+1):=p_{i,j}(n+1)=P\big(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i\big)\,.$$

Ezzel a konvencióval a $\mathbf{P}(n+1)$, $n\in\mathbb{N}_0$, átmenetmátrixok mind azonosak lesznek, tehát a továbbiakban nem kell az időparamétert jelölnünk.

2.2.2. Definíció. Egy $\mathbb{X}$ (idő-)homogén Markov-lánc esetén a $p_{i,j}:=p_{i,j}(n)$, $n\in\mathbb{N}$, $i,j\in\mathcal{I}$, valószínűségeket a lánc **(egylépéses) átmenetvalószínűségeinek** nevezzük, míg

$$\mathbf{P}=\big[p_{i,j}\big]_{i,j\in\mathcal{I}}=\mathbf{P}(n)\,, \qquad n\in\mathbb{N}\,,$$

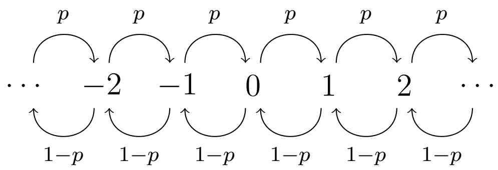
a folyamat **(egylépéses) átmenetmátrixa**. A továbbiakban jelölje $\mathbb{X}\sim\text{Markov}(\alpha,\mathbf{P})$ azt, hogy $\mathbb{X}$ egy diszkrét idejű homogén Markov-lánc α kezdeti eloszlással és $\mathbf{P}$ átmenetmátrixszal.

A homogén Markov-láncokat az **átmenetgráfjuk** segítségével szoktuk ábrázolni. Az átmenetgráf egy olyan irányított gráf, melynek csúcsai az állapotok, és egy $\overrightarrow{ij}$, $i,j\in\mathcal{I}$, él pontosan akkor van behúzva, ha $p_{i,j}>0$. Az élekre rá szokás írni átmenetvalószínűségeket. Az átmenetgráfról szépen leolvasható, hogy melyik állapotból melyik másik érhető el, és mekkora valószínűséggel.

2.2.3. Példa. A 2.1.5. Példában már megmutattuk, hogy az $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ véletlen bolyongás diszkrét idejű Makov-lánc, melynek átmenetvalószínűségei

$$p_{i,j}(n) = \begin{cases} p\,, & j = i+1\,, \\ 1-p\,, & j = i-1\,, \\ 0\,, & \text{egyébként}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Mivel az átmenetvalószínűségek nem függenek az n időparamétertől, a bolyongás homogén Markov-lánc. Átmenetgráfja:



2.2.4. Példa. A 2.1.6. Példa szerint a Pólya-féle urnamodellben a piros golyók száma Markov-lánc, de az átmenetvalószínűségek függenek n értékétől, tehát a folyamat nem időhomogén.

2.2.5. Tétel (Multiplikációs formula)**.** *Legyen $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamat az $\mathcal{I}$ állapottéren, és tekintsünk egy $\alpha = [\alpha_i]_{i\in\mathcal{I}}$ eloszlást és egy $\mathbf{P} = [p_{i,j}]_{i,j\in\mathcal{I}}$ sztochasztikus mátrixot. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$.

(ii) *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $i_0, \ldots, i_n \in \mathcal{I}$ esetén*

$$P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \alpha_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n}\,.$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$. Ekkor a láncszabály és a Markov-tulajdonság alkalmazásával

$$\begin{aligned} &P\big(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n\big) \\ &\quad = P\big(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\big) \cdots P\big(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0\big) P(X_0 = i_0) \\ &\quad = P\big(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\big) \cdots P\big(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0\big) P(X_0 = i_0) \\ &\quad = \alpha_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n}\,. \end{aligned}$$

A fordított irányért tegyük fel, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat kielégíti a (ii) multiplikációs tulajdonságot, és tekintsünk tetszőleges $n \geq 0$ egészt és $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in \mathcal{I}$ állapokat. Amennyiben $P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \ldots, X_0 = i_0) > 0$ teljesül, akkor

$$\begin{aligned} &P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \ldots, X_0 = i_0\big) \\ &\quad = \frac{P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i, X_{n+1} = j)}{P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)} \\ &\quad = \frac{\alpha_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i} p_{i,j}}{\alpha_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i}} = p_{i,j}\,. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a kapott valószínűség független attól, hogy a folyamat a múltban mely $i_0, \dots, i_{n-1}$ állapotokat látogatta meg, továbbá független n értékétől is. Ez azt jelenti, hogy a folyamatnak nincsen memóriája és homogén, vagyis $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc. A fentiből azonnal megkapjuk az átmenetvalószínűségeket, a multiplikációs szabályból pedig $n=0$ mellett a kezdeti eloszlást:

$$P(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{i,j}\,, \qquad \text{és} \qquad P(X_0 = i) = \alpha_i\,.$$

Tehát $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$. □

2.2.6. Tétel. *Egy megszámlálható állapotterű $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ sztochasztikus folyamat pontosan akkor diszkrét idejű homogén Markov-lánc $\mathbf{P}$ átmenetmátrixszal, ha tetszőleges $m \in \mathbb{N}_0$ egész és $i \in \mathcal{I}$ állapot esetén az $\mathbb{X}' = \{X'_n = X_{m+n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ folyamatra teljesül, hogy*

(i) *az $\{X_m = i\}$ eseményre feltételesen $\mathbb{X}'$ független az $X_0, \dots, X_m$ változótól;*

(ii) *az $\{X_m = i\}$ eseményre feltételesen $\mathbb{X}' \sim \mathrm{Markov}(\delta_i, \mathbf{P})$, ahol δ_i az i állapotban degenerált eloszlás, tehát*

$$\delta_i = \big[\delta_{i,j}\big]_{j \in \mathcal{I}}\,, \qquad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1\,, & i = j\,, \\ 0\,, & i \neq j\,. \end{cases}$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy már a jelen tétel (ii) pontjából is következik, hogy $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc $\mathbf{P}$ átmenetmátrixszal. Ehhez jelölje α az X_0 véletlen változó eloszlását, és tekintsünk egy tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ egészet valamint $i_0, \dots, i_n \in \mathcal{I}$ állapotokat. Vegyük észre, hogy az $m = 0$ választással $\mathbb{X}' = \mathbb{X}$, és így a (ii) pont szerint az $\{X_0 = i_0\}$ eseményre feltételesen $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\delta_i, \mathbf{P})$. A láncszabály és a 2.2.5. Tétel segítségével

$$\begin{aligned} P\big(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\big) &= P\big(X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0 \mid X_0 = i_0\big) P(X_0 = i_0) \\ &= \big(\delta_{i_0,i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n}\big)\alpha_{i_0} = \alpha_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n}\,, \end{aligned}$$

amiből a 2.2.5. Tétel ismételt alkalmazásával azonnal jön, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat feltétel nélküli eloszlása $\mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$.

A fordított irányhoz tegyük fel, hogy $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc $\mathbf{P}$ átmenetmátrixszal és valamely α kezdeti eloszlással. Vegyük észre, hogy az állítás (i) pontja a 2.1.8. Tétel (iv) pontjának egyszerű átfogalmazása, és ezáltal következik abból, hogy $\mathbb{X}$ Markov-lánc. Az állítás (ii) pontjáért tekintsünk tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}_0$ egészeket és $i, i_0, \dots, i_n$ állapotokat. Ekkor az $\mathbb{X}' = \{X'_n = X_{m+n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ folyamatra a 2.2.5. Tétel szerint

$$\begin{aligned} &P\big(X'_m = i_m, \dots, X'_0 = i_0, X_m = i\big) \\ &= \sum_{j_0,\dots,j_{m-1} \in \mathcal{I}} P\big(X_{m+n} = i_m, \dots, X_m = i_0, X_m = i, X_{m-1} = j_{m-1}, \dots, X_0 = j_0\big) \\ &= \sum_{j_0,\dots,j_{m-1} \in \mathcal{I}} \alpha_{j_0} p_{j_0,j_1} \cdots p_{j_{m-1},i} \delta_{i,i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{m-1},i_m} \\ &= \delta_{i,i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{m-1},i_m} \sum_{j_0,\dots,j_{m-1} \in \mathcal{I}} P\big(X_m = i, X_{m-1} = j_{m-1}, \dots, X_0 = j_0\big) \\ &= \delta_{i,i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{m-1},i_m} P(X_m = i)\,. \end{aligned}$$

Mindkét oldalt leosztva az $\{X_m = i\}$ esemény valószínűségével kapjuk, hogy

$$P\big(X'_m = i_m, \ldots, X'_0 = i_0 \mid X_m = i\big) = \delta_{i,i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{m-1},i_m}\,,$$

ami a 2.2.5. Tétel alkalmazásával ekvivalens a bizonyítani kívánt (ii) ponttal. □

2.2.7. Következmény. *Legyen $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc. Ekkor a $P(X_{m+n}=j \mid X_m=i)$, $m,n \in \mathbb{N}$, $i,j \in \mathcal{I}$, valószínűség nem függ m értékétől.*

Bizonyítás. A 2.2.6. Tétel szerint az $\{X_m = i\} = \{X'_0 = i\}$ eseményre feltételesen

$$\mathbb{X}' = \big\{X'_n = X_{m+n} : n \in \mathbb{N}_0\big\} \sim \mathrm{Markov}(\delta_i, \mathbf{P})\,.$$

Ugyanezt a tételt m=0 mellett alkalmazva kapjuk, hogy az $\{X_0=i\}$ eseményre feltételesen $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\delta_i, \mathbf{P})$. Mivel a két feltételes eloszlás megegyezik, azonnal jön, hogy

$$P\big(X_{m+n} = j \mid X_m = i\big) = P\big(X'_n = j \mid X'_0 = i\big) = P\big(X_n = j \mid X_0 = i\big)\,,$$

m értékétől függetlenül. □

2.2.8. Definíció. Homogén Markov-lánc esetén legyen

$$p^{(n)}_{i,j} := P\big(X_n = j \mid X_0 = i\big)\,, \qquad \mathbf{P}^{(n)} := \big[p^{(n)}_{i,j}\big]_{i,j\in\mathcal{I}}\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

A $p^{(n)}_{i,j}$ valószínűséget **n-lépéses átmenetvalószínűségnek**, a $\mathbf{P}^{(n)}$ mátrixot **n-lépéses átmenetmátrixnak** nevezzük.

Vegyük észre, hogy a fenti definíció $n = 0$ mellett is értelmes, és a 0-lépéses átmenetvalószínűségek

$$p^{(0)}_{i,j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1\,, & i = j\,, \\ 0\,, & i \neq j\,, \end{cases} \qquad \mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{E} := \big[\delta_{i,j}\big]_{i,j\in\mathcal{I}}\,.$$

2.2.9. Tétel (Chapman–Kolmogorov egyenletek)**.** *Homogén Markov-lánc esetén tetszőleges $m,n \in \mathbb{N}_0$ és $i,j \in \mathcal{I}$ mellett*

$$p^{(m+n)}_{i,j} = \sum_{k\in\mathcal{I}} p^{(m)}_{i,k}\, p^{(n)}_{k,j}\,.$$

Bizonyítás. Az állítás könnyen bizonyítható a láncszabály alkalmazásával, ugyanis

$$\begin{aligned}
p^{(n+m)}_{i,j} &= P\big(X_{m+n} = j \mid X_0 = i\big) = \sum_{k\in\mathcal{I}} P\big(X_{m+n} = j, X_m = k \mid X_0 = i\big) \\
&= \sum_{k\in\mathcal{I}} P\big(X_{m+n} = j \mid X_m = k, X_0 = i\big) P\big(X_m = k \mid X_0 = i\big) \\
&= \sum_{k\in\mathcal{I}} P\big(X_{m+n} = j \mid X_m = k\big) P\big(X_m = k \mid X_0 = i\big) = \sum_{k\in\mathcal{I}} p^{(m)}_{i,k}\, p^{(n)}_{k,j}\,.
\end{aligned}$$ □

Az előző bizonyítás alapgondolata nagyon egyszerű. Ha az i állapotból indulva $m+n$ lépés megtételével a j állapotba akarunk eljutni, akkor erre az átmenetgráfon számos útvonal létezhet. A különböző útvonalak kizárják egymást, ezért a $p_{i,j}^{(m+n)}$ átmenetvalószínűség pontosan a lehetséges útvonalak külön-külön vett valószínűségeinek az összege. Rögzített k állapot esetén $p_{i,k}^{(m)}$ éppen annak az esélye, hogy m lépés után a k állapotba kerülünk. Mivel a Markov-láncnak nincsen memóriája, a k állapotból továbbindulva a korábbi lépésektől függetlenül $p_{k,j}^{(n)}$ a valószínűsége annak, hogy az $(m+n)$ lépés megtétele után pontosan a j állapotba jutunk. A múlt és a jövő függetlenségéből azonnal kapjuk, hogy $p_{i,k}^{(m)}p_{k,j}^{(n)}$ azon utaknak az összvalószínűsége, melyek a k állapoton keresztül vezetnek az i-ből a j-be. Ezeket a valószínűségeket összegezve adódik a kívánt átmenetvalószínűség. Az alábbi multiplikációs formuláknak is hasonló az alapötlete.

2.2.10. Következmény. *$\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$ esetén $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$, és X_n eloszlása $\alpha\mathbf{P}^n$.*

Bizonyítás. A Chapman–Kolmogorov egyenletek szerint $p_{i,j}^{(m+n)}$ a $\mathbf{P}^{(m)}\mathbf{P}^{(n)}$ szorzatmátrix általános eleme, amiből $\mathbf{P}^{(m+n)} = \mathbf{P}^{(m)}\mathbf{P}^{(n)}$. Kapjuk, hogy $\mathbf{P}^{(n+1)} = \mathbf{P}^{(n)}\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(n)}\mathbf{P}$, amiből indukcióval jön az első állítást. Ekkor, tetszőleges $j \in \mathcal{I}$ állapotra

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in \mathcal{I}} P\big(X_n = j \mid X_0 = i\big) P(X_0 = i) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i p_{i,j}^{(n)} = \big(\alpha\mathbf{P}^{(n)}\big)_j = \big(\alpha\mathbf{P}^n\big)_j\,,$$

és ezáltal $X_n \sim \alpha\mathbf{P}^n$. □

2.2.11. Állítás (Multiplikációs formula)**.** *Legyen $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$. Ekkor tetszőleges $k \geq 1$, $0 \leq m < n_1 < \cdots < n_k$, és $i, j_1, \ldots, j_k \in \mathcal{I}$ esetén*

$$\begin{aligned}
P\big(X_{n_k} = j_k, X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \ldots, X_{n_1} = j_1 \mid X_m = i\big) &= p_{i,j_1}^{(n_1-m)} p_{j_1,j_2}^{(n_2-n_1)} \cdots p_{j_{k-1},j_k}^{(n_k-n_{k-1})}\,, \\
P\big(X_{n_k} = j_k, X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \ldots, X_{n_1} = j_1, X_0 = i\big) &= \alpha_i p_{i,j_1}^{(n_1)} p_{j_1,j_2}^{(n_2-n_1)} \cdots p_{j_{k-1},j_k}^{(n_k-n_{k-1})}\,, \\
P\big(X_{n_k} = j_k, X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \ldots, X_{n_1} = j_1\big) &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i p_{i,j_1}^{(n_1)} p_{j_1,j_2}^{(n_2-n_1)} \cdots p_{j_{k-1},j_k}^{(n_k-n_{k-1})}\,.
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Előszőt alkalmazzuk a láncszabályt és a Markov-láncok elemi tulajdonságait:

$$\begin{aligned}
&P\big(X_{n_k} = j_k, X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \ldots, X_{n_1} = j_1 \mid X_m = i\big) \\
&\quad = P\big(X_{n_1} = j_1 \mid X_m = i\big)\, P\big(X_{n_2} = j_2 \mid X_{n_1} = j_1, X_m = i\big) \\
&\qquad \cdots P\big(X_{n_k} = j_k \mid X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \ldots, X_{n_1} = j_1 \mid X_m = i\big) \\
&\quad = P\big(X_{n_1} = j_1 \mid X_m = i\big)\, P\big(X_{n_2} = j_2 \mid X_{n_1} = j_1\big) \cdots P\big(X_{n_k} = j_k \mid X_{n_{k-1}} = j_{k-1}\big) \\
&\quad = p_{i,j_1}^{(n_1-m)} p_{j_1,j_2}^{(n_2-n_1)} \cdots p_{j_{k-1},j_k}^{(n_k-n_{k-1})}\,.
\end{aligned}$$

A második formula azonnal jön az elsőből a láncszabály újbóli alkalmazásával:

$$\begin{aligned}
&P\big(X_{n_k} = j_k, X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \ldots, X_{n_1} = j_1, X_0 = i\big) \\
&\quad = P\big(X_{n_k} = j_k, X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \ldots, X_{n_1} = j_1 \mid X_0 = i\big) P(X_0 = i) \\
&\quad = p_{i,j_1}^{(n_1)} p_{j_1,j_2}^{(n_2-n_1)} \cdots p_{j_{k-1},j_k}^{(n_k-n_{k-1})} \alpha_i\,,
\end{aligned}$$

míg a harmadik megkapható a második egyenlet i állapotra való összegzésével:

$$\begin{aligned}
&P\big(X_{n_k}=j_k, X_{n_{k-1}}=j_{k-1},\dots,X_{n_1}=j_1\big)\\
&\quad=\sum_{i\in\mathcal{I}} P\big(X_{n_k}=j_k, X_{n_{k-1}}=j_{k-1},\dots,X_{n_1}=j_1, X_0=i\big)\\
&\quad=\sum_{i\in\mathcal{I}} p_{i,j_1}^{(n_1)} p_{j_1,j_2}^{(n_2-n_1)}\cdots p_{j_{k-1},j_k}^{(n_k-n_{k-1})}\alpha_i\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

2.3. Kommunikációs osztályok és az állapotok periódusa

Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk meg, mit mondhatunk el egy homogén Markov-láncról, ha csak azt ismerjük, hogy mely állapotból mely állapotba lehet átlépni, tehát azt, hogy adott $i,j\in\mathcal{I}$ esetén a $p_{i,j}$ átmenetvalószínűség pozitív vagy nulla. Ki fog derülni, hogy bizonyos szempontból már ez a kevés információ is meghatározza a Markov-lánc viselkedését.

2.3.1. Definíció. Legyen $i,j\in\mathcal{I}$ tetszőleges állapot. Azt mondjuk, hogy a j állapot **elérhető** az i-ből, (jelölésben $i\rightharpoonup j$,) ha

$$P\big(\text{a lánc valaha eljut } j\text{-be} \mid X_0=i\big)=P\big(\exists\, n\in\mathbb{N}_0 : X_n=j \mid X_0=i\big)>0\,.$$

Az i és j állapot **kommunikációs viszonyban áll** egymással, ($i\rightleftharpoons j$,) ha kölcsönösen elérhetőek egymásból, azaz $i\rightharpoonup j$ és $j\rightharpoonup i$. Az i állapot **elnyelő**, ha belőle csak önmaga érhető el.

2.3.2. Állítás. *Tetszőleges $i,j\in\mathcal{I}$ állapotok esetén az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *A j állapot elérhető i-ből.*

(ii) *Létezik $n\in\mathbb{N}_0$, hogy $p_{i,j}^{(n)}>0$.*

(iii) *Vagy $i=j$, vagy valamely $n\in\mathbb{N}$ mellett létezik $i_1,\dots,i_{n-1}\in\mathcal{I}$ állapot, hogy*

$$p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j}>0\,.$$

(iv) *Vagy $i=j$, vagy az átmenetgráfon létezik az i-ből a j-be vezető irányított út.*

Bizonyítás. (i)$\Leftrightarrow$(ii) Következik abból, hogy tetszőleges $n\in\mathbb{N}_0$ esetén

$$p_{i,j}^{(n)}\le P\big(\exists\, n\in\mathbb{N}_0 : X_n=j \mid X_0=i\big)=P\big(\cup_{n=0}^{\infty}\{X_n=j\}\mid X_0=i\big)\le\sum_{n=0}^{\infty}p_{i,j}^{(n)}\,.$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) Láttuk, hogy tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén $\mathbf{P}^{(n)}=\mathbf{P}^n$, és ezáltal

$$p_{i,j}^{(n)}=\sum_{i_1,\dots,i_{n-1}\in\mathcal{I}}p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j}\,.$$

Tegyük fel, hogy (ii) teljesül. Ha $n=0$, akkor $i=j$. Ha $n>0$, akkor a kiemelt formulában az összeg valamelyik tagja pozitív, és készen vagyunk.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Ha $i=j$, akkor az implikáció nyilvánvaló. Ha $i \neq j$, akkor a (iii) pontban definiált $i_1, \dots, i_{n-1}$ állapotok adnak egy irányított utat.

(iv)$\Rightarrow$(ii) Ha $i=j$, akkor $p_{i,j}^{(0)}=1$, és készen vagyunk. Ha $i \neq j$, akkor tekintsünk egy $i \to i_1 \to i_2 \to \dots \to i_{n-1} \to j$ irányított utat a két állapot között. Ezekre az állapotokra

$$p_{i,j}^{(n)} \geq p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},j} > 0 \,. \qquad \square$$

2.3.3. Állítás. *A kommunikációs viszony ekvivalenciareláció az állapotok halmazán.*

Bizonyítás. A reflexivitás és a szimmetria következik a kommunikációs viszony definíciójából. A tranzitivitásért tegyük jel, hogy k elérhető el i-ből, és j elérhető k-ből. Ekkor valamely m és n értékekre $p_{i,k}^{(m)}>0$ és $p_{k,j}^{(n)}>0$, és a Chapman–Kolmogorov egyenletek értelmében

$$p_{i,j}^{(m+n)} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}} p_{i,\ell}^{(n)} p_{\ell,j}^{(m)} \geq p_{i,k}^{(n)} p_{k,j}^{(m)} > 0 \,,$$

vagyis j elérhető i-ből. A szereposztás felcserélésével igazolható, hogy i is elérhető j-ből, tehát kommunikációs viszonyban állnak. $\square$

2.3.4. Definíció. A kommunikációs viszony, mint ekvivalenciareláció által meghatározott ekvivalenciaosztályokat **kommunikációs osztályoknak** nevezzük. A lánc **irreducibilis**, ha csak egy osztálya van, és **reducibilis**, ha több. Azt mondjuk, hogy az állapotoknak valamely tulajdonsága **osztálytulajdonság**, ha egy osztályon belül vagy minden állapot rendelkezik vele, vagy egyik sem.

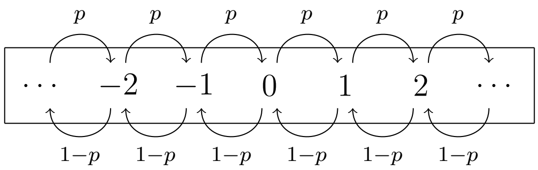
Egy homogén Markov-lánc kommunikációs osztályait általában az átmenetgráf segítségével határozzuk meg. A j állapot pontosan akkor elérhető i-ből, ha a gráfon létezik az i-ből j-be vezető irányított út. Egy osztályba az egymásból kölcsönösen elérhető állapotok esnek, tehát az osztályok éppen az átmenetgráf erősen összefüggő komponensei. Ez egyben azt is jelenti, hogy a kommunikációs osztályok nem függenek a lánc kezdeti eloszlásától, csupán az átmenetmátrixtól. Vagyis beszélhetünk az átmenetmátrix által meghatározott osztályokról, illetve mondhatunk olyat, hogy egy sztochasztikus mátrix reducibilis vagy irreducibilis.

2.3.5. Definíció. Az i állapot **periódusa**

$$d_i := \operatorname{lnko} \left\{ n \in \mathbb{N} : p_{i,i}^{(n)} > 0 \right\}.$$

(Legyen $\operatorname{lnko} \emptyset = \infty$.) Az állapot **periodikus**, ha $d_i > 1$, és **aperiodikus**, ha $d_i = 1$.

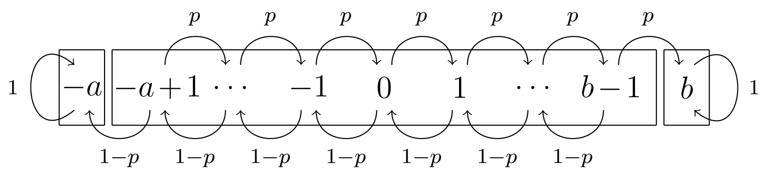
2.3.6. Példa. A véletlen bolyongás esetében az átmenetgráf erősen összefüggő, tehát bármely állapot elérhető bármely állapotból. Ez azt jelenti, hogy csak egy kommunikációs osztály van, a lánc irreducibilis. Az is látszik, hogy minden állapot periódusa 2.



2.3.7. Példa (Bolyongás elnyelő falakkal)**.** Adott $a, b > 0$ egész értékek mellett difiniáljuk az $\mathbb{X}=\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ homogén Markov-láncot az $\mathcal{I}=\{-a, \dots, b\}$ állapottéren a $P(X_0=0)=1$ kezdeti eloszlással és a

$$p_{i,j} = \begin{cases} p\,, & j = i+1 \quad \text{és} \quad i \notin \{-a, b\}\,, \\ 1-p\,, & j = i-1 \quad \text{és} \quad i \notin \{-a, b\}\,, \\ 1\,, & i = j = -a \quad \text{vagy} \quad i = j = b\,, \\ 0\,, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

átmenetvalószínűségekkel. A folyamat a $-a+1, \dots, b-1$ állapotokban úgy viselkedik, mint az egydimenziós bolyongás. A különbség a $-a$ és a b állapotban jelenik meg, melyekbe a folyamat beleragad. Ezeket az állapotokat nevezzük elnyelő falaknak. Ebben az esetben $-a$ és b elnyelő állapot, melyek egy-egy önálló aperiodikus osztályt alkotnak. A többi állapotnak 2 a periódusa, és kölcsönösen elérhetőek egymásból, tehát egyetlen osztályt képeznek.



2.3.8. Állítás. (i) *Ha egy állapot elnyelő, akkor aperiodikus, és egyedül alkot egy kommunikációs osztályt.*

(ii) *Egy állapotnak pontosan akkor végtelen a periódusa, ha az állapotból indulva oda nem lehet visszatérni. Ekkor az állapot önálló osztályt alkot.*

Bizonyítás. Az olvasóra bízzuk. □

2.3.9. Tétel (Szolidaritási tétel az állapotok periódusára)**.** *Egy kommunikációs osztályon belül minden állapotnak azonos a periódusa.*

A szolidaritási tétel azt állítja, hogy a periódus osztálytulajdonság, és így beszélhetünk egy osztály periódusáról, valamint periodikus és aperiodikus osztályokról attól függően, hogy milyenek a bennük található állapotok.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az i és a j állapot azonos osztályba esik, és legyen rendre d_i és d_j a periódusuk. Ha valamelyik periódus végtelen, akkor a 2.3.8. Állítás (ii) pontja szerint $i = j$, amiből $d_i = d_j$. A továbbiakban tehát tegyük fel, hogy mindkét állapotnak véges a periódusa. Ebben az esetben létezik m és n pozitív egész, hogy $p_{i,j}^{(m)} > 0$ és $p_{j,i}^{(n)} > 0$, amiből a Chapman–Kolmogorov egyenletek alkalmazásával következik, hogy tetszőleges $r \geq 0$ mellett $\mathbf{P}^{(m+r+n)} = \mathbf{P}^{(m)}\mathbf{P}^{(r)}\mathbf{P}(n)$, és így

$$p_{i,i}^{(m+r+n)} = \sum_{k,\ell \in \mathcal{I}} p_{i,k}^{(m)} p_{k,\ell}^{(r)} p_{\ell,i}^{(n)} \geq p_{i,j}^{(m)} p_{j,j}^{(r)} p_{j,i}^{(n)} .$$

Az egyenlőtlenségből $r = 0$ mellett kapjuk, hogy

$$p_{i,i}^{(m+n)} \geq p_{i,j}^{(m)} p_{j,i}^{(n)} > 0 ,$$

és így $d_i | m+n$. Ha $d_i \nmid r$, akkor $d_i \nmid m+r+n$, amiből

$$0 = p_{i,i}^{(m+r+n)} \geq p_{i,j}^{(m)} p_{j,j}^{(r)} p_{j,i}^{(n)} ,$$

és ezáltal $p_{j,j}^{(r)} = 0$. Tehát $p_{j,j}^{(r)}$ csak akkor lehet pozitív, ha $d_i | r$. Ekkor azonnal jön, hogy

$$d_i \mid d_j = \text{lnko} \left\{ r \geq 0 : p_{j,j}^{(r)} > 0 \right\} .$$

és a szerepek felcserélésel ugyanígy mutatható meg, hogy $d_j | d_i$. □

Az alábbiakban először egy számelméleti eredményt közlünk bizonyítás nélkül. Utána egy olyan állítást fogalmazunk meg, mely arról szól, hogy egy periodikus osztályban milyen lépésszámmal érhetőek el egymásból az állapotok.

2.3.10. Állítás. (i) *Tekintsük egész számoknak egy tetszőleges $M \subseteq \mathbb{N}$ nemüres halmazát, és legyen d a számok legnagyobb közös osztója. Ekkor az M halmazból kiválasztható véges sok érték úgy, hogy azok legnagyobb közös osztója d.*

(ii) *Tekintsünk tetszőleges $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ értékek, és legyen d a legnagyobb közös osztójuk. Ekkor létezik n_0 küszöbszám, hogy ha $d|n$ és $n > n_0$, akkor valamely $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}_0$ számokra $n = a_1 m_1 + \cdots + a_r m_r$.*

2.3.11. Állítás. *Legyen i és j azonos kommunikációs osztályba eső állapot, és tegyük fel, hogy az osztály d periódusa véges. Ekkor teljesülnek az alábbi állítások.*

(i) *Létezik $d(i,j) \in \{0, \ldots, d-1\}$ érték, hogy $p_{i,j}^{(n)} > 0$ esetén $n \equiv d(i,j) \bmod d$.*

(ii) *Létezik $n(i)$ pozitív egész küszöbszám, hogy $n > n(i)$ esetén $p_{i,i}^{(n)} > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $n \equiv 0 \bmod d$.*

(iii) *Létezik $n(i,j)$ pozitív egész küszöbszám, hogy $n > n(i,j)$ esetén $p_{i,j}^{(n)} > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $n \equiv d(i,j) \bmod d$.*

Bizonyítás. (i) Legyen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ tetszőleges olyan érték, melyre $p_{i,j}^{(n_1)} > 0$ és $p_{i,j}^{(n_2)} > 0$. Mivel az i és a j állapot ugyanabba a kommunikációs osztályba esik, létezik $m \in \mathbb{N}_0$, hogy $p_{j,i}^{(m)} > 0$. Ekkor $p_{i,i}^{(n_1+m)} > 0$ és $p_{i,i}^{(n_2+m)} > 0$, amiből $d|n_1+m$ és $d|n_2+m$. Kapjuk, hogy $d|n_1 - n_2$, azaz $n_1 \equiv n_2 \bmod d$. Ekkor $d(i,j)$ legyen az n_1 érték d-vel vett maradéka.

(ii) Az állítás egyik iránya nyilvánvaló, hiszen a periódus definíciójából az $n(i)$ értéktől függetlenül ha $p_{i,i}^{(n)} > 0$, akkor $d|n$. A fordított irányért alkalmazzuk a 2.3.10. Állítás (i) pontját az

$$M = \big\{ m \in \mathbb{N} : p_{i,i}^{(m)} > 0 \big\} \subseteq \mathbb{N}$$

halmazra. Kapjuk, hogy léteznek $m_1, \ldots, m_r \in M$ értékek úgy, hogy azoknak d a legnagyobb közös osztója. Ugyanezen állítás (ii) pontja szerint létezik továbbá n_0 küszöbszám, hogy ha $n > n_0$ és $d|n$, akkor n előáll $n = a_1 m_1 + \cdots + a_r m_r$ alakban valamely $a_1, \ldots, a_r$ nemnegatív egészekre. Mivel most $p_{i,i}^{(m_1)}, \ldots, p_{i,i}^{(m_r)} > 0$, azonnal jön, hogy

$$p_{i,i}^{(n)} = p_{i,i}^{(a_1 m_1 + \cdots + a_r m_r)} \geq \big(p_{i,i}^{(m_1)}\big)^{a_1} \cdots \big(p_{i,i}^{(m_r)}\big)^{a_r} > 0\,.$$

Tehát $n(i) = n_0$ választással igaz az állítás

(iii) Az egyik irány azonnal következik az (i) pontból. A másik irányért tekintsünk egy olyan $m \in \mathbb{N}$ értéket, melyre $p_{i,j}^{(m)} > 0$. Ekkor az (i) állításból $m \equiv d(i,j) \bmod d$. Legyen $n(i,j) = n(i) + m$. Tetszőleges $n > n(i,j)$ esetén, ha $n \equiv d(i,j) \bmod d$, akkor $n - m > n(i)$ és $d|n-m$, tehát (ii) szerint $p_{i,i}^{(n-m)} > 0$. Kapjuk, hogy $p_{i,j}^{(n)} \geq p_{i,i}^{(n-m)} p_{i,j}^{(m)} > 0$, ami éppen az, amit bizonyítanunk kellett. □

Legyen $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$ irreducibilis és periodikus Markov-lánc egy $\mathcal{I}$ állapottéren $d \in (1, \infty)$ periódussal. Legyen továbbá

$$Y_n = X_{nd}\,, \qquad \mathbb{Y} = \{Y_n : n \in \mathbb{N}_0\}\,, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{P}^d\,.$$

2.3.12. Tétel. (i) $\mathbb{Y} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbf{Q})$.

(ii) *Az állapottér felírható $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_d, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{d-1} \subseteq \mathcal{I}$ alosztályok $\mathcal{I} = \mathcal{C}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{d-1}$ diszjunkt uniójaként olyan módon, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ és $k = 0, \ldots, d-1$ esetén*

$$P\big(X_{n+1} \in \mathcal{C}_{k+1} \,|\, X_n \in \mathcal{C}_k\big) = 1\,.$$

(iii) *Az $\mathbb{Y}$ Markov-lánc kommunikációs osztályai pontosan a $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_{d-1}$ halmazok, és ezek az osztályok aperiodikusak és zártak az $\mathbb{Y}$ láncban.*

Bizonyítás. (i) Tekintsünk tetszőleges $n \geq 0$ egészet és $i_0, \ldots, i_n \in \mathcal{I}$ állapotokat. Ekkor a 2.2.11. Állítás szerint

$$P\big(Y_n = i_n, \ldots, Y_0 = i_0\big) = \alpha_{i_0} p_{i_0,i_1}^{(n)} \cdots p_{i_{n-1},i_n}^{(n)} = \alpha_{i_0} q_{i_0,i_1} \cdots q_{i_{n-1},i_n}\,,$$

és a 2.2.5. Tétel multiplikációs formulájával jön, amit igazolni kívánunk.

(ii) Legyen $i \in \mathcal{I}$ tetszőleges állapot, és definiáljuk az alosztályokat a

$$\mathcal{C}_k := \big\{ j \in \mathcal{I} : d(i,j) = k \big\}\,, \qquad k = 0, \ldots, d-1\,,$$

formulával. Látható, hogy a $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_{d-1}$ halmazok diszjunktak, továbbá minden állapot beleesik valamelyik alosztályba. Mindenekelőtt azt fogjuk megmutatni, hogy az alosztályok csak az indexezés erejéig függnek attól, hogy melyik i állapotból kiindulva írtuk fel őket. Legyen $j \in \mathcal{C}_k$ és $j' \in \mathcal{C}_{k'}$ tetszőleges állapot, továbbá legyen $p_{j,j'}^{(m)} > 0$ és $p_{i,j}^{(n)} > 0$ valamilyen $m, n \in \mathbb{N}_0$ egészekre. Ilyen m és n értékek léteznek, hiszen az $\mathbb{X}$ lánc szerint minden állapot azonos kommunikációs osztályba esik. Ekkor $p_{i,j'}^{(n+m)} \geq p_{i,j}^{(n)} p_{j,j'}^{(m)} > 0$, amiből

$$k' = d(i, j') \equiv n + m \equiv d(i, j) + d(j, j') = k + d(j, j') \mod d\,.$$

Kapjuk, hogy j és j' pontosan akkor esik azonos alosztályba, ha $d(j, j') = 0$. Máshogyan megfogalmazva, a kapott alosztályok a $d(j, j') = 0$ ekvivalenciareláció által meghatározott ekvivalenciaosztályok. Természetesen az alosztályok indexezése függ attól, hogy melyik i állapotból indulunk ki.

Ha a fenti eredményt $m = 1$ mellett alkalmazzuk, rögtön adódik, hogy $p_{j,j'} > 0$ esetén $k' = k + 1$, hiszen ekkor $d(j, j') = 1$. Ez azt jelenti, hogy a lánc a $\mathcal{C}_k$ alosztályból biztosan a $\mathcal{C}_{k+1}$ alosztályba lép át, vagyis

$$P\big(X_{n+1} \in \mathcal{C}_{k+1} \,|\, X_n \in \mathcal{C}_k\big) = 1\,.$$

(iii) Az $\mathbb{Y}$ láncban valamely j' állapot akkor és csak akkor érhető el egy j állapotból, ha $q_{j,j'}^{(n)} > 0$ valamely $n \geq 0$ egészre. Ez pontosan akkor teljesül, ha $p_{j,j'}^{(nd)} > 0$, hiszen

$$q_{j,j'}^{(n)} = P\big(Y_n = j' \,|\, Y_0 = j\big) = P\big(X_{nd} = j' \,|\, X_0 = j\big) = p_{j,j'}^{(nd)}\,.$$

Ez viszont azzal ekvivalens, hogy $d(j, j') = 0$, tehát j és j' azonos alosztályba esik. Ebből azonnal következik, hogy az $\mathbb{Y}$ lánc kommunikációs osztályai a $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_{d-1}$ halmazok, és ezek az osztályok zártak is. Emellett a j állapot periódusa az $\mathbb{Y}$ láncban

$$d_{j,\mathbb{Y}} = \mathrm{lnko}\,\big\{n : q_{j,j}^{(n)} > 0\big\} = \mathrm{lnko}\,\big\{n : p_{j,j}^{(nd)} > 0\big\} = \mathrm{lnko}\,\big\{m/d : p_{j,j}^{(m)} > 0\big\} = d_{j,\mathbb{X}}/d = 1\,,$$

tehát minden állapot aperiodikus. □

2.4. Az erős Markov-tulajdonság, visszatérési idők

A később alfejezetekben látni fogjuk, hogy a homogén Markov-láncok elméletében az a kulcskérdés, hogy egy-egy állapotból elindulva oda a folyamat mekkora valószínűséggel illetve hányszor tér vissza. Most ehhez a témakörhöz vezetünk be néhány technikai eszközt. Mindenekelőtt azt kell tisztáznunk, hogy ha egy lánc elindul egy állapotból, majd valahány, általában véletlen sok lépés után visszatér oda, akkor mit állíthatunk a folyamatnak a visszatérés utáni viselkedéséről. Amire szükségünk lenne, az egy, a 2.2.6. Tételhez hasonló állítás azzal a változtatással, hogy ezúttal az $\mathbb{X}'$ folyamatot nem egy determinisztikus m időpontban, hanem egy véletlen τ időpontban indítjuk el. Szerencsére a későbbi alkalmazásokban a τ változó nem akármilyen véletlen időpont, hanem megállási idő lesz, ami nagyban megkönnyíti a munkánkat.

Amennyiben τ megállási idő az $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc által generált

$$\mathcal{F}_n = \sigma\big(X_0, \ldots, X_n\big)\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

filtrációra nézve, akkor a τ előtti események σ-algebrája az

$$\mathcal{F}_\tau = \big\{A \in \mathcal{A} : A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\big\}$$

pre-σ-algebra. Tekintsük az $\Omega_0 = \{\tau < \infty\}$ eseményt, továbbá az

$$X'_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad X'_n(\omega) = \begin{cases} X_{\tau+n}(\omega), & \omega \in \Omega_0, \\ +\infty, & \omega \notin \Omega_0, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

függvényeket. Könnyen megmutatható, hogy a most definiált leképezések általános értelemben vett véletlen változók, melyek végesek az Ω_0 eseményen. Ekkor az $\mathbb{X}$ sorozatnak a τ időpont utáni jövőjét definiálhatjuk az $\mathbb{X}' = \{X'_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ folyamat által generált $\mathcal{G}_\tau := \sigma(\mathbb{X}')$ σ-algebrával. Például, a $\{\tau = \infty\}$ eseményre

$$\{\tau = \infty\} = \overline{\Omega}_0 = \big(X'_0\big)^{-1}\big(\{+\infty\}\big) \in \mathcal{G}_\tau .$$

Ezen előkészítés után már kimondhatjuk a tételünket, mely azt állítja, hogy amennyiben rögzítjük a folyamatnak a τ időpontban felvett értékét, akkor az $\mathbb{X}'$ folyamat homogén Markov-lánc, mely független attól, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat milyen állapotokat látogatott meg a τ időpont előtt.

2.4.1. Tétel (Erős Markov-tulajdonság)**.** *Egy $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ sztochasztikus folyamat pontosan akkor diszkrét idejű homogén Markov-lánc $\mathbf{P}$ átmenetmátrixszal, ha tetszőleges τ megállási idő és $i \in \mathcal{I}$ állapot esetén a most definiált $\mathbb{X}' = \{X'_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ sorozatra teljesül, hogy*

(i) *a $\{\tau < \infty, X_\tau = i\}$ eseményre feltételesen $\mathbb{X}'$ független az $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebrától;*

(ii) *a $\{\tau < \infty, X_\tau = i\}$ eseményre feltételesen $\mathbb{X}' \sim \mathrm{Markov}(\delta_i, \mathbf{P})$, ahol δ_i az i állapotban degenerált eloszlás.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítását a könnyebbik iránnyal kezdjük. Tegyük fel, hogy tetszőleges τ megállási idő és $i \in \mathcal{I}$ állapot esetén teljesül (i) és (ii), és legyen $m \in \mathbb{N}_0$ tetszőleges egész. Ekkor $\tau \equiv m$ mellett a jelen állítás (i) és (ii) pontja rendre a 2.2.6. Tétel (i) és (ii) pontját adja, melyekből már következik, hogy $\mathbb{X}$ Markov-lánc $\mathbf{P}$ átmenetmátrixszal.

A fordított irányhoz tekintsünk tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}_0$ egészeket, $i, j_0, \dots, j_n \in \mathcal{I}$ állapotokat és egy $B \in \mathcal{F}_\tau$ eseményt. Mivel ekkor $B \cap \{\tau = m\} \in \mathcal{F}_m$, a láncszabályt és a 2.2.6. Tétel (i) és (ii) pontját alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&P\big(X'_n = j_n, \dots, X'_0 = j_0, X_\tau = i, \tau = m, B\big) \\
&= P\big(X_{m+n} = j_n, \dots, X_m = j_0, j_0 = i, X_m = i, \tau = m, B\big) \\
&= P\big(X_{m+n} = j_n, \dots, X_m = j_0, j_0 = i \,|\, X_m = i, \{\tau = m\} \cap B\big) P\big(X_\tau = i, \tau = m, B\big) \\
&= P\big(X_{m+n} = j_n, \dots, X_m = j_0, j_0 = i \,|\, X_m = i\big) P\big(X_\tau = i, \tau = m, B\big) \\
&= P\big(X_n = j_n, \dots, X_0 = j_0, j_0 = i\big) P\big(X_\tau = i, \tau = m, B\big) .
\end{aligned}$$

Az egyenlőség két oldalát az $m \in \mathbb{N}_0$ értékre összegezve

$$P\big(X'_n = j_n, \ldots, X'_0 = j_0, X_\tau = i, \tau < \infty, B\big)$$
$$= P\big(X_n = j_n, \ldots, X_0 = j_0, j_0 = i\big) P\big(X_\tau = i, \tau < \infty, B\big)\,,$$

amiből egy osztással és a 2.2.5. Tétel segítségével

$$P\big(X'_n = j_n, \ldots, X'_0 = j_0 \,|\, X_\tau = i, \tau < \infty, B\big)$$
$$= P\big(X_n = j_n, \ldots, X_0 = j_0, j_0 = i\big) = \delta_{i,j_0} p_{j_0,j_1} \cdots p_{j_{n-1},j_n}\,.$$

Vegyük észre, hogy a kapott valószínűség független a B eseménytől, és speciálisan $B = \Omega$ mellett

$$P\big(X'_n = j_n, \ldots, X'_0 = j_0 \,|\, X_\tau = i, \tau < \infty\big) = \delta_{i,j_0} p_{j_0,j_1} \cdots p_{j_{n-1},j_n}\,,$$

amiből a 2.2.5. Tételt ismételt alkalmazásával jön a bizonyítandó állítás (ii) pontja. Jegyezzük meg, hogy az utolsó két kiemelt formulát összevetve

$$P\big(X'_n = j_n, \ldots, X'_0 = j_0 \,|\, X_\tau = i, \tau < \infty, B\big) = P\big(X'_n = j_n, \ldots, X'_0 = j_0 \,|\, X_\tau = i, \tau < \infty\big)\,.$$

Az (i) pont bizonyításához vegyük észre, hogy a

$$\mathcal{H} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma\big(X'_0, \ldots, X'_n\big)$$

halmazrendszer halmazalgebra, mely generálja a τ utáni események $\sigma(\mathbb{X}')$ rendszerét. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{H}$ eseményre létezik $n \in \mathbb{N}_0$, hogy $A \in \sigma(X'_0, \ldots, X'_n)$, és így a 2.1.9. Megjegyzésből következik, hogy valamely $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}^{n+1}$ halmaz mellett

$$A = \bigcup_{(j_0,\ldots,j_n)\in\mathcal{J}} \big\{X'_0 = j_0, \ldots, X'_n = j_n\big\}\,.$$

A tömörség érdekében kezeljük ezt az előállítást $A = \cup_k A_k$ alakban. Innen a bizonyítás korábbi eredményei szerint

$$P\big(A \,|\, X_\tau = i, \tau < \infty, B\big) = \sum_k P\big(A_k \,|\, X_\tau = i, \tau < \infty, B\big)$$
$$= \sum_k P\big(A_k \,|\, X_\tau = i, \tau < \infty\big) = P\big(A \,|\, X_\tau = i, \tau < \infty\big)\,.$$

Mivel a $\mathcal{H}$ halmazalgebra generálja a $\sigma(\mathbb{X}')$ σ-algebrát, a Carathéodory-féle kiterjesztési tétel garantálja, hogy

$$P\big(A \,|\, X_\tau = i, \tau < \infty, B\big) = P\big(A \,|\, X_\tau = i, \tau < \infty\big)$$

tetszőleges $A \in \sigma(\mathbb{X}')$ eseményre. Ezzel a tétel (i) pontját is igazoltuk. □

2.4.2. Példa. Legyen $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\} \sim \text{Markov}(\delta_0, \mathbf{P})$ véletlen bolyongás valamilyen $p \in (0{,}1)$ paraméterrel, és legyen $a > 0$ tetszőleges egész érték. A $\min \emptyset := +\infty$ definíció mellett tekintsük a

$$\tau_1 := \min\big\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = a\big\}, \qquad \tau_2 := \min\big\{n \in \mathbb{N}_0 : X_{n+1} = X_n - 1\big\},$$

általános értelemben vett véletlen változókat, valamint az

$$\mathbb{X}^{(i)} := \big\{X_n^{(i)} : n \in \mathbb{N}_0\big\}, \qquad X_n^{(i)}(\omega) := \begin{cases} X_{\tau_i+n}(\omega), & \tau_i < \infty, \\ +\infty, & \tau_i = \infty, \end{cases} \qquad i = 1{,}2,$$

folyamatokat.

Az 1.2.10. Példában beláttuk, hogy a τ_1 változó, tehát az a érték első elérési ideje megállási idő. Ekkor az erős Markov-tulajdonság szerint a $\{\tau_1 < \infty, X_{\tau_1} = a\} = \{\tau_1 < \infty\}$ eseményre feltételesen $\mathbb{X}^{(1)} \sim \text{Markov}(\delta_a, \mathbf{P})$. Ez azt jelenti, hogy a véletlen bolyongás az a érték elérése után ugyanolyan átmenetvalószínűségek szerint lép tovább, mint az elérés előtt, tehát rendre p valószínűséggel lép egyet felfelé, és $1-p$ valószínűséggel lefelé. Vagyis az $\mathbb{X}^{(1)}$ sorozat egy, az a pontból induló véletlen bolyongás.

Ezzel szemben, a $\{\tau_2 < \infty, X_{\tau_2} = a\}$ eseményre feltételesen az $\mathbb{X}^{(2)}$ folyamat már nem véletlen bolyongás, hiszen τ_2 az $\mathbb{X}$ sorozat első lokális maximumának a helye, tehát $\mathbb{X}^{(2)}$ az első lépést garantáltan lefelé fogja tenni. Jegyezzük meg, hogy ez nem mond ellent az erős Markov-tulajdonságnak, hiszen az 1.2.10. Példában igazoltuk, hogy τ_2 nem megállási idő. A jelen példa arra mutat rá, hogy a 2.4.1. Tételben valóban meg kell követelni, hogy τ megállási idő legyen, ez nem csak egy kényelmi feltevés, ugyanis enélkül a tétel állítása már nem feltétlenül teljesül.

Amint azt a bevezetőben már említettük, az erős Markov-tulajdonságra azért van szükségünk, mert az $\mathbb{X}$ folyamatnak egy rögzített állapotba való visszatéréseit szeretnénk vizsgálni. Ennek érdekében most bevezetünk néhány új fogalmat.

2.4.3. Definíció. Determinisztikus $i \in \mathcal{I}$ kiindulási állapot mellett tekintsünk egy $\mathbb{X}$ homogén Markov-láncot. Az i állapotba való $T_{i,r}$ **r-dik visszatérési időt** a $T_{i,0} := 0$,

$$T_{i,r} := \begin{cases} \min\{n > T_{i,r-1} : X_n = i\}, & T_{i,r-1} < \infty, \\ \infty, & T_{i,r-1} = \infty, \end{cases} \qquad r = 1{,}2, \ldots$$

rekurzióval definiáljuk. Az $\mathbb{X}$ folyamatnak a visszatérések közötti $\{X_n : T_{i,r-1} \le n \le T_{i,r}\}$ szakaszait **kirándulásoknak** nevezzük, és az r-dik kirándulás hossza

$$S_{i,r} := \begin{cases} T_{i,r} - T_{i,r-1}, & T_{i,r-1} < \infty, \\ 0, & T_{i,r-1} = \infty, \end{cases} \qquad r = 1{,}2, \ldots$$

A tömörebb jelölésért legyen $T_i := T_{i,1} = S_{i,1}$ az **első visszatérési idő**, melynek várható értéke $\mu_i := E(T_i)$. Legyen továbbá

$$V_i := \max\big\{r \ge 0 : T_{i,r} < \infty\big\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

az i állapotba való **visszatérések száma**, és $f_i := P(T_i < \infty)$ az i állapotba való **visszatérés valószínűsége** .

Vegyük észre, hogy a most definiált $T_{i,r}:\Omega\to\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ leképezések nem feltétlenül végesek, de mérhetőek, tehát általános értelemben vett véletlen változók. Ekkor az első visszatérési idő várható értéke jól definiált, és $\mu_i\in[1,\infty]$. Az is látszik, hogy a visszatérési idők megállási idők, továbbá V_i+1 az i állapotban tett összes látogatás számát adja.

2.4.4. Állítás. *Rögzített $i\in\mathcal{I}$ állapot mellett legyen $\mathbb{X}\sim\mathrm{Markov}(\delta_i,\mathbf{P})$. Ekkor tetszőleges $r\in\mathbb{N}$ egész mellett teljesülnek az alábbiak.*

(i) *A $\{T_{i,r}<\infty\}$ eseményre feltételesen $S_{i,r+1}$ független az $S_{i,1},\dots,S_{i,r}$ változóktól, továbbá $S_{i,r+1}$ feltételes eloszlása megegyezik $T_i=S_{i,1}$ feltétel nélküli eloszlásával.*

(ii) *Ha $P(V_i=\infty)=1$, tehát 1 valószínűséggel a folyamat végtelen sokszor visszatér a kiindulási i állapotba, akkor $S_{i,1},S_{i,2},\dots$ feltétel nélkül független és azonos eloszlású.*

Bizonyítás. (i) Rögzített r mellett vezessük be az

$$\mathbb{X}'=\left\{X'_n:=X_{T_{i,r}+n}:n\in\mathbb{N}_0\right\}$$

folyamatot, valamint vegyük észre, hogy a visszatérési idők definíciójából

$$\left\{T_{i,r}<\infty\right\}=\left\{T_{i,r}<\infty,X_{T_{i,r}}=i\right\}.$$

Ekkor az erős Markov-tulajdonságot alkalmazva kapjuk, hogy a $\{T_{i,r}<\infty\}$ eseményre feltételesen $\mathbb{X}'\sim\mathrm{Markov}(\delta_i,\mathbf{P})$, továbbá $\mathbb{X}'$ feltételesen független a $T_{i,r}$ megállási idő előtti eseményektől, vagyis az $\mathcal{F}_{T_{i,r}}$ σ-algebrától. Tehát $\mathbb{X}'$ feltételes eloszlása megegyezik $\mathbb{X}$ feltétel nélküli eloszlásával, amiből azonnal jön, hogy

$$S_{i,r+1}=\min\left\{n\in\mathbb{N}:X'_n=i\right\}$$

feltételes eloszlása azonos az

$$S_{i,1}=\min\left\{n\in\mathbb{N}:X_n=i\right\}$$

változó feltétel nélküli eloszlásával. (A korábbiakhoz hasonlóan legyen most is $\min\emptyset:=\infty$.)

A függetlenségért vegyük észre, hogy az 1.2.13. Állítás (i) pontja szerint a $T_{i,1},T_{i,2},\dots$ megállási idők rendre mérhetőek a kapcsolatos $\mathcal{F}_{T_{i,1}},\mathcal{F}_{T_{i,2}},\dots$ pre-σ-algebrákra nézve. Mivel most tetszőleges $\omega\in\Omega$ kimenetel esetén

$$T_{i,1}(\omega)\le T_{i,2}(\omega)\le\dots,$$

ugyanezen állítás (iii) pontjából következik, hogy ezek a σ-algebrák egy bővülő rendszert alkotnak. Ebből jön, hogy a $T_{i,1},\dots,T_{i,r}$ változó, és ezáltal a kirándulások $S_{i,1},\dots,S_{i,r}$ hossza mind mérhető az $\mathcal{F}_{T_{i,r}}$ σ-algebrára nézve. Azt viszont már láttuk, hogy az $\mathbb{X}'$ folyamat feltételesen független a $\mathcal{F}_{T_{i,r}}$ σ-algebrától, amiből jön, ugyanez az $S_{i,r+1}=h(\mathbb{X}')$ változóra is igaz. Innen $S_{i,r+1}$ feltételes függetlensége a korábbi séták hosszától azonnal következik.

(ii) A feltevés miatt tetszőleges rögzített $r \in \mathbb{N}$ egész esetén a $\{T_{i,r} < \infty\}$ eseménynek 1 a valószínűsége, amiből a feltételes valószínűség elemi tulajdonságai szerint

$$P\big(A \,|\, T_{i,r} < \infty\big) = P(A)\,, \qquad A \in \mathcal{A}\,.$$

Tehát a $\{T_{i,r} < \infty\}$ eseményre vett feltételes valószínűség azonos a feltétel nélküli valószínűséggel. Ekkor $S_{i,r+1}$ feltétel nélküli eloszlása azonos ugyanezen változónak a $\{T_{i,r} < \infty\}$ eseményre vett feltételes eloszlásával, ami a jelen állítás (i) pontja szerint megegyezik S_i feltétel nélküli eloszlásával. Tehát az $S_{i,1}, S_{i,2}, \dots$ változók azonos eloszlásúak. Továbbá, az (i) pontban bizonyított feltételes függetlenségből következik, hogy most $S_{i,r+1}$ feltétel nélkül is független az $S_{i,1}, \dots, S_{i,r}$ változóktól. Mivel ez tetszőleges $r \in \mathbb{N}$ értékre igaz, kapjuk, hogy az $S_{i,1}, S_{i,2}, \dots$ változók mind függetlenek. □

2.4.5. Következmény. *Ha $f_i < 1$, akkor az i állapotban tett látogatások $V_i + 1$ száma geometriai eloszlást követ $1 - f_i$ paraméterrel, míg ha $f_i = 1$, akkor $V_i = \infty$ majdnem biztosan. Továbbá mindkét esetben*

$$E(V_i) + 1 = \frac{1}{1 - f_i} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)}\,.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy tetszőleges $r \in \mathbb{N}$ esetén a 2.4.4. Állítás (i) pontja szerint

$$P\big(S_{i,r} < \infty \,|\, T_{i,r-1} < \infty\big) = P\big(S_i < \infty\big) = f_i\,.$$

Ekkor a láncszabály alkalmazásával

$$\begin{aligned}
&P(V_i \geq r) = P\big(T_{i,1} < \infty, \dots, T_{i,r} < \infty\big)\\
&= P\big(T_{i,1} < \infty\big) P\big(T_{i,2} \,|\, T_{i,1} < \infty\big) \cdots P\big(T_{i,r} < \infty \,|\, T_{i,1} < \infty, \dots, T_{i,r-1} < \infty\big)\\
&= P\big(S_{i,1} < \infty\big) P\big(S_{i,2} < \infty \,|\, T_{i,1} < \infty\big) \cdots P\big(S_{i,r} < \infty \,|\, T_{i,r-1} < \infty\big)\\
&= P\big(S_{i,1} < \infty\big)^r = f_i^r\,,
\end{aligned}$$

és így

$$P(V_i + 1 = r) = P(V_i \geq r - 1) - P(V_i \geq r) = f_i^{r-1} - f_i^r = f_i^{r-1}(1 - f_i)\,, \qquad r \in \mathbb{N}\,.$$

Mindebből, ha $f_i < 1$, akkor $V_i + 1$ geometriai eloszlást követ $1 - f_i$ paraméterrel, és ezáltal $E(V_i + 1) = 1/(1 - f_i)$. Ha $f_i = 1$, akkor $P(V_i + 1 = r) = 0$ minden $r \in \mathbb{N}$ egészre, vagyis $V_i + 1 = \infty$ m.b., és így $E(V_i + 1) = \infty = 1/(1 - f_i)$. Ismét felhasználva, hogy $V_i + 1$ az i-ben tett látogatások száma, továbbá azt, hogy $X_0 = i$ m.b., kapjuk, hogy

$$E\big(V_i + 1\big) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\big(X_n = i \,|\, X_0 = i\big) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)}\,.$$

Ezzel minden állítást igazoltunk. □

2.5. A diszkrét felújítási tétel

Ebben az alfejezetben egy olyan technikai jellegű állítást mondunk ki, mely nem közvetlenül Markov-láncokról szól, de amit a későbbiekben egy központi jelentőségű tétel bizonyítása során alkalmazni fogunk. Tekintsük nemnegatív értékeknek olyan f_n, $n \in \mathbb{N}$, sorozatát, melyre $f_1 + f_2 + \cdots = 1$, és legyen

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n .$$

Definiáljuk továbbá a p_n számsorozatot a $p_0 := 1$,

$$p_n := \sum_{m=1}^{n} f_m p_{n-m} , \qquad n = 1,2,\ldots,$$

rekurzióval.

2.5.1. Tétel. *Ha* $\operatorname{lnko}\{n \in \mathbb{N} : f_n > 0\} = 1$, *akkor a fenti* p_n *sorozatra*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{\mu},$$

ahol $\mu = \infty$ *esetén* $1/\mu = 0$.

Bizonyítás. Vezessük be az

$$r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k , \qquad n \in \mathbb{N}_0 ,$$

jelölést. Vegyük észre, hogy ekkor $r_0 = 1$ és $r_n - r_{n-1} = -f_n$, $n \in \mathbb{N}$, amiből valamint a p_n és az r_n sorozat definíciójából

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k = \mu \qquad \text{és} \qquad r_0 p_n = p_n = -\sum_{m=1}^{n} (r_m - r_{m-1}) p_{n-m} , \quad n \in \mathbb{N} .$$

A második egyenlőség átrendezésével kapjuk, hogy

$$S_n := \sum_{m=0}^{n} r_m p_{n-m} = \sum_{m=0}^{n-1} r_m p_{n-m-1} , \qquad n \in \mathbb{N} ,$$

tehát a bevezetett jelölést alkalmazva $S_n = S_{n-1}$. Ez azt jelenti, hogy az S_n összeg értéke nem függ n választásától, vagyis

$$\sum_{m=0}^{n} r_m p_{n-m} = S_n = S_0 = r_0 p_0 = 1 \qquad n \in \mathbb{N} .$$

Legyen
$$\lambda := \limsup_{n\to\infty} p_n \,.$$
Ekkor létezik olyan n_k, $k\in\mathbb{N}$ pozitív egészekből álló sorozat, hogy $\lambda=\lim_{k\to\infty} p_{n_k}$. Legyen továbbá $s\in\mathbb{N}$ egy olyan rögzített érték, melyre $f_s>0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{k\to\infty} p_{n_k} = \liminf_{k\to\infty} p_{n_k} = \liminf_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{n_k} f_m p_{n_k-m} = \liminf_{k\to\infty} \Bigg[f_s p_{n_k-s} + \sum_{\substack{m=1,\dots,n_k\\ m\neq s}} f_m p_{n_k-m} \Bigg] \\
&\le f_s \liminf_{k\to\infty} p_{n_k-s} + \sum_{\substack{m=1,\dots,n_k\\ m\neq s}} f_m \liminf_{k\to\infty} p_{n_k-m} \\
&\le f_s \liminf_{k\to\infty} p_{n_k-s} + \Bigg[\sum_{\substack{m=1,\dots,n_k\\ m\neq s}} f_m \Bigg] \limsup_{n\to\infty} p_n \le f_s \liminf_{k\to\infty} p_{n_k-s} + (1-f_s)\lambda \,.
\end{aligned}$$

A λ érték definíciójából és a fenti számolásból azonnal jön, hogy
$$\lambda \le \liminf_{k\to\infty} p_{n_k-s} \le \limsup_{k\to\infty} p_{n_k-s} \le \limsup_{n\to\infty} p_n = \lambda \,,$$
és így $\lim_{k\to\infty} p_{n_k-s}=\lambda$. Jegyezzük meg újra, hogy ez teljesül minden olyan $s\in\mathbb{N}$ és n_k, $k\in\mathbb{N}$ pozitív egészekből álló sorozat esetén, amikor $f_s>0$ és $\lim_{k\to\infty} p_{n_k}=\lambda$.

A tétel feltevése szerint az $M:=\{s\in\mathbb{N}: f_s>0\}\subseteq\mathbb{N}$ halmaz elemeinek legnagyobb közös osztója 1. Ekkor a 2.3.10. Állítás (i) pontja szerint kiválasztható véges sok $s_1,\dots,s_\ell\in M$ elem olyan módon, hogy $\mathrm{lnko}\,(s_1,\dots,s_\ell)=1$. Ugyanezen állítás (ii) pontját alkalmazva kapjuk, hogy létezik olyan $\tau\in\mathbb{N}$ determinisztikus küszöbszám, melyre bármely $t\ge\tau$ egész mellett találhatóak $a_1,\dots,a_\ell\in\mathbb{N}_0$ számok úgy, hogy $t=a_1s_1+\dots+a_\ell s_\ell$ teljesüljön. Rögzítsünk most egy tetszőleges $t\ge\tau$ értéket, tekintsük a kapcsolatos $a_1,\dots,a_\ell$ nemnegatív egész számokat, továbbá legyen $b=a_1+\dots+a_\ell\in\mathbb{N}$ és
$$t_m=\sum_{i=1}^{\ell}\Big[a_i s_i \mathbb{1}_{\{a_1+\dots+a_i\le m\}} + \big[m-(a_1+\dots+a_{i-1})\big] s_i \mathbb{1}_{\{a_1+\dots+a_{i-1}<m<a_1+\dots+a_i\}}\Big] \,,$$
$m=0,\dots,b$. Vegyük észre, hogy ha a t érték $t=a_1s_1+\dots+a_\ell s_\ell$ alakú előállítását egy b-tagszámú összegként fogjuk fel, akkor t_m nem más, mint az első m tag összege. Ebből azonnal jön, hogy $t_0=0$, $t_b=t$, és $s'_m:=t_{m+1}-t_m\in M$ minden $m=0,\dots,b-1$ esetén. A következőkben indukcióval megmutatjuk, hogy
$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k-t_m}=\lambda \,, \qquad m=0,\dots,b \,.$$
A konvergencia a p_{n_k} részsorozat választása miatt teljesül $m=0$ esetén. Tegyük fel, hogy a konvergencia teljesül valamilyen rögzített $m\in\{0,\dots b\}$ értékre. Ekkor az előző bekezdés utolsó mondata szerint
$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k-t_{m+1}} = \lim_{k\to\infty} p_{(n_k-t_m)-s'_m} = \lambda \,.$$

Ezzel sikerült megmutatnunk, hogy a konvergencia teljesül $t_a = t$ mellett, vagyis

$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k-t} = \lambda\,.$$

Jegyezzük meg, hogy ebben a levezetésben csak azt követeltük meg, hogy a t egész legyen legalább akkora, mint a τ küszöbszám.

A bizonyítás korábbi eredményei szerint

$$\sum_{m=0}^{n_k-\tau} r_m p_{n_k-\tau-m} = S_{n_k-\tau} = 1\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

Válasszuk szét a levezetést két esetre. Ha $\mu = \sum_{m=0}^{\infty} r_m = \infty$, akkor tetszőleges $K > 0$ érték mellett létezik $m_K \in \mathbb{N}$ egész, hogy $r_0 + \cdots + r_{m_K} \geq K$. Ebből

$$1 = \lim_{k\to\infty} S_{n_k-\tau} \geq \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{m_K} r_m p_{n_k-\tau-m} = \sum_{m=0}^{m_K} r_m \left[\lim_{k\to\infty} p_{n_k-(\tau+m)}\right] \geq \lambda K\,,$$

azaz $0 \leq \lambda \leq 1/K$. Mivel ez bármely K pozitív értékre teljesül, kapjuk, hogy $\lambda = 0$, vagyis

$$\limsup_{n\to\infty} p_n = \lambda = 0 = 1/\mu\,.$$

Most tekintsük azt az esetet, mikor $\mu < \infty$, és vegyük észre, hogy p_n sorozat definíciójából indukcióval könnyen megmutatható, hogy $0 \leq p_n \leq 1$, $n = 0{,}1,\ldots$ Ez azt jelenti, hogy az $S_{n_k-\tau}$ összeg majorálható egy konvergens sorral, ugyanis

$$S_{n_k-\tau} = \sum_{m=0}^{\infty} r_m p_{n_k-\tau-m} \mathbb{1}_{\{m \leq n_k-\tau\}} \leq \sum_{m=0}^{\infty} r_m = \mu\,.$$

Ekkor a majoráns konvergenciatétel alkalmazásával

$$1 = \lim_{k\to\infty} S_{n_k-\tau} = \sum_{m=0}^{\infty} r_m \lim_{k\to\infty} \left[p_{n_k-\tau-m} \mathbb{1}_{\{m \leq n_k-\tau\}}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} r_m \lambda = \mu\lambda\,,$$

tehát ismét kapjuk, hogy $\limsup_{n\to\infty} p_n = \lambda = 1/\mu$.

A fentiekhez hasonló módszerrel bizonyítható, hogy $\liminf_{n\to\infty} p_n = 1/\mu$, a részleteket az olvasóra bízzuk. □

Az olvasó részéről felmerülhet a kérdés, hogy miért is nevezzük ezt az állítást diszkrét felújítási tételnek. Tegyük fel, hogy egy bizonyos típusú alkatrész élettartama egy pozitív egész értékű véletlen változó. Képzeljük el, hogy a 0 időpontban üzembe állítunk egy ilyen típusú alkatrészt, és amikor ez tönkremegy, akkor azonnal kicseréljük egy új alkatrészre. Ha az új alkatrész is tönkremegy, akkor azt is lecseréljük egy harmadikra, és így tovább. Ezeket a cseréket nevezzük „felújításnak”.

Jelölje $\xi_1, \xi_2, \ldots$ az egyes alkatrészek élettartamát, és tegyük fel, hogy ezek a változók függetlenek és azonos eloszlásúak egy általunk ismert $f_n = P(\xi_1 = n)$, $n \in \mathbb{N}$, eloszlással.

Legyen továbbá R_n, $n \in \mathbb{N}_0$, az n időponttal bezárólag történt felújítások száma, és legyen $r_n = E(R_n)$, $r \in \mathbb{N}_0$. Az R_n folyamatot **diszkrét felújítási folyamatnak**, az r_n sorozatot pedig **diszkrét felújítási függvénynek** nevezzük. Ekkor a teljes várható érték tételével

$$r_n = E(R_n) = \sum_{m=1}^{\infty} E\big(R_n \,|\, \xi_1 = m\big) P(\xi_1 = m)\,, \qquad n = 1,2,\ldots$$

A fenti összegben ha $\xi_1 = m > n$, akkor az n időponttal bezárólag nem történik felújítás, és így $E(R_n | \xi_1 = m) = 0$. Az $m \le n$ esetben a feltételes várható érték meghatározása már egy kicsivel nehezebb.

Vezessük be az $R'_n := R_{\xi_1 + n} - 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, folyamatot, mely szintén egy felújítási folyamat, de nem a 0, hanem az ξ_1 időponttól kezdve számolja a felújításokat. Nyílvánvaló, hogy $E(R'_n) = E(R_n) = r_n$. Vegyük észre továbbá, hogy az R'_n folyamat értékei csak a $\xi_2, \xi_3, \ldots$ élettartamoktól függnek, ezáltal függetlenek a ξ_1 változótól. Tehát, ha $m \le n$, akkor

$$E\big(R_n \,|\, \xi_1 = m\big) = E\big(R'_{n-\xi_1} + 1 \,|\, \xi_1 = m\big) = E\big(R'_{n-m} + 1\big) = r_{n-m} + 1\,.$$

Ezt beírva a teljes várható érték tételével kapott formulába azonnal jön, hogy

$$r_n = \sum_{m=1}^{n} \big(r_{n-m} + 1\big) P(\xi_1 = m) + \sum_{m=n+1}^{\infty} 0 P(\xi_1 = m) = a_n + \sum_{m=1}^{n} f_m r_{n-m}\,, \qquad n = 1,2,\ldots,$$

ahol $a_n = \sum_{m=1}^{n} f_m = P(\xi_1 \le n)$.

Tekintsük most az f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, eloszlást és egy tetszőleges a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, valós sorozatot. Ekkor az

$$A_n = a_n + \sum_{m=1}^{n} f_m A_{n-m}\,, \qquad n = 1,2,\ldots$$

egyenletrendszert az ismeretlen A_n, $n \in \mathbb{N}_0$, sorozatra vonatkozó **diszkrét felújítási egyenletnek** nevezzük. A fentiekben láttuk, hogy például $a_n = P(\xi_1 \le n)$ esetén az r_n felújítási függvény megoldása a felújítási egyenletnek. Kiderül, hogy számos, a felújításelméletben érdekes sorozat szintén felírható, mind a felújítási egyenlet megoldása, természetesen különböző a_n sorozatok segítségével. Jelölje például p_n annak a valószínűségét, hogy az n időpontban történik felújítás. Ekkor a teljes várható érték tételének alkalmazásával megmutatható, (a bizonyítást az olvasóra bízzuk,) hogy

$$p_n = \sum_{m=1}^{n} f_m p_{n-m}\,, \qquad n = 1,2,\ldots,$$

tehát a p_n sorozat $a_n = 0$ mellett megoldása a felújítási egyenletnek. Jegyezzük meg, hogy ez pontosan az a rekúrzív formula, amely a 2.5.1. Tételben is megjelenik, és vegyük észre azt is, hogy a tételben szereplő μ nem más, mint az alkatrészek élettartamának közös várható értéke. Ezek után a diszkrét felújítási tétel állítása már könnyen értelmezhető: annak a valószínűsége, hogy az n időpontban történik felújítás konvergál az alkatrészek várható értékének reciprokához. Ez az állítás egyáltalán nem meglepő, hiszen ha például $\mu = 5$, akkor átlagos minden ötödik időpontban van szükség felújításra, és ezáltal heurisztikusan $1/\mu = 1/5$ annak az esélye, hogy egy adott időpillanatra esik felújítás. Jegyezzük meg, hogy ez a heurisztika nem működik akkor, ha a 2.5.1. Tételben nem teljesül a legnagyobb közös osztóra vonatkozó feltétel, ekkor ugyanis a p_n sorozat nem feltétlenül konvergens.

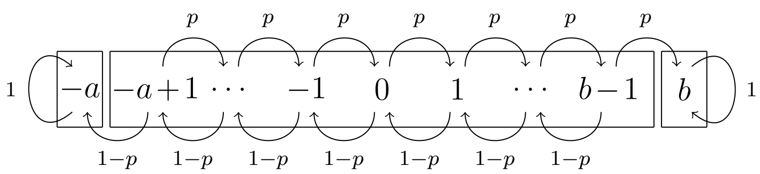
2.6. Az állapotok típusai

Korábban már vizsgáltuk, hogy egy homogén Markov-lánc rögzített adott állapotból elindulva mely más állapotokat érhet el, illetve hány lépésben érheti el azokat. Fontos megjegyezni, hogy abból, hogy egy állapot elérhető, még egyáltalán nem következik, hogy a folyamat 1 valószínűséggel meg is látogatja azt az állapotot. Ehhez kapcsolódó kérdés, amit már részben vizsgáltunk korábban, hogy a lánc mekkora valószínűséggel és hányszor tér vissza a kiindulási állapotba. Látni fogjuk, hogy ezek a kérdések nem is csak az elérhetőségek szempontjából fontosak, hanem nagyban meghatározzák a Markov-láncok asszimptotikus viselkedését.

2.6.1. Definíció. Legyen $i \in \mathcal{I}$ egy rögzített állapot, és tekintsük az $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\delta_i, \mathbf{P})$ Markov-láncot. Azt mondjuk, hogy az i állapot **tranziens**, ha az i állapotba való visszatérések V_i száma 1 valószínűséggel véges, és az állapot **rekurrens**, ha V_i majdnem biztosan végtelen. Az i állapot **pozitív rekurrens**, ha rekurrens, és a visszatérési idő várható értéke $\mu_i < \infty$, míg az állapot **null-rekurrens**, ha rekurrens, és $\mu_i = \infty$. Ezeket nevezzük úgy, hogy az állapotok **típusai**.

2.6.2. Megjegyzés. A 2.4.5. Következmény szerint a $\{V_i < \infty\}$ és a $\{V_i = \infty\}$ esemény nem következhet be egyaránt pozitív valószínűséggel, ami azt jelenti, hogy minden állapot beleesik valamelyik típusba.

2.6.3. Példa. Tekintsük a 2.3.7. Példában definiált elnyelő falakkal módosított véletlen bolyongást. Tehát, legyen $a, b > 0$ tetszőleges egész, és tekintsük azt a folyamatot, melynek állapotai az $\mathcal{I} = \{-a, \dots, b\}$ egész számok, a $-a$ és a b állapot elnyelő, és a folyamat a többi állapoton úgy viselkedik, mint a véletlen bolyongás. Az idézett példában megmutattuk, hogy ennek a folyamatnak három kommunikációs osztálya van.



Mivel a b állapot elnyelő, kapjuk, hogy a visszatérések száma $V_b = \infty$, a visszatérési idő $T_b = 1$ és a visszatérési idő várható értéke $\mu_b = 1$. Ebből a definíció értelmében következik, hogy b pozitív rekurrens, és nyilván ugyanezt elmondhatjuk a $-a$ állapotról is. Tekintsünk most egy $-a < i < b$ állapotot, és tegyük fel, hogy ez is rekurrens. Ez azt jelenti, hogy ezen állapotból indulva a folyamat ide 1 valószínűségel végtelen sokszor visszatér. Jegyezzük meg, hogy a lánc minden egyes visszatérés után $p^{b-i} > 0$ valószínűséggel csak jobbra lépkedve eléri a b elnyelő állapotot. Az erős Markov-tulajdonság szerint a visszatérések közötti séták függetlenek, így a nagy számok törvénye miatt 1 annak az esélye, hogy a folyamat valamelyik visszatérés után csak jobbra lépkedve elnyelődik a b állapotban. Ez viszont azt jelenti, hogy 1 valószínűségel véges sok visszatérés után a folyamat többé már nem térhet vissza az i állapotba, ami ellenmond annak az indirekt feltevésnek, hogy i rekurrens. Tehát a középső osztály állapotai tranziensek.

2.6.4. Állítás. *Legyen $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc $\mathbf{P}$ átmenetmátrixszal, és tegyük fel, hogy az i állapot periodikus állapot az $\mathbb{X}$ láncban $d \in (1, \infty)$ periódussal. Tekintsük továbbá az $\mathbb{Y} = \{Y_n = X_{nd} : n \in \mathbb{N}_0\}$ Markov-láncot. Ekkor teljesülnek az alábbiak.*

(i) *Az i állapotnak a két láncban vett visszatérési idejének várható értékére $\mu_{i,\mathbb{X}} = d\mu_{i,\mathbb{Y}}$.*

(ii) *Az i állapotnak a két láncban azonos a típusa.*

Bizonyítás. Legyen az $\mathbb{X}$ folyamat kezdeti eloszlása δ_i. Ekkor $\mathbb{X}$ legfeljebb az nd, $n \in \mathbb{N}$, alakú időpontokban térhet vissza az i állapotba, és így a visszatérések száma és az első visszatérési idő a két láncban

$$V_{i,\mathbb{X}} = V_{i,\mathbb{Y}} \qquad \text{és} \qquad T_{i,\mathbb{X}} = dT_{i,\mathbb{Y}} \,.$$

Ebből azonnal következik mindkét állítás. □

2.6.5. Tétel. *Legyen $i \in \mathcal{I}$ tetszőleges állapot.*

(i) *Az i állapot pontosan akkor tranziens, ha az i állapotba való visszatérés valószínűsége $f_i < 1$, ami pontosan akkor teljesül, ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} < \infty \,.$$

Ebben az esetben a visszatérési idő várható értéke $\mu_i = \infty$, és tetszőleges $j \in \mathcal{I}$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{j,i}^{(n)} < \infty \,.$$

(ii) *Az i állapot pontosan akkor null rekurrens, ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty \qquad \text{és} \qquad p_{i,i}^{(n)} \to 0 \,.$$

Ebben az esetben tetszőleges $j \in \mathcal{I}$ esetén $p_{j,i}^{(n)} \to 0$.

(iii) *Az i állapot pontosan akkor pozitív rekurrens, ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty \qquad \text{és} \qquad \limsup_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} > 0 \,.$$

Speciálisan, ha az i állapot aperiodikus, akkor $\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} = 1/\mu_i$.

Mielőtt bebizonyítanánk a tételt, vezessünk be néhány jelölést. Legyenek a j állapot **elérési valószínűségei**

$$\begin{aligned}
f_{i,j} &:= P\big(\exists\, n \in \mathbb{N} : X_n = j \mid X_0 = i\big) \\
&= P\big(\text{a folyamat valaha eléri a } j \text{ állapotot} \mid X_0 = i\big)\,, \\
f_{i,j}^{(n)} &:= P\big(X_n = j, X_m \neq j, m = 1, \ldots, n-1 \mid X_0 = i\big) \\
&= P\big(\text{a folyamat az } n. \text{ lépésben éri el először a } j \text{ állapotot} \mid X_0 = i\big)\,, \quad n \geq 1\,, \\
f_{i,j}^{(0)} &:= 0\,.
\end{aligned}$$

Ha $j = i$, akkor ezeket **visszatérési valószínűségeknek** nevezzük. Látható, hogy

$$f_{i,j} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)}\,, \qquad f_i = f_{i,i} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)}\,,$$

továbbá a lácszabály és a Markov-tulajdonság alkalmazásával

$$\begin{aligned}
p_{i,j}^{(n)} &= \sum_{m=1}^{n} P\big(X_n = j, X_m = j, X_{m-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \mid X_0 = i\big) \\
&= \sum_{m=1}^{n} P\big(X_n = j \mid X_m = j, X_{m-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j, X_0 = i\big) \\
&\qquad\qquad \cdot P\big(X_m = j, X_{m-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \mid X_0 = i\big) \\
&= \sum_{m=1}^{n} f_{i,j}^{(m)} p_{j,j}^{(n-m)}\,.
\end{aligned}$$

Ha i rekurrens állapot, akkor az első visszatérési idő $T_i < \infty$ m.b., tehát várható értéke

$$\mu_i = E(T_i) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{i,i}^{(n)}\,.$$

Bizonyítás. Először az ekvivalenciákat bizonyítjuk be. Vegyük észre, hogy a 2.4.5. Következmény szerint

$$i \text{ tranziens} \quad \Longleftrightarrow \quad V_i < \infty \ \text{ m.b.} \quad \Longleftrightarrow \quad f_i < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} < \infty\,,$$

illetve ezzel analóg módon

$$i \text{ rekurrens} \quad \Longleftrightarrow \quad V_i = \infty \ \text{ m.b.} \quad \Longleftrightarrow \quad f_i = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty\,.$$

Legyen most i rekurrens állapot, és először tegyük fel, hogy i aperiodikus. Vegyük észre, hogy ekkor a $p_n = p_{i,i}^{(n)}$ és az $f_n = f_{i,i}^{(n)}$ sorozat, valamint a μ_i várható érték kielégíti a 2.5.1. Tétel feltételeit, és így

$$\lim_{n \to \infty} p_{i,i}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}\,.$$

A definíciókból kapjuk, hogy az i állapot pontosan akkor null-rekurrens, ha ez a határérték nulla, és az állapot pontosan akkor pozitív rekurrens, ha a limesz pozitív. Ha ezzel szemben az i állapot periodikus $1<d<\infty$ periódussal, akkor tekintsük a 2.6.4. Állításban definiált $\mathbb{Y}$ folyamatot. Ekkor a 2.3.12. Tétel szerint $\mathbb{Y} \sim \mathrm{Markov}(\delta_i, \mathbf{Q})$, ahol $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^d$, továbbá az i állapot aperiodikus az $\mathbb{Y}$ láncban. Ebből a 2.6.4. Állítás eredményeit alkalmazva

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(nd)} = \lim_{n\to\infty} q_{i,i}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{i,\mathbb{Y}}} = \frac{d}{\mu_{i,\mathbb{X}}} .$$

Mivel a periódus definíciója szerint $d \nmid n$ esetén $p_{i,i}^{(n)} = 0$, kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} = \frac{d}{\mu_{i,\mathbb{X}}} ,$$

ami pontosan akkor nulla, ha $\mu_{i,\mathbb{X}}=\infty$, tehát ha i null-rekurrens az $\mathbb{X}$ láncban, és pontosan akkor pozitív, ha i pozitív rekurrens az $\mathbb{X}$ folyamatban. Ezzel az ekvivalenciákat beláttuk.

(i) Ha i tranziens állapot, akkor $P(T_i=\infty)=1-f_i>0$, és így $\mu_i=E(T_i)=\infty$. Továbbá, tetszőleges j állapot esetén a 2.4.5. Következmény ismételt alkalmazásával

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{j,i}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} f_{j,i}^{(m)} p_{i,i}^{(n-m)} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} f_{j,i}^{(m)} p_{i,i}^{(n-m)} = \sum_{m=1}^{\infty} f_{j,i}^{(m)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \frac{f_{j,i}}{1-f_i} < \infty .$$

(Jegyezzük meg, hogy ebből $p_{j,i}^{(n)} \to 0$, amint $n \to \infty$.)

(ii) A null-rekurrens esetben j legyen ismét tetszőleges állapot, és jegyezzük meg, hogy

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{j,i}^{(m)} = f_{j,i} \le 1 .$$

Ekkor a $p_{i,i}^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}$, sorozat már bizonyított konvergenciáját és a majoráns konvergenciatételt alkalmazva

$$p_{j,i}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_{j,i}^{(m)} p_{i,i}^{(n-m)} = \sum_{m=1}^{\infty} f_{j,i}^{(m)} \left(p_{i,i}^{(n-m)} \mathbb{1}_{\{m\le n\}} \right) \to \sum_{m=1}^{\infty} f_{j,i}^{(m)} 0 = 0 , \qquad n \to \infty .$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

2.6.6. Tétel (Szolidaritási tétel az állapotok típusára)**.** *Egy kommunikációs osztályon belül minden állapotnak azonos a típusa.*

A szolidaritási tétel azt állítja, hogy a típus osztálytulajdonság. A továbbiakban azt mondjuk, hogy egy osztály tranziens, null-rekurrens vagy pozitív rekurrens attól függően, hogy milyen a benne található állapotok típusa.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ha i és j azonos osztályba eső állapot, akkor létezik m és n pozitív egész, hogy $p_{i,j}^{(m)} > 0$ és $p_{j,i}^{(n)} > 0$. Továbbá, bármely $r \ge 0$ mellett

$$p_{i,j}^{(m)} p_{j,j}^{(r)} p_{i,j}^{(n)} \le p_{i,i}^{(m+r+n)} .$$

Tegyük fel, hogy az osztályban van tranziens állapot, jelöljük ezt i-vel, és legyen j az osztály egy tetszőleges másik eleme. Ekkor a fenti m és n egészekre

$$p_{i,j}^{(m)}\left[\sum_{r=0}^{\infty} p_{j,j}^{(r)}\right]p_{j,i}^{(n)} \leq \sum_{r=0}^{\infty} p_{i,i}^{(m+r+n)} < \infty\,.$$

Mivel $p_{i,j}^{(m)} > 0$ és $p_{j,i}^{(n)} > 0$, kapjuk, hogy $\sum_{r=0}^{\infty} p_{j,j}^{(r)} < \infty$, azaz j szintén tranziens. Tehát, ha az osztályban van tranziens állapot, akkor az osztályban minden állapot ilyen.

Most tegyük fel, hogy az osztályban nincs tranziens állapot, de van null-rekurrens, mondjuk az i. Ekkor az osztály bármely másik j elemére

$$p_{i,j}^{(m)} p_{j,j}^{(r)} p_{i,j}^{(n)} \leq p_{i,i}^{(m+r+n)} \to 0\,, \qquad r \to \infty\,,$$

amiből $p_{j,j}^{(r)} \to 0$. Mivel az osztályban nincsen tranziens állapot, kapjuk, hogy j csak null-rekurrens lehet. Ezután nyilvánvaló, hogy ha az osztályban van pozitív rekurrens állapot, akkor az osztály minden eleme ilyen. □

A szolidaritási tételben az a nagyszerű, hogy a tétel értelmében nem kell egy Markov-lánc minden egyes állapotáról külön-külön eldöntenünk, hogy melyik típusba esik, hanem elég minden osztályból egy matematikailag könnyen kezelhető reprezentánst megvizsgálni. Ezeket a kiválasztott állapotokat azonban továbbra is csak a 2.6.1. Definíció vagy a 2.6.5. Tétel alkalmazásával tudjuk elemezni, ami sok esetben technikai nehézségek vezethet. A továbbiakban néhány könnyen ellenőrizhető feltételt adunk az osztályok típusára.

2.6.7. Definíció. Legyen $\mathcal{C}$ kommunikációs osztály egy $\mathbb{X}$ Markov-láncban. A $\mathcal{C}$ osztály **zárt**, ha nem lehet elhagyni, tehát tetszőleges $i \in \mathcal{C}$ és $j \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{C}$ állapotok esetén $p_{i,j} = 0$. A kommunikációs osztály **nyitott**, ha nem zárt.

2.6.8. Állítás. (i) *Minden nyitott osztály tranziens.*

(ii) *Minden rekurrens osztály zárt.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{C}$ nyitott osztály, és tekintsünk olyan $i \in \mathcal{C}$ és $j \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{C}$ állapotot, melyre $p_{i,j} > 0$. Ha i elérhető lenne j-ből, akkor azonos osztályba esnének, ami most nem teljesül. Kapjuk, hogy

$$1 - f_i = P\big(\text{a lánc sosem tér vissza } i\text{-be} \mid X_0 = i\big) \geq p_{i,j} > 0\,,$$

amiből $f_i < 1$, azaz i tranziens. A második állítás egyszerűen az első megfordítása. □

2.6.9. Megjegyzés. Az előző állítás nem megfordítható, tehát nem igaz az, hogy minden zárt osztály rekurrens, és az, hogy minden tranziens osztály nyitott. Például láttuk, hogy a bolyongás irreducibilis Markov-lánc, amiből jön, hogy az egyetlen kommunikációs osztálya zárt. A következő alfejezetben viszont meg fogjuk mutatni, hogy a nem szimmetrikus esetben a folyamat tranziens.

2.6.10. Állítás. *Egy véges kommunikációs osztály pontosan akkor rekurrens, ha zárt. Továbbá, egy véges osztály nem lehet null-rekurrens.*

2.6.11. Megjegyzés. Egy véges állapotterű Markov-lánc minden kommunikációs osztálya véges, ezért az ilyen láncokban az állapotok típusát könnyű meghatározni.

Bizonyítás. Mivel egy rekurrens osztály mindig zárt, a bizonyításhoz elég azt megmutatni, hogy egy véges zárt osztály mindig pozitív rekurrens. Ha $\mathcal{C}$ véges és zárt, akkor bármely rögzített $i \in \mathcal{C}$ mellett

$$\sum_{j\in\mathcal{C}} p_{i,j}^{(n)} = \sum_{j\in\mathcal{C}} P\big(X_n = j \mid X_0 = i\big) = P\big(X_n \in \mathcal{C} \mid X_0 = i\big) = 1\,, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Tegyük fel, hogy $\mathcal{C}$ tranziens vagy null-rekurrens. Ekkor a 2.6.5. Tétel (i) és (ii) pontjából $p_{i,j}^{(n)} \to 0$ minden $j \in \mathcal{C}$ állapotra, és ezáltal $\sum_{j\in\mathcal{C}} p_{i,j}^{(n)} \to 0$, amint $n \to \infty$. Ez ellentmondás, tehát $\mathcal{C}$ pozitív rekurrens osztály. □

Az utolsó tételben azt vizsgáljuk meg, hogy mi történik egy Markov-lánccal, ha valaha elér egy rekurrens (és ezáltal zárt) osztályt.

2.6.12. Állítás. *Legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}$ az $\mathbb{X}$ Markov-lánc egy rekurrens osztálya.*

(i) *Ha $i, j \in \mathcal{C}$, akkor $f_{i,j} = 1$.*

(ii) *Ha az $\mathbb{X}$ Markov-lánc valaha eléri a $\mathcal{C}$ osztályt, akkor $\mathcal{C}$ minden állapotát végtelen sokszor meglátogatja.*

Bizonyítás. (i) Ha $i = j$, akkor az állítás nyilvánvaló, ezért a továbbiakban tegyük fel, hogy $i \neq j$. Mivel i rekurrens, az i állapotból indulva a lánc végtelen sokszor visszatér, és emiatt a $T_{i,r}$, $r = 0,1,\ldots$ visszatérési idők véges megállási idők. Vegyük az

$$\begin{aligned} A_r &= \big\{\exists n : T_{i,r-1} \le n \le T_{i,r}, X_n = j\big\} \\ &= \big\{\text{a lánc a } T_{i,r-1},\ldots,T_{i,r} \text{ lépések során meglátogatja a } j \text{ állapotot}\big\}\,, \quad r = 1,2,\ldots\,, \end{aligned}$$

eseményeket, és tekintsünk az átmenetgráfon minimális i-ből j-be, illetve j-ből i-be vezető irányított utat. Ekkor a két út összekapcsolása egy i-ből i-be vezető olyan utat ad, mely érinti a j állapotot, de egyik közbülső lépésben sem tér vissza i-be. Ez azt jelenti, hogy $P(A_1) > 0$. Az erős Markov-tulajdonság szerint $\mathbb{X}' = \{X_{T_{i,r}+n} : n \in \mathbb{N}\}$ ugyanolyan eloszlású Markov-lánc, mint $\mathbb{X}$, továbbá $\mathbb{X}'$ független a $T_{i,r}$ időpont előtti eseményektől. Ebből következik, hogy $A_1, A_2, \ldots$ független és azonos valószínűségű esemény. Ekkor a nagy számok törvénye szerint 1 valószínűséggel valamelyik esemény bekövetkezik, tehát majdnem biztosan lesz olyan kirándulás, mely meglátogatja a j állapotot.

(ii) Tekintsünk egy tetszőleges $j \in \mathcal{C}$ állapotot, legyen $H_{\mathcal{C}}$ a $\mathcal{C}$ osztály első elérési ideje, mely megállási idő, és alkalmazzuk a $P_{\mathcal{C}}(A) = P(A \mid H_{\mathcal{C}} < \infty)$, $A \in \mathcal{A}$, feltételes valószínűséget. Célunk azt megmutatni, hogy

$$P\big(\text{a folyamat valaha eléri } j\text{-t} \mid H_{\mathcal{C}} < \infty\big) = P_{\mathcal{C}}\big(\exists n \ge H_{\mathcal{C}} : X_n = j\big) = 1\,.$$

Ez nekünk elég, ugyanis a j állapot első elérési ideje megállási idő, és így az erős Markov-tulajdonság és j rekurrenciája miatt, ha a folyamat valaha eléri j-t, akkor 1 valószínűséggel végtelen sokszor vissza is tér oda. Vegyük észre, hogy a $\{H_{\mathcal{C}} < \infty\}$ eseményre feltételesen a $\{X_{H_{\mathcal{C}}} = i\}$, $i \in \mathcal{C}$, teljes eseményrendszert alkot. Továbbá, rögzített $i \in \mathcal{C}$ mellett a $\{H_{\mathcal{C}} < \infty, X_{H_{\mathcal{C}}} = i\}$ eseményre feltételesen $\mathbb{X}' = \{X'_n = X_{H_{\mathcal{C}}+n} : n \geq 0\}$, olyan Markov-lánc, melynek $\mathbf{P}$ az átmenetmátrixa. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{C}$ az $\mathbb{X}'$ láncra nézve is rekurrens osztály, amiből

$$P_{\mathcal{C}}\big(\exists n \geq 0 : X'_n = j \,|\, X'_0 = i\big) = P\big(\exists n \geq 0 : X'_n = j \,|\, H_{\mathcal{C}} < \infty, X'_0 = i\big) = 1\,.$$

Ekkor a teljes valószínűség tételével

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{C}}\big(\exists n \geq H_{\mathcal{C}} : X_n = j\big) &= \sum_{i\in\mathcal{C}} P_{\mathcal{C}}\big(\exists n \geq H_{\mathcal{C}} : X_n = j \,|\, X_{H_{\mathcal{C}}} = i\big) P_{\mathcal{C}}\big(X_{H_{\mathcal{C}}} = i\big) \\ &= \sum_{i\in\mathcal{C}} P\big(\exists n \geq 0 : X'_n = j \,|\, X'_0 = i\big) P_{\mathcal{C}}\big(X_{H_{\mathcal{C}}} = i\big) = \sum_{i\in\mathcal{C}} P_{\mathcal{C}}\big(X_{H_{\mathcal{C}}} = i\big) = 1\,. \end{aligned}$$

□

2.7. A véletlen bolyongás és a Pólya-tétel

Legyen $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egydimenziós véletlen bolyongás $p \in (0{,}1)$ paraméterrel, tehát az 1.1.2. Példában adott definíciónak megfelelően tekintsünk $Z_1, Z_2, \ldots$ független véletlen változókat, melyek eloszlása $P(Z_n = +1) = p$, $P(Z_n = -1) = 1-p$, $n \in \mathbb{N}$, és legyen

$$X_0 = 0\,, \qquad X_n = Z_1 + \cdots + Z_n\,, \qquad n = 1{,}2,\ldots$$

Jegyezzük meg, hogy a 2.2.3. Példa szerint az $\mathbb{X}$ folyamat homogén Markov-lánc

$$p_{i,i+1} = P\big(X_{n+1} = i+1 \,|\, X_n = i\big) = p\,, \qquad p_{i,i-1} = P\big(X_{n+1} = i-1 \,|\, X_n = i\big) = q = 1-p\,,$$

átmenetvalószínűségekkel. A továbbiakban meghatározzuk az állapotok típusát a véletlen bolyongásban, valamint általánosítjuk ezt a kérdést magasabb dimenzióra. Először az $\mathbb{X}$ sorozat asszimptotikus viselkedését vizsgáljuk meg.

2.7.1. Állítás. *A véletlen bolyongásra 1 valószínűséggel*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \begin{cases} +\infty\,, & p > 1/2\,, \\ -\infty\,, & p < 1/2\,. \end{cases}$$

Bizonyítás. A nagy számok erős törvényéből 1 valószínűséggel

$$\frac{X_n}{n} = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} \to EZ_1 = 2p-1\,, \qquad n \to \infty.$$

Tehát $2p-1$ előjelétől függően $X_n \sim (2p-1)n \to \pm\infty$, $n \to \infty$, majdnem biztosan. □

Mivel a bolyongásnak csak egy kommunikációs osztálya van, minden állapotnak azonos a típusa. Az előző állításban láttuk, hogy a nem szimmetrikus esetben $|X_n| \to \infty$ majdnem biztosan, ami azt jelenti, hogy a 0 állapotból indulva 1 valószínűséggel csak véges sokszor térünk vissza oda. Tehát, ebben az esetben a folyamat tranziens. A következő tételben a szimmetrikus és a nem szimmetrikus esetet együtt vizsgáljuk ebből a szempontból.

2.7.2. Tétel. *A bolyongás egyetlen kommunikációs osztálya null-rekurrens a $p = 1/2$ szimmetrikus esetben, és tranziens a $p \neq 1/2$ nem szimmetrikus esetben.*

Bizonyítás. A bizonyításban a 2.6.5. Tétel ekvivalens karakterizációit fogjuk alkalmazni. Ha a lánc a 0 állapotból indul, akkor csak páros sok lépésben térhet vissza oda. Pontosan $2n$ lépésben akkor tér vissza, ha n lépést tesz jobbra és n lépést balra. Mivel a jobbra tett lépések száma binomiális eloszlást követ, kapjuk, hogy

$$p_{0,0}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n!)}{(n!)^2}(pq)^n, \qquad n = 0,1,\ldots$$

Az ismert Stirling-formula szerint

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \qquad n \to \infty,$$

amiből

$$p_{0,0}^{(2n)} \sim a_n = \frac{(2n/e)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left[(n/e)^n\sqrt{2\pi n}\right]^2}(pq)^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}, \qquad n \to \infty.$$

Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik n_0, hogy $n > n_0$ mellett $a_n(1-\varepsilon) \leq p_{0,0}^{(2n)} \leq a_n(1+\varepsilon)$, amiből jön, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(2n)} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

pontosan ugyanazokra a p értékekre konvergens, illetve divergens. (Miért?) Ha $p \neq 1/2$, akkor $4pq < 1$, és ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} (4pq)^n = \frac{1}{1-4pq} < \infty,$$

vagyis a nem szimmetrikus esetben a 2.6.5. Tétel (i) pontja szerint a 0 állapot tranziens. Ha $p = 1/2$, akkor $4pq = 1$, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty,$$

azaz a szimmetrikus esetben a 0 állapot rekurrens. Emellett $a_n \to 0$, amiből $p_{0,0}^{(n)} \to 0$, és így ugyanezen tétel (ii) pontja miatt a lánc null-rekurrens. □

2.7.3. Definíció. Rögzített $d \geq 1$ egész mellett legyen $e_1, \ldots, e_d$ az $\mathbb{R}^d$ Euklideszi tér szokásos bázisa. Tekintsünk $Z_1, Z_2, \ldots$ független vektor változókat, melyek eloszlása

$$P\big(Z_n = e_k\big) = \frac{1}{2d} = P\big(Z_n = -e_k\big), \qquad k = 1, \ldots, d, \quad n = 1,2,\ldots,$$

továbbá az egydimenziós esethez hasonlóan legyen

$$X_0 = 0, \qquad X_{n+1} = X_n + Z_{n+1} = Z_1 + \cdots + Z_{n+1}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Az így bevezetett $\mathbb{X}=\{X_n{:}n{\in}\mathbb{N}_0\}$ sorozatot **d-dimenziós szimmetrikus bolyongásnak** nevezzük. A 2.1.5. Példában alkalmazott gondolatmenettel könnyen megmutatható, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat homogén Markov-lánc az $\mathcal{I}=\mathbb{Z}^d$ állapottéren, és az átmenetvalószínűségei

$$P\big(X_{n+1}=i+e_k \,|\, X_n=i\big)=P\big(X_{n+1}=i-e_k \,|\, X_n=i\big)=\frac{1}{2d}\,,\qquad k=1,\dots,d\,,\quad i\in\mathbb{Z}^d\,.$$

Tehát, a d-dimenziós szimmetrikus bolyongás a d-dimenzós Euklideszi tér egész rácspontjain lépked. Az origóból indul, és minden egyes lépésben azonos valószínűséggel ugrik tovább az aktuális pozíció $2d$ szomszédos rácspontjába. Mivel bármely két rácspont elérhető egymásból, a folyamatnak egyetlen kommunikációs osztálya van. A következő tételt Pólya György bizonyította először.

2.7.4. Tétel (Pólya-tétel, 1921)**.** *A d-dimenziós szimmetrikus bolyongás null-rekurrens, ha $d=1{,}2$, és tranziens, ha $d\geq 3$.*

Bizonyítás. Terjedelmi okokból csak vázoljuk a bizonyítás menetét, a részleteket az olvasóra bízzuk. Legyen $\{X_n(d): n\in\mathbb{N}_0\}$ a d-dimenziós szimmetrikus bolyongás, és vezessük be a

$$p_{0,0}^{(n)}(d):=P\big(X_n(d)=0\,|\,X_0(d)=0\big)\,,\qquad n=0{,}1,\dots$$

jelölést. A két- és a háromdimenziós esetben az egydimenziós esethez hasonlóan kombinatorikus úton felírhatóak a $p_{0,0}^{(n)}(d)$ átmenetvalószínűségek. Ezután, szintén az egydimenziós eset mintájára, a Stirling-formula alkalmazásával kapunk egy $a_n(d)\sim p_{0,0}^{(n)}(d)$ sorozatot, melyre $d=2$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(d)$ sor divergens, míg $d=3$ esetén konvergens. A magasabb dimenziós esetekben megmutatható, hogy $p_{0,0}^{(n)}(d)\leq p_{0,0}^{(n)}(3)$, vagyis a $\sum_{n=1}^{\infty}p_{0,0}^{(n)}(d)$ sor konvergens. Ebből a 2.6.5. Tétel szerint már következik az állítás. □

2.8. Markov-láncok invariáns mértékei és eloszlásai

Az eddigiekben egy Markov-láncot mindig egy az átmenetvalószínűségektől független kezdeti eloszlás szerint indítottuk el. Ilyenkor természetesen semmi sem garantálja, hogy az $n{=}1{,}2,\dots$ időpontokban a folyamat eloszlása azonos lenne a kezdeti eloszlással. Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy van-e olyan kezdeti eloszlás, mely időben állandó eloszlást biztosít.

Legyen $\mathbb{X}=\{X_n{:}n{\in}\mathbb{N}\}$ homogén Markov-lánc tetszőleges $\alpha=[\alpha_i]_{i\in\mathcal{I}}$ kezdeti eloszlással és $\mathbf{P}=[p_{i,j}]_{i,j\in\mathcal{I}}$ átmenetmátrixszal. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy az α kezdeti eloszlásnak megfelelően szétterítünk egységnyi nagyságyságú súlyt az állapottéren. Ezután rendre az $i\in\mathcal{I}$ állapotban található α_i súlyt vágjuk szét a $p_{i,j}$ átmenetvalószínűségek szerint, és toljuk át a $\alpha_i p_{i,j}$ nagyságú tömeget a $j\in\mathcal{I}$ állapotokba. Ha ezt minden i és j állapotra végrehajtjuk, akkor a 2.2.10. Következmény szerint a j állapotba

$$\sum_{i\in\mathcal{I}}\alpha_i p_{i,j}=(\alpha\mathbf{P})_j=P(X_1=j)\,,\qquad j\in\mathcal{I}\,,$$

nagyságú súly kerül. Tehát, az áttologatások után a súlyeloszlás pontosan az X_1 változó eloszlását adja. Ez egyben azt is jelenti, hogy az α eloszlás pontosan akkor állandó időben, ha a súlyok mozgatása után visszakapjuk az eredeti tömegleosztást. Hogy megkülönböztessük őket a tetszőleges α kezdeti eloszlástól, az időben állandó eloszlásokra általában a $\pi = [\pi_i]_{i\in\mathcal{I}}$ jelölést használjuk.

2.8.1. Definíció. Legyen $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ homogén Markov-lánc $\mathbf{P}$ átmenetmátrixszal. A $\pi = [\pi_i]_{i\in\mathcal{I}}$ eloszlást **invariáns eloszlásnak** vagy **stacionárius eloszlásnak** nevezzük, ha $X_0 \sim \pi$ esetén $X_1 \sim \pi$.

A következő állítás rámutat arra, hogy az invariáns eloszlás független az α kezdeti eloszlástól, tehát ez is a Markov-lánc olyan jellenzője, melyet a $\mathbf{P}$ átmenetmátrix határoz meg. Ilyen módon beszélhetünk egy sztochasztikus mátrix invariáns eloszlásáról.

2.8.2. Állítás. *Legyen* $\mathbf{P}$ *sztochasztikus mátrix,* π *pedig eloszlás az* $\mathcal{I}$ *állapottéren. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *A* π *vektor invariáns eloszlás.*

(ii) $X_0 \sim \pi$ *esetén* $X_n \sim \pi$ *minden* $n \in \mathbb{N}$ *értékre.*

(iii) π *a* $\mathbf{P}$ *mátrix* $\lambda = 1$ *sajátértékhez tartozó baloldali sajátvektora.*

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (iii) Ha $X_0 \sim \pi$, akkor $X_1 \sim \pi\mathbf{P}$. Ha π invariáns eloszlás, akkor $\pi\mathbf{P} = 1\cdot\pi$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Ha π a $\mathbf{P}$ mátrix 1 sajátértékéhez tartozó sajátvektora, akkor $X_0 \sim \pi$ esetén tetszőleges n potitív egészre

$$X_n \sim \pi\mathbf{P}^n = (\pi\mathbf{P})\mathbf{P}^{n-1} = \pi\mathbf{P}^{n-1} = \cdots = \pi\mathbf{P} = \pi\,.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nyilvánvaló. □

2.8.3. Következmény. *A* π *vektor pontosan akkor invariáns eloszlás, ha komponensei nemnegatívak és kielégítik az alábbi egyenletrendszert:*

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \pi_i = 1\,, \qquad \pi_j = \sum_{i\in\mathcal{I}} p_{i,j}\pi_i\,, \qquad j \in \mathcal{I}\,.$$

Vegyük észre, hogy egy sztochasztikus mátrixnak az 1 mindig jobboldali sajátértéke, hiszen a $\pi = [1]_{i\in\mathcal{I}}$ vektorra $\mathbf{P}\pi^\top = 1\pi^\top$. Ebből véges állapottéren következik, hogy az 1 baloldali sajátérték is, de ez nem garantálja, hogy létezik olyan baloldali sajátvektor, melynek komponensei nemnegatívak, tehát ami eloszlás lenne. Vegyük észre, hogy véges sok állapot esetén a 2.8.3. Következmény egyenleteinek száma eggyel nagyobb, mint az ismeretlenek száma. Ez azonban ez nem zárja ki az invariáns eloszlás létezését, ugyanis az egyeneletek nem függetlenek, azokat összeadva azonosságot kapunk. A legegyszerűbb esetekben egy hasznos lineáris algebrai eredmény, (melyet bizonyítás nélkül közlünk,) garantálja a stacionárius eloszlás létezését.

2.8.4. Tétel (Perron-tétel)**.** *Ha az* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ *mátrix pozitív, tehát minden komponense nagyobb, mint nulla, akkor létezik egy* $\lambda(\mathbf{A})$ ***domináns sajátértéke****, melyre teljesülnek az alábbiak.*

(i) *A* $\lambda(\mathbf{A})$ *sajátérték pozitív valós szám, egyszeres sajátérték, és létezik hozzá olyan sajátvektor, melynek minden komponense pozitív.*

(ii) *Az* $\mathbf{A}$ *mátrix minden más* κ *sajátértékére* $|\kappa| < \lambda(\mathbf{A})$*, és a többi sajátéréknek nincs olyan sajátvektora, melynek minden komponense nemnegatív lenne.*

2.8.5. Tétel. *Legyen* $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$ *véges, irreducibilis és aperiodikus Markov-lánc. Ekkor teljesülnek az alábbiak.*

(i) *A* $\mathbf{P}$ *mátrixnak az* 1 *egyszeres sajátértéke, és az összes többi* κ *sajátértékre* $|\kappa| < 1$*. Ebből következik, hogy* $\mathbf{P}$ *spektrálsugara* 1*.*

(ii) *Az* $\mathbb{X}$ *Markov-láncnak létezik egyértelmű* $\pi = [\pi_i]_{i\in\mathcal{I}}$ *invariáns eloszlása.*

Bizonyítás. Ha $d \in \mathbb{N}$ jelöli a Markov-lánc állapotainak számát, akkor nyilván $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Mivel a lánc irreducibilis és aperiodikus, a 2.3.11. Állítás (iii) pontjából kapjuk, hogy minden $i, j \in \mathcal{I}$ állapotra létezik $n(i, j)$ küszöbszám, melyre $n > n(i, j)$ esetén $p^{(n)}_{i,j} > 0$. Ez azt jelenti, hogy ha $n = \max_{i,j\in\mathcal{I}} n(i, j) + 1$, akkor a $\mathbf{Q} := \mathbf{P}^n \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mátrix pozitív. Ekkor a Perron-tétel szerint a $\mathbf{Q}$ mátrixnak létezik $\lambda(\mathbf{Q})$ domináns sajátértéke, továbbá ezen sajátértékhez tartozik olyan $x \in \mathbb{R}^d$ sajátvektor, melyben minden komponens pozitív. Mivel $\mathbf{Q}$ szintén sztochasztikus mátrix, kapjuk, hogy

$$\lambda(\mathbf{Q}) \sum_{j=1}^{d} x_j = \sum_{j=1}^{d} \big(\lambda(\mathbf{Q})x\big)_j = \sum_{j=1}^{d} (x\mathbf{Q})_j = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} x_i q_{i,j} = \sum_{i=1}^{d} x_i \sum_{j=1}^{d} q_{i,j} = \sum_{i=1}^{d} x_i\,,$$

amiből $\lambda(\mathbf{Q}) = 1$.

Jelölje $\kappa_1, \ldots, \kappa_d \in \mathbb{C}$ a $\mathbf{P}$ sajátértékeit, és legyen $x^{(1)}, \ldots, x^{(d)} \in \mathbb{C}^d$ sajátvektoroknak egy ortonormált rendszere. Ekkor

$$x^{(k)}\mathbf{Q} = (x^{(k)}\mathbf{P})\mathbf{P}^{n-1} = \kappa_k x^{(k)}\mathbf{P}^{n-1} = \cdots = \kappa_k^n x^{(k)}\,.$$

Tehát, a $x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}$ vektorok a $\mathbf{Q}$ mátrixnak is sajátvektorai, és sajátértékei $\kappa_1^n, \ldots, \kappa_d^n$ alakban állnak elő. Láttuk, hogy az 1 sajátértéke a $\mathbf{P}$ mátrixnak, és $\lambda(\mathbf{Q}) = 1^n$ a domináns sajátérték. Perron tételét alkalmazva kapjuk, hogy az összes többi sajátértékre $|\kappa^n| < \lambda(\mathbf{Q})$, amiből $|\kappa| < 1$. Ez egyben azt is jelenti, hogy az 1 a $\mathbf{P}$ mátrixnak is egyszeres sajátértéke, és így a tétel (i) pontját bebizonyítottuk.

Mivel az 1 mind a $\mathbf{P}$, mind a $\mathbf{Q}$ mátrixnak egyszeres sajátértéke, a kapcsolatos sajátvektorok mindkét mátrix esetében egydimenziós alteret alkotnak. A korábbi észrevételünk szerint ha x a $\mathbf{P}$ mátrixnak az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektora, akkor x a $\mathbf{Q}$ mátrixnak is sajátvektora ugyanezen sajátértékkel. Ebből következik, hogy a két altér egybeesik, tehát ezen sajátvektorok megegyeznek. Nyilvánvaló, hogy ebben az altérben legfeljebb egy olyan vektor lehet, melyben a komponensek összege 1, tehát az invariáns eloszlás, ha létezik, akkor egyértelmű. A Perron-tétel szerint a $\mathbf{Q}$ mátrixnak, és ezáltal $\mathbf{P}$-nek létezik olyan x sajátvektora, melynek minden komponense pozitív. Ekkor x normáltja

$$\pi := x \Big/ \sum_{i=1}^{d} x_i$$

eloszlás. Mivel π beleesik a sajátértékek alterébe, megkaptuk az invariáns eloszlást. $\square$

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy az invariáns eloszlás keresésekor a tranziens és a null-rekurrens állapotokkal nem kell foglalkoznunk.

2.8.6. Tétel. *Legyen* $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$ *tetszőleges Markov-lánc. Ha* $i \in \mathcal{I}$ *tranziens vagy null-rekurrens állapot, akkor* $P(X_n = i) \to 0$, $n \to \infty$.

Bizonyítás. A 2.6.5. Tétel szerint ha i tranziens vagy null-rekurrens, akkor tetszőleges $j \in \mathcal{I}$ állapot esetén $p_{j,i}^{(n)} \to 0$. Figyelembevéve, hogy az α vektor komponenseinek összege 1, a majoráns konvergenciatétel alkalmazásával

$$P(X_n = i) = \sum_{j \in \mathcal{I}} \alpha_j p_{j,i}^{(n)} \to \sum_{j \in \mathcal{I}} \alpha_j 0 = 0\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Tehát az állítást bebizonyítottuk. $\square$

2.8.7. Következmény. *Ha egy Markov-láncnak létezik invariáns eloszlása, akkor a tranziens és a null-rekurrens állapotok ezen eloszlás szerinti mértéke* 0.

Bizonyítás. Legyen π a lánc invariáns eloszlása, és tekintsünk tetszőleges i tranziens vagy null rekurrens állapotot. Ekkor a 2.8.2. Állítás szerint $X_n \sim \pi$ minden $n \geq 0$ egészre, és így a 2.8.6. Tétel alkalmazásával

$$\pi_i = P(X_n = i) \to 0\,, \qquad n \to \infty\,,$$

amiből $\pi_i = 0$. $\square$

Ahhoz, hogy a pozitív rekurrens állapotokat is hatékonyan tudjuk tanulmányozni, szükségünk lesz egy új fogalomra, mely az eloszlás általánosítása.

2.8.8. Definíció. A $\pi = [\pi_i]_{i \in \mathcal{I}}$ vektort **mértéknek** nevezzük, ha komponensei nemnegatívak. Állapotok egy $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ halmazának a mértéke

$$\pi(\mathcal{J}) := \sum_{i \in \mathcal{J}} \pi_i\,.$$

A mérték **véges**, ha $\pi(\mathcal{I}) < \infty$. A π mérték az $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$ folyamat, illetve a $\mathbf{P}$ sztochasztikus mátrix **invariáns** (vagy **stacionárius**) **mértéke**, ha $\pi = 0$ vagy a $\mathbf{P}$ mátrixnak a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó baloldali sajátvektora. A π **megszorítása** a $\mathcal{J}$ halmazra legyen

$$\pi|_{\mathcal{J}} := [\pi_{i,\mathcal{J}}]_{i \in \mathcal{I}}\,, \qquad \pi_{i,\mathcal{J}} := \pi_i \mathbb{1}_{\{i \in \mathcal{J}\}} = \begin{cases} \pi_i\,, & i \in \mathcal{J}\,, \\ 0\,, & i \notin \mathcal{J}\,. \end{cases}$$

2.8.9. Állítás. *Legyen* π *mérték az* $\mathcal{I}$ *állapottéren,* $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$.

(i) *A π vektor pontosan akkor invariáns mértéke az $\mathbb{X}$ folyamatnak, ha komponensei kielégítik az alábbi egyenletrendszert:*

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_{i,j} \pi_i , \qquad j \in \mathcal{I} .$$

(ii) *Véges sok invariáns mérték nemnegatív együtthatókkal vett lineáris kombinációja invariáns mérték.*

(iii) *Ha π véges invariáns mérték, és $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}$ zárt osztály, akkor $\pi|_{\mathcal{C}}$ szintén invariáns mérték.*

Bizonyítás. (i), (ii) A definícióból jön.

(iii) Vegyük észre, hogy ha π véges invariáns mérték, akkor (ii) miatt $\pi/\pi(\mathcal{I})$ invariáns eloszlás. Ebből a 2.8.7. Következmény alkalmazásával jön, hogy a null-rekurrens és a tranziens állapotok π szerinti mértéke 0. (Ha π nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz, egy lehetséges ellenpélda a nem szimmetrikus bolyongás, lásd alább.) Legyen $X_0 \sim \pi|_{\mathcal{C}}$. Ekkor tetszőleges $j \in \mathcal{I}$ állapot esetén

$$P(X_1 = j) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_{i,\mathcal{C}} p_{i,j} = \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i p_{i,j} .$$

Ha $j \notin \mathcal{C}$, akkor $\mathcal{C}$ zártsága miatt $p_{i,j} = 0$ minden $i \in \mathcal{C}$ állapotra, vagyis $P(X_1 = j) = 0$. Ha $j \in \mathcal{C}$, és $i \notin \mathcal{C}$ olyan állapot, hogy $p_{i,j} > 0$, akkor i egy nyitott osztály eleme, tehát tranziens, amiből $\pi_i = 0$. Kapjuk, hogy

$$P(X_1 = j) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i p_{i,j} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_i p_{i,j} = \pi_j = \pi_{j,\mathcal{C}} .$$

Tehát $X_1 \sim \pi|_{\mathcal{C}}$, azaz $\pi|_{\mathcal{C}}$ invariáns. □

A következő tétel azt vizsgálja, hogy milyen invariáns mértékek léteznek egy rekurrens osztályon. Kiderül, hogy ezen mértékek között nagyon szoros kapcsolat van, és az osztály típusa egyértelműen meghatározza, hogy a mértékek végesek, vagy nem.

2.8.10. Tétel. *Legyen $\mathbf{P}$ irreducibilis és rekurrens átmenetmátrix, $k \in \mathcal{I}$ tetszőleges rögzített állapot, és tekintsük az $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\delta_k, \mathbf{P})$ Markov-láncot. Legyen $\gamma^{(k)} := [\gamma_i^{(k)}]_{i \in \mathcal{I}}$, ahol*

$$\gamma_i^{(k)} := E \sum_{n=0}^{T_k - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} \in [0, \infty] , \qquad i \in \mathcal{I} .$$

a k állapotba való első visszatérésig az i állapotban tett látogatások számának várható értéke. Ekkor teljesülnek az alábbiak.

(i) *$\gamma^{(k)}$ a $\mathbf{P}$ mátrix invariáns mértéke, továbbá $\gamma_k^{(k)} = 1$ és $\gamma^{(k)}(\mathcal{I}) = \mu_k$.*

(ii) *A lánc invaráns mértékei pontosan a $c\gamma^{(k)} = [c\gamma_i^{(k)}]_{i \in \mathcal{I}}$, $c \geq 0$, alakban előálló mértékek.*

(iii) *Ha az osztály pozitív rekurrens, akkor minden invariáns mérték véges, míg ha az osztály null-rekurrens, akkor $\pi = 0$ az egyetlen véges invariáns mérték.*

Bizonyítás. (i) Tekintsünk tetszőleges $i, j \in \mathcal{I}$ állapotokat, egy $n \in \mathbb{N}$ egészet, valamint a következő eseményeket:

$$\text{Jelen} = \{X_{n-1} = i\}, \quad \text{Múlt} = \{n \le T_k\} \in \sigma(X_0, \ldots, X_{n-1}), \quad \text{Jövő} = \{X_n = j\} \in \sigma(X_n).$$

Mivel a 2.2.6. Tétel (i) pontja szerint a Jövő és a Múlt a Jelenre nézve feltételesen független, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &P\big(X_{n-1} = i, X_n = j, n \le T_k\big) = P\big(X_n = j, n \le T_k \mid X_{n-1} = i\big) P\big(X_{n-1} = i\big) \\ &= P\big(X_n = j \mid X_{n-1} = i\big) P\big(n \le T_k \mid X_{n-1} = i\big) P\big(X_{n-1} = i\big) = p_{i,j} P\big(X_{n-1} = i, n \le T_k\big). \end{aligned}$$

Jegyezzük meg, hogy k rekurrens állapot, és így $T_k < \infty$ m.b., továbbá $X_0 = X_{T_k} = k$. Ekkor

$$\begin{aligned} \gamma_j^{(k)} &= E \sum_{n=1}^{T_k} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} = \sum_{n=1}^{\infty} P\big(X_n = j, n \le T_k\big) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{n=1}^{\infty} P\big(X_{n-1} = i, X_n = j, n \le T_k\big) = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_{i,j} \sum_{n=1}^{\infty} P\big(X_{n-1} = i, n \le T_k\big) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}} p_{i,j} E \sum_{n=1}^{T_k} \mathbb{1}_{\{X_{n-1} = i\}} = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_{i,j} E \sum_{n=0}^{T_k - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_{i,j} \gamma_i^{(k)}, \end{aligned}$$

tehát $\gamma^{(k)}$ invariáns mérték. A $\gamma_k^{(k)} = 1$ egyenlőség nyilvánvaló, továbbá

$$\gamma^{(k)}(\mathcal{I}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \gamma_i^{(k)} = E \sum_{n=0}^{T_k - 1} \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} = E \sum_{n=0}^{T_k - 1} 1 = E(T_k) = \mu_k.$$

(ii) Tegyük fel, hogy λ olyan invariáns mérték, melyre $\lambda_k = 1$. Meg fogjuk mutatni, hogy ekkor $\lambda = \gamma^{(k)}$. Mivel λ invariáns, iterációval kapjuk, hogy tetszőleges $j \in \mathcal{I}$ állapot és $n \to \infty$ mellett

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \sum_{i_0 \in \mathcal{I}} \lambda_{i_0} p_{i_0,j} = \sum_{i_0 \ne k} \lambda_{i_0} p_{i_0,j} + 1 \cdot p_{k,j} = \sum_{i_0 \ne k} \Bigg[\sum_{i_1 \ne k} \lambda_{i_1} p_{i_1,i_0} + p_{k,i_0} \Bigg] p_{i_0,j} + p_{k,j} \\ &= \sum_{i_0, i_1 \ne k} \lambda_{i_1} p_{i_1,i_0} p_{i_0,j} + \Bigg[p_{k,j} + \sum_{i_0 \ne k} p_{k,i_0} p_{i_0,j} \Bigg] = \cdots \\ &= \sum_{i_0, \ldots, i_n \ne k} \lambda_{i_n} p_{i_n,i_{n-1}} \cdots p_{i_0,j} + \Bigg[p_{k,j} + \sum_{i_0 \ne k} p_{k,i_0} p_{i_0,j} + \cdots + \sum_{i_0, \ldots, i_{n-1} \ne k} p_{k,i_{n-1}} \cdots p_{i_0,j} \Bigg] \\ &\ge 0 + \Big[P\big(X_1 = j, T_k \ge 1\big) + P\big(X_2 = j, T_k \ge 2\big) + \cdots + P\big(X_{n+1} = j, T_k \ge n+1\big) \Big] \\ &\to \sum_{m=1}^{\infty} P\big(X_m = j, T_k \ge m\big) = E \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_m = j, T_k \ge m\}} = E \sum_{m=1}^{T_k} \mathbb{1}_{\{X_m = j\}} = \gamma_j^{(k)}. \end{aligned}$$

Mivel a λ_j érték független az n lépésszámtól, kapjuk, hogy $\lambda_j \geq \gamma_j^{(k)}$ minden $j \in \mathcal{I}$ állapotra. Nyilvánvaló, hogy $\rho := \lambda - \gamma^{(k)}$ szintén invariáns mérték, továbbá $\rho_k = 0$. Mivel a lánc irreducibilis és rekurrens, létezik $n \in \mathbb{N}_0$, hogy $p_{j,k}^{(n)} > 0$. Ekkor

$$0 = \rho_k = \sum_{i \in \mathcal{I}} \rho_i p_{i,k}^{(n)} \geq \rho_j p_{j,k}^{(n)} ,$$

amiből $\rho_j = 0$, és így $\lambda_j = \gamma_j^{(k)}$.

Tekintsünk most egy tetszőleges λ invariáns mértéket, továbbá legyen $c = \lambda_k$. Ha $c = 0$, akkor a fentiekben a ρ mértékre alkalmazott gondolatmenettel jön, hogy $\lambda = 0 = c\gamma^{(k)}$. Ha viszont $c > 0$, akkor λ/c szintén invariáns mérték, amire $(\lambda/c)_k = 1$, és a bizonyítás első része szerint $\lambda/c = \gamma^{(k)}$.

(iii) Legyen $\lambda \neq 0$ tetszőleges invariáns mérték. Ekkor az állítás első két pontja szerint valamely $c > 0$ konstans mellett $\lambda(\mathcal{I}) = c\gamma^{(k)}(\mathcal{I}) = c\mu_k$, ami véges, ha az osztály pozitív rekurrens, és végtelen, ha null-rekurrens. □

2.8.11. Példa. A 2.8.9. Állítás alkalmazásával kapjuk, hogy a π mérték pontosan akkor invariáns mérték az egydimenziós véletlen bolyongásra, ha komponensei mind azonosak, tehát ha $\pi = [c]_{i \in \mathcal{I}}$, $c \geq 0$, alakban áll elő. Mivel a bolyongásnak végtelen sok állapota van, ez nem invariáns eloszlás. Kalkulációval ellenőrizhető, mind a szimmetrikus, mind a nem szimmetrikus esetben $\gamma^{(k)}$ az az invariáns mérték, melynek minden komponense 1.

2.8.12. Tétel. *Egy irreducibilis Markov-láncnak akkor és csak akkor létezik π invariáns eloszlása, ha a lánc pozitív rekurrens. Ekkor az invariáns eloszlás egyértelmű, és $\pi_i = 1/\mu_i$ minden i állapotra.*

Bizonyítás. Ha a lánc irreducibilis, és van invariáns eloszlása, akkor a 2.8.7. Következmény miatt a lánc egyetlen osztálya nem lehet tranziens vagy null-rekurrens. Visszafelé, ha az osztály pozitív rekurrens, és k tetszőleges állapot, akkor a 2.8.10. Tétel szerint a π mérték pontosan akkor invariáns, ha $\pi = c\gamma^{(k)}$ alakú valamilyen $c \geq 0$ valós konstanra. Mivel ekkor $\pi(\mathcal{I}) = c\gamma^{(k)}(\mathcal{I}) = c\mu_k$, kapjuk, hogy π pontosan akkor invariáns eloszlás, ha $c = 1/\mu_k$, azaz $\pi = \gamma^{(k)}/\mu_k$. Tehát létezik invariáns eloszlás, és egyértelmű is. Mivel a fenti gondolatmenet minden k állapotra igaz, továbbá $\gamma_k^{(k)} = 1$, kapjuk, hogy $\pi_k = \gamma_k^{(k)}/\mu_k = 1/\mu_k$. □

Az eddigi eredményeket az alábbi tételben foglalhatjuk össze, mely már nem csak az irreducibilis esettel foglalkozik.

2.8.13. Tétel. *Egy diszkrét idejű homogén Markov-láncnak akkor és csak akkor létezik invariáns eloszlása, ha a láncnak van pozitív rekurrens osztálya. Ebben az esetben π pontosan akkor invariáns eloszlás, ha előáll a pozitív rekurrens osztályok invariáns eloszlásainak konvex lineáris kombinációjaként. Tehát, ha $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots$ az egyes pozitív rekurrens osztályok egyértelmű invariáns eloszlása, akkor π pontosan akkor invariáns eloszlás az egész láncon, ha előáll*

$$\pi = a_1\pi^{(1)} + a_2\pi^{(2)} + \cdots$$

alakban, ahol $a_1, a_2, \ldots \geq 0$, $a_1 + a_2 + \cdots = 1$, tetszőleges konstansok. Azonnal látszik, hogy ha csak egy pozitív rekurrens osztály van, akkor az invariáns eloszlás egyértelmű, míg ha *több, (véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok,) akkor a láncnak végtelen sok invariáns eloszlása van.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy ha a Markov-láncnak létezik egy vagy több pozitív rekurrens osztálya, akkor a fenti lineáris kombináció invariáns eloszlás. Tekintsünk tetszőleges $a_1, a_2, \ldots \geq 0$, $a_1+a_2+\cdots=1$, konstansokat. Ekkor

$$\pi(\mathcal{I}) = a_1\pi^{(1)}(\mathcal{I})+a_2\pi^{(2)}(\mathcal{I})+\cdots = a_1+a_2+\cdots = 1\,,$$

tehát π eloszlás. Legyen ezután $\mathbb{X}_0 \sim \pi$, rögzítsünk egy $j \in \mathcal{I}$ állapot, és jelölje $1 \leq N \leq \infty$ a pozitív rekurrens osztályok számát. Mivel $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \ldots$ invariáns eloszlás, kapjuk, hogy

$$P(X_1=j) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \pi_i p_{i,j} = \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{i\in\mathcal{I}} \pi_i^{(n)} p_{i,j} = \sum_{n=1}^{N} a_n \pi_j^{(n)} = \pi_j\,,$$

amiből $X_1 \sim \pi$, azaz π invariáns.

A második lépésben azt bizonyítjuk be, hogy ha a láncnak létezik invariáns eloszlása, akkor van pozitív rekurrens osztálya, és az invariáns eloszlás a fenti módon áll elő. Legyen π a lánc egy invariáns eloszlása. Ha a láncnak nem lenne pozitív rekurrens állapota, akkor a 2.8.7. Tétel szerint $\pi(\mathcal{I})=0$ teljesülne, ami ellentmond annak, hogy π eloszlás. Legyen $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \ldots \subseteq \mathcal{I}$ a lánc (véges vagy végtelen sok) pozitív rekurrens osztálya. A 2.8.9. Állítás (iii) pontja szerint a $\pi|_{\mathcal{C}_1}, \pi|_{\mathcal{C}_2}, \ldots$ megszorítások az egyes osztályokra koncentrált invariáns mértékek, melyek végesek, ugyanis $a_n := \pi|_{\mathcal{C}_n}(\mathcal{I}) = \pi(\mathcal{C}_n) \leq 1$, $n=1,2,\ldots$. Kapjuk, hogy ha $a_n>0$, akkor $\pi^{(n)} := \pi|_{\mathcal{C}_n}/a_n$ invariáns eloszlás a $\mathcal{C}_n$ osztályon. Ebből azonnal jön, hogy

$$\pi = \sum_{n=1}^{N} \pi|_{\mathcal{C}_n} = \sum_{\substack{n=1,\ldots,N\\ a_n>0}} a_n \frac{\pi|_{\mathcal{C}_n}}{a_n} = \sum_{\substack{n=1,\ldots,N\\ a_n>0}} a_n\pi^{(n)} = \sum_{n=1}^{N} a_n\pi^{(n)}\,. \qquad \square$$

A következőkben a periodikus Markov-láncok invariáns eloszlásait tanulmányozzuk. Legyen $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$ irreducibilis, pozitív rekurrens és periodikus Markov-lánc az $\mathcal{I}$ állapottéren, és legyen $1<d<\infty$ a lánc periódusa. Legyen továbbá

$$Y_n = X_{nd}\,, \qquad \mathbb{Y} = \{Y_n : n\in\mathbb{N}\}\,, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{P}^d\,,$$

és jelölje $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_d, \ldots, \mathcal{C}_{d-1}$ az $\mathbb{X}$ folyamat alosztályait. Jegyezzük meg, hogy a 2.3.12. Tétel és a 2.6.4. Állítás szerint $\mathbb{Y} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$, és a $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_d$ halmazok az $\mathbb{Y}$ lánc aperiodikus és pozitív rekurrens kommunikációs osztályai. Tekintsünk az $\mathbb{X}$ Markov-lánc egyértelmű $\pi = [\pi_i]_{i\in\mathcal{I}}$ invariáns eloszlását, és legyen

$$\pi^{(k)} := d\pi|_{\mathcal{C}_k} = \big[\pi_i^{(k)}\big]_{i\in\mathcal{I}}\,, \qquad \pi_i^{(k)} := \begin{cases} d\pi_i\,, & i\in\mathcal{C}_k\,, \\ 0\,, & i\notin\mathcal{C}_k\,, \end{cases} \qquad k=0,\ldots,d\,,$$

Ekkor $\pi^{(k)}$ rendre a $\mathcal{C}_k$ halmazra koncentrált mérték, és

$$\pi = \frac{\pi^{(0)}+\cdots+\pi^{(d-1)}}{d}\,.$$

2.8.14. Állítás. (i) *Tetszőleges* $k = 0, \ldots, d-1$ *esetén* $\pi^{(k+1)} = \pi^{(k)}\mathbf{P}$.

(ii) *A* $\pi^{(0)}, \ldots, \pi^{(d-1)}$ *mértékek az* $\mathbb{Y}$ *Markov-láncnak rendre a* $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_{d-1}$ *kommunikációs osztályra koncentrált egyértelmű invariáns eloszlásai.*

Bizonyítás. (i) Tetszőleges $j \in \mathcal{C}_{k+1}$ állapot esetén $p_{i,j} = 0$, ha $i \notin \mathcal{C}_k$, amiből

$$\big(\pi^{(k)}\mathbf{P}\big)_j = \sum_{i\in\mathcal{C}_k} \pi_i^{(k)} p_{i,j} = \sum_{i\in\mathcal{C}_k} d\pi_i p_{i,j} = d\sum_{i\in\mathcal{I}} \pi_i p_{i,j} = d\big(\pi\mathbf{P}\big)_j = d\pi_j = \pi_j^{(k+1)} .$$

Mivel mind $\pi^{(k)}\mathbf{P}$, mind $\pi^{(k+1)}$ a $\mathcal{C}_{k+1}$ halmazra koncentrált mérték, kapjuk, hogy a kettő egyenlő.

(ii) Az (i) pont eredményéből következik, hogy $\pi^{(k)}(\mathcal{I}) = \pi^{(k+1)}(\mathcal{I})$, $k = 0, \ldots, d-1$. Mivel most

$$\pi^{(0)}(\mathcal{I}) + \cdots + \pi^{(d-1)}(\mathcal{I}) = d\pi(\mathcal{I}) ,$$

kapjuk, hogy $\pi^{(0)}(\mathcal{I}) = \cdots = \pi^{(d)}(\mathcal{I}) = 1$. Szintén az (i) pont eredményét alkalmazva

$$\pi^{(k)}\mathbf{Q} = \pi^{(k)}\mathbf{P}^d = \pi^{(k+1)}\mathbf{P}^{d-1} = \cdots = \pi^{(k-1)}\mathbf{P} = \pi^{(k)} .$$

Tehát a $\pi^{(k)}$ eloszlás invariáns. Az egyértelműség következik a 2.8.12. Tételből, hiszen a $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_{d-1}$ halmazok az $\mathbb{Y}$ lánc aperiodikus és pozitív rekurrens osztályai. □

2.8.15. Következmény. *Egy irreducibilis, periodikus és pozitív rekurrens Markov-lánc egyértelmű invariáns eloszlását három különböző módon lehet maghatározni.*

(i) *Megoldjuk a 2.8.3. Állításban felírt egyenletrendszert.*

(ii) *Meghatározzuk az* $\mathbb{Y}$ *Markov-lánc* $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_{d-1}$ *osztályaira konventrált* $\pi^{(0)}, \ldots, \pi^{(d-1)}$ *egyértelmű invariáns eloszlásait, és tekintjük a* $\pi = (\pi^{(0)} + \cdots + \pi^{(d-1)})/d$ *eloszlást.*

(iii) *Meghatározzuk az* $\mathbb{Y}$ *Markov-lánc tetszőleges osztályának az invariáns eloszlását, ezután a* $\pi^{(k+1)} = \pi^{(k)}\mathbf{P}$, $k = 0, \ldots, d-1$, *rekurzióval kiszámoljuk a többi invariáns eloszlást, majd vegül vesszük ezek számtani átlagát, mint az előző pontban.*

2.9. Konvergencia az egyensúlyhoz és az ergodikus tétel

Ebben az alfejezetben a Markov-láncok asszimptotikus viselkedését fogjuk vizsgálni. Az első tétel az átmenetvalószínűségek és az eloszlások konvergenciáját mondja ki.

2.9.1. Tétel (Konvergencia az egyensúlyhoz)**.** *Legyen* $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$ *irreducibilis, aperiodikus és pozitív rekurrens Markov-lánc, továbbá legyen* π *a lánc invariáns eloszlása. Ekkor tetszőleges* $i, j \in \mathcal{I}$ *állapot esetén*

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j .$$

Jegyezzük meg, hogy a fenti tételben $\pi_j = 1/\mu_j$, és vegyük észre, hogy a $p_{j,j}^{(n)}$ átmenet-valószínűségek konvergenciáját már bizonyítottuk a 2.6.5. Tétel (iii) pontjában. Ugyanitt azt is meggondoltuk, hogy a periodikus esetben a $p_{j,j}^{(n)}$ sorozat már nem konvergál, tehát a jelen állításban az aperiodicitás egy nem elhagyható feltétel. Jegyezzük meg azt is, hogy ha $j \in \mathcal{I}$ tranziens vagy null-rekurrens állapot, akkor tetszőleges $i \in \mathcal{I}$ esetén $\mu_j = \infty$. Ennek felhasználásával a 2.6.5. és a 2.8.6. Tételből következik, hogy tetszőleges $i \in \mathcal{I}$ állapot esetén

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = 0 = \frac{1}{\mu_j}\,.$$

Bizonyítás. A 2.6.5. Tétel után egy megjegyzésben megmutattuk, hogy tetszőleges $i, j \in \mathcal{I}$ állapotokra

$$p_{i,j}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_{i,j}^{(m)} p_{j,j}^{(n-m)}\,.$$

Mivel most j rekurrens, és egy kommunikációs osztályba esik az i állapottal, kapjuk, hogy

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{i,j}^{(m)} = f_{i,j} = 1 \qquad \text{és} \qquad \mu_j = \sum_{m=1}^{\infty} n f_{j,j}^{(n)}\,.$$

Ekkor $f_n = f_{j,j}^{(n)}$ és $p_n = p_{i,j}^{(n)}$ szereposztással a 2.5.1. Tételből jön, hogy $p_{i,j}^{(n)} \to 1/\mu_j = \pi_j$, amint $n \to \infty$. Innen a majoráns konvergenciatétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$P(X_n = j) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \alpha_i p_{i,j}^{(n)} \to \sum_{i\in\mathcal{I}} \alpha_i \pi_j = \pi_j\,, \qquad n \to \infty\,,$$

amivel a tétel bizonyítását befejeztük. □

Az átmenetvalószínűségek határértékére a következő heurisztikus magyarázat adható. Ha j tranziens, akkor, ha a lánc egyáltalán el is jut valaha a j állapotba, oda csak véges sokszor tér vissza, tehát hosszútávon kicsi valószínűséggel tartózkodik j-ben. Ha j null-rekurrens, akkor a folyamat ugyan végtelen sokszor visszatér, de a visszatérések nagyon ritkán követik egymást, és amiatt kicsi annak az esélye, hogy egy determinisztikus n időpontban a lánc éppen a j állapotban van. Más a helyzet a pozitív rekurrens esetben. Ha a lánc irreducilis, akkor 1 valószínűséggel véges sok lépésben eléri j-t, és ezután átlagosan μ_j lépésenként újra és újra visszatér oda. Emiatt asszimptotikusan $1/\mu_j$ valószínűséggel találjuk a folyamatot a j állapotban. Ez a gondolatmenet azt is sugallja, hogy megfelelő feltételek mellett a j állapotban töltött idő hosszútávú aránya szintén $1/\mu_j$.

2.9.2. Tétel (Ergodikus tétel Markov-láncokra)**.** *Tekintsünk* $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$ *homogén Markov-láncot, és legyen*

$$V_j(n) := \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_m = j\}}$$

a $j \in \mathcal{I}$ *állapotban tett látogatások száma az* $n-1$ *időponttal bezárólag.*

(i) *Ha a lánc irreducibilis, akkor*

$$\frac{V_j(n)}{n} \to \frac{1}{\mu_j}\,, \qquad n\to\infty\,, \quad m.b.$$

(ii) *Tegyük fel, hogy a lánc irreducibilis és pozitív rekurrens, és legyen π a folyamat egyértelmű invariáns eloszlása. Ha egy $c:\mathcal{I}\to\mathbb{R}$ függvényre*

$$\overline{c} := \sum_{j\in\mathcal{I}} c(j)\pi_j < \infty\,,$$

akkor

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} c(X_m) \to \overline{c}\,, \qquad n\to\infty\,, \quad m.b.,$$

Bizonyítás. (i) Ha j tranziens, akkor V_j véges, hiszen ha el is érjük, 1 valószínűséggel csak véges sokszor térünk vissza. Ekkor

$$\frac{V_j(n)}{n} \le \frac{V_j}{n} \to 0 = \frac{1}{\mu_j}\,, \qquad n\to\infty\,, \qquad \text{m.b.}$$

Legyen a továbbiakban j rekurrens állapot, jelölje $H=H_j=\min\{n\ge 0 : X_n=j\}$ a j állapot első elérési idejét, és tekintsük az $\mathbb{X}'=\{X_{H+n}:n\ge 0\}$ folyamatot. Mivel H véges megállási idő, az erős Markov-tulajdonság miatt $\mathbb{X}'\sim \text{Markov}(\delta_j,\mathbf{P})$. Legyen továbbá $V_j'(n)$ az $\mathbb{X}'$ folyamat által a j állapotban tett látogatások száma az $n-1$ időponttal bezárólag. Ekkor, ha $n>H$, kapjuk, hogy

$$\frac{V_j(n)}{n} = \frac{\mathbb{1}_{\{X_0=j\}}+\cdots+\mathbb{1}_{\{X_{H-1}=j\}}}{n} + \frac{\mathbb{1}_{\{X_H=j\}}+\cdots+\mathbb{1}_{\{X_n=j\}}}{n} = \frac{0}{n} + \frac{V_j'(n-H)}{n-H}\,\frac{n-H}{n}\,.$$

Most H végessége miatt $(n-H)/n\to 1$ majdnem biztosan, vagyis az állítás bizonyításához elég azt megmutatnunk, hogy $V_j'(n)/n\to 1/\mu_j$. Vegyük észre, hogy ez éppen az (i) pont állítása speciálisan az $\mathbb{X}\sim\text{Markov}(\delta_j,\mathbf{P})$ Markov-láncra, ezért kényelmi okokból inkább az $\mathbb{X}$ folyamattal dolgozunk.

Legyen tehát a továbbiakban $\mathbb{X}\sim\text{Markov}(\delta_j,\mathbf{P})$, és a célunk azt megmutatni, hogy $V_j(n)/n\to 1/\mu_j$. Mivel j rekurrens állapot, a lánc 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér j-be, és ezáltal a 2.4.4. Állítás (ii) pontja szerint a visszatérések közötti kirándulások $S_{j,1}, S_{j,2},\ldots$ hossza független és azonos eloszlású változó azonosan $E(S_{j,1})=E(T_j)=\mu_j$ várható értékkel. Vegyük észre, hogy mivel $V_j(n)-1$ a j állapotba valós visszatérések száma az $n-1$ időponttal bezárólag, a $T_{j,V_j(n)-1}$ változó a j-be való $n-1$ időpont előtti utolsó visszatérés időpontját adja. Adódik, hogy

$$T_{j,V_j(n)-1} \le n-1 < n \le T_{j,V_j(n)}\,, \qquad n=1,2,\ldots$$

Mivel $V_j(n)\to V_j=\infty$ teljesül 1 valószínűséggel, a nagy számok erős törvénye szerint

$$\frac{T_{j,V_j(n)}}{V_j(n)} = \frac{S_{j,1}+\cdots+S_{j,V_j(n)}}{V_j(n)} \to \mu_j\,, \qquad n\to\infty\,, \qquad \text{m.b.},$$

és hasonló megfontolásból

$$\frac{T_{j,V_j(n)-1}}{V_j(n)} = \frac{S_{j,1}+\cdots+S_{j,V_j(n)-1}}{V_j(n)-1}\frac{V_j(n)-1}{V_j(n)} \to \mu_j \cdot 1\,, \qquad n\to\infty\,. \qquad \text{m.b.},$$

Kapjuk tehát, hogy

$$\mu_j \leftarrow \frac{T_{j,V_j(n)-1}}{V_j(n)} < \frac{n}{V_j(n)} \le \frac{T_{j,V_j(n)}}{V_j(n)} \to \mu_j\,,$$

és a rendőr elv alkalmazásával $n/V_j(n) \to \mu_j$. Ebből azonnal jön a bizonyítandó.

(ii) Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy véges állapottér esetén (ii) azonnal következik az (i) pontból, ugyanis ekkor

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} c(X_m) = \sum_{i\in\mathcal{I}} c(i)\frac{V_n(i)}{n} \to \sum_{i\in\mathcal{I}} c(i)\pi_i\,, \qquad n\to\infty\,.$$

Az általános, tehát nem feltétlenül véges állapotterű esetet csak arra az esetre bizonyítjuk, mikor a c függvény korlátos, azaz létezik $c^* \ge 0$, hogy $|c(i)| \le c^*$ minden $i\in\mathcal{I}$ állapotra. Ekkor tetszőleges $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I}$ részhalmaz esetén a háromszögegyenlőtlenség alkalmazásával

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} c(X_k) - \overline{c}\right| &= \left|\sum_{i\in\mathcal{I}}\Big(\frac{V_i(n)}{n}-\pi_i\Big)c(i)\right| \le c^*\sum_{i\in\mathcal{I}}\left|\frac{V_i(n)}{n}-\pi_i\right| \\ &\le c^*\sum_{i\in\mathcal{J}}\left|\frac{V_i(n)}{n}-\pi_i\right| + c^*\sum_{i\notin\mathcal{J}}\left(\frac{V_i(n)}{n}+\pi_i\right) \le 2c^*\sum_{i\in\mathcal{J}}\left|\frac{V_i(n)}{n}-\pi_i\right| + 2c^*\sum_{i\notin\mathcal{J}}\pi_i\,,\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy

$$\sum_{i\notin\mathcal{J}}\frac{V_i(n)}{n} = \left|1-\sum_{i\in\mathcal{J}}\frac{V_i(n)}{n}\right| = \left|\sum_{i\in\mathcal{J}}\left(\pi_i-\frac{V_i(n)}{n}\right)+\sum_{i\notin\mathcal{J}}\pi_i\right| \le \sum_{i\in\mathcal{J}}\left|\pi_i-\frac{V_i(n)}{n}\right| + \sum_{i\notin\mathcal{J}}\pi_i\,.$$

Tekintsünk most egy tetszőleges $\varepsilon>0$ értéket, és legyen $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I}$ olyan véges részhalmaz, melyre

$$\sum_{i\notin\mathcal{J}}\pi_i < \frac{\varepsilon}{4c^*}\,.$$

Mivel $\mathcal{J}$ véges, az (i) pont szerint 1 valószínűséggel létezik $n_0 = n_0(\omega)$ küszöbszám, hogy $n > n_0$ esetén

$$\sum_{i\in\mathcal{J}}\left|\frac{V_i(n)}{n}-\pi_i\right| < \frac{\varepsilon}{4c^*}\,.$$

Kapjuk, hogy ha $n>n_0$, akkor

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} c(X_k) - \overline{c}\right| < \varepsilon\,,$$

amiből a bizonyítandó konvergencia azonnal következik. □

Gyakorlati alkalmazásokban időnként felmerül az a probléma, hogy ismerjük ugyan egy $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ sztochasztkus folyamat dinamikáját, tehát számítógéppel tudunk trajektóriákat generálni, továbbá tudjuk, hogy létezik invariáns eloszlás, de a folyamat olyan bonyolult, hogy nem vagyunk képesek elméleti úton meghatározni ezt az eloszlást. Ez különösen érvényes folytonos idejű és nem megszámlálható állapotterű Markov folyamatokra, például sztochasztikus differenciálegyenletek megoldásaira, de időnként még a jóval egyszerűbb diszkrét idejű homogén Markov-láncok is nehézséget okoznak. Ennek megoldására dolgozták ki a **Markov Chain Monte Carlo** (MCMC) módszert, mely a klasszikus **Monte Carlo** (MC) módszer egy változata. Ezen technikák alkalmazhatóak szinte minden olyan esetben, mikor az $\mathbb{X}$ folyamatra teljesül az ergodikus tétel.

A Monte Carlo módszer egy klasszikus gyakorlati technika, mely alkalmas arra, hogy közelítőleg megkapjuk valamilyen véletlen változó eloszlását. Az ötlet annyi, hogy számítógéppel generálunk független megfigyeléseket, melyekből statisztikai eszközökkel tudunk következtetni az ismeretlen változó eloszlására. Amennyiben egy diszkrét idejű homogén Markov-lánc invariáns eloszlását akarjuk meghatározni, akkor trajektóriákat generálunk, és megnézzük, hogy egy megfelelően késői n időpontban mi az X_n változó tapasztalati eloszlása. Ez elegendően nagy számú generálás után jó közelítése lesz X_n elméleti eloszlásának, ami pedig a 2.9.1. Tétel szerint jól közelíti az egyensúlyi invariáns eloszlást.

A Monte Carlo módszer egyik hátulütője, hogy meglehetősen sok trajektóriát kell generálni ahoz, hogy elegendő pontossággal megkapjuk az invariáns eloszlást, és ez még a mai modern számítógépek korában is rengeteg időt vesz igénybe. A Markov Chain Monte Carlo módszer alapötlete az, hogy az ergodikus tétel szerint elegendő egyetlen trajektóriát generálni, hiszen a $V_j(n)/n$ hányados egy nulla mértékű halmaztól eltekintve minden kimenetel esetén tart a π_j értékhez. Természetesen ebben az esetben ezt az egy trajektóriát jóval több lépésen keresztül kell vizsgálnunk, mint a Monte Carlo módszer esetében, de a teljes időigényt tekintve ez a módszer gyakran még mindig gazdaságosabb, hiszen csak egyetlen egy trajektóriára van szükség.

2.10. Diszkrét potenciálelmélet

A potenciálelmélet azzal az elméleti kérdéssel foglalkozik, hogy ha adott egy sztochasztikus folyamat és egy költségfüggvény az állapotok halmazán, akkor mennyi a folyamat által meglátogatott állapotok összköltsége. Ennek az elméleti problémának számos alkalmazása van például a fizikában. Mi a kérdéssel csak diszkrét idejű homogén Markov-láncok esetén foglalkozunk, de hasonló eredmények folytonos idejű folyamatokra is léteznek. A témában a fő eredmény az alábbi 2.10.2. Tétel.

2.10.1. Definíció. Legyen $\mathbb{X}$ diszkrét idejű és megszámlálható állapotterű sztochasztikus folyamat, és tekintsük az állapottérnek valamely $\mathcal{I} = \mathcal{J} \cup \mathcal{K}$ diszjunkt felbontását. Ekkor a $\mathcal{J}$ halmaz **első elérési ideje**

$$H_{\mathcal{J}} := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : 0 : X_n \in \mathcal{J} \right\},$$

ahol $\min \emptyset = \infty$. Az első elérési idő nem feltétlenül véges érték, de általános értelemben vett véletlen változó és megállási idő. Ha $\mathcal{J}$ zárt, akkor a $H_{\mathcal{J}}$ változót **elnyelési időnek** is nevezzük.

2.10.2. Tétel. *Legyen $\mathbb{X}$ diszkrét idejű homogén Markov-lánc $\mathbf{P}$ átmenetmátrixszal. Legyen továbbá $c:\mathcal{K}\to[0,\infty)$ és $f:\mathcal{J}\to[0,\infty)$ tetszőleges függvény, és tekintsük a*

$$\phi_i := E\left[\sum_{0\le n<H_{\mathcal{J}}} c(X_n)+f(X_{H_{\mathcal{J}}})\mathbb{1}_{\{H_{\mathcal{J}}<\infty\}}\middle| X_0=i\right]\in[0,\infty]\,,\qquad i\in\mathcal{I}\,,$$

várható értékeket.

(i) *A ϕ_i, $i\in\mathcal{I}$, potenciálok kielégítik a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned}\phi_i &= c(i)+\sum_{j\in\mathcal{I}} p_{i,j}\phi_j\,, && i\in\mathcal{K}\,,\\ \phi_i &= f(i)\,, && i\in\mathcal{J}\,.\end{aligned}$$

(ii) *A ϕ_i, $i\in\mathcal{I}$, potenciálok minimális nemnegatív megoldásai az egyenletrendszernek, tehát ha $\psi_i\ge 0$, $i\in\mathcal{I}$, és*

$$\begin{aligned}\psi_i &\ge c(i)+\sum_{j\in\mathcal{I}} p_{i,j}\psi_j\,, && i\in\mathcal{K}\,,\\ \psi_i &\ge f(i)\,, && i\in\mathcal{J}\,.\end{aligned}$$

akkor $\psi_i\ge\phi_i$ minden i állapotra.

(iii) *Ha $P(H_{\mathcal{J}}<\infty\,|\,X_0=i)=1$ minden i állapotra, akkor az* (i) *pont egyenletrendszernek legfeljebb egy korlátos megoldása létezik.*

Bizonyítás. (i) Ha $i\in\mathcal{J}$, akkor $H_{\mathcal{J}}=0$, amiből $\phi_i=f(i)$, tehát ez az eset könnyen jön. A továbbiakban legyen $i\in\mathcal{K}$, és vezessük be a

$$P_i(A)=P(A\,|\,X_0=i)\qquad\text{és}\qquad E_i(Y)=E(Y\,|\,X_0=i)\,,$$

jelölést. A Markov-tulajdonság szerint tetszőleges j állapot esetén az $\{X_1=j\}$ eseményre feltételesen $\mathbb{X}'=\{X_{n+1}:n\in\mathbb{N}\}\sim\mathrm{Markov}(\delta_j,\mathbf{P})$. Vegyük észre, hogy ha $i\in\mathcal{K}$, akkor az $\mathbb{X}'$ folyamat a $H'_{\mathcal{J}}=H_{\mathcal{J}}-1$ időpontban éri el a $\mathcal{J}$ halmazt. A teljes várható érték tételével és a Markov-láncok memória nélküli tulajdonságával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\phi_i &= E_i\Bigg[c(X_0)+\sum_{1\le n<H_{\mathcal{J}}} c(X_n)+f(X_{H_{\mathcal{J}}})\mathbb{1}_{\{H_{\mathcal{J}}<\infty\}}\Bigg] \\
&= c(i)+\sum_{j\in\mathcal{I}} E_i\Bigg[\sum_{1\le n<H_{\mathcal{J}}} c(X_n)+f(X_{H_{\mathcal{J}}})\mathbb{1}_{\{H_{\mathcal{J}}<\infty\}}\Bigg|X_1=j\Bigg]P_i\big(X_1=j\big) \\
&= c(i)+\sum_{j\in\mathcal{I}} E\Bigg[\sum_{1\le n<H_{\mathcal{J}}} c(X_n)+f(X_{H_{\mathcal{J}}})\mathbb{1}_{\{H_{\mathcal{J}}<\infty\}}\Bigg|X_1=j,X_0=i\Bigg]P\big(X_1=j\,|\,X_0=i\big) \\
&= c(i)+\sum_{j\in\mathcal{I}} E\Bigg[\sum_{n<H'_{\mathcal{J}}} c(X'_n)+f(X'_{H'_{\mathcal{J}}})\mathbb{1}_{\{H'_{\mathcal{J}}<\infty\}}\Bigg|X'_0=j\Bigg]p_{i,j} \\
&= c(i)+\sum_{j\in\mathcal{I}} \phi_j p_{i,j}\,.
\end{aligned}$$

(ii) Legyen

$$\phi_i(m):=E\Bigg[\sum_{n<H_{\mathcal{J}},n\le m} c(X_n)+f(X_{H_{\mathcal{J}}})\mathbb{1}_{\{H_{\mathcal{J}}\le m\}}\Bigg|X_0=i\Bigg], \qquad n\in\mathbb{N}\,, i\in\mathcal{I}\,,$$

a felmerülő költség az m időponttal bezárólag. Mivel $m\to\infty$ esetén a $\phi_i(m)$ definíciójában található összeg 1 valószínűséggel monoton növekedve konvergál a ϕ_i definíciójában szereplő összeghez, kapjuk, hogy a várható értékek is konvetgálnak, tehát $\phi_i(m)\uparrow\phi_i$. Tegyük fel, hogy a ψ_i, $i\in\mathcal{I}$, mennyiségek teljesítik a (ii) pont feltételeit. Megmutatjuk, hogy ekkor $\psi_i\ge\phi_i(m)$ minden $i\in\mathcal{I}$ állapot és $m\in\mathbb{N}$ időpont esetén. Ha $i\in\mathcal{J}$, akkor

$$\psi_i\ge f(i)=\phi_i(m)\,,$$

tehát megkaptuk, amit akartunk. Az $i\in\mathcal{K}$ esetben alkalmazzunk indukciót. $m=0$ mellett az egyenlőtlenség nyilvánvaló, hiszen $\psi_i\ge 0=\phi_i(0)$. Ha feltesszük, hogy valamely $m\ge 0$ egészre $\psi_i\ge 0=\phi_i(m)$, $i\in\mathcal{I}$, teljesül, akkor kapjuk, hogy

$$\psi_i\ge c(i)+\sum_{j\in\mathcal{I}} p_{i,j}\psi_j\ge c(i)+\sum_{j\in\mathcal{I}} p_{i,j}\phi_j(m)=\phi_i(m+1)\,.$$

Mivel a korábbi megállapításunk szerint $\phi_i(m)\uparrow\phi_i$, ebből már jön, hogy $\psi_i\ge\phi_i$ minden i állapotra. □

A potenciálelmélet egyik legfontosabb alkalmazása az elérési valószínűségek és az elérési idők meghatározása.

2.10.3. Definíció. Az eddigi jelölések mellett legyen

$$h_{i,\mathcal{J}}:=P\big(H_{\mathcal{J}}<\infty\,|\,X_0=i\big)\,, \qquad k_{i,\mathcal{J}}:=E\big(H_{\mathcal{J}}\,|\,X_0=i\big)\,,$$

a $\mathcal{J}$ halmaz **elérési valószínűsége** illetve az elérési idő várható értéke. Ha $\mathcal{J}$ zárt halmaz, akkor a $h_{i,\mathcal{J}}$ valószínűséget **elnyelési valószínűségnek** is nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha $i \in \mathcal{J}$, akkor $H_{\mathcal{J}} = 0$ m.b., vagyis $h_{i,\mathcal{J}} = 1$ és $k_{i,\mathcal{J}} = 0$. Ez természetesen $\mathcal{J} = \{i\}$ esetén is teljesül, vagyis a $h_{i,\{i\}}$ elérési valószínűség nem feltétlenül azonos az $f_{i,i}$ visszatérési valószínűséggel. Ezzel szemben, ha $\mathcal{J} = \{j\}$, ahol $j \neq i$, akkor $h_{i,\mathcal{J}} = f_{i,j}$.

Vegyük észre, hogy a 2.10.2. Tételben $c \equiv 0$ és $f \equiv 1$ mellett

$$\phi_i = E\big[\mathbb{1}_{\{H_{\mathcal{J}}<\infty\}} \,|\, X_0 = i\big] = E\big(H_{\mathcal{J}} < \infty \,|\, X_0 = i\big) = h_{i,\mathcal{J}}\,, \qquad i \in \mathcal{I}\,,$$

míg a $c \equiv 1$ és az $f \equiv 0$ függvény alkalmazásával

$$\phi_i = E\left[\sum_{0 \le n < H_{\mathcal{J}}} 1 \,\middle|\, X_0 = i\right] = E\big(H_{\mathcal{J}} \,|\, X_0 = i\big) = k_{i,\mathcal{J}} \qquad i \in \mathcal{I}\,.$$

Tehát az elérési valószínűség és az elérési idő várható értéke potenciál, és a 2.10.2. Tétel (i) és (ii) pontjából kapjuk az alábbi állítást.

2.10.4. Következmény. (i) *A $h_{i,\mathcal{J}}$, $i \in \mathcal{I}$ elérési valószínűségek a minimális nem negatív megoldásai az alábbi egyenletrendszernek.*

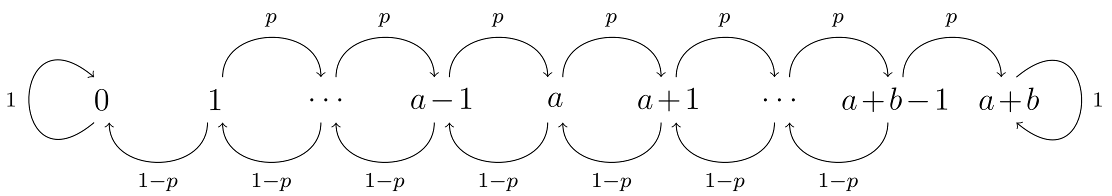
$$\begin{aligned} h_{i,\mathcal{J}} &= \sum_{j \in \mathcal{I}} p_{i,j} h_{j,\mathcal{J}}\,, && i \notin \mathcal{J}\,, \\ h_{i,\mathcal{J}} &= 1\,, && i \in \mathcal{J}\,. \end{aligned}$$

(ii) *A $k_{i,\mathcal{J}}$, $i \in \mathcal{I}$ várható értékek a minimális nem negatív megoldásai az alábbi egyenletrendszernek.*

$$\begin{aligned} k_{i,\mathcal{J}} &= 1 + \sum_{j \notin \mathcal{J}} p_{i,j} k_{j,\mathcal{J}}\,, && i \notin \mathcal{J}\,, \\ k_{i,\mathcal{J}} &= 0\,, && i \in \mathcal{J}\,. \end{aligned}$$

2.10.5. Példa (A játékos csődje probléma)**.** Legyen adva két játékos, mondjuk Péter és Pál, akik „fej vagy írás" játékot játszanak egy nem feltétlenül szabályos pénzérmével. Minden dobásnál egy-egy forintot tesznek fel tétnek, és a dobás nyertese elviszi a feltett tételeket. A játékosok kezdőtőkéje a illetve b pozitív egész szám, és a játékot addig folytatják, míg valamelyikük csődbe nem megy, tehát a vagyona nullára nem csökken. Az a kérdés, hogy mekkora valószínűséggel fog Pétel illetve Pál csődbe menni, továbbá mennyi a játék hosszának várható értéke. Ezt a feladatot a **játékos csődje problémának** nevezzük.

Jelölje $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ Péter vagyonát a játék folyamán. Mivel az egyes érmedobások függetlenek, az $\mathbb{X}$ folyamat egy diszkrét idejű időhomogén Markov-lánc, mely az a állapotból indul, és minden egyes lépésben mondjuk p valószínűséggel egyet jobbra, $1-p$ valószínűséggel egyet balra lép. Amennyiben Péter vagyona eléri a 0 vagy az $a+b$ értéket, akkor valamelyik játékos csődbe megy, és a játék véget ér, tehát ezek elnyelő állapotok. Azonnal látszik, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat egy véletlen bolyongás elnyelő falakkal és azzal az újdonsággal, hogy a lánc most nem a 0, hanem az $a \ge 0$ állapotból indul el. (Lásd: 2.3.7. Példa.)



Jelölje a továbbiakban $\overline{p}_{a,b}$ annak a valószínűségét, hogy Pál valaha csődbe megy, tehát az $\mathbb{X}$ folyamat elnyelődik az $a+b$ állapotban, és legyen $\overline{q}_{a,b}$ Péter csődjének a valószínűsége, vagyis annak az esélye, hogy a folyamat a 0 állapotban köt ki. Ekkor annak az esélye, hogy a játék nem ér véget véges sok lépés során $1-(\overline{p}_{a,b}+\overline{q}_{a,b})$. Jelölje továbbá $m_{a,b}$ a játék hosszának várható értékét. Ezeket a mennyiségeket szeretnénk meghatározni, mint az a, b és p paraméterek függvényét.

Vegyük észre, hogy a korábban bevezetett jelöléseket alkalmazva $\mathcal{J}=\{a+b\}$ esetén $\overline{p}_{a,b}=h_{a,\mathcal{J}}$, míg $\mathcal{J}=\{0\}$ mellett $\overline{q}_{a,b}=h_{a,\mathcal{J}}$, végül $\mathcal{J}=\{0,a+b\}$ esetén $m_{a,b}=k_{a,\mathcal{J}}$. Tehát a keresett mennyiségek előállnak, mint az $\mathcal{I}=\{0,\dots,a+b\}$ állapottér bizonyos részhalmazainak elérési (és elnyelési) valószínűségei, valamint az elérési idők várható értékei. Ezeket viszont meg tudjuk határozni a 2.10.4. Következmény segítségével. Ezen jegyzet keretei között csak a $p=1/2$ szimmetrikus esettel foglalkozunk. Az általános eset hasonlóképpen kezelhető, ezt az olvasóra bízzuk.

Határozzuk meg először Péter végső győzelmének a valószínűségét, tehát a $\overline{p}_{a,b}$ értéket. A 2.10.4. Következmény (i) pontja szerint a $\mathcal{J}=\{a+b\}$ halmazhoz tartozó $h_{i,\mathcal{J}}$, $i\in\mathcal{I}$, elérési valószínűségek megoldásai a

$$\begin{aligned} h_{0,\mathcal{J}} &= h_{0,\mathcal{J}}\,, \\ h_{i,\mathcal{J}} &= \big(h_{i-1,\mathcal{J}}+h_{i+1,\mathcal{J}}\big)/2\,, \qquad\qquad i=1,\dots,a+b-1\,, \\ h_{a+b,\mathcal{J}} &= 1\,, \end{aligned}$$

peremfeltételes homogén differenciaegyenletnek. Az első egyenlet eldobható, hiszen azonosság, de helyette a $h_{0,\mathcal{J}}=0$ formában adható egy másik peremfeltétel. A differenciaegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet $x^2-2x+1=0$, aminek $x=1$ a gyöke kétszeres multiplicitással. Ez azt jelenti, hogy a differenciaegyenlet általános megoldását

$$h_{i,\mathcal{J}}=c_1 1^i+c_2 i 1^i=c+di\,, \qquad i=0,\dots,a+b\,,$$

alakban kell keresni. A $h_{0,\mathcal{J}}=0$ és a $h_{a+b,\mathcal{J}}=1$ peremfeltétel alkalmazásával azonnal jön, hogy $h_{i,\mathcal{J}}=i/(a+b)$, $i=0,\dots,a+b$, amiből

$$\overline{p}_{a,b}=h_{a,\mathcal{J}}=\frac{a}{a+b}\,.$$

Hasonló módszerrel Péter csődjének $\overline{q}_{a,b}$ esélye is meghatározható, de egy egyszerű trükkel ezt a valószínűséget sokkal könnyebben is megkaphatjuk. Vegyük észre, hogy Péter csődje ekvivalens Pál végső győzelmével, és így a szerepek felcserélésével

$$\overline{q}_{a,b}=\overline{p}_{b,a}=\frac{b}{a+b}\,.$$

Ebből azonnal következik, hogy 0 annak az esélye, hogy a játék nem ér véget véges sok lépésben. Ez abból a szempontból nem meglepő, hogy az $\{1,\ldots,a+b-1\}$ állapotok egy nyitott osztályt alkotnak, melyet a bolyongás biztosan elhagy.

Egyetlen feladatunk maradt, a játék várható hosszának meghatározása. A 2.10.4. Következmény (ii) pontjából adódik, hogy a $\mathcal{J}=\{0,a+b\}$ halmazhoz tartozó $k_{i,\mathcal{J}}$ várható értékek megoldásai a

$$\begin{aligned} k_{0,\mathcal{J}} &= 0\,, \\ k_{i,\mathcal{J}} &= 1+\big(k_{i-1,\mathcal{J}}+k_{i+1,\mathcal{J}}\big)/2\,, \qquad\qquad i=1,\ldots,a+b-1\,, \\ k_{a+b,\mathcal{J}} &= 0\,, \end{aligned}$$

inhomogén differenciaegyenletnek. A karakterisztikus egyenlet ismét $x^2-2x+1=0$, amiből a homogén általános megoldás megint csak $c_1+c_2 i$, $i=0,\ldots,a+b$. Továbbá, mivel az $x=1$ a karakterisztikus egyenlet kétszeres gyöke, az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása kereshető di^2 alakban. Ez utóbbit a differenciaegyenletbe beírva jön a

$$0=k_{i+1,\mathcal{J}}-2k_{i,\mathcal{J}}+k_{i-1,\mathcal{J}}+2=d(i+1)^2-2di^2+d(i-1)^2+2=2d+2\,,$$

egyenlet, amiből $d=-1$. Tehát a differenciaegyenlet általános megoldása

$$k_{i,\mathcal{J}}=c_1+c_2 i-i^2\,, \qquad i=0,\ldots,a+b\,,$$

alakban áll elő. A peremfeltételek segítségével kapjuk, hogy

$$k_{i,\mathcal{J}}=(a+b)i-i^2=i(a+b-i)\,, \qquad i=0,\ldots,a+b\,,$$

amiből a játék hosszának várható értéke $m_{a,b}=k_{a,\mathcal{J}}=ab$.

2.11. Elágazó folyamatok, a Galton–Watson-folyamat

Tegyük fel, hogy egy populáció egyedszáma úgy alakul, hogy minden egyes egyednek a többitől függetlenül valamilyen rögzített eloszlás szerint lesznek utódai a következő generációban. Legyen X_n a populáció mérete az n-edik generációban, és jelölje $\xi_{n+1,k}$ azt, hogy az n-edik generáció k-adik egyedének hány utóda van, ahol $n=0,1,2,\ldots$. A bevezető feltevés szerint ekkor $\xi_{n,k}$, $n,k=1,2,\ldots$ független és azonos eloszlású nemnegatív értékű változó, továbbá azt is fel fogjuk tenni, hogy ezen változók függetlenek az X_0 kezdeti populációmérettől is. Ekkor az n-edik generáció mérete

$$X_n=\sum_{k=1}^{X_{n-1}}\xi_{n,k}\,, \qquad n\in\mathbb{N}\,.$$

Vegyük észre, hogy az X_0, $\xi_{m,k}$, $k\in\mathbb{N}$, $m=1,\ldots,n$, változók egyértelműen meghatározzák az $X_0,\ldots,X_n$ változók értékek, vagyis az $X_0,\ldots,X_n$ változók mérhetőek az

$$\mathcal{F}_n:=\sigma\big(X_0,\xi_{m,k}:k\in\mathbb{N},m=1,\ldots,n\big)$$

σ-algebrára nézve. Mivel a feltevés szerint a $\xi_{m,k}$, $k{\in}\mathbb{N}$, $m{=}n{+}1, n{+}2$, változók függetlenek az $\mathcal{F}_n$ σ-algebrától, függetlenek az $X_0, \dots, X_n$ generációméretektől is.

A továbbiakban a tömörség kedvéért legyen ξ az utódeloszlás-változókkal azonos eloszlású véletlen változó, valamint legyen μ a ξ változó eloszlása, tehát legyen $\mu(B){=}P(\xi{\in}B)$, $B \in \mathcal{B}$. Jelölje továbbá $\mu^{*\ell}$ a μ mérték ℓ-edik konvolúcióhatványát, tehát legyen

$$\mu^{*\ell}(B) := P\big(\xi_{m,1} + \dots + \xi_{m,\ell} \in B\big) , \qquad B \in \mathcal{B} ,$$

mely független az m paramétertől. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $i_0, \dots, i_n, j \in \mathbb{N}_0$ értékek mellett

$$A := \big\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\big\} \in \mathcal{F}_n ,$$

amiből

$$P\big(X_{n+1}{=}j \mid X_n{=}i_n, \dots, X_0{=}i_0\big) = P\left(\sum_{k=1}^{X_n} \xi_{n+1,k}{=}i \,\middle|\, A \right) = P\left(\sum_{k=1}^{i_n} \xi_{n+1,k}{=}i \right) = \mu^{*i_n}\big(\{j\}\big) ,$$

és hasonló megfontolásból

$$P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n\big) = \mu^{*i_n}\big(\{j\}\big) .$$

Ezzel beláttuk, hogy az $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ folyamat egy homogén Markov-lánc, melynek átmenetvalószínűségei

$$p_{i,j} = P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i\big) = \mu^{*i}\big(\{j\}\big) , \qquad i, j \in \mathbb{N}_0 .$$

Jegyezzük meg, hogy speciálisan $p_{0,0} = 1$, tehát a 0 állapot elnyelő.

2.11.1. Definíció. A bevezetett $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ sztochasztikus folyamatot **Galton–Watson-folyamatnak** nevezzük.

A Galton–Watson-folyamat története a 19. századra nyúlik vissza. 1873-ban Sir Francis Galton egy cikkében azt a kérdést vetette fel, hogy mi az esélye annak, hogy $X_0 = 1$ kezdeti érték esetén a folyamat kihal, azaz mennyi a

$$P\big(\text{létezik } n \in \mathbb{N} \text{ melyre } X_n = 0 \mid X_0 = 1\big)$$

valószínűség értéke. (A pontosság kedvéért jegyezzük meg, hogy őt az angol nemesi családnevek kihalási valószínűsége érdekelte.) Tehát tulajdonképpen a 0 állapot elérési (és ezáltal a 0 állapotban való elnyelődés) valószínűsége a kérdéses. A problémára 1874-ben Reverend Henry William Watson közölt egy megoldást, melyben azt állította, hogy a kihalás valószínűsége mindig 1. A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez a megoldás csak részben helyes, ugyanis a kihalás valószínűsége pontosan akkor 1, ha az utódeloszlás $E(\xi)$ várható értéke nem haladja meg az 1 értéket, de egyébként a kihalás valószínűsége szigorúan kisebb, mint 1. Az eredmény viszont abból a szempontból mérföldkőnek számított, hogy Watson rátalált a probléma kezelésének megfelelő eszközére. Watson generátorfüggvényeket használt, és észrevette, hogy a q valószínűség gyöke a $G_\xi(x) = x$ egyenletnek, ahol

$$G_\xi(x) := E\big(x^\xi\big) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j P(\xi = j)\,, \qquad 0 \le x \le 1\,,$$

a ξ utódeloszás-változó valószínűségi generátorfüggvénye. A pontos választ bizonyítással először Johan Frederik Steffensen publikálta 1930-ban, aki meglepő módon nem ismerte Galton és Watson munkáját. A teljes történethez hozzátartozik, hogy Irénée-Jules Bienaymé már 1845-ben foglalkozott ezzel a kérdéssel, és bizonyítás nélkül meg is fogalmazta a helyes választ, de ez a cikk több mint száz évig a feledés homályába merült. Az ő tiszteletére a folyamatot sokan Bienaymé–Galton–Watson-folyamatnak nevezik.

2.11.2. Tétel (Kihalási tétel)**.** *Legyen $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ Galton–Watson-folyamat $X_0 = 1$ kezdeti értékkel és ξ utódeloszlással, és legyen $m = E(\xi)$ az utódeloszlás várható értéke. Ekkor teljesülnek az alábbiak.*

(i) *A kihalás valószínűsége a $G_\xi(x) = x$ egyenletnek* [0,1] *intervallumba eső legkisebb q gyöke.*

(ii) *A kihalás valószínűsége pontosan akkor 1, ha $m < 1$, vagy pedig $m = 1$ és $P(\xi = 1) < 1$. Minden más esetben a kihalás valószínűsége határozottan kisebb, mint 1.*

Bizonyítás. (i) Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy a valószínűségi generátorfüggvények elemi tulajdonságai szerint a $G_\xi(x) = x$ egyenletnek az $x = 1$ érték mindig gyöke, tehát az egyenletnek garantáltan van a [0,1] intervallumba eső megoldása. Továbbá, a generátorfüggvény folytonos, ezért a gyökök infimuma is gyök, ami azt jelenti, hogy a „legkisebb gyök" jól definiált. Jelölje a továbbiakban q ezt a legkisebb nemnegatív gyököt.

A mérték folytonossága miatt a kihalás valószínűsége előáll, mint

$$q = P\bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = 0\}\bigg) = \lim_{n\to\infty} P\bigg(\bigcup_{k=1}^{n} \{X_k = 0\}\bigg) = \lim_{n\to\infty} P\big(X_n = 0\big)\,.$$

Ismét a generátorfüggvények tulajdonságai alapján itt $P(X_n = 0) = G_{X_n}(0)$, ahol G_{X_n} az X_n véletlen változó generátorfüggvénye. A következőkben teljes indukcióval belátjuk, hogy G_{X_n} a G_ξ függvény n-edik iteráltja, azaz

$$G_{X_1} = G_\xi \qquad \text{és} \qquad G_{X_{n+1}} = G_{X_n} \circ G_\xi\,, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Mivel $X_0 = 1$ miatt $X_1 = \xi_{1,1}$, azonnal jön a $G_{X_1} = G_\xi$ egyenlőség. Most tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n-1 \geq 1$ egészre. Ekkor

$$
\begin{aligned}
G_{X_n}(x) &= E\big(x^{X_n}\big) = E\Big(x^{\sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,k}}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} E\Big(x^{\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}} \mid X_{n-1} = j\Big) P\big(X_{n-1} = j\big) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} E\Big(x^{\sum_{k=1}^{j} \xi_{n,k}}\Big) P\big(X_{n-1} = j\big) = \sum_{j=0}^{\infty} P\big(X_{n-1} = j\big) \prod_{k=1}^{j} E\big(x^{\xi_{n,k}}\big) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} P\big(X_{n-1} = j\big) \big(G_\xi(x)\big)^j = G_{X_{n-1}}\big(G_\xi(x)\big) = \big(G_{X_{n-1}} \circ G_\xi\big)(x),
\end{aligned}
$$

ami pontosan a bizonyítandó volt.

A valószínűségi generátorfüggvények definíciójából azonnal jön, hogy G_ξ monoton növekvő a $[0,1]$ intervallumon, amiből

$$0 \leq P\big(\xi = 0\big) = G_\xi(0) \leq G_\xi(q) = q\,.$$

Ezáltal $0 \leq G_{X_1}(0) = G_\xi(0) \leq q$, és ismét csak a G_ξ függvény monotonitását alkalmazva

$$0 \leq G_\xi(0) \leq G_\xi\big(G_{X_1}(0)\big) \leq G_\xi(q) = q\,.$$

és ezáltal

$$0 \leq G_{X_1}(0) \leq G_{X_2}(0) \leq q\,.$$

Hasonlóan folytatva, teljes indukcióval kapjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 \leq G_{X_1}(0) \leq G_{X_2}(0) \leq \ldots \leq G_{X_n}(0) \leq q\,.$$

Mivel a $G_{X_n}(0)$, $n \in \mathbb{N}$, sorozat monoton nő és korlátos, létezik határértéke, és

$$L := \lim_{n\to\infty} G_{X_n}(0) = \lim_{n\to\infty} P\big(X_n = 0\big) \in [0,q]\,.$$

Vegyük észre, hogy ez egyben azt is jelenti, hogy L maga a kihalás valószínűsége. A G_ξ függvény folytonossága miatt

$$G_\xi(L) = \lim_{n\to\infty} G_\xi\big(G_{X_n}(0)\big) = \lim_{n\to\infty} G_{X_{n+1}}(0) = L\,,$$

tehát az L érték nemnegatív gyöke a $G_\xi(x) = x$ egyenletnek. Mivel most $L \leq q$, és definíció szerint q minimális nemnegatív gyök, kapjuk, hogy $q = L$.

(ii) Most megvizsgáljuk azt, hogy a kihalás valószínűsége mikor lesz egyenlő eggyel. Először tegyük fel, hogy $P\big(\xi \leq 1\big) < 1$. Elemi eszközökkel megmutatható, hogy ekkor a G_ξ generátorfüggvény szigorúan monoton növekvő és szigorúan konvex a [0,1] intervallumon. Ekkor a függvény deriválható is ezen az intervallumon, továbbá a Lagrange-féle középértéktétel szerint tetszőleges $x \in [0,1)$ esetén létezik olyan $y \in (x,1)$, hogy

$$\frac{G_\xi(1) - G_\xi(x)}{1-x} = G'_\xi(y).$$

A G_ξ függvény szigorú konvexitása miatt G'_ξ szigorúan monoton növekvő a [0,1] intervallumon, így $G'_\xi(y) < G'_\xi(1) = m$.

Először tegyük fel, hogy $m \leq 1$. Ekkor

$$\frac{1-G_\xi(x)}{1-x} = \frac{G_\xi(1)-G_\xi(x)}{1-x} = G'_\xi(y) < G'_\xi(1) = m \leq 1\,,$$

amiből $1-G_\xi(x) < 1-x$, vagyis $G_\xi(x) > x$. Mivel az x érték a [0,1) intervallim tetszőleges pontja volt, a $G_\xi(x) = x$ egyenlet minimális nem negatív megoldása, és ezáltal a kihalás valószínűsége $q = 1$.

Ha ezzel szemben $m = G'_\xi(1) > 1$, akkor található olyan $x \in (0,1)$, hogy $G'_\xi(x) > 1$, és a Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik $y \in (x,1)$, melyre

$$\frac{G_\xi(1)-G_\xi(x)}{1-x} = G'_\xi(y).$$

Ismét alkalmazva a G'_ξ függvény szigorú monotonitását kapjuk, hogy $G'_\xi(y) > G'_\xi(x) > 1$, és ezért

$$\frac{1-G_\xi(x)}{1-x} = \frac{G_\xi(1)-G_\xi(x)}{1-x} = G'_\xi(y) > G'_\xi(x) > 1\,,$$

vagyis $1-G_\xi(x) > 1-x$, amiből $G_\xi(x)-x < 0$ következik. Mivel $G_\xi(0)-0 = P(\xi=0) \geq 0$, a G_ξ függvény folytonossága alapján a $G_\xi(x) = x$ egyenletnek létezik megoldása a $[0,1)$ intervallumon. Ez azt jelenti, hogy $m > 1$ esetén $q < 1$.

A továbbiakban már csak azt az esetet kell megvizsgélnunk, amikor $P(\xi \leq 1) = 1$. Ekkor $P(\xi = 0) = 1 - P(\xi = 1)$, amiből

$$G_\xi(x) - x = \Big[P\big(\xi=0\big) + P\big(\xi=1\big)x\Big] - x = \Big[1 - P\big(\xi=1\big)\Big](1-x)$$

Ezért $P(\xi = 1) < 1$ esetén, ha $m < 1$, akkor a $G_\xi(X) - x = 0$ egyenletnek csak $x = 1$ a gyöke, tehát $q=1$. Ha pedig $P(\xi=1)=1$, akkor $m=1$ esetben a $G_\xi(x)-x=0$ egyenletnek minden $x \in [0,1]$ szám gyöke, tehát $q = 0$. □

A következő tételben az $\mathbb{X}$ folyamat asszimptotikus viselkedését fogjuk megvizsgálni.

2.11.3. Tétel. *Legyen $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ Galton–Watson-folyamat ξ utódeloszlással, és tegyük fel, hogy $P(\xi = 1) < 1$. Ekkor minden $j \in \mathbb{N}$ állapot tranziens, és ezért*

$$\lim_{n\to\infty} P\big(X_n = j\big) = 0\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

Továbbá, ha a kezdeti érték $X_0=1$, és q jelöli a $G_\xi(x)=x$ egyenletnek a [0,1] intervallumba eső legkisebb gyökét, akkor

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\Big) = q \qquad \textit{és} \qquad P\Big(\lim_{n\to\infty} X_n = \infty\Big) = 1 - q\,.$$

Bizonyítás. Legyen $j \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges állapot, és legyen $X_0 = j$. Először tegyük fel, hogy $P(\xi = 0) > 0$. Vegyük észre, hogy a folyamat soha többé nem tér vissza a j állapotba, ha a kiindulási generációban található j egyed egyikének sincsen utóda, aminek a valószínűsége $P(\xi = 0)^j$. Ebből kapjuk, hogy

$$1 - f_j = P\big(X_n \neq j, n \in \mathbb{N} \,|\, X_0 = j\big) \geq P(X_1 = 0 \,|\, X_0 = j) = P(\xi = 0)^j > 0\,,$$

és így $f_j < 1$, azaz a j állapot tranziens.

Ha ezzel szemben $P(\xi = 0) = 0$, akkor minden generációban minden egyednek van legalább egy utóda, ami azt jelenti, hogy $X_0 \leq X_1 \leq \cdots$ majdnem biztosan. Mivel feltettük, hogy $P(\xi = 1) < 1$, valamikor elő fog fordulni, hogy egy egyednek legalább két utóda lesz, ami azt jelenti, hogy a j állapotba való visszatérések száma 1 valószínűséggel véges, vagyis j tranziens.

Mivel minden pozitív egész érték tranziens, a folyamat 1 valószínűséggel csak kétféleképpen viselkedhet: elnyelődik a 0 állapotban, vagy divergál a végtelenbe. Mivel a 0 állapot elnyelő, a 2.11.2. Tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\Big) = \lim_{n\to\infty} P\big(X_n = 0\big) = q\,,$$

amiből már következik, hogy a végtelenbe való divergálás valószínűsége $1 - q$. □

A fenti eredmények miatt a Galton–Watson-folyamatokat az $m = E(\xi)$ várható érték nagysága alapján osztályozzuk. A folyamat **szubkritikus**, ha $m < 1$, **kritikus**, ha $m = 1$, és végül **szuperkritikus**, ha $m > 1$.

Az eddigiekben a Galton–Watson-folyamatokra csak eloszlásbeli konvergenciákat fogalmaztunk meg. A következő tétel egy ennél erősebb állítás.

2.11.4. Tétel. *Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ Galton–Watson-folyamat ξ utódeloszlással, és legyen $m = E(\xi)$. Ha $0 < m < \infty$, akkor létezik olyan Y véletlen változó, melyre*

$$\frac{X_n}{m^n} \to Y\,, \qquad n \to \infty\,, \qquad m.b.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $j \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$E\big(X_n \,|\, X_{n-1} = j\big) = E\left(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,k} \,\middle|\, X_{n-1} = j\right) = E\left(\sum_{j=1}^{j} \xi_{n,k}\right) = jm\,,$$

ezért $E(X_n \,|\, X_{n-1}) = mX_{n-1}$. Meggondolható, hogy az

$$\big\{Y_n := X_n/m^n : n \in \mathbb{N}_0\big\}$$

sztochasztikus folyamat szintén Markov-lánc. Ekkor a 2.1.8. Tétel (v) pontja szerint bármely $n \in \mathbb{N}$ mellett

$$E\big(Y_n \,|\, Y_n, \ldots, Y_0\big) = E\big(Y_n \,|\, Y_{n-1}\big) = E\left(\frac{1}{m^n} X_n \,\middle|\, X_{n-1}\right) = \frac{1}{m^n} m X_{n-1} = \frac{X_{n-1}}{m^{n-1}} = Y_{n-1}\,,$$

vagyis az Y_n, $n \in \mathbb{N}_0$, sorozat egy nemnegatív értékű martingál. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $E(|Y_n|) = E(Y_n) = E(Y_0) = 1$, vagyis $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} E(|Y_n|) < \infty$. Ezek után az állítás már következik a martingál konvergencia-tételből. □

3. fejezet

Felújítási folyamatok

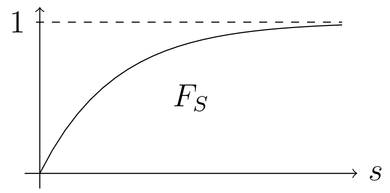
3.1. Az exponenciális eloszlás

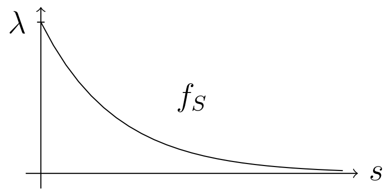
Az S változó **exponenciális eloszlást** követ $\lambda > 0$ paraméterrel, ha eloszlásfüggvénye

$$F_S(s) = P(S \leq s) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda s}, & s \geq 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

Ekkor a változó várható értéke, szórása illetve sűrűségfüggvénye

$$E(S) = D(S) = \frac{1}{\lambda}, \qquad f_S(s) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda s}, & s \geq 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$





A fenti definíciót kiterjesztve a továbbiakban azt mondjuk, hogy az S általános értelemben vett véletlen változó $\lambda = 0$ paraméteres exponenciálist követ, ha $P(S = +\infty) = 1$. Vegyük észre, hogy a várható érték és az eloszlásfüggvény fenti formulája ebben az esetekben is érvényes, ugyanis

$$E(+\infty) = 1/0, \qquad F_{+\infty}(x) = P\big(+\infty \leq s\big) = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy mivel $\lambda = 0$ esetén S elfajuló, tehát majdnem biztosan konstans, ezért független minden (általános értelemben vett) véletlen változótól.

3.1.1. Tétel. *Legyen S nemnegatív értékű véges véletlen változó. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *Az S változó exponenciális eloszlást követ valamilyen $\lambda > 0$ paraméterrel.*

(ii) *Tetszőleges* $s, t \geq 0$ *valós számok esetén*

$$P\big(X - t > s \,|\, S > t\big) = P(S > s)\,.$$

(iii) *Tetszőleges* $s \geq 0$ *valós szám valamint az* S*-től független és nemnegatív értékű* T *véges változó esetén*

$$P\big(S - T > s \,|\, S > T\big) = P(S > s)\,.$$

A 3.1.1. Tétel (ii) pontjának állítását **örökifjú tulajdonságnak** nevezzük. A tétel szerint az örökifjú tulajdonság szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy változó exponenciális eloszlású legyen.

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (ii) A feltételes valószínűség definíciójával

$$P\big(S - t > s \,|\, S > t\big) = \frac{P\big(S - t > s, S > t\big)}{P(S > t)} = \frac{1 - F(s+t)}{1 - F(t)} = e^{-\lambda s} = P(X > s)\,.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Mivel S nemnegatív változó, $F(s) = 0$ teljesül minden $s < 0$ értékre. Legyen

$$G(s) = P(s > x) = 1 - F(s)\,, \qquad s \geq 0\,.$$

Az örökifjú tulajdonság szerint tetszőleges $s, t \geq 0$ valósak esetén

$$\frac{G(s+t)}{G(t)} = \frac{P\big(S - t > s, S > t\big)}{P(S > t)} = P\big(S - t > s \,|\, S > t\big) = P(S > s) = G(s)\,,$$

amiből $G(s+t) = G(s)G(t)$. Felhasználva, hogy $G(s)$ monoton csökken a pozitív félegyenesen megmutatható, hogy $G(s) = e^{-\lambda s}$ valamilyen $\lambda > 0$ valós számra, tehát az S változó exponenciális eloszlást követ.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Jelölje

$$F_{T|\{S>T\}}(t) = P\big(T \leq t \,|\, S > T\big)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

a T változónak az $\{S > T\}$ eseményre vett feltételes eloszlásfüggvényét. A teljes várható érték tételével, felhasználva, hogy S független T-től, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P\big(S - T > s \,|\, S > T\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} P\big(S - T > s \,|\, T = t, S > T\big)\, dF_{T|\{S>T\}}(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P\big(S - t > s \,|\, T = t, S > t\big)\, dF_{T|\{S>T\}}(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P\big(S - t > s \,|\, S > t\big)\, dF_{T|\{S>T\}}(t) \\
&= P(S > s) \int_{-\infty}^{\infty} 1\, dF_{T|\{S>T\}}(t) = P(S > s)\,.
\end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Következik abból, hogy a $T \equiv t$ degenerált változó független S-től. $\square$

A további munkánk során találkozni fogunk azzal a kérdéssel, hogy milyen eloszlást követ független exponenciális eloszlású változók minimuma. Az alábbi tételben erre a problémára adunk megoldást.

3.1.2. Tétel. *Legyen $S_1, S_2, \dots$ véges vagy végtelen sok független exponenciális eloszlású (esetleg általános értelemben vett) véletlen változó rendre $\lambda_1, \lambda_2, \dots \geq 0$ paraméterrel. Legyen továbbá $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$, és tekintsük az $S = \inf\{S_1, S_2, \dots\}$ (általános értelemben vett) véletlen változót. Ekkor érvényesek az alábbiak.*

(i) *Ha $\lambda \in [0, \infty)$, akkor az S változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, míg ha $\lambda = \infty$, akkor $S = 0$ majdnem biztosan.*

(ii) *Ha $\lambda \in (0, \infty)$, akkor az infinimum felvétetik, tehát létezik olyan N egész értékű változó, melyre $P(S = S_N) = 1$. Az N változó független az S értéktől, és eloszlása*

$$P(N = n) = P(S = S_n) = \frac{\lambda_n}{\lambda} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots}.$$

Bizonyítás. (i) Ha $\lambda = 0$, akkor az $S_1, S_2, \dots$ változók mind 0 paraméteres exponenciális eloszlást követnek, amiből $P(S = +\infty) = 1$, vagyis S szintén exponenciális eloszlást követ $\lambda = 0$ paraméterrel.

Abban az esetben, mikor $\lambda > 0$, az S változó 1 valószínűséggel véges. Legyen a változó eloszlásfüggvénye $F(s) = P(S \leq s)$, $s \in \mathbb{R}$. Kapjuk, hogy ha $s < 0$, akkor $F(s) = 0$, míg ha $s \geq 0$, akkor a változók függetlenségét felhasználva

$$1 - F(s) = P(S > s) = P\big(S_1 > s, S_2 > s, \dots\big) = P(S_1 > s) P(S_2 > s) \cdots = e^{-\lambda_1 s} e^{-\lambda_2 s} \cdots = e^{-\lambda s}.$$

Ha $\lambda < \infty$, akkor F a λ paraméteres exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye. Ha $\lambda = \infty$, akkor $P(S > s) = 1 - F(s) = 0$ minden $s > 0$ értékre, tehát S a nulla pontban degenerált változó.

(ii) Tetszőleges rögzített n esetén az $S' = \inf\{S_m : m \neq n\}$ (általános értelemben vett) változó független az S_n-től, továbbá a tétel (i) pontja szerint exponenciális eloszlást követ

$$\lambda' = \sum_{m \neq n} \lambda_m \geq 0$$

paraméterrel. Ha $\lambda' = 0$, akkor az S_m, $m \neq n$ változók mind degeneráltak a végtelenben, és így $\lambda > 0$ miatt $\lambda_n > 0$. Ekkor S_n egy véges exponenciális változó, tehát $N = n$ majdnem biztosan, és az állítás azonnal következik. Ha ezzel szemben $\lambda' > 0$, de $\lambda_n = 0$, akkor az $S_n = +\infty$ változó sosem lesz minimális, azaz $P(N = n) = 0$.

Csak az az eset maradt hátra, mikor $\lambda', \lambda_n > 0$. Ekkor S_n és S' független véges exponenciális eloszlású változó, tehát létezik az együttes sűrűségfüggvényük, mely a külön-külön vett sűrűségfüggvények szorzata:

$$f_{S_n, S'}(x, y) = f_{S_n}(x) f_{S'}(y) = \begin{cases} \lambda_n \lambda' e^{-(\lambda_n x + \lambda' y)}, & x, y \geq 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y\}$. Ekkor a kérdéses valószínűség

$$P(N=n) = P(S=S_n) = P(S_n \le S') = P\big((S_n, S') \in R\big) = \int_R f_{S_n,S'}(x,y)\,dxdy$$
$$= \int_0^\infty \lambda_n e^{-\lambda_n x} \int_x^\infty \lambda' e^{-\lambda' y}\,dy\,dx = \int_0^\infty \lambda_n e^{-(\lambda_n+\lambda')x}\,dx = \frac{\lambda_n}{\lambda_n+\lambda'}\,.$$

Vegyük észre, hogy

$$\sum_n P(N=n) = \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_2+\dots} = 1\,,$$

tehát 1 valószínűséggel létezik minimális az $S_1, S_2, \dots$ változók között. A függetlenséghez legyen $R_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y, x \le z\}$, $z \ge 0$. Ekkor

$$P\big(N=n, S \le z\big) = \int_{R_z} f_{S_n,S'}(x,y)\,dxdy = \int_0^z \lambda_n e^{-\lambda_n x} \int_x^\infty \lambda' e^{-\lambda' y}\,dy\,dx$$
$$= \int_0^z \lambda_n e^{-(\lambda_n+\lambda')x}\,dx = \frac{\lambda_n}{\lambda_n+\lambda'}\big[1-e^{-\lambda z}\big] = P(N=n)P(S \le z)\,,$$

tehát N és S független. □

Gamma függvénynek nevezzük a

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx\,, \qquad \alpha > 0\,,$$

függvényt. Megmutatható, hogy $\Gamma(\alpha)$ véges, ha $\alpha > 0$, továbbá tetszőleges $n \ge 1$ egész esetén $\Gamma(n)=(n-1)!$. Azt mondjuk, hogy a T változó α rendű és λ paraméteres $(\alpha, \lambda > 0)$ Gamma eloszlást követ, ha sűrűségfüggvénye

$$f_T(s) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1}e^{-\lambda s}\,, \qquad s \ge 0\,.$$

Ekkor a változó várható értéke $E(T) = \alpha/\lambda$, szórásnégyzete $D^2(T) = \alpha/\lambda^2$. Deriválással ellenőrizhető, hogy ha az eloszlás rendje $n \ge 1$ egész, akkor az eloszlásfüggvény

$$F_T(s) = \sum_{k=n}^\infty \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s}\,, \qquad s \ge 0\,.$$

3.1.3. Tétel. *Ha $S_1, \dots, S_n$ független exponenciális eloszlású változó közös $\lambda \in (0,\infty)$ paraméterrel, akkor az $S_1 + \dots + S_n$ összeg n-edrendű λ paraméteres Gamma eloszlást követ.*

Bizonyítás. A bizonyítás standard módszerekkel karakterisztikus függvények segítségével történik. Fel kell írni az összegváltozó

$$\phi_{S_1+\dots+S_n}(t) = \phi_{S_1}(t) \cdots \phi_{S_n}(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

karakterisztikus függvényét, és meg kell mutatni, hogy ez azonos az n-edrendű λ paraméteres Gamma eloszlás karakterisztikus függvényével. A részleteket az olvasóra bízzuk. □

Az előző állításban azt vizsgáltuk meg, hogy milyen eloszlást követ véges sok független és azonos eloszlású exponenciális véletlen változó összege. Az utolsó állítást azt a kérdést járja körbe, hogy milyen feltételek mellett lesz exponenciális eloszlású változóknak egy sora véges.

3.1.4. Tétel. *Legyen $S_1, S_2, \ldots$ független exponenciális eloszlású változóknak egy végtelen sorozata, ahol a paraméterek rendre $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in (0, \infty)$. Ekkor a*

$$T := \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + S_2 + \cdots$$

sor 1 valószínűséggel konvergens vagy 1 valószínűséggel divergens, és a sor pontosan akkor konvergál 1 valószínűséggel, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty\,.$$

Bizonyítás. A tétel első állítása, tehát az, hogy a T sor vagy 1 valószínűséggel konvergens vagy 1 valószínűséggel divergens következik a Kolmogorov 0-1 törvényből. Jegyezzük meg azt is, hogy a fentiekben

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} E(S_n) = E(T)\,.$$

Ezek után, ha $T = \infty$ majdnem biztosan, akkor $E(T) = \infty$, és ezáltal a paraméterek reciprokaiból képzett sor divergens. Tehát a bizonyításból csak annak igazolása hiányzik, hogy ha T majdnem biztosan véges, akkor a paraméterek reciprokaiból képzet sor konvergens. Ez az állítás a változók momentumgeneráló függvényével igazolható, a bizonyítást most nem közöljük. □

3.2. A felújítási folyamat és az elemi felújítási tétel

3.2.1. Definíció. Tekintsünk tetszőleges $S_1, S_2, \ldots \geq 0$ véges véletlen változókat, és legyen $T_0 = 0$, $T_n = S_1 + \cdots + S_n$, $n = 1,2,\ldots$ Az

$$X_t = \#\big\{n \geq 1 : T_n \leq t\big\} = \max\big\{n \geq 0 : T_n \leq t\big\}\,, \qquad t \geq 0\,,$$

folyamatot **számláló folyamatnak** nevezzük.

A számláló folyamat, amint arra a neve is utal, valamilyen esemény bekövetkezéseit számolja. A bekövetkezések közötti idő $S_1, S_2, \ldots \geq 0$, tehát az esemény a $T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ időpontokban következik be. Ekkor X_t azt mondja meg, hogy hány esemény következett be a $t \geq 0$ időponttal bezárólag, míg $X_t - X_s$, $t \geq s \geq 0$, az $(s, t]$ intervallumon bekövetkezett események számát adja. Könnyen megmutatható, hogy az X_t, $t \geq 0$, folyamat monoton növekvő és jobbról folytonos lépcsős folyamat.

A számláló folyamatnak és az alább definiált speciális esetnek, a felújítási folyamatnak több alkalmazási területe van. Az egyik ilyen terület a megbízhatóságelmélet, a műszaki berendezések élettartamának modellezése. Adott egy berendezés, egy gép, melynek véges az élettartama, és amikor elromlik, azonnal kicseréljük egy újra. Amikor az is tönkremegy, akkor ismét felújítjuk a rendszert egy harmadik darabbal, és így tovább. Ekkor a felújításokat tekintjük eseményeknek, az $S_1, S_2, \ldots$ változók a berendezések élettartamai, míg a $T_1, T_2, \ldots$ értékek a felújítások időpontjai. Egy másik alkalmazási terület a tömegkiszolgálási modellek elmélete. Adott egy szerver, vagyis valamilyen kiszolgáló egység (egy bolt, egy hivatal, vagy egy számítógépes terminál), melyhez vevők (ügyfelek, lekérdezések) érkeznek $S_1, S_2, \ldots$ időközönként. Ebben az esetben a számláló folyamat a vevőket számolja, akik a $T_1, T_2, \ldots$ időpontokban érkeznek. A számláló folyamat a kockázati modellek elméletében is megjelenik, ahol a folyamat a tömegkiszolgálási modellekhez hasonlóan egy biztosítótársasághoz beérkező kárbejelentéseket számolja.

3.2.2. Definíció. Legyen X_t, $t \geq 0$, tetszőleges sztochasztikus folyamat. Azt mondjuk, hogy a folyamat **felrobban** a τ (véletlen vagy determinisztikus) időpontban, ha X_t véges minden $t < \tau$ esetén, és $\lim_{t \uparrow \tau} X_t = \infty$.

Számláló folyamat esetén a felrobbanás időpontja

$$\tau = \lim_{n \to \infty} T_n = S_1 + S_2 + \cdots \in [0, \infty],$$

és a definícióból $N_t = \infty$, ha $t \geq \tau$. Mivel a $\{\tau < \infty\}$ esemény az $S_1, S_2, \ldots$ sorozathoz tartozó farokesemény, ezért, ha speciálisan a sorozat elemei függetlenek, akkor a Kolmogorov 0-1 törvény miatt τ majdnem biztosan véges vagy majdnem biztosan végtelen. Az általános esetben ugyanezt nem mondhatjuk el, könnyen konstruálható olyan folyamat, mely mondjuk 1/2 valószínűséggel véges időben felrobban, és 1/2 valószínűséggel $\tau = \infty$.

3.2.3. Definíció. Egy tetszőleges X_t, $t \geq 0$, sztochasztikus folyamat **várható érték függvénye** az $m(t) = E(X_t)$ függvény, mely azon $t \geq 0$ pontokban van értelmezve, ahol a várható érték létezik.

Vegyük észre, hogy egy számláló folyamat esetén rögzített $n \in \mathbb{N}$ és $t \geq 0$ mellett

$$\{X_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\} = \{T_n \leq t\} \setminus \{T_{n+1} \leq t\},$$

amiből az X_t változó eloszlása

$$P(X_t = n) = P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t) = F_{T_n}(t) - F_{T_{n+1}}(t).$$

Most $T_0 = 0$, amiből $F_{T_0}(t) = P(S_0 \leq t) = 1$, ha $t \geq 0$, így azonnal kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(\tau \leq t) = P(X_t = \infty) &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} P(X_t = n) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_{T_n}(t) - F_{T_{n+1}}(t)\right] \\ &= 1 - \left[F_{T_0}(t) - \lim_{n \to \infty} F_{T_n}(t)\right] = \lim_{n \to \infty} F_{T_n}(t). \end{aligned}$$

Mivel számláló folyamat esetén X_t nemnegatív értékű általános értelemben vett véletlen változó, az $m(t) = E(X_t) \in [0, \infty]$ várható érték függvény létezik minden $t \geq 0$ időpontrara.

Ha $\tau = \infty$ majdnem biztosan, tehát a folyamat 1 valószínűséggel nem robban fel véges időben, akkor

$$m(t) = E(X_t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\big[F_{T_n}(t) - F_{T_{n+1}}(t)\big] = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_n}(t)\,.$$

Abban az esetben, mikor $S_1, S_2, \ldots$ független, a $T_1, T_2, \ldots$ változók eloszlásfüggvényei konvolúcióval számolhatóak.

3.2.4. Definíció. A **felújítási folyamat** egy olyan X_t, $t \geq 0$, számláló folyamat, melyre az $S_1, S_2, \ldots \geq 0$ véletlen változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Ekkor a kapcsolatos $m(t) = E(X_t)$ várható érték függvényt **felújítási függvénynek** nevezzük.

Legyen S az $S_1, S_2, \ldots$ változókkal azonos eloszlású. Ha $P(S=0)=1$, akkor a folyamat majdnem biztosan felrobban a $\tau=0$ időpontban, tehát X_t egyetlen $t \geq 0$ értékre sem véges. Éppen azért a továbbiakban feltesszük, hogy $P(S = 0) < 1$. Ekkor a felújítások közötti idő várható értéke $E(S) \in (0, \infty]$.

3.2.5. Példa. Az X_t, $t \geq 0$, felújítási folyamatot λ intenzitású **Poisson folyamatnak** nevezzük, ha a felújítások közötti idő eloszlása a λ paraméteres exponenciális eloszlás. Ekkor a T_n változó n-edrendű λ paraméteres Gamma eloszlást követ, és így várható értéke, szórásnégyzete illetve eloszlásfüggvénye

$$E(T_n) = \frac{n}{\lambda}\,, \qquad D^2(T_n) = \frac{n}{\lambda^2}\,, \qquad F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\,, \quad t \geq 0\,.$$

Ebből azonnal következik, hogy

$$P(X_t = n) = F_{T_n}(t) - F_{T_{n-1}}(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\,, \qquad n \geq 0\,,$$

tehát egy rögzített $t \geq 0$ pontban az N_t változó λt paraméteres Poisson eloszlást követ. Ez a tulajdonság a folyamat elnevezésének a magyarázata. Mivel tetszőleges $k \geq 1$ egész esetén X_k véges véletlen változó, kapjuk, hogy

$$P(\tau < \infty) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau \leq k\}\Big) = \lim_{k\to\infty} P(\tau \leq k) = \lim_{k\to\infty} P(X_k = \infty) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0\,,$$

vagyis a folyamat 1 valószínűséggel nem robban fel véges időben. A Poisson eloszlás várható értékéből a felújítási függvény $m(t) = E(X_t) = \lambda t$. A λ paramétert azért nevezzük „intenzitásnak”, mert tetszőleges $(s, t]$ intervallum esetén ide eső események számának várható értéke

$$E(X_t - X_s) = m(t) - m(s) = \lambda(t - s)\,.$$

A felújítási függvényt a korábban felírt formulával is meghatározhatjuk, ugyanis

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t\,. \end{aligned}$$

Az alábbiakban két további definíciót is adunk a Poisson folyamatra, melyek a 3.2.7. Tétel szerint ekvivalensek az eredeti definícióval. Ehhez viszont először szükségünk lesz néhány új fogalomra.

3.2.6. Definíció. Tekintsünk egy $\mathbb{X}=\{X_t : t\in\mathbb{T}\subseteq[0,\infty)\}$ sztochasztikus folyamatot, és legyen $s,t\in\mathbb{T}$, $s<t$, tetszőleges. A folyamatnak az $(s,t]$ intervallumon vett **növekménye** az X_t-X_s véletlen változó. Azt mondjuk, hogy a folyamat **stacionárius növekményű**, ha a növekmény eloszlása csak a vizsgált időintervallum hosszától függ, tehát tetszőleges $s',t'\in\mathbb{T}$, $t'-s'=t-s$, esetén $X_{t'}-X_{s'}$ és X_t-X_s azonos eloszlású változó. Az $\mathbb{X}$ folyamat **független növekményű**, ha diszjunkt intevallumonkon vett növekményei függetlenek, tehát tetszőleges $n\in\mathbb{N}$, továbbá bármely $s_1<t_1\leq s_2<t_2\leq\ldots\leq s_n<t_n$, a $\mathbb{T}$ indexhalmazból származó értékek esetén az $X_{t_1}-X_{s_1}, X_{t_2}-X_{s_2},\ldots,X_{t_n}-X_{s_n}$ változók függetlenek.

3.2.7. Tétel. *Legyen X_t, $t\geq 0$, számláló folyamat, továbbá legyen $\lambda>0$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *A folyamat λ intenzitású Poisson folyamat, tehát felújítási folyamat λ paraméteres exponenciális élettartamokkal.*

(ii) *A folyamat független és stacionárius növekményű, és X_t Poisson eloszlást követ λt paraméterrel, $t\geq 0$.*

(iii) *A folyamat független és stacionárius növekményű, és*

$$P(X_t=1)=\lambda t+o(t)\,,\qquad P(X_t\geq 2)=o(t)\,,\qquad t\downarrow 0\,.$$

Bizonyítás. A tételre a későbbiekben fogunk egy heurisztikus bizonyítást adni. □

A továbbiakban azt fogjuk megvizsgálni, hogy hogyan viselkedik az általános felújítási folyamat és a kapcsolatos felújítási függvény asszimptotikusan, ha $t\to\infty$.

3.2.8. Tétel. *Legyen X_t, $t\geq 0$, tetszőleges felújítási folyamat, és tegyük fel, hogy a felújítások közötti S időre $P(S=0)<1$. Ekkor*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=\frac{1}{E(S)}\quad \textit{m.b.}\qquad \textit{és}\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{E(S)}\,.$$

A második konvergenciát elemi felújítási tételnek nevezzük.

3.2.9. Megjegyzés. A tétel első állítása azt mondja, hogy hosszútávon, tehát $t\to\infty$ esetén, egy egységnyi hosszúságú időintervallumra jutó felújítások X_t/t átlagos száma $1/E(S)$. Ez nem meglepő, ha arra gondolunk, hogy a felújítások átlagosan $E(S)$ időközönként követik egymást, és ezáltal átlagosan $1/E(S)$ felújítás fér bele egy egységnyi hosszúságú intervallumra. A tétel állításait az

$$X_t\sim\frac{t}{E(S)}\quad \text{m.b.}\qquad \text{és}\qquad m(t)\sim\frac{t}{E(S)}\,,\qquad t\to\infty\,,$$

formában is felírhatjuk. Ez azt jelenti, hogy $E(S)<\infty$ esetén N_t és $m(t)$ aszimptotikusan lineáris rendben tart a végtelenbe. Ezzel szemben, ha $E(S)=\infty$, akkor $N_t=o(t)$ valamint $m(t)=o(t)$, amint $t\to\infty$.

Bizonyítás (3.2.8. Tétel). A nagy számok erős törvényét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{T_n}{n} = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n} \to E(S)\,, \qquad n \to \infty\,, \qquad \text{m.b.}$$

Először azt mutatjuk meg, hogy $X_t \to \infty$, amint $t \to \infty$, majdnem biztosan. Tegyük fel ugyanis, hogy ez a konvergencia nem teljesül. Ekkor, mivel X_t monoton nő, a folyamat pozitív valószínűséggel korlátos. Ez csak úgy fordulhat elő, hogy egy idő után nem történik újabb felújítás, tehát valamelyik élettartam végtelennel egyenlő. Kapjuk, hogy

$$0 < P\Big(\lim_{t\to\infty} X_t < \infty\Big) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{S_n = \infty\}\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n = \infty) = 0\,,$$

ami ellentmondás. Tehát valóban $X_t \to \infty$, $t \to \infty$.

Amennyiben tekintjük azt a két 1 valószínűségű eseményt, melyeken a fenti konvergenciák rendre teljesülnek, akkor a két esemény metszete egy olyan 1 valószínűségű esemény, melyen mindkét konvergencia teljesül. Ebből jön, hogy

$$\frac{T_{X_t}}{X_t} \to E(S)\,, \qquad t \to \infty\,, \qquad \text{m.b.}$$

Mivel X_t adja a t időponttal bezárólag bekövetkezett események számát, nyilvánvaló, hogy $T_{X_t} \le t < T_{X_t+1}$, amiből

$$E(S) \leftarrow \frac{T_{X_t}}{X_t} \le \frac{t}{X_t} < \frac{T_{X_t+1}}{X_t} = \frac{T_{X_t+1}}{X_t+1}\,\frac{X_t+1}{X_t} \to E(S)\cdot 1\,, \qquad t \to \infty\,,$$

majdnem biztosan. A rendőr-elv alkalmazásával jön az első állítás.

A második konvergenciához először azt kell megmutatni, hogy az X_t/t, $t \ge 0$, változók egyenletesen integrálhatóak. Ezt mi most nem csináljuk meg. Mivel $X_t/t \to 1/E(S)$ majdnem biztosan, ugyanez a konvergencia sztochasztikus értelemben is teljesül. A momentum konvergenciatétel szerint viszont ebből jön az L_1 konvergencia, tehát

$$E\bigg(\Big|\frac{X_t}{t} - \frac{1}{E(S)}\Big|\bigg) \to 0\,.$$

Kapjuk, hogy

$$\Big|\frac{m(t)}{t} - \frac{1}{E(S)}\Big| = \Big|E\Big(\frac{X_t}{t} - \frac{1}{E(S)}\Big)\Big| \le E\bigg(\Big|\frac{X_t}{t} - \frac{1}{E(S)}\Big|\bigg) \to 0\,, \qquad t \to \infty\,,$$

amiből az elemi felújítási tétel azonnal következik. □

3.2.10. Következmény. *Ha $P(S=0) < 1$, akkor a felújítási folyamat 1 valószínűséggel nem robban fel véges időben, továbbá a felújítási függvény véges és jobbról folytonos a pozitív félegyenesen.*

Bizonyítás. A 3.2.8. Tétel szerint a felújítási folyamat és a felújítási függvény asszimptotikusan nem nő gyorsabban, mint egy lineáris függvény, tehát nem robbanhatnak fel véges időben.

A folytonossághoz legyen $t \geq 0$ tetszőleges rögzített érték. Ha $s \downarrow t$, olyan módon, hogy $s \leq 2t$, akkor a folyamat jobbról való folytonossága miatt $X_s \downarrow X_t$, valamint $X_s \leq X_{2t}$. Az X_{2t} változó integrálható, tehát a majoráns konvergencia tétel alkamazásával

$$m(s) = E(X_s) \to E(X_t) = m(t)\,. \qquad \square$$

3.2.11. Definíció. Tekintsünk (S_n, C_n), $n = 1,2,\ldots$ független és azonos eloszláslású vektorváltozókat, és tegyük fel, hogy az első komponensek nemnegatív változók. Legyen X_t, $t \geq 0$, az $S_1, S_2, \ldots$ változók, mint felújítások közötti idők által meghatározott felújítási folyamat. Ekkor az

$$R_t = \sum_{n=1}^{X_t} C_n = C_1 + \cdots + C_{N_t}\,, \qquad t \geq 0\,,$$

folyamatot **felújítási díjfolyamatnak** nevezzük.

A felújítási díjfolyamatokat jellemzően olyan esetekben alkalmazzuk, mikor a felújítás valamilyen költséggel jár. A modellben rendre C_n az n-dik felújítás költsége, mely függhet az előző felújítástól eltelt S_n idő hosszától, de független a többi felújítás költségétől. Ekkor R_t a $t \geq 0$ időpontig felmerülő teljes költség. Ilyen típusú problémával többek között a biztosítási matematikában találkozhatunk, ahol $C_1, C_2, \ldots$ az egyes kárbejelentésekre jutó kifizetések nagysága. A továbbiakban legyen S és C rendre azonos eloszlású az S_n illetve a C_n, $n = 1,2,\ldots$ változókkal.

3.2.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy az R_t, $t \geq 0$, felújítási díjfolyamatra $P(S = 0) < 1$ és $E(|C|) < \infty$. Ekkor*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_t}{t} = \frac{E(C)}{E(S)} \quad m.b. \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{E(R_t)}{t} = \frac{E(C)}{E(S)}\,.$$

Bizonyítás. Az állítás a 3.2.8. Tételből és a Wald-azonosságból következik. A bizonyítást az olvasóra bízzuk. $\square$

3.3. Az „inspection paradox"

Tekintsük a következő problémát. Adott egy műszaki berendezés, melynek véges az élettartama, és amint tönkremegy, azonnal kicseréljük egy új, de azonos műszaki paraméterekkel rendelkező darabra. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy ha egy véletlen időpontban megvizsgáljuk a rendszert, akkor mennyi az aktuálisan üzemelő berendezés teljes élettartamának várható értéke. Ki fog derülni, hogy ez a várható érték magasabb, mint a berendezések várható élettartama. A problémát úgy is meg szokták foglamazni, hogy egy busz véletlen, de napszaktól függetlenül azonos időközönként ját. Ha egy véletlen időpontban kimegyünk a megállóba, akkor várhatóan mennyi ideig kell várakoznunk? Murphy törvénye azt mondja, hogy többet, mint az átlagos követési idő fele, és ki fog derülni, hogy ez igaz is. Ezeket a meglepő eredményeket szokás **inspection paradox** nevén emlegetni.

A problémát a következőképpen lehet formalizálni. Tekintsünk $S_1, S_2, \dots$ független, azonos eloszlású és véges szórású véletlen változókat, melyekre $P(S_1 = 0) < 1$. Legyen X_t, $t \geq 0$, a kapcsolatos felújítási folyamat, és jelölje $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots$ a felújítások időpontjait. Rögzített $t_0 > 0$ mellett tekintsünk egy τ változót, mely független az $S_1, S_2, \dots$ értékektől, és egyenletes eloszlású a $[0, t_0]$ intervallumon. Legyen $N = X_\tau + 1 \geq 1$ a τ időpont utánni első felújítás sorszáma. Ha ezen τ időpontban vizsgáljuk a rendszer, akkor S_N az aktuális berendezés teljes élettartama, $T_N - \tau$ a hátralévő élettartam, és $\tau - T_{N-1}$ az aktuális berendezés kora. Habár ezt explicite nem jelöltük, ezen változók eloszlása, és ezáltal várható értéke függ a t_0 konstanstól. A kérdés a várható értékek viselkedése, ha $t_0 \to \infty$. A továbbiakban legyen S az $S_1, S_2, \dots$ változókkal azonos eloszlású.

3.3.1. Tétel. *A definiált változókra*

$$\lim_{t_0 \to \infty} E(T_N - \tau) = \lim_{t_0 \to \infty} E(\tau - T_{N-1}) = \frac{E(S^2)}{2E(S)} \qquad \textit{és} \qquad \lim_{t_0 \to \infty} E(S_\tau) = \frac{E(S^2)}{E(S)}\,.$$

3.3.2. Következmény (Inspection paradox)**.** *Ha S nem degenerált, tehát $D(S) > 0$, akkor*

$$\lim_{t_0 \to \infty} E(T_N - \tau) = \lim_{t_0 \to \infty} E(\tau - T_{N-1}) > \frac{E(S)}{2} \qquad \textit{és} \qquad \lim_{t_0 \to \infty} E(S_\tau) > E(S)\,.$$

Bizonyítás (3.3.2. Következmény). A feltevés szerint $D^2(S) = E(S^2) - (E(S))^2 > 0$, vagyis $E(S^2)/E(S) > E(S)$. Innen az állítás már következik a 3.3.1. Tételből. □

3.3.3. Példa. Legyen X_t, $t \geq 0$, Poisson folyamat λ intenzitással. Ekkor az S változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, amiből $E(S) = 1/\lambda$ és $E(S^2) = 2/\lambda^2$. Ekkor a 3.3.1. Tételből következik, hogy

$$E(T_N - \tau) \to \frac{1}{\lambda} = E(S) < \frac{2}{\lambda} \leftarrow E(S_N)\,, \qquad t_0 \to \infty\,.$$

Tehát a τ időpontban üzemelő berendezés S_N teljes élettartamának várható értéke nem egyenlő a berendezések átlagos élettartamával, hanem körülbelül kétszer akkora. Ehelyett az átlagos élettartam körülbelül azonos az aktuális berendezés hátralevő élettartamával.

Jogosan merülhet fel a kérdés, hogy meg tudjuk-e vajon határozni a hátralévő élettartam pontos eloszlását. Kiderül, hogy a Poisson folyamat esetében erre van lehetőség. Megmutatható, (és ezt az olvasóra bízzuk,) hogy ha τ független az X_t, $t \geq 0$, folyamattól, akkor az

$$X'_t := X_{\tau+t} - X_\tau\,, \qquad t \geq 0\,,$$

folyamat szintén λ intenzitású Poisson folyamat. Vegyük észre, hogy a $T_N - \tau$ változó nem más, mint az első esemény bekövetkezési időpontja az X'_t folyamat esetében, tehát $T_N - \tau$ maga is exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Ebből azonnal következik, hogy $E(T_N - \tau) = 1/\lambda$ tetszőleges rögzített $t_0 > 0$ esetén.

Abban az esetben, mikor az S változó csak véges sok különböző értéket vesz fel, a 3.3.1. Tételre adható egy olyan bizonyítás, mely rávílágít az inspection paradox lényegére. Mi most csak ezen bizonyítás heurisztikáját közöljük, és csak a harmadik állításra, de egy kis munkával a gondolatmenet teljesen kitakarítható és alkalmazható a másik két konvergenciára is. Ha S elfajuló, tehát csupán egyetlen értéket vesz fel pozitív valószínűséggel, akkor a harmadik állítás egyrészt triviális, másrészt egyáltalán nem érdekes. Tegyük fel, hogy az S változó az $s_1, \dots, s_l \geq 0$ különböző értékeket veszi fel rendre $p_1, \dots, p_l$ valószínűséggel, és legyen $t_0 = T_n$, tehát a τ véletlen időpont legyen egyenletes eloszlású a 0 és az n-dik felújítás időpontja között. (Ez csak heurisztika!) Ekkor $S_1, \dots, S_n$ közül binomiális számú változó, várhatóan np_k veszi fel az s_k érteket, tehát az s_k hosszúságú intervallumok teljes hossza körülbelül $np_k s_k$, $k = 1, \dots, l$. A nagy számok tétele szerint

$$T_n = n \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n} \approx nE(S),$$

tehát közelítőleg $p_k s_k / E(S)$ annak az esélye, hogy a véletlen időpont, amikor vizsgáljuk a rendszert, éppen egy s_k hosszúságú intervallumra esik. Ekkor a véletlenszerűen választott intervallum S_N hosszának várható értéke hozzávetőlegesen

$$E(S_N) \approx \sum_{k=1}^{l} \frac{p_k s_k}{E(S)} a_k = \frac{E(S^2)}{E(S)}.$$

A nagyszámtörvények többszöri alkalmazásával ez a heurisztikus bizonyítás teljesen precízzé tehető, és megmutatható, hogy $n \to \infty$ esetén a kapott eredmény pontos. A gondolatmenet fő mondanivalója, és ezáltal az inspection paradox magyarázata az a tény, hogy annak valószínűsége, hogy τ milyen hosszúságú intervallumra fog esni, nem csupán a $p_1, \dots, p_l$ értékektől függ, hanem az intervallumok hosszától is. Ez érthető, hiszen a hosszabb istervallumok, ha esetleg ritkábban is helyezkednek el, összeségében nagyobb tartományt fednek le a számegyenesen, és ezáltal a véletlen időpont nagy valószínűséggel egy ilyen intervallumra fog esni.

Bizonyítás (3.3.1. Tétel). A tételből csak az első konvergenciát bizonyítjuk. A második hasonlóan jön, rábízzuk az olvasóra, a harmadik pedig ezek után már triviális. Legyen

$$A(t) = T_{X_t+1} - t, \qquad t \geq 0,$$

a hátralévő élettartam a determinisztikus t időpontban. Rögzített t_0 esetén τ sűrűségfüggvénye $1/t_0$ a $[0, t_0]$ intervallumon, mindenhol máshol pedig 0, így a teljes várható érték tételével

$$E(T_N - \tau) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} A(t)\, dt.$$

Legyen most $n \geq 1$ rögzített egész, és vegyük észre, hogy

$$A(T_{n-1} + t) = S_n - t, \qquad 0 \leq t \leq S_n,$$

vagyis az $A(t)$, $T_{n-1} < t \leq T_n$, változók értéke csak S_n értéktől függ. (Rajzoljuk fel az $A(t)$ folyamatot!) Legyen most

$$C_n := \int_{T_{n-1}}^{T_n} A(t)\, dt = \frac{S_n^2}{2}\,.$$

Ekkor az (S_n, C_n), $n = 1,2,\ldots$, vektorváltozók függetlenek és azonos eloszlásúak, vagyis a felújítási díjfolyamatokra vonatkozó tételből kapjuk, hogy

$$E(T_N - \tau) \geq \frac{1}{t_0} \int_0^{T_{X_t}} A(t)\, dt = \frac{1}{t_0} \sum_{n=1}^{N_{t_0}} C_n \to \frac{E(C)}{E(S)} = \frac{E(S^2)}{2E(S)}\,, \qquad t_0 \to \infty\,.$$

Hasonló módszerrel kaphatunk egy felső korlátot is

$$E(T_N - \tau) \leq \frac{1}{t_0} \int_0^{T_{X_t}+1} A(t)\, dt = \frac{1}{t_0} \sum_{n=1}^{X_{t_0}+1} R_n\,.$$

Ennek határértéke nehezebb, vissza kell nyúlni oda, hogy hogyan lehet levezetni a felújítási díjfolyamatokra vonatkozó tételt. Mivel $X_{t_0} \to \infty$, amint $t_0 \to \infty$ majdnem biztosan, a nagy számok tételének alkalmazásával jön, hogy

$$E(T_N - \tau) \leq \frac{X_{t_0}+1}{t_0} \left[\frac{1}{X_{t_0}+1} \sum_{n=1}^{X_{t_0}+1} C_n \right] \to \frac{1}{E(S)} E(C) = \frac{E(S^2)}{2E(S)}\,,$$

majdnem biztosan. $\square$

4. fejezet

Folytonos idejű Markov-láncok

4.1. Folytonos idejű Markov-láncok átmenetvalószínűségei

Ebben a fejezetben a diszkrét idejű Markov-láncok folytonos idejű változatát fogjuk definiálni és vizsgálni. Legyen $\mathbb{X} = \{X_t : t \geq 0\}$ megszámlálható állapotterű sztochasztikus folyamat, és jelölje $\mathcal{I}$ a folyamat állapotterét.

4.1.1. Definíció. Az $\mathbb{X} = \{X_t : t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamat **folytonos idejű Markov-lánc**, ha tetszőleges $n = 1,2,\ldots$ egész, $i_1, \ldots, i_n, i, j$ állapotok, és $0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_n \leq s \leq t$ időpontok esetén

$$P\big(X_t = j \mid X_s = i, X_{s_n} = i_n, \ldots, X_{s_1} = i_{s_1}\big) = P\big(X_t = j \mid X_s = i\big) =: p_{i,j}(s,t)\,,$$

amennyiben a feltételben szereplő eseménynek pozitív a valószínűsége. A $p_{i,j}(s,t)$ valószínűségeket **átmenetvalószínűségeknek** nevezzük, a

$$\mathbf{P}(s,t) = \big[p_{i,j}(s,t)\big]_{i,j\in\mathcal{I}}$$

mátrixfüggvény a folyamat **átmenetvalószínűségi mátrixfüggvénye**, vagy röviden **átmenetmátrixa**.

4.1.2. Állítás. *Tetszőleges $0 \leq s \leq t$ esetén teljesülnek az alábbiak.*

(i) $\mathbf{P}(s,t)$ *sztochasztikus mátrix.*

(ii) $\mathbf{P}(s,s) = \mathbf{E}_{\mathcal{I}} := [\delta_{i,j}]_{i,j\in\mathcal{I}}$*, ahol $\delta_{i,j}$ a Kronecker delta szimbólum.*

A folytonos idejű Markov-láncok fenti definíciója természetesen adódik a diszkrét idejű Markov-láncok 2.1.2. Definíciójából. A diszkrét idejű esetben a 2.1.8. Tételben megmutattuk, a definíció azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ időpont, $i \in \mathcal{I}$ állapot, továbbá megfelelően választott Múlt és Jövő események mellett

$$P\big(\text{Jövő} \mid X_n = i, \text{Múlt}\big) = P\big(\text{Jövő} \mid X_n = i\big)\,.$$

A következő tételben azt mondjuk ki, hogy a definíció ezen általánosítása folytonos idejű Markov-láncok esetén is igaz. Az állítást bizonyítását az olvasóra bízzuk, a levezetés a diszkrét idejű változat gondolatmenetét követi.

4.1.3. Tétel. *Legyen* $\mathbb{X}=\{X_t:t\geq 0\}$ *megszámlálható állapotterű folyamat, továbbá legyen*

$$\mathcal{F}_t=\sigma(X_s:s\leq t)\,,\qquad \mathcal{G}_t=\sigma(X_s:s\geq t)\,,\qquad t\geq 0\,.$$

Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

(i) *Az* $\mathbb{X}$ *folyamat folytonos idejű Markov-lánc.*

(ii) *Tetszőleges* $t\geq 0$ *időpont,* $i\in\mathcal{I}$ *állapot, továbbá* $A\in\mathcal{G}_t$ *és* $B\in\mathcal{F}_t$ *események mellett*

$$P\big(A\,|\,X_t=i,B\big)=P\big(A\,|\,X_t=i\big)\,.$$

A továbbiakban csak olyan folytonos idejű Markov-láncokkal foglalkozunk, melyekben a $p_{i,j}(s,t)$ átmenetvalószínűségek értéke csak a $t-s$ különbségtől függ.

4.1.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{X}=\{X_t:t\geq 0\}$ folytonos idejű Markov-lánc **(idő)homogén**, ha az átmenetvalószínűségek csak az $(s,t]$ intervallum hosszától függnek, tehát ha

$$p_{i,j}(s,t)=p_{i,j}^{(t-s)}\qquad\text{és}\qquad \mathbf{P}(s,t)=\mathbf{P}^{(t-s)}\,,$$

teljesül minden i és j állapotra, valamint $0\leq s\leq t$ időpontra. Legyen $\alpha=[\alpha_i]_{i\in\mathcal{I}}$ a folyamat **kezdeti eloszlása**, tehát legyen

$$\alpha_i:=P(X_0=i)\,,\qquad i\in\mathcal{I}\,.$$

Ekkor a folyamatra az $\mathbb{X}\sim\mathrm{Markov}(\alpha,\mathbf{P}^{(t)},t\geq 0)$ jelölést használjuk.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a lánc állapotai nemnegatív egész számok. Fontos megjegyezni, hogy egy folytonos idejű Markov-lánc felrobbanhat egy véges időpontban. Ezt a technikai nehézséget úgy hidaljuk át, hogy az állapottérhez szükség esetén hozzávesszük a ∞ állapotot, tehát $\mathcal{I}\subseteq\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. A további bonyodalmak elkerülése miatt ezen a kurzuson a ∞ állapottól megköveteljük, hogy ne legyen kezdeti állapot, azaz $\alpha_\infty=0$, és azt, hogy elnyelő legyen, tehát tetszőleges $0\leq s\leq t$ időpontok, és $i\neq\infty$ állapot esetén $p_{\infty,i}(s,t)=0$. Ezek kényelmi feltevések.

Az alábbiakban kimondunk néhány alapvető tételt a folytonos idejű homogén Markov-láncokra. Ezeket bizonyítás nélkül közöljük, ugyanis a 4.1.6. Tétel kivételével mindegyik állítás levezetése a kapcsolatos diszkrét idejű tétel bizonyításának gondolatmenetét követi. Az említett 4.1.6. Tétel bizonyítása jóval nehezebb, ezt terjedelmi okokból nem közöljük.

4.1.5. Tétel. *Legyen* $\mathbb{X}\sim\mathrm{Markov}(\alpha,\mathbf{P}^{(t)},t\geq 0)$ *folytonos idejű homogén Markov-lánc. Tetszőleges rögzített* $s\geq 0$ *időpont és* i *állapot esetén tekintsük az* $\mathbb{X}'=\{X_{s+t}:t\geq 0\}$ *folyamatot. Ekkor az* $\{X_s=i\}$ *eseményre feltételesen teljesülnek az alábbiak.*

(i) $\mathbb{X}'\sim\mathrm{Markov}(\delta_i,\mathbf{P}^{(t)},t\geq 0)$*;*

(ii) $\mathbb{X}'$ *független az* $\{X_t, 0 \leq t \leq s\}$ *változóktól.*

4.1.6. Tétel (Erős Markov-tulajdonság)**.** *Legyen* $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P}^{(t)}, t \geq 0)$ *folytonos idejű homogén Markov-lánc. Legyen* $\tau \geq 0$ *megállási idő az* $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$*,* $t \geq 0$*, szűrésre nézve, és tekintsük az* $\mathbb{X}' = \{X_{\tau+t} : t \geq 0\}$ *folyamatot. Ekkor tetszőleges i állapot esetén a* $\{\tau < \infty, X_\tau = i\}$ *eseményre feltételesen teljesülnek az alábbiak.*

(i) $\mathbb{X}' \sim \mathrm{Markov}(\delta_i, \mathbf{P}^{(t)}, t \geq 0)$*;*

(ii) $\mathbb{X}'$ *független az* $\mathcal{F}_\tau$ *pre-*σ*-algebrától.*

4.1.7. Tétel (Multiplikációs formula)**.** *Legyen* $\mathbb{X}=\{X_t:t\geq 0\}$ *folytonos idejű sztochasztikus folyamat. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) $\mathbb{X}$ *folytonos idejű homogén Markov-lánc* α *kezdeti eloszlással és* $\mathbf{P}^{(t)}$*,* $0 \leq t$*, átmenetmátrixszal.*

(ii) *Tetszőleges* $n = 1,2,\ldots$ *egész,* $j_0, j_1, \ldots, j_n \in \mathcal{I}$ *állapotok és* $0 \leq s \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ *időpontok esetén*

$$P\big(X_{t_n} = j_n, \ldots, X_{t_1} = j_1, X_0 = j_0\big) = \alpha_{j_0} p^{(t_1)}_{j_0,j_1} p^{(t_2-t_1)}_{j_1,j_2} \cdots p^{(t_n-t_{n-1})}_{j_{n-1},j_n}.$$

Továbbá, ha $\mathbb{X}$ *folytonos idejű homogén Markov-lánc, akkor*

$$P\big(X_{t_n} = j_n, \ldots, X_{t_1} = j_1 \,|\, X_s = j_0\big) = p^{(t_1-s)}_{j_0,j_1} p^{(t_2-t_1)}_{j_1,j_2} \cdots p^{(t_n-t_{n-1})}_{j_{n-1},j_n}.$$

4.1.8. Következmény (Chapman–Kolmogorov egyenletek)**.** *Legyen* $\mathbb{X}=\{X_t:t\geq 0\}$ *folytonos idejű homogén Markov-lánc* α *kezdeti eloszlással és* $\mathbf{P}^{(t)}$*,* $t \geq 0$*, átmenetmátrixszal. Ekkor tetszőleges* $s,t \geq 0$ *mellett* $\mathbf{P}^{(s+t)} = \mathbf{P}^{(s)}\mathbf{P}^{(t)}$*.*

Természetesen adódik a kérdés, hogy egy $\mathbf{P}:[0,\infty)\to\mathbb{R}_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$ mátrixfüggvénynek milyen szükséges és/vagy elegendő feltételeket kell kielégítetnie ahhoz, hogy értékei egy folytonos idejű homogén Markov-lánc átmenetmátrixait adják. Kiderül, hogy erre a kérdésre egy egészen egyszerű válasz adható.

4.1.9. Definíció. Egy $\mathbf{P}:[0,\infty)\to\mathbb{R}_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$ függvényt **sztochasztikus mátrixfüggvénynek** nevezünk, ha teljesülnek az alábbiak.

(i) $\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}_{\mathcal{I}}$.

(ii) $\mathbf{P}(t)$ sztochasztikus mátrix minden $t \geq 0$ esetén.

(iii) $\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t)$ teljesül minden $s,t \geq 0$ esetén.

4.1.10. Tétel. *Legyen* $\mathcal{I}$ *tetszőleges megszámlálható halmaz, és tekintsünk egy* $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ *eloszlást, valamint egy* $\mathbf{P}:[0,\infty)\to\mathbb{R}_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$ *mátrixfüggvényt. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *Létezik* $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P}(t), t \geq 0)$ *folytonos idejű homogén Markov-lánc.*

(ii) *A* $\mathbf{P}$ *függvény sztochasztikus mátrixfüggvény.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Tegyük fel, hogy létezik $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbf{P}(t), t \geq 0)$ folytonos idejű homogén Markov-lánc. Ekkor a 4.1.2. Állításból és a Chapman–Kolmogorov egyenletekből (4.1.8. Következmény) azonnal jön, hogy a $\mathbf{P}$ függvény sztochasztikus mátrixfüggvény.

(ii)⇒(i) Ezt az irányt később fogjuk bizonyítani, ugyanis szükség van hozzá egy mélyebb elméleti tételre. □

4.2. Kolmogorov egyenletei homogén Markov-láncokra

Az előző alfejezetben arra próbáltunk meg rámutatni, hogy a diszkrét idejű Markov-láncok után a folytonos idejű Markov-láncok definíciója természetesen adódik, és a két típusra teljesen analóg állítások fogalmazhatóak meg. A két folyamat között mindössze az az eltérés, hogy a pozitív félegyenes mely pontjaiban vannak definiálva. Van azonban egy olyan techninai jellegű különbség, mely a további eredmények bizonyítása során alapvető fontosságú lesz. Diszkrét időben a Chapman–Kolmogorov egyenletek szerint a többlépéses átmenetvalószínűségek mind felírhatóak az egylépéses $\mathbf{P}$ átmenetmátrix segítségével, nevezetesen $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$ teljesült minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén. Ez az egyszerű észrevétel nagyban leegyszerűsítette a diszkrét idejű folyamatok vizsgálatát. Ezzel szemben folytonos időben nem létezik olyan $\mathbf{P}^{(\delta)}$ mátrix, melyből a $\mathbf{P}^{(t)}$, $t \geq 0$, átmenetvalószínűségek mind egyszerűen felírhatóak lennének mondjuk hatványozás segítségével. A továbbiakban egy olyan elemi építőkockát, egy olyan objektumot keresünk, mely egy folytonos idejű Markov-lánc ismeretében könnyen felírható, és amiből az átmenetvalószínűségek mind meghatározhatóak. Ehhez azonban további regularitási feltételeket kell bevezetnünk.

4.2.1. Definíció. Legyen $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbf{P}^{(t)}, t \geq 0)$. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat **standard**, ha $\mathbf{P}^{(t)} \to \mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{E}_{\mathcal{I}}$, amint $t \downarrow 0$, tehát tetszőleges $i, j \in \mathcal{I}$ állapotok esetén

$$p_{i,j}^{(t)} \to \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad t \downarrow 0.$$

A standarditás azt jelenti, hogy a $p_{i,j}^{(t)}$, $t \geq 0$, átmenetvalószínűségek jobbról folytonosak a $t = 0$ pontban. Ezen egyszerű tulajdonságból komoly analitikus állításokat fogalmazhatunk meg a Markov-lánc átmenetvalószínűségeire.

4.2.2. Állítás. *Legyen* $\mathbb{X}$ *standard Makov-lánc, és tekintsünk tetszőleges* $i, j \in \mathcal{I}$ *állapotokat. Ekkor teljesülnek az alábbiak.*

(i) *A* $p_{i,j}^{(t)}$, $t \geq 0$, *függvény folytonos.*

(ii) *Tetszőleges* $i, j \in \mathcal{I}$ *állapotok mellett vagy* $p_{i,j}^{(t)} > 0$ *minden* $t \geq 0$ *esetén, vagy* $p_{i,j}^{(t)} = 0$ *minden* $t \geq 0$ *esetén.*

(iii) *A*

$$q_{i,j} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{i,j}^{(h)} - p_{i,j}^{(0)}}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{i,j}^{(h)} - \delta_{i,j}}{h},$$

határérték létezik, továbbá $q_{i,i} \in [-\infty, 0]$, *és* $q_{i,j} \in [0, \infty)$, *ha* $i \neq j$.

Bizonyítás. (i) Legyen $t>0$ tetszőleges rögzített érték. Vegyük észre, hogy bármely $i,j\in\mathcal{I}$ és $h>0$ esetén a $p_{i,k}^{(t)}$, $k\in\mathcal{I}$, valószínűségek egy eloszlást, tehát egy véges mértéket adnak az $\mathcal{I}$ állapottéren, továbbá minden $k\in\mathcal{I}$ állapotra

$$p_{k,j}^{(h)}\leq 1 \qquad \text{és} \qquad p_{k,j}^{(h)}\to\delta_{k,j}\,, \quad h\downarrow 0\,.$$

Ebből következik, hogy az $\mathcal{I}$ állapottéren értelmezett konstans 1 függvény a $p_{k,j}^{(h)}$, $k\in\mathcal{I}$, függvény egy majoránsa, továbbá ez a majoráns integrálható a $p_{i,k}^{(t)}$, $k\in\mathcal{I}$, valószínűségi mérték szerint, hiszen

$$\sum_{k\in\mathcal{I}}p_{i,k}^{(t)}\cdot 1=1\,.$$

Ekkor a Chapman–Kolmogorov egyenletek és majoráns konvergenciatétel alkalmazásával

$$p_{i,j}^{(t+h)}=\sum_{k\in\mathcal{I}}p_{i,k}^{(t)}p_{k,j}^{(h)}\to\sum_{k\in\mathcal{I}}p_{i,k}^{(t)}\delta_{k,j}=p_{i,j}^{(t)}\,, \qquad h\downarrow 0\,.$$

A balról való folytonosság nehezebb, további ötleteket igényel, ennek bizonyítását most mellőzük.

(ii)-(iii) Ezen állítások bizonyítása már nehéz és időigényes, ezért a levezetéseket nem közöljük. Egyedül arra mutatunk rá, hogy ha sikerül belátni, hogy a $q_{i,j}$ értékek léteznek, akkor ezen deriváltak előjele már könnyen jön abból az egyszerű észrevételből, miszerint

$$p_{i,i}^{(h)}-p_{i,i}^{(0)}\leq 0 \qquad \text{és} \qquad p_{i,j}^{(h)}-p_{i,j}^{(0)}\geq 0\,, \quad i\neq j\,. \qquad \square$$

A gyakorlatban általában olyan folytonos idejű Markov-láncokkal dolgozunk, melyek minden $t\geq 0$ pontban jobbról folytonosak. Az alábbi állítás szerint ezen folyamatok mind standardok.

4.2.3. Állítás. *Ha egy folytonos idejű homogén Markov-lánc* 1 *valószínűséggel jobbról folytonos a* $t=0$ *pontban, akkor a folyamat standard.*

Bizonyítás. Jegyezzük meg, hogy az X_0 változó nem veheti fel pozitív valószínűséggel a ∞ értéket. Legyen

$$A=\big\{\omega\in\Omega: X_t(\omega) \text{ jobbról folytonos a 0 pontban}\big\}\,,$$

$$A_n=\big\{\omega\in\Omega: X_t(\omega)=X_0(\omega), \forall t\leq 1/n\big\}\,, \qquad n=1,2,\ldots$$

Nyilván $A_n\subseteq A_{n+1}\subseteq A$ minden n esetén. Továbbá, tetszőleges $\omega\in\Omega$ esetén, mivel az $X_t(\omega)$ függvény egész értékű, a konvergencia csak úgy teljesülhet, ha valamilyen $\delta=\delta(\omega)$ érték esetén $X_t(\omega)=X_0(\omega)$, ha $t\leq\delta$. Tehát $A=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$. Legyen $h\downarrow 0$. Ekkor $n(h)=\lfloor 1/h\rfloor\to\infty$, amiből

$$1\geq p_{i,i}^{(h)}=P(X_h=i\,|\,X_0=i)\geq P(A_{n(h)})\to P(A)=1\,.$$

A rendőr elv miatt $p_{i,i}^{(h)}\to 1$, tehát a folyamat standard. $\square$

A további munkánkhoz szükség lesz még egy regularitási feltételre, mely a 4.2.2. Állítás (iii) pontjában definiált deriváltak között teremt kapcsolatot.

4.2.4. Definíció. Legyen $\mathbb{X}$ standard folytonos idejű Markov-lánc. A folyamat **konzervatív**, ha tetszőleges $i \in \mathcal{I}$ állapot esetén

$$\sum_{j \neq i} q_{i,j} = -q_{i,i} \qquad \text{és} \qquad q_{i,i} > -\infty\,.$$

Ekkor a $\mathbf{Q} = [q_{i,j}]_{i,j\in\mathcal{I}}$ mátrixot az $\mathbb{X}$ folyamat **infinitezimális generátorának** nevezzük.

4.2.5. Állítás. *Ha a folyamat standard és csak véges sok állapota van, akkor konzervatív.*

Bizonyítás. Mivel a lánc standard, a $q_{i,j} \in [-\infty, \infty)$ határértékek léteznek. Az állapottér véges, ezért

$$\sum_{j\in\mathcal{I}} q_{i,j} = \sum_{j\in\mathcal{I}} \lim_{h\downarrow 0} \frac{p_{i,j}^{(h)} - p_{i,j}^{(0)}}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\sum_{j\in\mathcal{I}} p_{i,j}^{(h)} - \sum_{j\in\mathcal{I}} p_{i,j}^{(0)}}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0\,.$$

A standarditás miatt $q_{i,j}$ véges, ha $i \neq j$, amiből $q_{i,i}$ szintén véges. □

4.2.6. Következmény. *Amennyiben egy mátrix deriváltját a komponensenkénti deriváltakkal definiáljuk, akkor konzervatív Markov-lánc esetén*

$$\mathbf{Q} = \left[\lim_{h\downarrow 0} \frac{p_{i,j}^{(h)} - p_{i,j}^{(0)}}{h} \right]_{i,j\in\mathcal{I}} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathbf{P}^{(h)} - \mathbf{P}^{(0)}}{h} = \left.\frac{d\mathbf{P}^{(t)}}{dt}\right|_{t=0}.$$

A következőkben azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor a lánc állapottere véges. Ha $t > 0$ és $h > 0$ rögzített, akkor a Chapman–Kolmogorov egyenletekből

$$\frac{\mathbf{P}^{(t+h)} - \mathbf{P}^{(t)}}{h} = \mathbf{P}^{(t)} \frac{\mathbf{P}^{(h)} - \mathbf{P}^{(0)}}{h} = \frac{\mathbf{P}^{(h)} - \mathbf{P}^{(0)}}{h} \mathbf{P}^{(t)}\,.$$

Ha most $h \downarrow 0$, akkor a középső és a jobb oldali kifejezés konvergál, tehát a bal oldalnak is van határértéke. Ekkor a $\mathbf{P}^{(t)}$ mátrixfüggvény jobbról deriválható, és a derivált

$$\frac{d\mathbf{P}^{(t)}}{dt} = \mathbf{P}^{(t)}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P}^{(t)}\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Felhasználva, hogy egy standard folyamat, a baloldali deriváltra kapjuk, hogy

$$\frac{\mathbf{P}^{(t)} - \mathbf{P}^{(t-h)}}{h} = \mathbf{P}^{(t-h)} \frac{\mathbf{P}^{(h)} - \mathbf{P}^{(0)}}{h} \to \mathbf{P}^{(t)}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P}^{(t)}\,, \qquad h \downarrow 0\,.$$

Mivel a $\mathbf{P}^{(t)}$ mátrixfüggvény konponensenként jobbról és balról is deriválható, és a kétoldali deriváltak megyegyeznek, a függvény deriválható minden $t \geq 0$ pontban.

4.2.7. Definíció. Legyen $\mathbf{Q}$ egy $\mathbb{X}$ konzervatív Markov-lánc infinitezimális generátora, és legyen $\mathbf{P}(t) = [p_{i,j}(t)]_{i,j\in\mathcal{I}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$, $t \geq 0$, tetszőleges mátrixfüggvény. Ekkor a

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}\,, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{dp_{i,j}(t)}{dt} = \sum_{k\in\mathcal{I}} p_{i,k}(t)\, q_{k,j}\,, \quad i,j\in\mathcal{I}\,,$$

egyenletrendszert **Kolmogorov előrehaladó (forward) egyenleteknek** nevezzük, a

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)\,, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{dp_{i,j}(t)}{dt} = \sum_{k\in\mathcal{I}} q_{i,k}\, p_{k,j}(t)\,, \quad i,j\in\mathcal{I}\,,$$

egyenletek pedig **Kolmogorov visszafelé haladó (backward) egyenletei**.

A fentiek alapján véges állapottér esetén az átmenetvalószínűségek megoldásai a Kolmogorv egyenleteknek, de fontos hangsúlyozni, hogy lehetnek más $\mathbf{P}(t)$, $t\geq 0$, megoldások is. A következő tétel a megoldás egyértelműségét mondja ki.

4.2.8. Tétel (Kolmogorov egyenletei véges állapottéren)**.** *Tegyük fel, hogy $\mathbb{X}$ véges állapoterű konzervatív Markov-lánc. Ekkor az átmenetvalószínűségek egyértelmű megoldásai annak a kezdeti érték problémának, hogy a Kolmogorov előrehaladó vagy visszafelé haladó egyenleteket tekintjük a $\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}_{\mathcal{I}}$ kezdeti feltétellel. Továbbá, az átmenetvalószínűségek felírhatóak, mint*

$$\mathbf{P}^{(t)} = e^{\mathbf{Q}t} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^n}{n!} t^n\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Bizonyítás. Azt már láttuk, hogy az átmenetvalószínűségek megoldások, valamint a kezdeti feltételt is kielégítik. A differenciálegyenletek tananyag alapján mind az előrehaladó, mind a visszafelé haladó egyenletek megoldásai $\mathbf{A}e^{\mathbf{Q}t}$, $t \geq 0$, alakban állnak elő, ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$. A kezdeti feltétel alkalmazásával $\mathbf{A} = \mathbf{E}_{\mathcal{I}}$, tehát a megoldás egyértelmű. □

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy mit állíthatunk nem véges állapottér esetén. Kiderül, hogy ebben az esetben az egyenletek megoldása már nem feltétlenül egyértelmű.

4.2.9. Tétel (Kolmogorov előrehaladó egyenletei)**.** *Legyen $\mathbb{X}$ konzervatív Markov-lánc, és tegyük fel, hogy minden $j \in \mathcal{I}$ állapot esetén*

$$\sup_{i\neq j} \left| \frac{p_{i,j}^{(h)}}{h} - q_{i,j} \right| \to 0\,, \qquad h \downarrow 0\,.$$

Ekkor a $p_{i,j}^{(t)}$, $t \geq 0$, átmenetvalószínűségek minden pontban jobbról deriválhatóak, és a deriváltak kielégítik a Kolmogorov előrehaladó egyenleteket.

Vegyük észre, hogy véges állapottéren az extra feltétel teljesül, de a nem véges esetben már nem feltétlenül. Ugyan erre nem fogunk külön kitérni, de a feltétel nem hagyható el.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $t \geq 0$ időpontot és $i, j \in \mathcal{I}$ rögzített állapotokat, és legyen $h \downarrow 0$. A Chapmann-Kolmogorov egyenletekkel

$$p_{i,j}^{(t+h)} = \sum_{k \in \mathcal{I}} p_{i,k}^{(t)} p_{k,j}^{(h)} ,$$

vagyis

$$\frac{p_{i,j}^{(t+h)} - p_{i,j}^{(t)}}{h} = \frac{\sum_{k \in \mathcal{I}} p_{i,k}^{(t)} p_{k,j}^{(h)} - \sum_{k \in \mathcal{I}} p_{i,k}^{(t)} p_{k,j}^{(0)}}{h} = p_{i,j}^{(t)} \frac{p_{j,j}^{(h)} - 1}{h} + \sum_{k \neq j} p_{i,k}^{(t)} \frac{p_{k,j}^{(h)} - 0}{h} .$$

Ebből azonnal kapjuk, hogy

$$\left| \frac{p_{i,j}^{(t+h)} - p_{i,j}^{(t)}}{h} - \sum_{k \in \mathcal{I}} p_{i,k}^{(t)} q_{k,j} \right| \leq p_{i,j}^{(t)} \left| \frac{p_{j,j}^{(h)} - 1}{h} - q_{j,j} \right| + \sum_{k \neq j} p_{i,k}^{(t)} \left| \frac{p_{k,j}^{(h)}}{h} - q_{k,j} \right| .$$

Most a feltevés szerint $h \downarrow 0$ esetén az utolsó összegben szereplő abszolút értékek egyenletesen konvergálnak nullához, míg a $p_{i,k}^{(t)}$, $k \neq j$, valószínűségek egy véges mértéket definiálnak az állapottéren. Ekkor a majorás konvergenciatétel alkalmazásával kapjuk, hogy az egész összeg konvergál nullához. Mivel a jobb oldalon az első tag szintén tart nullához, kapjuk, hogy

$$\frac{p_{i,j}^{(t+h)} - p_{i,j}^{(t)}}{h} \to \sum_{k \in \mathcal{I}} p_{i,k}^{(t)} q_{k,j} = \left[\mathbf{P}^{(t)} \mathbf{Q} \right]_{i,j} , \qquad h \downarrow 0 .$$

Tehát az átmenetvalószínűségek jobboldali deriváltjai léteznek, és kielégítik a Kolmogorov előre egyenleteket. □

4.2.10. Tétel (Kolmogorov visszafelé haladó egyenletei)**.** *Legyen $\mathbb{X}$ konzervatív Markov-lánc. Ekkor az átmenetvalószínűségek minden pontban balról deriválhatóak, és a deriváltak kielégítik a Kolmogorov visszafelé haladó egyenleteket.*

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló módszerrel megy, mint az előrehaladó esetben, a levezetést az olvasóra bízzuk. Az egyetlen jelentős különbség az, hogy ezúttal nincs szükség extra feltételre, nem kell megkövetelni, hogy minden $i \in \mathcal{I}$ állapotra

$$\sup_{k \neq i} \left| \frac{p_{i,k}^{(h)}}{h} - q_{i,k} \right| \to 0 , \qquad h \downarrow 0 .$$

teljesüljön. Ennek az az oka, hogy az egyenletes konvergencia következik abból a tényből, hogy a lánc konzervatív. □

Végül néhány szó a megoldások egyértelműségéről, bizonyítás nélkül. Az előbb láttuk, hogy az átmenetvalószínűségek nem feltétlenül elégítik ki a Kolmogorov előrehaladó egyenleteket. Viszont, meg lehet mutatni, hogy ha a Kolmogorov előre egyenleteknek van megoldása, akkor az egyértelmű, és éppen az átmenetvalószínűségeket adja. Azt is láttuk, hogy a visszafelé haladó egyenleteknek mindig van megoldásuk, az átmenetvalószínűségek mindig kielégítik ezeket az egyenleteket. Viszont általában vannak más megoldások is.

4.3. Az állapotváltozások dinamikája

Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy egy folytonos idejű homogén Markov-lánc mennyi időt tölt el egy-egy állapotban, és amikor elhagy egy állapotot, akkor mekkora valószínűséggel ugrik át a lehetséges célállapotokba. Azonban a fő tétel kimondása előtt be kell vezetnünk néhány jelölést.

Legyen $\mathbb{X}=\{X_t : t\geq 0\}$ tetszőleges sztochasztikus folyamat az $\mathcal{I}=\mathbb{N}_0\cup\{+\infty\}$ állapottéren. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat **càdlàg**, ha tetszőleges $\omega\in\Omega$ kimenetel esetén az $\mathbb{X}(\omega):[0,\infty)\to\mathcal{I}$ trajektória càdlàg függvény, tehát mindenhol jobbról folytonos, és mindenhol rendelkezik baloldali határértékkel. Mivel a folyamat minden pontban jobbról folytonos, minden meglátogatott állapotban eltölt egy pozitív hosszúságú időt. Legyenek $0=T_0<T_1<T_2<\dots$ azok az időpontok, amikor a folyamat állapotot vált, tehát legyen

$$T_n=\min\left\{t\geq T_{n-1} : X_t\neq X_{T_{n-1}}\right\}, \qquad n=1,2,\dots,$$

ahol $\min\emptyset=+\infty$. Ekkor egy rögzített $\omega\in\Omega$ kimenetel esetén a $T_n(\omega)$ sorozat háromféleképpen viselkedhet.

1. Végtelen sok $T_n(\omega)$ időpontunk van, és $T_n(\omega)\to\infty$, amint $n\to\infty$.
2. A $T_n(\omega)$ sorozat konvergál egy $\tau=\tau(\omega)<\infty$ időponthoz, amint $n\to\infty$. Felhasználva, hogy a Markov-lánc càdlàg megmutatható, hogy ekkor a folyamat felrobban a τ időpontban, tehát $X_t(\omega)=\infty$, ha $t\geq\tau$. Mivel a ∞ állapot elnyelő, nem vizsgáljuk a folyamat viselkedését a τ időpont után.
3. Csak véges sok $T_0(\omega),\dots,T_N(\omega)$ időpontunk van, ugyanis a lánc $N=N(\omega)$ állapotváltás után belefut egy elnyelő állapotba. Ekkor a definíció értelmében $T_n(\omega)=+\infty$, minden $n>N$ esetén.

Legyen $Y_n=X_{T_{n-1}}$ a meglátogatott állapotok sorozata, és jelölje $S_n=T_n-T_{n-1}$ az egyes állapotokban eltöltött időt, ahol $n=1,2,\dots$ Ezen definíciók alól jelentsen kivételt a 3. eset, amikor az elnyelő állapot elérése után, tehát $n>N+1$ esetén legyen $Y_n=Y_{N+1}$ és $S_n=+\infty$.

4.3.1. Definíció. Az $\mathbb{Y}=\{Y_n : n\in\mathbb{N}\}$ sorozatot az $\mathbb{X}$ folyamathoz tartozó **beágyazott folyamatnak** nevezzük.

Az első állításban azt vizsgáljuk meg, hogy hogyan viselkedik a beágyazott folyamat, ha az $\mathbb{X}$ folyamat homogén Markov-lánc.

4.3.2. Állítás. *Ha $\mathbb{X}$ folytonos idejű homogén Markov-lánc α kezdeti eloszlással, akkor az $\mathbb{Y}=\{Y_n : n\in\mathbb{N}\}$ folyamat diszkrét idejű homogén Markov-lánc, melynek α a kezdeti eloszlása és $\mathbf{R}=[r_{i,j}]_{i,j\in\mathcal{I}}$ az átmenetmátrixa, ahol*

$$r_{i,j}=P\big(X_{S_1}=j \mid X_0=i\big), \qquad i,j\in\mathcal{I}.$$

Bizonyítás. A kezdeti eloszlás nyilvánvaló, hiszen definíció szerint $Y_0 = X_0$. Legyen most $n \in \mathbb{N}$ rögzített, és tekintsük az $X'_t = X_{T_n+t}$, $t \geq 0$, folyamatot. Ekkor az $\mathbb{X}'$ láncban az első állapotváltás az $S'_1 = T_{n+1} - T_n$ időpontban történik. Mivel T_n véges megállási idő, az erős Markov-tulajdonság alkalmazásával

$$P\big(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i\big) = P\big(X_{T_{n+1}} = j \mid X_{T_n} = i\big) = P\big(X'_{S'_1} = j \mid X'_0 = i\big) = P\big(X_{S_1} = j \mid X_0 = i\big) .$$

Az utolsó egyenlőség abból a tényből következik, hogy az erős Markov-tulajdonság szerint $\mathbb{X}$ és $\mathbb{X}'$ azonos eloszlásúak. □

Jegyezzük meg, hogy ha egy folytonos idejű homogén Markov-lánc càdlàg, akkor a 4.2.3. Állítás értelmében standard is, de nem feltétlenül konzervatív. A következő tétel a folytonos idejű Markov-láncokkal foglalkozó fejezet fő eredménye.

4.3.3. Tétel (Az állapotváltozások dinamikája). *Legyen $\mathbb{X} = \{X_t : t \geq 0\}$ càdlàg folyamat az $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ állapottéren, és tekintsünk egy $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ mátrixot, melyben tetszőleges $i, j \in \mathcal{I}$, $i \neq j$, állapotok esetén*

$$q_{i,i} \leq 0 , \qquad q_{i,j} \geq 0 , \qquad \sum_{k \in \mathcal{I}} q_{i,k} = 0 .$$

Jelölje továbbá $\mathbb{Y}$ a kapcsolatos beágyazott folyamatot. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

(i) *A $\mathbb{X}$ folyamat konzervatív folytonos idejű homogén Markov-lánc, és $\mathbf{Q}$ az infinitezimális generátora.*

(ii) *Az $\mathbb{Y}$ folyamat diszkrét idejű homogén Markov-lánc, melynek átmenetmátrixa*

$$\mathbf{R} = \big[r_{i,j}\big]_{i,j \in \mathcal{I}} , \qquad r_{i,j} = -\frac{q_{i,j}}{q_{i,i}} .$$

(Legyen $0/0 = 0$.) Emellett, tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén az $\{Y_n = i\}$ eseményre feltételesen Y_{n+1} és S_n független egymástól, az $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$ állapotoktól és az $S_0, \ldots, S_{n-1}$ időktől. Továbbá, S_n az $\{Y_n = i\}$ eseményre feltételesen exponenciális eloszlást követ $\lambda_i = -q_{i,i}$ paraméterrel.

Ha ezen felül az $\mathbb{X}$ folyamat állapottere véges, akkor a fentiekkel a következő is ekvivalens.

(iii) *Tetszőleges $i, j \in \mathcal{I}$ állapotok és $t, h \geq 0$ időpontok esetén az X_{t+h} változó az $\{X_t = i\}$ eseményre feltételesen független az X_s, $s \leq t$, változóktól, továbbá*

$$P\big(X_{t+h} = j \mid X_t = i\big) = \delta_{i,j} + q_{i,j} h + o(h) , \qquad h \downarrow 0 ,$$

ahol $o(h) = o_{i,j}(h)$ független a t értéktől.

4.3.4. Következmény. *A 4.3.3. Tétel feltételei mellett tekintsünk minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n(j)$, $j \neq i$, változókat, melyek az $\{Y_n = i\}$ eseményre feltételesen exponenciális eloszlást követnek rendre $q_{i,j}$ paraméterrel, és feltételesen függetlenek egymástól, az $Y_0, \dots, Y_{n-1}$ állapotoktól és az $S_0, \dots, S_{n-1}$ időktől. Tegyük fel továbbá, hogy az $\{Y_n = i\}$ eseményre feltételesen tetszőleges $j \neq i$ állapotra*

$$S_n = \min\big\{S_n(j) : j \neq i\big\}, \qquad \big\{Y_{n+1} = j\big\} = \big\{S_n = S_n(j)\big\}.$$

Ekkor az $\mathbb{X}$ folyamat konzervatív folytonos idejű homogén Markov-lánc, és $\mathbf{Q}$ a generátora.

Bizonyítás. Most tetszőleges $i \in \mathcal{I}$ esetén $\sum_{j\neq i} q_{i,j} \in [0, \infty)$, és így a 3.1.2. Tétel alkalmazásával a feltevésekből következik a 4.3.3. Tétel (ii) pontja. □

A 4.3.3. Tétel bizonyítása során szükségünk lesz a következő észrevételre.

4.3.5. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat kielégíti a 4.3.3. Tétel feltételeit, és jelölje α a folyamat kezdeti eloszlását. Ekkor a tétel* (ii) *pontja ekvivalens azzal, hogy tetszőleges $n \geq 1$ egész, $i_1, \dots, i_{n+1}$ állapotok és $s_1, \dots, s_n$ nemnegatív értékek esetén*

$$\begin{aligned} &P\big(Y_1 = i_1, S_1 > s_1, \dots, Y_n = i_n, S_n > s_n, Y_{n+1} = i_{n+1}\big) \\ &\qquad = (-1)^n \alpha_{i_1} \exp\big(q_{i_1,i_1} s_1 + \dots + q_{i_n,i_n} s_n\big) \frac{q_{i_1,i_2} \cdots q_{i_n,i_{n+1}}}{q_{i_1,i_1} \cdots q_{i_n,i_n}} \end{aligned}$$

Bizonyítás. Először tegyük fel,hogy az $\mathbb{X}$ folyamatra teljesül a (ii) pont. Ekkor a láncszabály alkalmazásával

$$\begin{aligned} &P\big(Y_1 = i_1, S_1 > s_1, \dots, Y_n = i_n, S_n > s_n, Y_{n+1} = i_{n+1}\big) \\ &= P\big(Y_1 = i_1, S_1 > s_1, \dots, Y_n = i_n\big) P\big(S_n > s_n, Y_{n+1} = i_{n+1} \,|\, Y_1 = i_1, S_1 > s_1, \dots, Y_n = i_n\big) \\ &= P\big(Y_1 = i_1, S_1 > s_1, \dots, Y_n = i_n\big) P\big(S_n > s_n, Y_{n+1} = i_{n+1} \,|\, Y_n = i_n\big) \\ &= P\big(Y_1 = i_1, S_1 > s_1, \dots, Y_n = i_n\big) P\big(S_n > s_n \,|\, Y_n = i_n\big) P\big(Y_{n+1} = i_{n+1} \,|\, Y_n = i_n\big) \\ &= P\big(Y_1 = i_1, S_1 > s_1, \dots, Y_n = i_n\big) e^{q_{i_n,i_n} s_n} \frac{q_{i_n,i_{n+1}}}{-q_{i_n,i_n}}, \end{aligned}$$

amiből iterációval kapjuk az állításban szereplő formulát.

A fordított irányért tegyük fel, hogy az $Y_1, S_1, \dots, Y_n, S_n, Y_{n+1}$ változók együttes eloszlása a fenti módon áll elő. Ekkor tetszőleges $i_1, \dots, i_{n+1}$ állapotok és $s_1 = \dots = s_n = 0$ mellett

$$\begin{aligned} P\big(Y_1 = i_1, \dots, Y_{n+1} = i_{n+1}\big) &= P\big(Y_1 = i_1, S_1 > 0, \dots, Y_n = i_n, S_n > 0, Y_{n+1} = i_{n+1}\big) \\ &= (-1)^n \alpha_{i_1} \exp\big(q_{i_1,i_1} 0 + \dots + q_{i_n,i_n} 0\big) \frac{q_{i_1,i_2} \cdots q_{i_n,i_{n+1}}}{q_{i_1,i_1} \cdots q_{i_n,i_n}} = \alpha_{i_1} r_{i_1,i_2} \cdots r_{i_n,i_{n+1}}, \end{aligned}$$

amiből a 2.2.5. Tétel multiplikációs formulája szerint az $\mathbb{Y}$ beágyazott folyamat diszkrét idejű homogén Markov-lánc $\mathbf{R}$ átmenetmátrixszal. Legyen most $i_1, \dots, i_{n+1}$ és $s_1, \dots, s_n$

tetszőleges. Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&P\big(Y_1=i_1, S_1>s_1,\dots,Y_n=i_n, S_n>s_n, Y_{n+1}=i_{n+1}\,|\,Y_n=i_n\big)\\
&=P\big(Y_1=i_1, S_1>s_1,\dots,Y_n=i_n, S_n>s_n, Y_{n+1}=i_{n+1}\big)/P(Y_n=i_n)\\
&=\alpha_{i_1}\exp\big(q_{i_1,i_1}s_1+\dots+q_{i_n,i_n}s_n\big)r_{i_1,i_2}\cdots r_{i_n,i_{n+1}}/P(Y_n=i_n)\\
&=P\big(Y_1=i_1, S_1>s_1,\dots,Y_n=i_n\big)\exp(q_{i_n,i_n}s_n)r_{i_n,i_{n+1}}/P(Y_n=i_n)\\
&=P\big(Y_1=i_1, S_1>s_1,\dots,Y_n=i_n\,|\,Y_n=i_n\big)\exp(q_{i_n,i_n}s_n)P\big(Y_{n+1}=i_{n+1}\,|\,Y_n=i_n\big)\,.
\end{aligned}$$

Ebből $s_1=\dots=s_{n+1}=0$ alkalmazásával

$$\begin{aligned}
&P\big(S_n>s_n\,|\,Y_n=i_n\big)\\
&=\sum_{i_1,\dots,i_{n-1},i_{n+1}\in\mathcal{I}} P\big(Y_1=i_1, S_1>0,\dots,Y_n=i_n, S_n>s_n, Y_{n+1}=i_{n+1}\,|\,Y_n=i_n\big)\\
&=\sum_{i_1,\dots,i_{n-1},i_{n+1}\in\mathcal{I}} P\big(Y_1=i_1, S_1>s_1,\dots,Y_n=i_n\,|\,Y_n=i_n\big)e^{q_{i_n,i_n}s_n}P\big(Y_{n+1}=i_{n+1}\,|\,Y_n=i_n\big)\\
&=e^{q_{i_n,i_n}s_n}\sum_{i_1,\dots,i_{n-1}\in\mathcal{I}} P\big(Y_1=i_1,\dots,Y_n=i_n\,|\,Y_n=i_n\big)\sum_{i_{n+1}\in\mathcal{I}}P\big(Y_{n+1}=i_{n+1}\,|\,Y_n=i_n\big)\\
&=e^{q_{i_n,i_n}s_n}\,,
\end{aligned}$$

ami éppen azt jelenti, hogy az S_n változónak az $\{Y_n{=}i_n\}$ eseményre vett feltételes eloszlása $-q_{i_n,i_n}$ paraméteres exponenciális. Ekkor viszont az eggyel korábbi formula szerint

$$\begin{aligned}
&P\big(Y_1=i_1, S_1>s_1,\dots,Y_n=i_n, S_n>s_n, Y_{n+1}=i_{n+1}\,|\,Y_n=i_n\big)\\
&=P\big(Y_1=i_1, S_1>s_1,\dots,Y_n=i_n\,|\,Y_n=i_n\big)P\big(S_n>s_n\,|\,Y_n=i_n\big)P\big(Y_{n+1}=i_{n+1}\,|\,Y_n=i_n\big)\,,
\end{aligned}$$

amiből azonnal jön, hogy S_n és Y_{n+1} az $\{Y_n=i_n\}$ eseményre feltételesen független egymástól és az $Y_1,S_1,\dots,Y_{n-1},S_{n-1}$ változóktól. □

A 4.3.3. Tétel bizonyítása. A tételt csak véges állapottérre bizonyítjuk.

(ii) ⇒ (iii) Tegyük fel, hogy (ii) teljesül, és legyen $h\downarrow 0$. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy tetszőleges i állapot esetén

$$e^{-\lambda_i h}=1-\lambda_i h+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\lambda_i h)}{n!}=1-\lambda_i h+o(h)=1+q_{i,i}h+o(h)\,.$$

Ebből következik, hogy

$$P\big(X_h=i\,|\,X_0=i\big)\geq P\big(S_1>h\,|\,Y_1=i\big)=P\big(\mathrm{Exp}(\lambda_i)>h\big)=e^{-\lambda_i h}=1+q_{i,i}h+o(h)\,.$$

Ha $j\neq i$, akkor a láncszabály és a feltételes függetlenség alkalmazásával

$$\begin{aligned}
&P\big(X_h=j\,|\,X_0=i\big)\geq P\big(S_1\leq h, Y_2=j, S_2>h\,|\,Y_1=i\big)\\
&=P\big(S_1\leq h\,|\,Y_1=i\big)\,P\big(Y_2=j\,|\,Y_1=i,S_1\leq h\big)\,P\big(S_2>h\,|\,Y_1=i,S_1\leq h,Y_2=j\big)\\
&=P\big(S_0\leq h\,|\,Y_1=i\big)\,P\big(Y_1=j\,|\,Y_1=i\big)\,P\big(S_2>h\,|\,Y_2=j\big)\\
&=\big(1-e^{-\lambda_i h}\big)r_{i,j}e^{-\lambda_j h}=\big(-q_{i,i}h+o(h)\big)\Big(-\frac{q_{i,j}}{q_{i,i}}\Big)\big(1+q_{j,j}h+o(h)\big)=q_{i,j}h+o(h)\,.
\end{aligned}$$

Tehát, tetszőleges j esetén

$$u_{i,j}(h) := P\big(X_h = j \mid X_0 = i\big) - \big[\delta_{i,j} + q_{i,j}h + o(h)\big] \geq 0\,.$$

Mivel az állapottér véges, kapjuk, hogy

$$0 \leq \sum_{j\in\mathcal{I}} u_{i,j}(h) = \sum_{j\in\mathcal{I}} P\big(X_h = j \mid X_0 = i\big) - \sum_{j\in\mathcal{I}} \big[\delta_{i,j} + q_{i,j}h + o(h)\big] = 1 - \big[1 + 0\cdot h + o(h)\big] = o(h)\,,$$

amiből jön, hogy $u_{i,j} = o(h)$ minden i és j állapot esetén, tehát

$$P\big(X_h = j \mid X_0 = i\big) = \delta_{i,j} + q_{i,j}h + o(h)\,, \qquad h \downarrow 0\,.$$

A továbbiakban legyen $t, h \geq 0$ tetszőleges, és dolgozzunk az $\{X_t = i\}$ eseményre feltételesen. Azt kell megmutatni, hogy ezen feltétel mellett az X_{t+h} változó független a folyamat múltjától, tehát az X_s, $s \leq t$, változóktól. Legyen T_{N-1} az utolsó ugráspont helye a t időponttal bezárólag. Ekkor $T_{N-1} \leq t < T_N$, amiből $\{X_t = i\} = \{Y_N = i\}$. Vegyük észre, hogy az X_{t+h} változó értéke (az $\{X_t = i\}$ eseményre feltételsen) csak az $Y_N, S_N, Y_{N+1}, S_{N+1}, \ldots$ változóktól függ, tehát csak attól, hogy a folyamat a jövőben mely állapotokat látogatja meg, és ezekben mennyi időt tölt el. Hasonló meggondolásból a folyamat múltja csak az $Y_1, S_1, \ldots, Y_N, S_N$ változóktól függ. Viszont a (ii) pont szerint az $\{X_t = i\} = \{Y_N = i\}$ eseményre feltételesen az $Y_{N+1}, S_{N+1}, \ldots$ változók függetlenek az $Y_1, S_1, \ldots, Y_{N-1}, S_{N-1}$ változóktól. Mivel a feltétel miatt Y_N értéke rögzített, a bizonyítani kívánt függetlenséget egyedül az S_N változó teheti tönkre, hiszen ez az egyetlen elem, ami a múltat és a jövőt is befolyásolja. Mivel a folyamat a t időpontban még az i állapotban van, tudjuk, hogy $S_N > t - T_{N-1}$, és a t időpont után a folyamat még további $S_N - (t - T_{N-1}) = T_N - t$ időt tölt el ebben az állapotban. Az alábbiakban meg fogjuk mutatni, hogy $t - T_{N-1}$ és $T_N - t$, tehát az S_N időnek a „múlthoz” illetve a „jövőhöz tartozó része” független egymástól, ami már tényleg azt jelenti, hogy a folyamat múltja, azaz az X_s, $s \leq t$, változók nincsenek hatással az X_{t+h} változó értékére.

Vegyük észre, hogy T_{N-1} értéke csak az $S_1, \ldots, S_{N-1}$ változóktól függ, melyek viszont az $\{X_t = i\} = \{Y_N = i\}$ eseményre feltételesen függetlenek az S_N változótól. Továbbá, mivel a folyamat a t időpontban az i állapotban van, az S_N változó exponenciális eloszlást követ $-q_{i,i}$ paraméterrel. Ekkor viszont az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága (3.1.1. Tétel (ii) pontja) szerint tetszőleges rögzített $s \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned}
&P\big(T_N - t > h \mid t - T_{N-1} = s\big)\\
&= P\big(S_N - (t - T_{N-1}) > h \mid t - T_{N-1} = s, S_N > t - T_{N-1}\big)\\
&= P\big(S_N - s > h \mid t - T_{N-1} = s, S_N > s\big)\\
&= P\big(S_N - s > h \mid S_N > s\big) = P(S_N > h) = P\big(\mathrm{Exp}(-q_{i,i}) > h\big)\,,
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy az N változó definíciója szerint az $S_N > t - T_{N-1}$ esemény biztosan bekövetkezik. Tehát a $T_N - t$ reziduális idő valóban független a $t - T_{N-1}$ változótól, hiszen a feltételes eloszlás végső alakjában nem jelenik meg az s érték. További észrevétel, hogy a függetlenséget miatt

$$P\big(T_N - t > h\big) = P\big(T_N - t > h \mid t - T_{N-1} = s\big) = P\big(\mathrm{Exp}(-q_{i,i}) > h\big)\,,$$

tehát az $T_N - t$ változó szintén $-q_{i,i}$ paraméteres exponenciális eloszlást követ.

A kapott eredményeket a következőképpen lehet szemléltetni. Képzeljük el, hogy a T_{N-1} időpontban elindítunk egy olyan órát, mely S_N véletlen hosszú idő után csörren meg, és a folyamat a csörrenés időpontjában ugrik el az i állapotból. A fentiek szerint, ha az óra nem csörrent meg a t időponttal bezárólag, akkor az óra a t időpontban büntetlenül újraindítható, ugyanis ez az újraindítás nem változtatja meg a folyamat dinamikáját. Egyrészt láttuk, hogy $T_N - t$ eloszlása $\mathrm{Exp}(-q_{i,i})$, mely eloszlás az óra újraindításával nem változik meg. Másrészt amiatt sem kell aggódni, hogy az újraindítással valamilyen fontos múltbéli információ elvész, hiszen a reziduális idő független az i állapotban már eltöltött $T_N - t$ időtől.

Legyen most $\mathbb{X} = \{X'_s = X_{t+s} : s \geq 0\}$, és vegyük észre, hogy az S_N óra újraindíthatósága miatt az $\mathbb{X}'$ folyamatra szintén teljesül a jelen tétel (ii) pontja. Ekkor viszont a bizonyítás korábbi eredményei szerint

$$P\big(X_{t+h} = j \mid X_t = i\big) = P\big(X'_h = j \mid X'_0 = i\big) = \delta_{i,j} + q_{i,j} h + o(h)\,,$$

ahol az $o(h)$ függvény független a t értéktől. (A fenti formula első egyenlősége egyben arra is rámutat, hogy az órák újraindíthatósága igazából nem más, mint a Markov-tulajdonság, lásd a 4.1.5. Tételt.)

A szerzőnek ezen a ponton be kell vallania, hogy a most bemutatott bizonyításban vannak heurisztikus (szigorúbban megfogalmazva: hibás) lépések. Valaki meg tudja mondani, hogy hol van a csalás? Természetesen ezek a heurisztikus lépések egy kis munkával teljesen kitakaríthatóak, ezzel foglalkozik az alábbi 4.3.6. Megjegyzés.

(iii) $\Rightarrow$ (i) A memória nélküli tulajdonság és a homogenitás azonnal következik a feltevésekből, tehát $\mathbb{X}$ folytonos idejű homogén Markov-lánc. Az átmenetvalószínűségek folytonosak, ezért a folyamat standard, és az állapottér véges, amiből $\mathbb{X}$ konzervatív. Tehát a lánc infinitezimális generátora létezik, és komponensei

$$\frac{dp^{(t)}_{i,j}}{dt}\bigg|_{t=0} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{p^{(h)}_{i,j} - \delta_{i,j}}{h} = q_{i,j} + \lim_{h\downarrow 0} \frac{o(h)}{h} = q_{i,j}\,.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Legyen $\mathbb{X}$ véges állapotterű konzervatív Markov-lánc $\mathbf{Q}$ generátormátrixszal, és jelölje α a kezdeti eloszlást. Ekkor a Kolmogorov egyenletek (4.2.8. Tétel) szerint $\mathbf{P}^{(t)} = e^{\mathbf{Q}t}$, $t \geq 0$, ami azt jelenti, hogy a $\mathbf{Q}$ mátrix egyértelműen meghatározza az átmenetvalószínűségeket. Tekintsünk most $0 < t_1 < \cdots < t_n$ valós számokat és $i, j_1, \ldots, j_n \in \mathcal{I}$ állapotokat. Kapjuk, hogy

$$P\big(X_0 = i, X_{t_1} = j_1, \ldots X_{t_n} = j_n\big) = \alpha_i p^{(t_1)}_{i,j_1} p^{(t_2-t_1)}_{j_1,j_2} \cdots p^{(t_n-t_{n-1})}_{j_{n-1},j_n}\,,$$

ami azt jelenti, hogy a $\mathbf{Q}$ és az α meghatározza az $X_0, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ változók együttes eloszlását. Ennek segítségével megmutatható, hogy a $\mathbf{Q}$ mátrix és az α eloszlás tetszőleges $n \geq 1$ egész esetén az $Y_1, S_1, \ldots, Y_n, S_n, Y_{n+1}$ változók együttes eloszlását is egyértelműen meghatározza. Terjedelmi okoból mi ezt csak $n = 1$ esetén fogjuk bebizonyítani. De előtte, ráhangolódásképpen, megoldunk egy kicsit egyszerűbb problémát.

A első feladat az, hogy rögzített $i \in \mathcal{I}$ és $s > 0$ mellett írjuk fel az $A = \{Y_1 = i, S_1 \geq s\}$ esemény valószínűségét a $\mathbf{Q}$ generátormátrix és az α kezdeti eloszlás segítségével. Ehhez tekintsük az

$$A_n = \left\{X_{k/2^n} = i,\ k = 0, \dots, \lfloor 2^n s \rfloor - 1\right\}, \qquad n = 1,2,\dots$$

eseményeket. Nyilvánvaló, hogy ekkor $A_{n+1} \subseteq A_n$ minden $n \geq 1$ esetén, továbbá $A = \cap_{n\geq 1} A_n$, tehát az A_n eseménysorozat szűkülve konvergál az A eseményhez. Kapjuk, hogy

$$P\big(Y_1 = i, S_1 \geq s\big) = P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha_i \Big(p_{i,i}^{(1/2^n)}\Big)^{\lfloor 2^n s\rfloor - 1},$$

és végeztünk.

Legyen most rögzített $i, j \in \mathcal{I}$, $i \neq j$, és $s > 0$ mellett $B = \{Y_1 = i, S_1 > s, Y_2 = j\}$ és

$$\begin{aligned} B_n &= \Big\{\text{létezik } l \geq \lfloor 2^n s \rfloor + 1 \text{ egész, hogy } X_{k/2^n} = i, k = 0, \dots, l, \text{ és } X_{(l+1)/2^n} = j\Big\} \\ &= \bigcup_{l=\lfloor 2^n s\rfloor + 1}^{\infty} \Big\{X_{k/2^n} = i,\ k = 0, \dots, l, \text{ és } X_{(l+1)/2^n} = j\Big\}. \end{aligned}$$

Jegyezzük meg, hogy ebben az esetben a B_n eseménysorozat már nem feltétlenül monoton, tehát most a fenti módszert nem tudjuk direktben alkalmazni. Viszont, felhasználva, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat càdlàg, megmutatható, hogy tetszőleges ω kimenetel mellett létezik $n_0(\omega)$ küszöbszám, hogy ha $\omega \in B$, akkor $n \geq n_0(\omega)$ esetén $\omega \in B_n$, míg ha $\omega \notin B$, akkor $n \geq n_0(\omega)$ esetén $\omega \notin B_n$. Ebből azonnal következik, hogy

$$P\big(B \setminus B_n\big) \to 0, \qquad P\big(B_n \setminus B\big) \to 0, \qquad n \to \infty,$$

és ezáltal

$$P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) + \lim_{n\to\infty} P\big(B \setminus B_n\big) - \lim_{n\to\infty} P\big(B_n \setminus B\big) = \lim_{n\to\infty} P(B_n), \qquad n \to \infty.$$

Vegyük észre, hogy a B_n esemény definíciójában szereplő unió elemei kizáróak, így

$$P(B_n) = \sum_{l=\lfloor 2^n s\rfloor+1}^{\infty} P\Big(X_{k/2^n} = i,\ k = 0, \dots, l, \text{ és } X_{(l+1)/2^n} = j\Big).$$

Mivel a jobb oldalon szereplő valószínűségek már mind felírhatóak a generátormátrix és a kezdeti eloszlás segítségével, kapjuk, hogy $\mathbf{Q}$ és α egyértelműen meghatározza az Y_1, S_1, Y_2 változók együttes eloszlását. Hasonló módon, csak kissé bonyolultabban mutatható meg, hogy a generátormátrix és a kezdeti eloszlás az $Y_1, S_1, \dots, Y_n, S_n, Y_{n+1}$ változók együttes eloszlását is meghatározza minden $n \geq 1$ egész esetén.

Mit is kaptunk most? Legyen α rögzített eloszlás, és jelölje rendre $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ azon véges állapotterű és α kezdeti eloszlású càdlàg folyamatok halmazát, melyekre teljesül az (i) illetve a (ii) pont állítása. A bizonyítás korábbi lépéseiben már megmutattuk, hogy (ii)$\Rightarrow$(i), azaz $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1$. Továbbá, legutóbb azt is láttuk, hogy tetszőleges $n \geq 1$ esetén a $\mathbf{Q}$

mátrix (és a rögzített α eloszlás) egyértelműen meghatározza az $Y_1, S_1, \ldots, Y_n, S_n, Y_{n+1}$ változók együttes eloszlását. Ez azt jelenti, hogy a $\mathcal{H}_1$ halmazon belül ezek az együttes eloszlások minden folyamatra azonosak. Az, hogy ez teljesül a $\mathcal{H}_2$ halmazon belül, nem meglepő, hiszen a 4.3.5. Állítás szerint a (ii) pont szintén egyértelműen meghatározza ezeket az együttes eloszlásokat. Jegyezzük meg azt is, hogy a $\mathcal{H}_2$ halmaz nem üres, tehát létezik olyan $\mathbb{X}$ Markov-lánc, mely teljesíti a (ii) pontot. (Miért létezik ilyen?) Mivel a $\mathcal{H}_1$ halmazban minden folyamatra azonos az $Y_1, S_1, \ldots, Y_n, S_n, Y_{n+1}$ változók együttes eloszlása, ez az együttes eloszlás pontosan az lesz, mint az $\mathbb{X}$ folyamat esetében. De ekkor a 4.3.5. Állítás ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy minden $\mathcal{H}_1$-beli folyamat teljesíti a (ii) pontot, azaz $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$. Tehát rögzített α kezdeti eloszlás esetén $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$. Mivel ez minden α esetén igaz, kapjuk, hogy (i) és (ii) ekvivalens állítások. □

4.3.6. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a 4.3.3. Tétel most bemutatott bizonyításában a (ii)⇒(iii) irány levezetése nem volt teljesen precíz. A probléma a bizonyítás második felében van, mikor egy tetszőleges $t \geq 0$ időpont esetén mutattuk meg a múlt és a jövő feltételes függetlenségét, valamint beláttuk, hogy a $T_N - t$ reziduális idő exponenciális eloszlást követ. A probléma alapvetően abból származik, hogy nekünk a (ii) pont alapján csak rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén van informormációnk az $Y_1, S_1, \ldots, Y_n, S_n, Y_{n+1}$ változók együttes eloszlásáról, de a (ii) pont állítása nem feltétlenül marad igaz, ha az n deteminisztikus értéket kicseréljük az N véletlen változóra.

Az első pontatlanság ott jelenik meg, mikor az $Y_1, S_1, \ldots, Y_{N-1}, S_{N-1}$ változóknak az $Y_{N-1}, S_{N-1}, \ldots$ változóktól való feltételes függetlenségét bizonyítottuk, hiszen itt formálisan a véletlen N időpontra alkalmaztuk a (ii) pontot. Ezt úgy lehet precízzé tenni, hogy rögzítjük az N változó értékét, tehát a (ii) állítást az $\{N = n\}$ eseményre feltételesen alkalmazzuk. Ekkor azt kapjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az $\{N = n, Y_N = i\}$ eseményre feltételesen az $Y_1, S_1, \ldots, Y_{N-1}, S_{N-1}$ változók függetlenek az $Y_{N-1}, S_{N-1}, \ldots$ változóktól, majd ebből a teljes valószínűség tételével az $N = n$ feltétel már kidobható.

A másik csalás már ennél nehezebben javítható. A bizonyításban azt állítottuk, hogy az $\{Y_N = i\}$ eseményre feltételesen a S_N változó exponenciális eloszlást követ $-q_{i,i}$ paraméterrel, ami az „inspection paradox" értelmében egyszerűen nem igaz. Ennek ellenére a bizonyításban levont következtetés már helyes, tehát a $T_N - t$ reziduális idő feltételesen független a $t - T_{N-1}$ változótól, és feltételesen exponenciális eloszlást követ $-q_{i,i}$ paraméterrel. Az alábbiakban közöljük ennek az eredménynek a teljesen precíz bizonyítását.

Jegyezzük meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az S_n változó az $\{Y_n = i\}$ eseményre feltételesen exponenciális eloszlást követ és feltételesen független a $T_{n-1} = S_1 + \cdots + S_{n-1}$ változótól. Ekkor a teljes valószínűség tételének és a $-q_{i,i}$ paraméteres exponenciális eloszlás tulajdonságainak az alkalmazásával kapjuk, hogy tetszőleges $0 \le s \le t$ esetén

$$
\begin{aligned}
&P\big(T_{n-1} \le t < T_n, y < T_n - t \,\big|\, T_{n-1} = s, Y_n = i\big) \\
&= P\big(T_{n-1} \le t \le t+y < T_{n-1} + S_n \,\big|\, T_{n-1} = s, Y_n = i\big) \\
&= P\big(s \le t \le t+y < s + S_n \,\big|\, T_{n-1} = s, Y_n = i\big) \\
&= P\big(t+y-s < S_n \,\big|\, Y_n = i\big) = P\big(t+y-s < \mathrm{Exp}(-q_{i,i})\big) \\
&= \exp\big(q_{i,i}(t+y-s)\big) = \exp(q_{i,i}y) P\big(t-s < \mathrm{Exp}(-q_{i,i})\big) \\
&= \exp(q_{i,i}y) P\big(t-s < S_n \,\big|\, Y_n = i\big) \\
&= \exp(q_{i,i}y) P\big(s \le t < s + S_n \,\big|\, T_{n-1} = s, Y_n = i\big) \\
&= \exp(q_{i,i}y) P\big(T_{n-1} \le t < T_{n-1} + S_n \,\big|\, T_{n-1} = s, Y_n = i\big) \\
&= \exp(q_{i,i}y) P\big(T_{n-1} \le t < T_n \,\big|\, T_{n-1} = s, Y_n = i\big)\,.
\end{aligned}
$$

Vegyük észre, hogy a fenti egyenlőség $s > t$ mellet is teljesül, hiszen mindkét oldal egyenlő nullával. Jelölje

$$
F_{T_{n-1}|\{Y_n=i\}}(s) = P\big(T_{n-1} \le s \,|\, Y_n = i\big)\,, \qquad s \in \mathbb{R}\,,
$$

a T_{n-1} változónak az $\{Y_n = i\}$ eseményre vett feltételes eloszlásfüggvényét. Ekkor minden $x \ge 0$ esetén

$$
\begin{aligned}
&P\big(T_{n-1} \le t < T_n, y < T_n - t \,\big|\, T_{n-1} \le x, Y_n = i\big) \\
&= \int_{-\infty}^{x} P\big(T_{n-1} \le t < T_n, y < T_n - t \,\big|\, T_{n-1} = s, Y_n = i\big)\, dF_{T_{n-1}|\{Y_n=i\}}(s) \\
&= \exp(q_{i,i}y) \int_{-\infty}^{x} P\big(T_{n-1} \le t < T_n \,\big|\, T_{n-1} = s, Y_n = i\big)\, dF_{T_{n-1}|\{Y_n=i\}}(s)\,, \\
&= \exp(q_{i,i}y) P\big(T_{n-1} \le t < T_n \,\big|\, T_{n-1} \le x, Y_n = i\big)\,.
\end{aligned}
$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt a $\{T_{n-1} \le x, Y_n = i\}$ esemény valószínűségével. Kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&P\big(T_{n-1} \le t < T_n, y < T_n - t, T_{n-1} \le x, Y_n = i\big) \\
&= \exp(q_{i,i}y) P\big(T_{n-1} \le t < T_n, T_{n-1} \le x, Y_n = i\big)\,.
\end{aligned}
$$

Vegyük észre, hogy most

$$
\big\{T_{N-1} \le x, X_t = i\big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{T_{n-1} \le t < T_n, T_{n-1} \le x, Y_n = i\big\}\,,
$$

valamint

$$
\big\{y < T_N - t, T_{N-1} \le x, X_t = i\big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{T_{n-1} \le t < T_n, y < T_n - t, T_{n-1} \le x, Y_n = i\big\}\,.
$$

Ebből azonnal jön, hogy

$$P\big(y < T_N - t, T_{N-1} \le x, X_t = i\big) = \sum_{n=1}^{\infty} P\big(T_{n-1} \le t < T_n, y < T_n - t, T_{n-1} \le x, Y_n = i\big)$$

$$= \exp(q_{i,i}y) \sum_{n=1}^{\infty} P\big(T_{n-1} \le t < T_n, T_{n-1} \le x, Y_n = i\big) = \exp(q_{i,i}y) P\big(T_{N-1} \le x, X_t = i\big) \,,$$

amiből az $\{X_t = i\}$ esemény valószínűségével leosztva

$$P\big(y < T_N - t, T_{N-1} \le x \,|\, X_t = i\big) = \exp(q_{i,i}y) P\big(T_{N-1} \le x \,|\, X_t = i\big) \,.$$

Vegyük észre, hogy most az $x \to \infty$ határátmenettel

$$P\big\{y < T_N - t \,|\, X_t = i\big\} = \exp(q_{i,i}y) \,,$$

vagyis a $T_N - t$ változó az $\{X_t = i\} = \{Y_N = i\}$ eseményre feltételesen exponenciális eloszlást követ $-q_{i,i}$ paraméterrel. Ekkor viszont az eggyel korábbi kiemelt formula szerint

$$P\big(T_N - t > s, T_{N-1} \le x \,|\, X_t = i\big) = P\big(T_N - t > s \,|\, X_t = i\big) P\big(T_{N-1} \le x \,|\, X_t = i\big) \,,$$

ami pedig azt jelenti, hogy $T_N - t$ feltételesen független a T_{N-1}, és ezáltal a $t - T_{N-1}$ változótól.

4.4. Állapotok és osztályok folytonos időben

Legyen $\mathbb{X}$ càdlàg folytonos idejű homogén Markov-lánc az $\mathcal{I}$ állapottéren α kezdeti eloszlással, és $\mathbf{P}^{(t)}$, $t \ge 0$, átmenetmátrixszal. Tegyük fel, hogy $\mathbb{X}$ konzervatív, és legyen $\mathbf{Q}$ az infinitezimális generátora. Jelölje továbbá $\mathbb{Y}$ a kapcsolatos beágyazott Markov-láncot, melynek α a kezdeti eloszlása és $\mathbf{R}$ az átmenetmátrixa.

4.4.1. Definíció. Legyen $h > 0$ tetszőleges. Ekkor a $\mathbb{Z} = \{Z_n = X_{nh} : n \in \mathbb{N}_0\}$ folyamatot az $\mathbb{X}$ Markov-lánchoz tartozó ***h*-lépéses vázfolyamatnak** nevezzük.

4.4.2. Állítás. $\mathbb{Z} \sim \mathrm{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$, *ahol* $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(h)}$.

Bizonyítás. Tekintsünk tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ egészet és $i_0, \ldots, i_n \in \mathcal{I}$ állapotokat. Ekkor a 4.1.7. Tétel szerint

$$P\big(Z_0 = i_0, Z_1 = i_1, \ldots, Z_n = i_n\big) = P\big(X_0 = i_0, X_h, \ldots, X_{nh} = i_n\big) = \alpha_{i_0} p^{(h)}_{i_0,i_1} \cdots p^{(h)}_{i_{n-1},i_n} \,.$$

Ebből a 2.2.5. Tétel alkalmazásával azonnal jön az állítás. □

4.4.3. Definíció. Rögzített $i \in \mathcal{I}$ állapot mellett legyen az $\mathbb{X}$ folyamat kezdeti eloszlása $\alpha = \delta_i$. Jelölje Λ a Lebesgue-mértéket, továbbá legyen

$$\Lambda_i = \Lambda\big(\{t \ge 0 : X_t = i\}\big) \qquad \text{és} \qquad \tau_i = \inf\{t \ge S_1 : X_t = i\}$$

az i állapotban töltött teljes idő, illetve az **első visszatérési idő**, és legyen $\mu_i = E(\tau_i)$ és $f_i = P(\tau_i < \infty)$. Az i állapot **tranziens**, ha $\Lambda_i < \infty$ m.b., és **rekurrens**, ha $\Lambda_i = \infty$ m.b. Egy i rekurrens állapot **pozitív rekurrens**, ha elnyelő vagy $\mu_i < \infty$, és **null-rekurrens**, ha nem elnyelő és $\mu_i = \infty$. Ezek az állapotok **típusai**.

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi állítást az állapotok típusára.

4.4.4. Állítás. *Minden állapot beleesik valamelyik típusba, továbbá tetszőleges $i \in \mathcal{I}$ esetén az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *i tranziens.*

(ii) $\sup\{t \geq 0 : X_t = i\} < \infty$ *majdnem biztosan.*

(iii) *i nem elnyelő és $f_i < 1$.*

(iv) $\int_0^\infty p_{i,i}^{(t)} dt < \infty$.

4.4.5. Definíció. Rögzített $i, j \in \mathcal{I}$ állapotok mellett legyen $\alpha = \delta_i$. Azt mondjuk, hogy j **elérhető** i-ből, ha

$$P\big(\text{a lánc valaha eléri } j\text{-t}\big) = P\big(\exists t \geq 0 : X_t = j\big) > 0\,.$$

A két állapot **kommunikációs viszonyban áll**, ha kölcsönösen elérhetőek egymásból. Az $\mathbb{X}$ lánc **intenzitási diagrammja** egy olyan irányított gráf, melyen csúcsai az állapotok, és az $\overrightarrow{ij}$ él pontosan akkor létezik, ha $q_{i,j} > 0$. Az élekre általában rá is szoktuk írni a $q_{i,j}$ intenzitásokat.

Jegyezzük meg, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat intenzitási diagrammja és az $\mathbb{Y}$ beágyazott folyamat átmenetgráfja az élekre írt értékektől eltekintve csak annyiban különbözik egymástól, hogy az intenzitási diagramm nem tartalmazza azokat a hurokéleket, melyek az átmenetgráfon az elnyelő állapotokra vannak illesztve. Ez egyben azt is jelenti, hogy a két gráfon azonosak az erősen összefüggő komponensek.

4.4.6. Állítás. *A kommunikációs viszony ekvivalenciareláció az állapotok halmazán. Továbbá az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *j elérhető i-ből.*

(ii) $p_{i,j}^{(t)} > 0$ *valamely $t > 0$ értékre.*

(iii) $p_{i,j}^{(t)} > 0$ *minden $t > 0$ értékre.*

(iv) *Az intenzitási diagrammon létezik az i állapotból a j állapotba vezető irányított út.*

Bizonyítás. Az, hogy a kommunikációs viszony ekvivalenciareláció, hasonlóan mutatható meg, mint a diszkrét idejű esetben, lásd a 2.3.3. Állítás bizonyítását. Következzen hát az ekvivalencia bizonyítása.

(iii)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(i) Nyílvánvaló.

(i)$\Rightarrow$(iv) Ha j elérhető az i állapotból az $\mathbb{X}$ láncban, akkor az elérhetőség az $\mathbb{Y}$ beágyazott folyamatban is teljesül. Ez viszont azt jelenti, hogy az $\mathbb{Y}$ Markov-lánc átmenetgráfján létezik az i-ből a j-be vezető irányított út. Mivel ez az átmenetgráf csak a hurokélekben különbözik az $\mathbb{X}$ folyamat intenzitási diagrammjától, kapjuk, hogy az intenzitási diagrammon is van ilyen út.

(iv)$\Rightarrow$(iii) Ha $i=j$, akkor

$$p_{i,j}^{(t)} \geq P\big(S_1 > t \mid X_0 = i\big) = P\big(\mathrm{Exp}(-q_{i,i}) > t\big) = \exp(q_{i,i}t) > 0\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Ha $i \neq j$, akkor legyen $i = i_1, i_2, \ldots, i_n = j$ egy irányított út az intenzitási diagrammon. Ekkor tetszőleges $t > 0$ esetén a láncszabály alkalmazásával

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(t)} &\geq P\big(Y_2 = i_2, \ldots, Y_n = i_n, T_{n-1} \leq t < T_n \mid Y_1 = i_1\big) \\ &= P\big(Y_n = i_n, \ldots, Y_2 = i_2 \mid Y_1 = i_1\big)\, P\big(T_{n-1} \leq t < T_n \mid Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n\big)\,. \end{aligned}$$

Mivel az $\mathbb{Y}$ Markov-láncban az egymást követő $i_1, \ldots, i_n$ állapotok rendre elérhetőek egymásból, kapjuk, hogy a fenti formulában az első valószínűség pozitív. Jegyezzük meg, hogy az $\{Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n\}$ eseményre feltételesen az egyes állapotban töltött $S_1, \ldots, S_n$ idők függetlenek és exponenciális eloszlást követnek. Ebből jön, hogy $T_{n-1} = S_1 + \cdots + S_{n-1}$ és S_n feltételesen függetlenek egymástól, és a feltételes eloszlásaik folytonosak. Jelölje $f_{T_{n-1}}$ és f_{S_n} a kapcsolatos sűrűségfüggvényeket. Jegyezzük meg azt is, hogy ezek a sűrűségfüggvények mindehol pozitívak a $[0,\infty)$ intervallumon. A feltételes függetlenségből az is következik, hogy a (T_{n-1}, S_n) vektorváltozó feltételes eloszlása is folytonos, és az együttes sűrűségfüggvény

$$f_{(T_{n-1},S_n)}(x,y) = f_{T_{n-1}}(x) f_{S_n}(y) > 0\,, \qquad x, y \geq 0\,.$$

Tekintsük a valós sík első síknegyedének

$$K_t = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : x \leq t < x + y\big\}$$

részhalmazát. Ekkor

$$\begin{aligned} P\big(T_{n-1} \leq t < T_n \mid Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n\big) &= P\big((T_{n-1}, S_n) \in K_t \mid Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n\big) \\ &= \int_{K_t} f_{(T_{n-1},S_n)}(x,y)\, dx dy > 0\,, \end{aligned}$$

amiből már következik, hogy $p_{i,j}^{(t)} > 0$. □

A diszkrét idejű Markov-láncokhoz hasonlóan folytonos időben is megmutatható, hogy a kommunikációs viszony ekvivalenciareláció. A kommunikációs viszony ekvivalenciaosztályait az $\mathbb{X}$ folyamat **kommunikációs osztályainak** nevezzük. Az is bebizonyítható, hogy az $\mathbb{X}$, az $\mathbb{Y}$ és a $\mathbb{Z}$ Markov-láncban megegyezik az egyes állapotok típusa és a kommunikációs osztályozás. Vegyük észre, hogy egyetlen kivétellel minden diszkrét időben bevezetett fogalom értelmezhető folytonos időben is. Az egyetlen kivétel a periódus, lásd a 4.2.2. Állítás (ii) pontját.

4.5. Invariáns eloszlás folytonos időben

A korábbiakhoz hasonlóan legyen $\mathbb{X}$ càdlàg és konzervatív folytonos idejű homogén Markov-lánc α kezdeti eloszlással, $\mathbf{P}^{(t)}$, $t \geq 0$, átmenetmátrixszal és $\mathbf{Q}$ infinitezimális generátorral. Legyen továbbá $\mathbb{Y}$ a kapcsolatos beágyazott Markov-lánc, és rögzített $h > 0$ mellett $\mathbb{Z}$ a kapcsolatos h-lépéses vázfolyamat.

4.5.1. Definíció. Legyen $\pi = [\pi_i]_{i \in \mathcal{I}}$ mérték az állapotok halmazán. Azt mondjuk, hogy π **invariáns** vagy **stacionárius mérték**, ha $\pi \mathbf{P}^{(t)} = \pi$ tetszőleges $t \geq 0$ esetén. A π mérték **invariáns eloszlás**, ha invariáns és eloszlás.

A definícióból azonnal következik az alábbi észrevétel.

4.5.2. Állítás. *A π eloszlás pontosan akkor invariáns, ha az $\mathbb{X} \sim \mathrm{Markov}(\pi, \mathbf{P}^{(t)}, t \geq 0)$ Markov folyamatban tetszőleges $t \geq 0$ időpont esetén $X_t \sim \pi$.*

4.5.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $\mathbb{X}$ Markov-lánc vagy irreducibilis és rekurrens, vagy véges az állapottére, és legyen π mérték az állapotok halmazán. Az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *A π mérték az $\mathbb{X}$ folyamat invariáns mértéke.*

(ii) $\pi \mathbf{Q} = 0$.

(iii) *A $\rho = [\rho_i]_{i \in \mathcal{I}}$, $\rho_i = -q_{i,i} \pi_i$ mérték invariáns az $\mathbb{Y}$ beágyazott Markov-láncra.*

Bizonyítás. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Csak véges állapottérre bizonyítjuk. Ha (ii) teljesül, akkor az invariáns mértékek definíciójából

$$\pi \mathbf{Q} = \frac{d(\pi \mathbf{P}^{(t)})}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{d\pi}{dt}\bigg|_{t=0} = 0\,.$$

Visszafelé, ha $\pi \mathbf{Q} = \pi$, akkor tetszőleges $t \geq 0$ mellett a Kolmogorov előrehaladó egyenletek alkalmazásával

$$\frac{d(\pi \mathbf{P}^{(t)})}{dt} = \pi \frac{d\mathbf{P}^{(t)}}{dt} = \pi\big(\mathbf{Q}\mathbf{P}^{(t)}\big) = \big(\pi \mathbf{Q}\big)\mathbf{P}^{(t)} = 0\,.$$

Ebből jön, hogy a $\pi \mathbf{P}^{(t)}$, függvény konstans, és így tetszőleges $t \geq 0$ esetén

$$\pi \mathbf{P}^{(t)} = \pi \mathbf{P}^{(0)} = \pi \mathbf{E}_{\mathcal{I}} = \pi\,.$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Mivel a $-q_{i,i}$ együtthatók nemnegatívak, a ρ vektor pontosan akkor mérték, ha π is az. Tetszőleges $i, j \in \mathcal{I}$ állapot esetén

$$(-q_{i,i})(r_{i,j} - \delta_{i,j}) = \begin{cases} (-q_{i,i})(-q_{i,j}/q_{i,i} - 0) = q_{i,j}\,, & i \neq j\,, \\ (-q_{i,i})(0 - 1) = q_{i,i} = q_{i,j}\,, & i = j\,. \end{cases}$$

Ekkor

$$\Big[\rho\big(\mathbf{R} - \mathbf{E}_{\mathcal{I}}\big)\Big]_j = \sum_{i \in \mathcal{I}} \rho_i (r_{i,j} - \delta_{i,j}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_i (-q_{i,i})(r_{i,j} - \delta_{i,j}) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_i q_{i,j} = \Big[\pi \mathbf{Q}\Big]_j\,.$$

A ρ mérték pontosan akkor invarians az $\mathbb{Y}$ láncra nézve, ha $\rho(\mathbf{R} - \mathbf{E}_{\mathcal{I}}) = 0$, a fentiek szerint pedig ez pontosan akkor teljesül, ha $\pi \mathbf{Q} = 0$. $\square$

4.5.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $\mathbb{X}$ Markov-lánc irreducibilis és rekurrens. Ekkor létezik invariáns mértéke, mely konstans szorzótól eltekintve egyértelmű.*

Bizonyítás. Ha az osztály egyetlen elnyelő állapotból áll, akkor az állítás nyilvánvaló, ugyanis minden mérték invariáns. Tegyük fel tehát, hogy az osztály legalább két elemet tartalmaz. Ekkor $q_{i,i} < 0$ minden i állapotra. Ha $\mathbb{X}$ irreducibilis és rekurrens, akkor $\mathbb{Y}$ is az, és a 2.8.10. Tétel szerint az $\mathbb{Y}$ láncnak létezik ρ invariáns mértéke, mely konstans szorzó tényezőtől eltekintve egyértelmű. Mivel a 4.5.3. Tétel szerint $\mathbb{X}$ invariáns mértékei pontosan $\pi = [\pi_i]_{i\in\mathcal{I}}$, $\pi_i = -\rho_i/q_{i,i}$, alakban állnak elő, az állítás jön. □

4.5.5. Tétel. *Legyen $\mathbb{X}$ irreducibilis és rekurrens Markov-lánc, π mérték az állapottéren. Az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *π invariáns mérték az $\mathbb{X}$ folyamatra nézve.*

(ii) *π invariáns mérték a $\mathbb{Z}$ vázfolyamatra nézve valamilyen $h > 0$ esetén.*

(iii) *π invariáns mérték a $\mathbb{Z}$ vázfolyamatra nézve minden $h > 0$ esetén.*

Továbbá, ha az $\mathbb{X}$ folyamat pozitív rekurrens, akkor az invariáns mértékek végesek, míg ha null rekurrens, akkor $\pi \equiv 0$ az egyetlen invariáns mérték.

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (iii) Ha π invariáns mérték az $\mathbb{X}$ folyamatra nézve, akkor a definíció értelmében $\pi\mathbf{P}^{(h)} = \pi$, vagyis π invariáns a $\mathbb{Z}$ láncra nézve is tetszőleges $h > 0$ esetén.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Nyilvánvaló.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Tetszőleges rögzített $h > 0$ esetén az $\mathbb{X}$ illetve a $\mathbb{Z}$ folyamat invariáns mértékei egydimenziós alteret alkotnak az $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ térben. Mivel $\mathbb{X}$ invariáns mértékei egyben a $\mathbb{Z}$ folyamatra nézve is invariánsak, az alterek között van egy tartalmazási reláció. Ekkor viszont a két altér megegyezik, tehát a két folyamat invariáns mértékei azonosak.

Az utolsó állítás következik a 2.8.10. Tételből és abból, hogy $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Z}$ típusa megegyezik. □

4.5.6. Tétel. *Legyen $\mathbb{X}$ irreducibilis Markov-lánc. A láncnak pontosan akkor létezik invariáns eloszlása, ha a lánc pozitív rekurrens. Ekkor a π invariáns eloszlás egyértelmű, és ha a lánc nem csak egy elnyelő állapotból áll, akkor $\pi_i = 1/(-q_{i,i}\mu_i)$, $i \in \mathcal{I}$.*

Bizonyítás. Az utolsó állítás kivételével minden következik az előző két tételből. Az invariáns eloszlás meghatározásához rögzítsünk egy tetszőleges i állapotot, és legyen

$$\psi_j^{(i)} = E\left[\int_0^{\tau_i} \mathbb{1}_{\{X_s=j\}}\, ds \,\middle|\, X_0 = i\right], \qquad j \in \mathcal{I}\,.$$

Jelölje $\tau_{i,\mathbb{Y}}$ az i állapotba való első visszatérési időt az $\mathbb{Y}$ beágyazott folyamatban. Ekkor a teljes várható érték tételével

$$\psi_j^{(i)} = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} S_n \mathbb{1}_{\{Y_n=j, n<\tau_{i,\mathbb{Y}}\}} \,\middle|\, Y_1 = i\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E\Big[S_n \mathbb{1}_{\{Y_n=j, n<\tau_{i,\mathbb{Y}}\}} \,|\, Y_1 = i\Big]$$

$$= \sum_{n=1}^{\tau_{i,\mathbb{Y}}-1} \bigg(E\Big[S_n \mathbb{1}_{\{Y_n=j\}} \,|\, Y_n = j, Y_1 = i\Big] P\big(Y_n = j \,|\, Y_1 = i\big)$$

$$+ E\Big[S_n \mathbb{1}_{\{Y_n=j\}} \,|\, Y_n \neq j, Y_1 = i\Big] P\big(Y_n \neq j \,|\, Y_1 = i\big)\bigg)$$

$$= \sum_{n=1}^{\tau_{i,\mathbb{Y}}-1} \Big(E\big[S_n \,|\, Y_n = j\big] P\big(Y_n = j \,|\, Y_1 = i\big) + 0\Big)$$

$$= \frac{1}{-q_{j,j}} \sum_{n=1}^{\infty} E\Big[\mathbb{1}_{\{Y_n=j, n<\tau_{i,\mathbb{Y}}\}} \,|\, Y_1 = i\Big] = \frac{1}{-q_{j,j}} E\left[\sum_{n=1}^{\tau_{i,\mathbb{Y}}-1} \mathbb{1}_{\{Y_n=j\}} \,\middle|\, Y_1 = i\right] = \frac{\gamma_j^{(i)}}{-q_{j,j}}\,.$$

Vegyük észre, hogy a 2.8.10. Tétel alapján a most bevezetett $\gamma_j^{(i)}$, $j \in \mathcal{I}$, függvény az $\mathbb{Y}$ diszkrét idejű Markov-lánc invariáns mértéke, amiből a 4.5.3. Tétel értelmében $\psi_j^{(i)}$, $j \in \mathcal{I}$, az $\mathbb{X}$ folyamat invariáns mértéke.

Jelölje π az $\mathbb{X}$ folyamat egyértelmű invariáns eloszlását. Ekkor $\pi_j/(-\pi_i q_{i,i})$, $j \in \mathcal{I}$, az $\mathbb{X}$ folyamat invariáns mértéke, és a 4.5.3. Tétel ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\rho_j^{(i)} = \frac{\pi_j q_{j,j}}{\pi_i q_{i,i}}\,, \qquad j \in \mathcal{I}\,,$$

az $\mathbb{Y}$ folyamat egy másik invariáns mértéke. Mivel $\rho_i^{(i)} = 1$, a 2.8.10. Tételből azonnal jön, hogy $\rho_j^{(i)} = \gamma_j^{(i)}$, $j \in \mathcal{I}$. Jegyezzük meg továbbá, hogy

$$\mu_i = E\big[\tau_i \,|\, X_0 = i\big] = E\left[\int_0^{\tau_i} 1\, ds \,\middle|\, X_0 = i\right] = E\left[\sum_{i \in \mathcal{I}} \int_0^{\tau_i} \mathbb{1}_{\{X_s=j\}}\, ds \,\middle|\, X_0 = i\right]$$

$$= \sum_{j \in \mathcal{I}} \psi_j^{(i)} = \sum_{j \in \mathcal{I}} \frac{\gamma_j^{(i)}}{-q_{j,j}} = \sum_{j \in \mathcal{I}} \frac{\rho_j^{(i)}}{-q_{j,j}} = \sum_{j \in \mathcal{I}} \frac{\pi_j}{-\pi_i q_{i,i}} = \frac{1}{-\pi_i q_{i,i}}\,,$$

vagyis az $\mathbb{X}$ folyamat egyértelmű invariáns eloszlása $\pi_i = 1/(-q_{i,i}\mu_i)$, $i \in \mathcal{I}$. □

A következő állításokat bizonyítás nélkül közöljük.

4.5.7. Tétel (Konvergencia az egyensúlyhoz). *Legyen $\mathbb{X}$ folytonos idejű homogén Markov-lánc α kezdeti eloszlással és $\mathbf{P}^{(t)}$, $t \geq 0$, átmenetmátrixszal. Ha a folyamat irreducubilis és pozitív rekurrens, akkor tetszőleges $i, j \in \mathcal{I}$ állapotok esetén*

$$p_{i,j}^{(t)} \to \pi_j\,, \qquad P(X_t = j) \to \pi_j\,, \qquad t \to \infty\,.$$

4.5.8. Tétel (Ergodikus tétel folytonos idejű Markov-láncokra). *Legyen $\mathbb{X}$ folytonos idejű homogén Markov-lánc α kezdeti eloszlással és $\mathbf{P}^{(t)}$, $t \geq 0$, átmenetmátrixszal.*

(i) *Ha a lánc irreducibilis, akkor tetszőleges $j \in \mathcal{I}$ állapot esetén az állapotban töltött idő hosszútávú aránya*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_t=j\}}\,dt \to \frac{1}{-q_{j,j}\mu_j}\,, \qquad T\to\infty\,, \qquad m.b$$

(ii) *Tegyük fel, hogy a lánc irreducibilis és pozitív rekurrens, és legyen π a folyamat egyértelmű invariáns eloszlása. Ha egy $c:\mathcal{I}\to\mathbb{R}$ függvényre*

$$\bar{c} := \sum_{j\in\mathcal{I}} c(j)\pi_j < \infty\,,$$

akkor

$$\frac{1}{T}\int_0^T c(X_t)\,dt \to \bar{c}\,, \qquad T\to\infty\,, \qquad m.b$$

5. fejezet

A sztochasztikus folyamatok általános elmélete

5.1. Véges dimenziós eloszlások, Kolmogorov egzisztenciatétele

Legyen $\mathbb{X}=\{X_t : t\in\mathbb{T}\subseteq[0,\infty)\}$ tetszőleges valós értékű sztochasztikus folyamat. Jelölje $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ a $\mathbb{T}$ indexhalmazon értelmezett valós értékű x függvények halmazát, tehát legyen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{T}} = \left\{x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}, t \mapsto x_t\right\}.$$

Vegyük észre, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat úgy is felfogható, mint egy olyan függvény, mely az Ω eseménytéren van értelmezve, és az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ térben veszi fel értékeit, hiszen

$$\begin{aligned} \mathbb{X} : \Omega &\to \mathbb{R}^{\mathbb{T}}, & \qquad \mathbb{X}(\omega) : \mathbb{T} &\to \mathbb{R}, \\ \omega &\mapsto \mathbb{X}(\omega), & t &\mapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

Természetesen a további munka szempontjából az lenne kényelmes, ha $\mathbb{X}$ az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ tér véletlen eleme lenne, tehát ha az $\mathbb{X}:\Omega\to\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ függvény mérhető lenne. A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez nem is egyszerűen egy kényelmi követelmény, hanem az $\mathbb{X}$ leképezés mérhetősége elengedhetetlen egyes eredmények bizonyítása során.

Először tegyük fel, hogy $\mathbb{T}\subseteq[0,\infty)$ véges indexhalmaz, és legyen $\mathbb{T}=\{t_1,\ldots,t_d\}$. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a véges indexhalmazok elemei mindig növekvő sorrenden lesznek felsorolva, tehát $t_1\leq\ldots\leq t_d$. Jelölje $\mathcal{B}^{\mathbb{T}}$ az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ szorzattér Borel-halmazait, vagyis az $\mathbb{R}$ valós egyenes $\mathcal{B}$ Borel-halmazainak szorzat σ-algebráját. Ekkor az

$$\mathbb{X} = (X_{t_1},\ldots,X_{t_d}) : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$$

leképezés véletlen vektorváltozó, tehát $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}^{\mathbb{T}}$ mérhető, hiszen a komponensek külön-külön mérhetőek.

Azonnal adódik a kérdés, hogy mit állíthatunk akkor, ha $\mathbb{T}$ nem véges halmaz, és a válasz egyszerű. Semmit, ugyanis a nem véges esetben még nem definiáltunk σ-algebrát az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ függvénytéren. A korábbiakhoz hasonlóan egy $\mathbb{S}\subseteq\mathbb{T}$ véges részhalmaz esetén jelölje $\mathcal{B}^{\mathbb{S}}$ az $\mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ tér Borel halmazait.

5.1.1. Definíció. Legyen $\mathbb{S} = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \mathbb{T}$. A

$$\pi_{\mathbb{S}} : \mathbb{R}^{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{S}}, \qquad x \mapsto (x_{s_1}, \ldots, x_{s_n}),$$

leképezést az $\mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ altérre való **vetítésnek** vagy **projekciónak** nevezzük. Az $\mathbb{S}$ indexhalmazhoz és a $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}$ Borel halmazhoz tartozó **hengerhalmaz**

$$H_{\mathbb{S},B} := \pi_{\mathbb{S}}^{-1}(B) = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_n}) \in B\right\}.$$

A hengerhalmazok által alkotott halmazrendszer legyen

$$\mathcal{H} = \left\{H_{\mathbb{S},B} : \mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}, \mathbb{S} \text{ véges}, B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}\right\}.$$

Hogyan definiáljunk egy „kényelmes” σ-algebrát az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ téren? Tegyük fel, hogy adott a téren egy $\mathcal{M}$ σ-algebra, melyre nézve az $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ leképezés mérhető, és vegyük észre, hogy tetszőleges véges $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$ esetén

$$\pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{X}) = (X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}) : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{S}}$$

vektorváltozó, tehát $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}^{\mathbb{S}}$ mérhető. Természetesen ezen két mérhetőségi tulajdonság együttes teljesüléséhez nem feltétlenül szükséges a $\pi_{\mathbb{S}} : \mathbb{R}^{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ vetítés mérhetősége, de mégis adódik az a természetes ötlet, hogy az $\mathcal{M}$ halmazrendszert definiáljuk olyan módon, hogy a projekciók mérhetőek legyenek. Ez pontosan akkor teljesül, ha az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ függvénytér hengerhalmazai mérhetőek. Azt is tudjuk, hogy nem szerencsés, ha a mérhető halmazok túlságosan sokan vannak, ugyanis ez tönkreteheti az $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ függvény mérhetőségét. Éppen ezért az $\mathcal{M}$ halmazrendszert úgy definiáljuk, mint a legszűkebb olyan σ-algebra, melyre nézve a $\pi_{\mathbb{S}}$ projekciók mind mérhetőek.

5.1.2. Definíció. Az $\mathcal{M}$ halmazrendszer, (tehát az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ tér mérhető halmazai,) a hengerhalmazok által generált σ-algebra, azaz $\mathcal{M} := \sigma(\mathcal{H})$.

Vegyük észre, hogy ha $\mathbb{T}$ véges, akkor ezen konstrukció a megfelelő dimenziós Borel-halmazokat adja vissza, tehát $\mathcal{M} = \mathcal{B}^{\mathbb{T}}$. Ezek után már van értelme azt kérdezni, hogy az $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ függvény mérhető-e.

5.1.3. Tétel. (i) *A hengerhalmazok $\mathcal{H}$ rendszere halmazalgebra az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ téren.*

(ii) *Az $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ sztochasztikus folyamat $\mathcal{A}$-$\mathcal{M}$ mérhető.*

Bizonyítás. (i) A halmazalgebra definiáló tulajdonságait kell ellenőrizni, a bizonyítást az olvasóra bizzuk.

(ii) Mivel $\mathcal{H}$ egy halmazalgebra, és generálja az $\mathcal{M}$ σ-algebrát, elég megmutatni, hogy tetszőleges $H_{\mathbb{S},B} \in \mathcal{H}$ esetén $\mathbb{X}^{-1}(H_{\mathbb{S},B}) \in \mathcal{A}$. Ez viszont teljesül, ugyanis

$$\begin{aligned}\mathbb{X}^{-1}(H_{\mathbb{S},B}) &= \left\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in H_{\mathbb{S},B}\right\} = \left\{\omega \in \Omega : \big(X_{s_1}(\omega), \ldots, X_{s_n}(\omega)\big) \in B\right\} \\ &= \big(X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}\big)^{-1}(B) \in \mathcal{A},\end{aligned}$$

hiszen $(X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}) : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ mérhető. $\square$

Amennyiben vannak mérhető halmazaink, azonnal definiálhatjuk az $\mathbb{X}$ sztochasztikus folyamat eloszlását. Maga az eloszlás egy nagyon hasznos eszköz, de az a baj vele, hogy ha $\mathbb{T}$ nem véges, akkor nehéz analitikusan leírni, és nehéz vele dolgozni. Ezen nehézség kiküszöbölésére vezetjük be a véges dimenziós eloszlások fogalmát.

5.1.4. Definíció. Az $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ **sztochasztikus folyamat eloszlása** a

$$P_{\mathbb{X}}(M) := P(\mathbb{X} \in M) = P\big(\mathbb{X}^{-1}(M)\big)\,, \qquad M \in \mathcal{M}\,,$$

ami valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{M})$ téren. Az $\mathbb{S} = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \mathbb{T}$ részhalmazhoz kapcsolódó **véges dimenziós eloszlás** vagy **marginális eloszlás** a $\pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{X}) = (X_{s_1}, \ldots, X_{s_n})$ vektorváltozó eloszlása, tehát

$$P_{\mathbb{X},\mathbb{S}}(B) := P_{\pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{X})}(B) = P\big((X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}) \in B\big) = P\big((X_{s_1}, \ldots, X_{s_n})^{-1}(B)\big)\,, \qquad B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}\,.$$

Vegyük észre, hogy ekkor

$$P_{\mathbb{X},\mathbb{S}}(B) = P\big(\mathbb{X} \in H_{\mathbb{S},B}\big) = P_{\mathbb{X}}(H_{\mathbb{S},B})\,, \qquad B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}\,,$$

tehát a folyamat eloszlása meghatározza a véges dimenziós eloszlásokat. Megmutatjuk, hogy ez visszafelé is igaz. Azt is látni fogjuk, hogy ennek a kérdésnek fontos valós függvénytani vonatkozásai is vannak.

5.1.5. Definíció. Legyen μ tetszőleges mérték az $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{M})$ téren, továbbá legyen $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$ véges. A μ mértéknek az $\mathbb{S}$ halmazhoz tartozó **marginálisa**

$$\mu_{\mathbb{S}}(B) := \mu(H_{\mathbb{S},B})\,, \qquad B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}\,.$$

5.1.6. Tétel. *Egy σ-véges μ mérték $\{\mu_{\mathbb{S}} : \mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}, \mathbb{S}$ véges$\}$ véges dimenziós marginálisai meghatározzák a mértéket.*

Bizonyítás. Legyen μ és ν tetszőleges σ-véges mérték az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ téren, és tegyük fel, hogy azonosak a véges dimenziós marginálisaik, tehát $\mu_{\mathbb{S}} = \nu_{\mathbb{S}}$ tetszőleges $\mathbb{S} = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \mathbb{T}$ esetén. Célunk azt bebizonyítani, hogy ekkor $\mu = \nu$. Mivel a $\mathcal{H}$ halmazrendszer algebra, és generálja az $\mathcal{M}$ σ-algebrát, a Carathéodory-tétel szerint elég azt megmutatni, hogy μ és ν megegyezik a $\mathcal{H}$ rendszeren. Ez viszont teljesül, ugyanis tetszőleges $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}$ mellett

$$\mu(H_{\mathbb{S},B}) = \mu_{\mathbb{S}}(B) = \nu_{\mathbb{S}}(B) = \nu(H_{\mathbb{S},B})\,.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk. □

Tekintsük most mértékeknek egy tetszőleges $\{\mu_{\mathbb{S}} : \mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}, \mathbb{S}\text{ véges}\}$ gyűjteményét, ahol $\mu_{\mathbb{S}}$ rendre az $(\mathbb{R}^{\mathbb{S}}, \mathcal{B}^{\mathbb{S}})$ téren van értelmezve. A következőben azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy mi az a minimális feltétel, amit ezen mértékcsaládnak teljesítenie kell ahhoz, hogy az elemek egy mérték marginálisai legyenek. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges μ mértéket az $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{M})$ téren, valamint

$$\mathbb{S} = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \mathbb{U} = \{u_1, \ldots, u_m\} \subseteq \mathbb{T}$$

halmazokat, és legyenek $\mu_{\mathbb{S}}$ és $\mu_{\mathbb{U}}$ a μ mérték megfelelő marginálisai. Jelölje továbbá

$$H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B} = \big\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{U}} : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_n}) \in B\big\} \in \mathcal{B}^{\mathbb{U}}$$

az $\mathbb{R}^{\mathbb{U}}$ téren az $\mathbb{S}\subseteq\mathbb{U}$ véges indexhalmazhoz és $B\in\mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ Borel-halmazhoz tartozó hengerhalmazt. (Ez a hengerhalmaz könnyen megérthető és ábrázolható abban a speciális esetben, amikor $\mathbb{U} = \{s_1, \ldots, s_n, u_{n+1}, \ldots, u_m\}$, ugyanis ekkor $H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B} = B \times \mathbb{R}^{m-n}$.) Vegyük észre, hogy

$$H_{\mathbb{U},H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B}} = \big\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (x_{u_1}, \ldots, x_{u_m}) \in H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B}\big\} = \big\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_n}) \in B\big\} = H_{\mathbb{S},B}\,,$$

amiből a marginális mértékek definiciójával azonnal jön a

$$\mu_{\mathbb{U}}(H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B}) = \mu(H_{\mathbb{S},B}) = \mu_{\mathbb{S}}(B)$$

azonosság. Jegyezzük meg, hogy ha μ egy $\mathbb{X}$ sztochasztikus folyamat $P_{\mathbb{X}}$ eloszlása, akkor ezen egyenlőség valószínűségelméleti eszközökkel is bizonyítható, ugyanis

$$P_{\mathbb{X},\mathbb{U}}(H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B}) = P\big((X_{u_1}, \ldots, X_{u_m}) \in H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B}\big) = P\big((X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}) \in B\big) = P_{\mathbb{X},\mathbb{S}}(B)\,.$$

A kapott eredményeket az alábbi definícióban és az azt követő állításban foglaljuk össze.

5.1.7. Definíció. Legyen $\{\mu_{\mathbb{S}} : \mathbb{S}\subseteq\mathbb{T}, \mathbb{S} \text{ véges}\}$ mértékeknek olyan családja, hogy $\mu_{\mathbb{S}}$ rendre az $(\mathbb{R}^{\mathbb{S}}, \mathcal{B}^{\mathbb{S}})$ téren van értelmezve. Azt mondjuk, hogy a család **konzisztens**, ha tetszőleges $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{U} \subseteq \mathbb{T}$ véges részhalmazok és $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}$ Borel-halmaz esetén $\mu_{\mathbb{U}}(H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B}) = \mu_{\mathbb{S}}(B)$.

5.1.8. Állítás. *Ha $\{\mu_{\mathbb{S}} : \mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}, \mathbb{S} \text{ véges}\}$ egy μ mérték véges dimenziós marginálisainak a családja, akkor a család konzisztens.*

A következő tétel azt mondja ki, hogy valószínűségi mértékek esetén a fenti család konzisztenciája nem csupán szükséges, hanem elegendő feltétele is annak, hogy a család elemei valamely μ mérték véges dimenziós marginálisai legyenek.

5.1.9. Tétel (Kolmogorov konzisztenciatétele)**.** *Legyen $\{\mu_{\mathbb{S}} : \mathbb{S}\subseteq\mathbb{T}, \mathbb{S} \text{ véges}\}$ valószínűségi mértékeknek konzisztens családja. Ekkor egyértelműen létezik egy μ mérték az $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{M})$ téren, hogy μ véges dimenziós marginálisai pontosan a család elemei.*

Bizonyítás (vázlat). Az egyértelműség következik az 5.1.6. Tételből, az egzisztenciát csak vázlatosan ismertetjük. Legyen először

$$\mu_0(H_{\mathbb{S},B}) := \mu_{\mathbb{S}}(B)\,, \qquad H_{\mathbb{S},B} \in \mathcal{H}\,.$$

Vegyük észre, hogy egy-egy hengerhalmaz több $H_{\mathbb{S},B}$ reprezentációban is előállhat. A konzisztencia tulajdonság azért fontos, mert a segítségével megmutatható, hogy μ_0 jól definiált, tehát a különböző előállítások nem mondanak ellent egymásnak. A második lépésben azt kell bebizonyítani, hogy μ_0 végesen additív a $\mathcal{H}$ halmazalgebrán. Ez nem túl bonyolult. A bizonyítás legnehezebb része azt megmutatni, hogy μ_0 felülről folytonos az üres halmazon. Ebből utána következik, hogy μ_0 valószínűségi mérték a $\mathcal{H}$ halmazalgebrán, és a Carathéodory-tétel garantálja, hogy létezik μ valószínűségi mérték az $\mathcal{M}$ generált σ-algebrán úgy, hogy $\mu|_{\mathcal{H}} = \mu_0$. Ekkor μ véges dimenziós eloszlásai

$$\mu(H_{\mathbb{S},B}) = \mu_0(H_{\mathbb{S},B}) = \mu_{\mathbb{S}}(B)\,, \qquad B \in \mathbb{R}^{\mathbb{S}}\,,$$

és végeztünk. □

5.1.10. Tétel (Kolmogorov egzisztenciatétele). *Legyen* $\{\mu_{\mathbb{S}} : \mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}, \mathbb{S}$ *véges*$\}$ *valószínűségi mértékeknek konzisztens családja. Ekkor létezik* $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ *sztochasztikus folyamat, melynek véges dimenziós eloszlásai a fenti család elemi.*

Bizonyítás. Kolmogorov konzisztenciatétele (5.1.9. Tétel) szerint az $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{M})$ téren létezik olyan μ eloszlás, melynek véges dimenziós marginálisai a megadott család elemei. Legyen

$$\Omega := \mathbb{R}^{\mathbb{T}}\,, \qquad \mathcal{A} := \mathcal{M}\,, \qquad P := \mu\,, \qquad \mathbb{X} := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{T}}} : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{T}},\ x \mapsto x\,.$$

Ekkor az $\mathbb{X}$ sztochasztikus folyamat eloszlása

$$P_{\mathbb{X}}(M) = P\big(\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in M\big) = \mu\big(x \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{T}}}(x) \in M\big) = \mu(M)\,, \qquad M \in \mathcal{M}\,,$$

amiből következik, hogy a véges dimenziós eloszlások pontosan a $\{\mu_{\mathbb{S}}\}$ család elemei. □

5.2. Modifikációs viszony és függetlenség

Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk, hogy két sztochasztikus folyamat milyen viszonyban állhat egymással. Először hasonlósági, majd függetlenségi kapcsolatokat definiálunk.

5.2.1. Definíció. Legyen $\mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$ tetszőleges halmaz, és tekintsünk $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ és $\mathbb{Y} = \{Y_t : t \in \mathbb{T}\}$ sztochasztikus folyamatokat, melyek rendre az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ és a $(\Theta, \mathcal{F}, Q)$ (nem feltétlenül azonos) valószínűségi mezőn vannak értelmezve. Azt mondjuk, hogy a két folyamat **azonos eloszlású**, ha $P_{\mathbb{X}} = Q_{\mathbb{Y}}$, tehát

$$P(\mathbb{X} \in M) = Q(\mathbb{Y} \in M)\,, \qquad M \in \mathcal{M}\,.$$

A két folyamat egymás **modifikációja**, ha azonos valószínűségi mezőn vannak értelmezve, (azaz $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\Theta, \mathcal{F}, Q)$,) és

$$P(X_t = Y_t) = 1\,, \qquad t \in \mathbb{T}\,.$$

A két folyamat **megkülönböztethetetlen** egymástól, ha azonos valószínűségi mezőn vannak értelmezve, az

$$\{\mathbb{X} = \mathbb{Y}\} = \big\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), t \in \mathbb{T}\big\} \subseteq \Omega$$

halmaz esemény, és $P(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) = 1$.

5.2.2. Tétel. *Legyen $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ azonos $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ indexhalmazzal paraméterezett folyamat.*

(i) *Ha a két folyamat megkülönböztethetetlen egymástól, akkor modifikációi egymásnak.*

(ii) *Ha a két folyamat modifikációja egymásnak, akkor azonos eloszlásúak.*

Bizonyítás. (i) Ha a két folyamat megkülönböztethetetlen, akkor tetszőleges $t \in \mathbb{T}$ esetén

$$P(X_t = Y_t) \geq P\big(X_s = Y_s, s \in \mathbb{T}\big) = 1\,.$$

(ii) Jegyezzük meg, hogy ha a két folyamat modifikációja egymásnak, akkor mindkettő az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mezőn van értelmezve. Az 5.1.6. Tétel szerint elég azt megmutatni, hogy a két folyamatnak azonosak a véges dimenziós eloszlásai. Tetszőleges $\mathbb{S} = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \mathbb{T}$ és $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}$ esetén

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{X},\mathbb{S}}(B) &= P_{\pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{X})}(B) = P\big(\pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{X}) \in B\big) \geq P\Big(\pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{Y}) \in B, \pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{X}) = \pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{Y})\Big) \\ &= P\big(\pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{Y}) \in B\big) - P\Big(\pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{Y}) \in B, \pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{X}) \neq \pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{Y})\Big) \geq P_{\mathbb{Y},\mathbb{S}}(B) - P\big(\pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{X}) \neq \pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{Y})\big)\,. \end{aligned}$$

A szubadditivitás és a modifikációs viszony alkalmazásával az utolsó valószínűségre

$$0 \leq P\big(\pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{X}) \neq \pi_{\mathbb{S}}(\mathbb{Y})\big) = P\bigg(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_{s_i} \neq Y_{s_i}\}\bigg) \leq \sum_{i=1}^{n} P(X_{s_i} \neq Y_{s_i}) = 0\,.$$

Ebből $P_{\mathbb{Y},\mathbb{S}}(B) \geq P_{\mathbb{X},\mathbb{S}}(B)$, és a fordított irányú egyenlőtlenség ugyanígy bizonyítható a két folyamat szerepének felcserélésével. Mivel a B és az $\mathbb{S}$ halmaz tetszőleges volt, kapjuk, hogy a két folyamat véges dimenziós eloszlásai megyegyeznek. □

Fontos megjegyezni, hogy az előző tétel egyik állítása sem megfordítható. Tekintsük először az (i) pontot. Ha az $\mathbb{X}$ és az $\mathbb{Y}$ folyamat modifikációs viszonyban áll egymással, akkor azonos valószínűségi mezőn vannak értelmezve. Ezzel szemben a két folyamat úgy is lehet azonos eloszlású, ha nem azonos valószínűségi mezőn vannak definiálva. Fontos megjegyezni, hogy az (i) állítás akkor sem megfordítható, ha feltesszük, hogy a folyamatok azonos valószínűségi mezőn vannak értelmezve. Ehhez tekintsük egy szabályos pénzérme feldobását, és legyen az X és az Y rendre a fej illetve az írás dobásának indikátorváltozója. Ekkor mindkét változó Benoulli eloszlást követ $1/2$ paraméterrel, és $P(X \neq Y) = 1$. Ebből azonnal jön, hogy az $\mathbb{X} = \{X\}$ és az $\mathbb{Y} = \{Y\}$ sztochasztikus folyamat azonos eloszlású, de nem modifikációja egymásnak.

Arra, hogy a (ii) állítás sem megfordítható tekintsük a következő példát.

5.2.3. Példa. Legyen az U véletlen változó egyenletes eloszlású a $\mathbb{T} = [0,1]$ halmazon, és tekintsük az $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ és az $\mathbb{Y} = \{Y_t : t \in \mathbb{T}\}$ sztochasztikus folyamatot, ahol

$$X_t = 0\,, \quad 0 \leq t \leq 1\,, \qquad\qquad Y_t = \begin{cases} 0\,, & t \neq U\,, \\ 1\,, & t = U\,. \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ nem megkülönböztethetetlen, hiszen az U pontban nem azonos az értékük. Ezzel szemben a két folyamat modifikációja egymásnak, ugyanis tetszőleges rögzített $t \in \mathbb{T}$ esetén

$$P(X_t = Y_t) = P(U \neq t) = 1\,.$$

5.2.4. Állítás. *Az azonos eloszlás, a modifikációs viszony és a megkülönböztethetetlenség ekvivalenciareláció az adott $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett és a $\mathbb{T}$ halmazzal indexezett sztochasztikus folyamatok halmazán.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az azonos eloszlásúság és a megkülönböztethetetlenség ekvivalenciareláció, ezért a továbbiakban csak a modifikációs viszonyt vizsgáljuk. A definícióból azonnal következik, hogy a modifikációs viszony reflexív, (azaz minden folyamat modifikációja önmagának,) és szimmetrikus, (tehát ha $\mathbb{Y}$ modifikációja $\mathbb{X}$-nek, akkor $\mathbb{X}$ is modifikációja $\mathbb{Y}$-nak.) A tranzitivitásért tegyük fel, hogy az $\mathbb{Y}$ folyamat modifikációja az $\mathbb{X}$-nek, és a $\mathbb{Z}$ folyamat modifikációja az $\mathbb{Y}$-nak. Mivel két 1 valószínűségű esemény metszete is 1 valószínűségű, tetszőleges $t \in \mathbb{T}$ esetén

$$P(X_t = Z_t) \geq P\big(X_t = Y_t, Y_t = Z_t\big) = 1\,.$$

Tehát $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Z}$ modifikációja egymásnak. □

A modifikációs viszony bizonyos szituációkban egy rendkívül jól alkalmazható elméleti eszköz. Tegyük fel, hogy szeretnénk egy olyan sztochasztikus folyamatot felírni, melynek adott az eloszlása, és rendelkezik még néhány további „szép" tulajdonsággal. Ilyen „szép" tulajdonságok például a mintafolytonosság, melyet a következő alfejezetben definiálunk. A Kolmogorov egzisztenciatétel biztosít egy olyan $\mathbb{X}$ folyamatot, melynek az az eloszlása, amit szeretnénk, de semmi sem garantálja, hogy ez a folyamat rendelkezni fog a további „szép" tulajdonságokkal. Ilyen esetekben gyakran azt a módszert alkalmazzuk, hogy kis változtatásokkal definiáljuk az $\mathbb{X}$ folyamatnak egy $\mathbb{Y}$ modifikációját olyan módon, hogy az már rendelkezzen a számunkra szükséges „szép" tulajdonságok közül eggyel vagy többel. Fontos megjegyezni, hogy a változtatások során a folyamat előírt eloszlását nem rontjuk el, hiszen a modifikációs viszonyból következik, hogy $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ azonos eloszlású. Az 5.2.4. Állítás szerint akár azt is megtehetjük, hogy további „szép" tulajdonságokért az $\mathbb{Y}$ folyamatnak is vesszük egy $\mathbb{Z}$ modifikációját, és így tovább. Mivel a modifikációs viszony ekvivalenciareláció, az így felírt sztochasztikus folyamatok mind azonos eloszlásúak lesznek az $\mathbb{X}$ folyamattal.

A következőkben két sztochasztikus folyamat függetlenségét fogjuk definiálni. Egy tetszőleges, tehát nem feltétlenül véges $\mathbb{S} \subseteq [0, \infty)$ indexhalmaz esetén legyen $\mathcal{N}$ az $\mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ téren a hengerhalmazok által generált σ-algebra. (Lásd: 5.1.2. Definíció.)

5.2.5. Definíció. Legyen $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ és $\mathbb{Y} = \{Y_t : t \in \mathbb{S}\}$ azonos valószínűségi mezőn értelmezett sztochasztikus folyamat. A két folyamat független egymástól, ha

$$P\big(\mathbb{X} \in M, \mathbb{Y} \in N\big) = P(\mathbb{X} \in M)P(\mathbb{Y} \in N)\,, \qquad M \in \mathcal{M}\,, N \in \mathcal{N}\,.$$

5.2.6. Tétel. *Tekintsünk $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ és $\mathbb{Y} = \{Y_t : t \in \mathbb{S}\}$ azonos valószínűségi mezőn értelmezett sztochasztikus folyamatokat, és legyen $\mathbb{Z} = (\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{X_t, Y_s : t \in \mathbb{T}, s \in \mathbb{S}\}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) $\mathbb{X}$ *és* $\mathbb{Y}$ *független.*

(ii) *Tetszőleges* $\mathbb{S}' = \{s_1, \dots, s_n\} \subseteq \mathbb{S}$ *és* $\mathbb{T}' = \{t_1, \dots, t_m\} \subseteq \mathbb{T}$ *esetén*

$$\pi_{\mathbb{T}'}(\mathbb{X}) = \big(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}\big) \qquad \textit{és} \qquad \pi_{\mathbb{S}'}(\mathbb{Y}) = \big(Y_{s_1}, \dots, Y_{s_n}\big)$$

független véletlen vektorok.

(iii) *A* $\mathbb{Z}$ *folyamat eloszlása* $P_{\mathbb{Z}} = P_{\mathbb{X}} \times P_{\mathbb{Y}}$.

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{H}_{\mathbb{T}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ és $\mathcal{H}_{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ illetve az $\mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ tér hengerhalmazait. Adott $\mathbb{T}' = \{t_1, \dots, t_m\} \subseteq \mathbb{T}$ és $\mathbb{S}' = \{s_1, \dots, s_n\} \subseteq \mathbb{S}$ véges indexhalmazok esetén legyen $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{T}'}$ és $D \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}'}$ tetszőleges Borel halmaz, és jelölje $H_{\mathbb{T}',B} \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}}$ és $H_{\mathbb{S}',D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{S}}$ rendre a B és a D halmazhoz tartozó hengerhalmazt az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ illetve az $\mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ téren. Jelölje továbbá $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ az $\mathcal{M}$ és a $\mathcal{N}$ σ-algebra szorzatát az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ téren, tehát legyen

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} = \sigma\big(M \times N : M \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}\big) .$$

Végül jegyezzük meg, hogy a $P_{\mathbb{X}} \times P_{\mathbb{Y}}$ szorzatmérték azaz egyértelmű mérték a $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ σ-algebrán, melyre

$$P_{\mathbb{X}} \times P_{\mathbb{Y}}\big(M \times N\big) = P_{\mathbb{X}}(M) P_{\mathbb{Y}}(N) , \qquad M \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N} .$$

(i)⇒(ii) Ha $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ független, akkor tetszőleges $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{T}'}$ és $D \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}'}$ Borel halmazokra

$$\begin{aligned} &P\big(\pi_{\mathbb{T}'}(\mathbb{X}) \in B, \pi_{\mathbb{S}'}(\mathbb{Y}) \in D\big) = P\big(\mathbb{X} \in H_{\mathbb{T}',B}, \mathbb{Y} \in H_{\mathbb{S}',D}\big) \\ &= P\big(\mathbb{X} \in H_{\mathbb{T}',B}\big) P\big(\mathbb{Y} \in H_{\mathbb{S}',D}\big) = P\big(\pi_{\mathbb{T}'}(\mathbb{X}) \in B\big) P\big(\pi_{\mathbb{S}'}(\mathbb{Y}) \in D\big) , \end{aligned}$$

amiből (ii) következik.

(ii)⇒(iii) Megmutatható, hogy a $\{H_1 \times H_2 : H_1 \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}}, H_2 \in \mathcal{H}_{\mathbb{S}}\}$ rendszer halmazalgebra az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ téren, és generálja a $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ σ-algebrát. Ennek bizonyítását az olvasóra bízzuk. Ekkor a Carathéodory-tétel szerint (iii) igazolásához elég azt belátni, hogy a $P_{\mathbb{Z}} = P_{\mathbb{X}} \times P_{\mathbb{Y}}$ egyenlőség teljesül a $H_1 \times H_2$ alakú halmazokon. A bizonyítás elején bevezetett jelölésekkel legyen $H_1 = H_{\mathbb{T}',B} \in \mathcal{H}_{\mathbb{T}}$ és $H_2 = H_{\mathbb{S}',D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{S}}$ tetszőleges. A (ii) pont alkalmazásával

$$\begin{aligned} &P_{\mathbb{Z}}\big(H_{\mathbb{T}',B} \times H_{\mathbb{S}',D}\big) = P\big((\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \in H_{\mathbb{T}',B} \times H_{\mathbb{S}',D}\big) = P\big(\pi_{\mathbb{T}'}(\mathbb{X}) \in B, \pi_{\mathbb{S}'}(\mathbb{Y}) \in D\big) \\ &= P\big(\pi_{\mathbb{T}'}(\mathbb{X}) \in B\big) P\big(\pi_{\mathbb{S}'}(\mathbb{Y}) \in D\big) = P_{\mathbb{X}}(H_{\mathbb{T}',B}) P_{\mathbb{Y}}(H_{\mathbb{S}',D}) = P_{\mathbb{X}} \times P_{\mathbb{X}}\big(H_{\mathbb{T}',B} \times H_{\mathbb{S}',D}\big) . \end{aligned}$$

(iii)⇒(i) A szorzatmérték definíciójából tetszőleges $M \in \mathcal{M}$ és $N \in \mathcal{N}$ mellett

$$P\big(\mathbb{X} \in M, \mathbb{Y} \in N\big) = P\big(\mathbb{Z} \in M \times N\big) = P_{\mathbb{Z}}(M \times N) = P_{\mathbb{X}}(M) P_{\mathbb{Y}}(N) = P(\mathbb{X} \in M) P(\mathbb{Y} \in N) ,$$

és így a két folyamat független egymástól. □

A következő tételben olyan állításokat fogalmazunk meg, melyek trivialitásoknak tűnhetnek, és melyeket a jegyzetben többször fogunk alkalmazni, akár hivatkozás nélkül is.

5.2.7. Tétel. *Legyen* $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ *és* $\mathbb{Y} = \{Y_s : s \in \mathbb{S}\}$ *sztochasztikus folyamat, és tekintsünk* $\psi : \mathbb{R}^{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^m$ *és* $\phi : \mathbb{R}^{\mathbb{S}} \to \mathbb{R}^n$ *mérhető funkcionálokat, ahol* m *és* n *pozitív egész.*

(i) *A* $\psi(\mathbb{X}):\Omega\to\mathbb{R}^m$ *és a* $\phi(\mathbb{Y}):\Omega\to\mathbb{R}^n$ *függvény mérhető, tehát véletlen változó.*

(ii) *Ha* $\mathbb{X}$ *és* $\mathbb{Y}$ *független, akkor* $\psi(\mathbb{X})$ *és* $\phi(\mathbb{Y})$ *is független.*

(iii) *Ha* $\mathbb{X}$ *és* $\mathbb{Y}$ *azonos eloszlású és* $\psi=\phi$*, akkor* $\psi(\mathbb{X})$ *és* $\phi(\mathbb{Y})$ *is azonos eloszlású.*

Bizonyítás. (i) Következik a sztochasztikus folyamatok mérhetőségéből. (5.1.3. Tétel.)

(ii) Legyen $B\in\mathcal{B}^m$ és $D\in\mathcal{B}^n$ tetszőleges. Ekkor a két folyamat függetlenségéből

$$\begin{aligned}&P\big(\psi(\mathbb{X})\in B,\phi(\mathbb{Y})\in D\big)=P\big(\mathbb{X}\in\psi^{-1}(B),\mathbb{Y}\in\phi^{-1}(D)\big)\\&=P\big(\mathbb{X}\in\psi^{-1}(B)\big)P\big(\mathbb{Y}\in\phi^{-1}(D)\big)=P\big(\psi(\mathbb{X})\in B\big)P\big(\phi(\mathbb{Y})\in D\big),\end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy a $\psi(\mathbb{X})$ és a $\phi(\mathbb{Y})$ vektorváltozó független.

(iii) Mivel a két folyamat azonos eloszlású, most $n=m$. Tetszőleges $B\in\mathcal{B}^m$ esetén

$$P\big(\psi(\mathbb{X})\in B\big)=P\big(\mathbb{X}\in\psi^{-1}(B)\big)=P\big(\mathbb{Y}\in\phi^{-1}(B)\big)=P\big(\phi(\mathbb{Y})\in B\big),$$

tehát a két vektorváltozó szintén azonos eloszlású. □

5.3. Sztochasztikus folyamatok folytonossága

A következőkben a sztochasztikus folyamatok folytonosságát fogjuk definiálni. Legyen $\mathbb{X}=\{X_t:t\in\mathbb{T}\}$, ahol $\mathbb{T}\subseteq[0,\infty)$ egy intervallum. Rögzített $s\in\mathbb{T}$ mellett legyen

$$A_s=\big\{\omega\in\Omega:\text{az } X_t(\omega),\ t\in\mathbb{T}, \text{ trajektória folytonos az } s \text{ pontban}\big\}\subseteq\Omega,$$

továbbá legyen

$$A=\big\{\omega\in\Omega:\text{az } X_t(\omega),\ t\in\mathbb{T}, \text{ trajektória folytonos minden } s\in\mathbb{T} \text{ pontban}\big\}=\bigcap_{s\in\mathbb{T}}A_s\subseteq\Omega.$$

Jegyezzük meg, hogy ha $\mathbb{T}$ jobbról és/vagy balról zárt intervallum, akkor a végpont(ok)ban minden folytonossági tulajdonságot féloldali folytonosságként értelmezünk.

Az $\mathbb{X}$ folyamatnak egy adott $s\in\mathbb{T}$ pontban való folytonosságára az lenne a természetes definíció, hogy az A_s halmaz valószínűsége 1, továbbá a folyamatnak a $\mathbb{T}$ intervallumon vett folytonosságát a $P(A)=1$ feltétellel lenne természetes definiálni. Azonban kiderül, hogy mérhetőségi problémák merülnek fel, ugyanis semmi sem garantálja, hogy az A_s és az A halmaz ilyen általános feltételek mellett esemény lenne. A determinisztikus függvények folytonosságának definíciójából most

$$A_s=\bigcap_{\varepsilon>0}\ \bigcup_{\delta>0}\ \bigcap_{\substack{t\in\mathbb{T}\\|t-s|<\delta}}\big\{\omega\in\Omega:|X_t(\omega)-X_s(\omega)|<\varepsilon\big\}.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon kapcsos zárójelben definiált halmaz esemény tetszőleges rögzített ε,δ,s és t esetén, azonban az A_s halmazt ilyen eseményeknek nem megszámlálható metszeteként és uniójaként írtuk fel. Emiatt semmi sem garantálja, hogy A_s maga is esemény lesz. Jegyezzük meg, hogy a fenti reprezentációban két művelet megszámlálható formában is felírható, hiszen

$$A_s = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{\substack{t\in\mathbb{T}\\ |t-s|<1/m}} \big\{\omega\in\Omega : |X_t(\omega)-X_s(\omega)| < 1/n\big\} .$$

Azonban anélkül, hogy további ismereteink lennének az $X_t(\omega)$, $t\in\mathbb{T}$, trajektóriák analitikus viselkedéséről, a harmadik metszetet nem tudjuk megszámlálható alakban felírni. Ha például speciálisan tudnánk, hogy a trajektóriák monoton növekvő függvények, akkor ezt a problémát már ki küszöbölni, (vajon hogyan?) és A_s szintén esemény lenne. Azonban ez még mindig nem garantálná az A halmaz mérhetőségét, hiszen az

$$A = \bigcap_{s\in\mathbb{T}} A_s$$

metszet mérhetősége nem következik az A_s, $s\in\mathbb{T}$, halmazok mérhetőségéből. A felvázolt nehézségek kiküszöbölésére a sztochasztikus folyamatok folytonosságát az alábbi módon definiáljuk.

5.3.1. Definíció. Az $\mathbb{X}$ folyamat **sztochasztikusan folytonos** egy adott $s\in\mathbb{T}$ pontban, ha $X_t \xrightarrow{P} X_s$, amint $t\to s$, tehát tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén

$$P\big(|X_t - X_s| > \varepsilon\big) \to 0 , \qquad t\to s .$$

A folyamat **sztochasztikusan folytonos** a $\mathbb{T}$ halmazon, ha sztochasztikusan folytonos az intervallum minden pontjában. Azt mondjuk, hogy a folyamat **pontonként folytonos**, vagy más kifejezéssel, **nincsen rögzített szakadási pontja**, ha tetszőleges $s\in\mathbb{T}$ értékre létezik $\Omega_s\in\mathcal{A}$ esemény, hogy

$$\Omega_s \subseteq A_s \qquad \text{és} \qquad P(\Omega_s) = 1 .$$

A folyamat **trajektóriánként folytonos** vagy **mintafolytonos** a $\mathbb{T}$ intervallumon, ha létezik $\Omega'\in\mathcal{A}$ esemény, melyre

$$\Omega' \subseteq A \qquad \text{és} \qquad P(\Omega') = 1 .$$

5.3.2. Tétel. (i) *Ha a folyamat mintafolytonos, akkor nincs rögzített szakadási pontja.*

(ii) *Ha a folyamatnak nincs rögzített szakadási pontja, akkor sztochasztikusan folytonos a $\mathbb{T}$ intervallumon.*

Bizonyítás. (i) A definícióban bevezetett jelöléseket alkalmazva, ha a folyamat mintafolytonos, akkor tetszőleges $s\in\mathbb{T}$ esetén $\Omega'\subseteq A\subseteq A_s$. Ekkor $\Omega_s := \Omega'$ választással kapjuk, hogy a folyamatnak nincsen rögzített szakadási pontja.

(ii) Tekintsünk egy tetszőleges $s\in\mathbb{T}$ értéket. Mivel most az s nem szakadási pontja a folyamatnak, létezik olyan $\Omega_s\in\mathcal{A}$ esemény, hogy $P(\Omega_s)=1$, és tetszőleges $\omega\in\Omega_s$ esetén $X_t(\omega)\to X_s(\omega)$ amint $t\to s$. Ebből következik, hogy $X_t\to X_s$ majdnem biztosan, és ez már maga után vonja a sztochasztikus konvergenciát. $\square$

Jegyezzük meg, hogy az előző tétel egyik állítása sem megfordítható. Az (i) ponthoz tekintsük a 5.2.3. Példában definiált $\mathbb{Y}$ sztochasztikus folyamatot. Nyilvánvaló, hogy ez a folyamat 1 valószínűséggel nem folytonos a $\mathbb{T} = [0,1]$ intervallum minden pontjában, tehát $\mathbb{Y}$ nem mintafolytonos. Ezzel szemben tetszőleges $s \in [0,1]$ mellett $A_s = \{U \neq s\}$, ami 1 valószínűségű esemény, és így a folyamatnak nincsen rögzített szakadási pontja. A következő példában megmutatjuk, hogy a tétel (ii) állítása sem megfordítható.

5.3.3. Példa. Legyen $Z_1, Z_2, \dots$ véletlen változóknak olyan sorozata, mely sztochasztikusan konvergál egy Z változóhoz, de majdnem biztos értelemben már nem. Ilyen sorozat létezik. Például, ha $Z_1, Z_2, \dots$ független rendre

$$P(Z_n = 0) = 1 - 1/n\,, \qquad P(Z_n = 1) = 1/n\,, \qquad n = 1,2,\dots$$

eloszlással, akkor $Z_n \xrightarrow{P} 0$, de a konvergencia nem teljesül 1 valószínűséggel. (Miért?) Legyen továbbá az U változó egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon, és definiáljuk az $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T} = [0,1]\}$ lépcsős sztochasztikus folyamatot az $X_0 := 0$,

$$X_t := Z_n\,, \qquad t \in \big(U^n, U^{n-1}\big]\,, \qquad n = 1,2,\dots$$

formulákkal.

Az $\mathbb{X}$ folyamat pontosan akkor nem folytonos egy rögzített $s \in (0,1]$ pontban, ha az U^n, $n = 1,2,\dots$, végpontok valamelyike éppen ebbe a pontba esik. Ennek valószínűsége

$$P\big(\exists n \in \mathbb{N} : U^n = s\big) = P\bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{U^n = s\big\}\bigg) \le \sum_{n=1}^{\infty} P\big(U^n = s\big) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0\,,$$

hiszen az U^n, $n = 1,2,\dots$, változók mind abszolút folytonosak. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbb{X}$ folyamatnak nincsen rögzített szakadási pontja a $(0,1]$ intervallumon, amiből következik, hogy sztochasztikusan folytonos ezen a halmazon. Továbbá, a $Z_1, Z_2, \dots$ sorozat konstrukciójából következik, hogy a folyamat az $s = 0$ pontban is sztochasztikusan folytonos, de már nem folytonos majdnem biztos értelemben. (Miért?) Összegezve, a $\mathbb{X}$ folyamat sztochasztikusan folytonos a $\mathbb{T}$ intervallumon, de nem mintafolytonos ezen a halmazon, mert az $s = 0$ egy rögzített szakadási pont.

Térjünk vissza a jelen alfejezet elején bemutatott mérhetőségi problémákhoz. Ezekhez hasonló nehézségekkel a jövőben még talákozni fogunk, például amikor azt vizsgáljuk, hogy a Brown-mozgás mekkora valószínűséggel differenciálható. Sőt, vegyük észre, hogy egy ilyen problémába már az előző alfejezetben is belefutottunk. Amikor azt definiáltuk, hogy mit is jelent egy $\mathbb{X}$ és egy $\mathbb{Y}$ sztochasztikus folyamat megkülönböztethetetlensége, fel kellett tennünk, hogy az

$$\{\mathbb{X} = \mathbb{Y}\} = \bigcap_{s \in \mathbb{T}} \big\{\omega \in \Omega : X_s(\omega) = Y_s(\omega)\big\}$$

halmaz esemény. Erre ott valóban szükség volt, hiszen az igaz, hogy a most felírt formulában a jobboldali metszet elemei mind események, de ha $\mathbb{T}$ nem megszámlálható, akkor semmi sem garantálja, hogy a metszet maga is esemény lesz. Annak érdekében, hogy ne kelljen feltenni az $\{\mathbb{X}=\mathbb{Y}\}$ halmaz mérhetőségét, a következő, általánosabb definíciót is alkalmazhatjuk. Azt mondjuk, hogy $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ **megkülönböztethetetlen**, ha létezik olyan $\Omega^*\in\mathcal{A}$ esemény, melyre

$$\Omega^*\subseteq\{\mathbb{X}=\mathbb{Y}\}\qquad\text{és}\qquad P(\Omega^*)=1\,.$$

Hasonló nehézségekbe ütközhetünk akkor is, ha egy $\mathbb{X}$ sztochasztikus folyamat valamilyen funkcionáljával kívánunk dolgozni. Az egyik legfontosabb ilyen példa a szuprémum funkcionál, tehát az

$$S=\sup_{t\in\mathbb{T}}X_t:\Omega\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$$

függvény. Az egyszerűség kedvéért most tegyük fel, hogy S sehol sem veszi fel a végtelen értéket. Természetesen adódik a feladat, hogy jellemezzük az S függvényt, tehát adjuk meg az eloszlását, várható értékét, stb. Vegyük észre, hogy ilyen általános feltételek mellett még az sem garantált, hogy S mérhető leképezés. Most tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\{S\le x\}=\bigcap_{s\in\mathbb{T}}\{X_t\le x\}\,,$$

és ismét azt tapasztaljuk, hogy ugyan a jobb oldalon a metszet elemei mind események, de maga a metszet, és ennek megfelelően a bal oldal már nem feltétlenül az. Tehát semmi sem garantálja, hogy S véletlen változó. Ezzel szemben, ha $\mathbb{X}$ mintafolytonos, akkor

$$\{S\le x\}=\bigcap_{s\in\mathbb{T}\cap\mathbb{Q}}\{X_t\le x\}\in\mathcal{A}\,,\qquad x\in\mathbb{R}\,,$$

tehát ezzel a mérhetőségi problémával nem szembesülünk.

Több más hasznos alkalmazás mellett ez az utolsó példa is azt mutatja, hogy a mintafolytonosság egy nagyon kellemes tulajdonság. De a mi a helyzet akkor, ha a vizsgált $\mathbb{X}$ folyamatra ez a tulajdonság nem teljesül? A következő tétel azt mondja ki, hogy bizonyos feltételek mellet egy folyamat mintafolytonossá tehető. Jegyezzük meg, hogy ha egy folyamat az $\mathbb{X}$ modifikációja, akkor azonos eloszlású is vele.

5.3.4. Tétel (Kolmogorov–Csencov-tétel)**.** *Legyen $\mathbb{X}=\{X_t:t\in\mathbb{T}\}$, ahol $\mathbb{T}\subseteq[0,\infty)$ egy véges vagy végtelen intervallum. Ha létezik olyan $\alpha,\beta,\gamma>0$ konstans, hogy*

$$E\big(|X_t-X_s|^\alpha\big)\le\gamma|t-s|^{1+2\beta}\,,\qquad s,t\in\mathbb{T}\,,$$

akkor az $\mathbb{X}$ folyamatnak létezik mintafolytonos modifikációja.

A tétel bizonyítása során szükségünk lesz az alábbi elemi állításra.

5.3.5. Lemma. *Legyenek $a<c<b$ tetszőleges valós számok, és tekintsünk egy tetszőleges $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvényt. Jelölje f_1 és f_2 az f függvény lineáris interpoláltjait rendre az a,b illetve az a,c,b pontokon keresztül, azaz legyen*

$$f_1(t)=\frac{b-t}{b-a}f(a)+\frac{t-a}{b-a}f(b)\,,\qquad a\le t\le b\,,$$

$$f_2(t) = \begin{cases} \frac{c-t}{c-a} f(a) + \frac{t-a}{c-a} f(c)\,, & a \le t \le c\,, \\ \frac{b-t}{b-c} f(c) + \frac{t-c}{b-c} f(b)\,, & c \le t \le b\,. \end{cases}$$

Ekkor

$$\sup_{a \le t \le b} \big| f_1(t) - f_2(t) \big| \le \max \big\{ |f(b) - f(c)|, |f(c) - f(a)| \big\}\,.$$

Bizonyítás. A háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával

$$\begin{aligned} \sup_{a \le t \le b} \big| f_1(t) - f_2(t) \big| &= \big| f_1(c) - f_2(c) \big| = \left| \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - f(c) \right| \\ &\le \frac{b-c}{b-a} \,|f(a) - f(c)| + \frac{c-a}{b-a} \,|f(b) - f(c)| \\ &\le \left(\frac{b-c}{b-a} + \frac{c-a}{b-a} \right) \max \big\{ |f(a) - f(c)| + |f(b) - f(c)| \big\} \\ &= \max \big\{ |f(b) - f(c)|, |f(c) - f(a)| \big\}\,. \end{aligned}$$

□

Az 5.3.4. Tétel bizonyítása. Először tekintsük azt az esetet, mikor $\mathbb{T} = [a,b]$ egy véges zárt intervallum. Ekkor az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\mathbb{T} = [0,1]$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén osszuk fel az intervallumot 2^n részintervallumra, legyen

$$J_{1,n} = \left[0, \frac{1}{2^n} \right] \qquad \text{és} \qquad J_{k,n} = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right], \qquad k = 2,3,\ldots,2^n\,,$$

és jelölje rendre $\mathbb{Y}_n = \{Y_{n,t} : t \in [0,1]\}$ az $X_0, X_{1/2^n}, X_{2/2^n}, \ldots, 1$ sorozat lineáris interpoláltját, tehát legyen

$$Y_{n,t} := \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{1}_{J_{k,n}}(t) \left[2^n \left(\frac{k}{2^n} - t \right) X_{\frac{k-1}{2^n}} + 2^n \left(t - \frac{k-1}{2^n} \right) X_{\frac{k}{2^n}} \right], \qquad 0 \le t \le 1\,.$$

Az $\mathbb{Y}_n$ sztochasztikus folyamat mintafolytonos, tehát 1 valószínűséggel eleme a $C[0,1]$ térnek, a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények halmazának. A következőkben megmutatjuk, hogy $\mathbb{Y}_n$, $n = 1,2,\ldots$, majdnem biztosan Cauchy-sorozat a szuprémum-metrikára nézve. Legyen $\omega \in \Omega$ tetszőleges rögzített kimenetel. Ekkor

$$\begin{aligned} \max_{0 \le t \le 1} \big| Y_{n,t}(\omega) - Y_{n-1,t}(\omega) \big| &= \max_{k=1,\ldots,2^{n-1}} \max_{\frac{k-1}{2^{n-1}} \le t \le \frac{k}{2^{n-1}}} \big| Y_{n,t}(\omega) - Y_{n-1,t}(\omega) \big| \\ &\le \max_{k=1,\ldots,2^{n-1}} \max \Big\{ \big| X_{\frac{2k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{2k-1}{2^n}}(\omega) \big|, \big| X_{\frac{2k-1}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{2k-2}{2^n}}(\omega) \big| \Big\} \\ &= \max_{k=1,\ldots,2^n} \big| X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega) \big|\,, \end{aligned}$$

ahol a második lépésben az 5.3.5. Lemmát alkalmaztuk

$$[a,b] = \left[\frac{k-1}{2^{n-1}}, \frac{k}{2^{n-1}} \right], \qquad f = \mathbb{X}(\omega)\,, \qquad f_1 = \mathbb{Y}_{n-1}(\omega)\,, \qquad f_2 = \mathbb{Y}_n(\omega)\,,$$

szereposztásban. Innen a Markov-egyenlőtlenség és a bizonyítandó tétel feltevéseinek alkalmazásával jön, hogy tetszőleges rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
P\Big(\max_{0\le t\le 1}\big|Y_{n,t}-Y_{n-1,t}\big| > \frac{1}{2^{n\beta/\alpha}}\Big) &\le \sum_{k=1}^{2^n} P\Big(\big|X_{\frac{k}{2^n}}-X_{\frac{k-1}{2^n}}\big| > \frac{1}{2^{n\beta/\alpha}}\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{2^n} P\Big(\big|X_{\frac{k}{2^n}}-X_{\frac{k-1}{2^n}}\big|^{\alpha} > \frac{1}{2^{n\beta}}\Big) \le \sum_{k=1}^{2^n} 2^{n\beta} E\Big(\big|X_{\frac{k}{2^n}}-X_{\frac{k-1}{2^n}}\big|^{\alpha}\Big)\\
&\le \sum_{k=1}^{2^n} 2^{n\beta}\gamma\Big(\frac{1}{2^n}\Big)^{1+2\beta} = \frac{\gamma}{2^{n\beta}}\,.
\end{aligned}$$

Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\max_{0\le t\le 1}\big|Y_{n,t}-Y_{n-1,t}\big| > \frac{1}{2^{n\beta/\alpha}}\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma}{2^{n\beta}} < \infty\,,$$

amiből a Borel–Cantelli-lemmák szerint a

$$\max_{0\le t\le 1}\big|Y_{n,t}-Y_{n-1,t}\big| > \frac{1}{2^{n\beta/\alpha}}$$

egyenlőtlenség 1 valószínűséggel legfeljebb véges sok n-re következik be. Ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ esemény, melyre $P(\Omega_0)=1$, és tetszőleges rögzített $\omega\in\Omega_0$ kimenetel esetén valamely $n_0 = n_0(\omega)$ küszöbszám mellett

$$\max_{0\le t\le 1}\big|Y_{n,t}(\omega)-Y_{n-1,t}(\omega)\big| \le \frac{1}{2^{n\beta/\alpha}}\,, \qquad n\ge n_0\,.$$

Legyen most $m_1, m_2\to\infty$. Feltehető, hogy a rögzített ω kimenetel mellett $n_0(\omega)\le m_1\le m_2$. A háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\max_{0\le t\le 1}\big|Y_{m_2,t}(\omega)-Y_{m_1,t}(\omega)\big| \le \sum_{n=m_1+1}^{m_2}\max_{0\le t\le 1}\big|Y_{n,t}(\omega)-Y_{n-1,t}(\omega)\big| \le \sum_{n=m_1+1}^{\infty}\frac{1}{2^{n\beta/\alpha}} \to 0\,,$$

amint $m_1, m_2\to\infty$, hiszen a $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-\beta/\alpha})^n$ sor konvergens. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $\mathbb{Y}_n(\omega)$, $n=1,2,\ldots$, Cauchy-sorozat a szuprémummetrikára nézve.

Mivel az $\mathbb{Y}_n$, $n=1,2,\ldots$, sorozat 1 valószínűséggel Cauchy típusú, azonnal következik, hogy majdnem biztosan egyenletesen konvergál egy $\mathbb{Y}=\{Y_t : t\in[0,1]\}$ mintafolytonos sztochasztikus folyamathoz. A továbbiakban megmutatjuk, hogy tetszőleges $t\in[0,1]$ érték esetén $P(X_t=Y_t)=1$, tehát $\mathbb{Y}$ modifikációja az $\mathbb{X}$ folyamatnak.

Legyen $t\in[0,1]$ rögzített, és tekintsük egész számoknak egy $k_1, k_2, \ldots$ sorozatát úgy, hogy $0\le k_n\le 2^n$ és $k_n/2^n\to t$, amint $n\to\infty$. Ilyen sorozat létezik. (Miért?) Ekkor az $\mathbb{Y}_n$, $n=1,2,\ldots$, folyamatok kontrukciójából és egyenletes konvergenciájából jön, hogy

$$\lim_{n\to\infty} X_{k_n/2^n} = \lim_{n\to\infty} Y_{n,k_n/2^n} = Y_t\,, \qquad n\to\infty\,, \qquad \text{m.b.}$$

A következetőken megmutatjuk, hogy $X_{k_n/2^n} \xrightarrow{P} X_t$ amint $n \to \infty$. Mivel a sztochasztikus konvergencia határértéke 1 valószínűséggel egyértelmű, ebből már következni fog, hogy a rögzített t pontban $P(X_t = Y_t) = 1$, tehát $\mathbb{Y}$ modifikációja az $\mathbb{X}$ folyamatnak.

A sztochasztikus konvergencia igazolásához tekintsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ értéket, és legyen $\delta > 0$ olyan kicsi, hogy $\delta^{\beta/\alpha} < \varepsilon$ és $\gamma\delta^{1+\beta} < \varepsilon$ teljesüljön. Ha n olyan nagy, hogy ezen túl $|k_n/2^n - t| < \delta$ is igaz, akkor a Markov-egyenlőtlenségből és a tétel feltevéseiből

$$\begin{aligned} P\Big(\big|X_{k_n/2^n} - X_t\big| > \varepsilon\Big) &\le P\Big(\big|X_{k_n/2^n} - X_t\big|^\alpha \ge \delta^\beta\Big) \le \frac{1}{\delta^\beta} E\Big(\big|X_{k_n/2^n} - X_t\big|^\alpha\Big) \\ &\le \frac{1}{\delta^\beta}\,\gamma \left|\frac{k_n}{2^n} - t\right|^{1+2\beta} \le \frac{1}{\delta^\beta}\,\gamma\delta^{1+2\beta} = \gamma\delta^{1+\beta} < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $X_{k_n/2^n} \xrightarrow{P} X_t$, $n \to \infty$.

A fentiekben sikerült a tételt bebizonyítani abban az esetben, mikor $\mathbb{T}$ egy véges zárt intervallum. Legyen most $\mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$ egy tetszőleges intervallum. Ekkor $\mathbb{T}$ előáll egymásba skatulyázott véges zárt intervallumok bővülő rendszerének uniójaként. Tehát, léteznek $0 \le a_n < b_n$, $n = 1,2,\ldots$, értékek úgy, hogy az a_n és a b_n sorozat rendre monoton csökkenő illetve nővekvő, továbbá $\cup_{n=1}^\infty [a_n, b_n] = \mathbb{T}$. (Miért léteznek ilyenek sorozatok?) A fentiekben ismertetett konstrukciót alkalmazva tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ mellett definiálhatunk egy $\mathbb{Y}^{(n)} = \{Y_t^{(n)} : t \in [a_n, b_n]\}$ sztochasztikus folyamatot, mely az $\mathbb{X}$ folyamat mintafolytonos modifikációja az $[a_n, b_n]$ intervallumon. Vegyük észre, hogy a konstrukció miatt az $\mathbb{Y}^{(n)}$ folyamatok egymás meghosszabbításai, azaz $Y_t^{(n+1)} = Y_t^{(n)}$ teljesül minden $t \in [a_n, b_n]$ esetén. Legyen most $\mathbb{Y} = \{Y_t : t \in \mathbb{T}\}$, ahol

$$Y_t := Y_t^{(n)}\,, \qquad t \in [a_n, b_n]\,, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Mivel az $[a_n, b_n]$ intervallumok együttesen lefedik a $\mathbb{T}$ halmazt, továbbá az $\mathbb{Y}^{(n)}$ folyamatok egymás meghosszabbításai, az $\mathbb{Y}$ véletlen függvény jól definiált. Legyen $t \in \mathbb{T}$ tetszőleges, és tekintsünk egy $n \in \mathbb{N}$ értéket úgy, hogy $t \in [a_n, b_n]$. Mivel ekkor $Y_t = Y_t^{(n)} = X_t$ majdnem biztosan, az $\mathbb{X}$ és az $\mathbb{Y}$ folyamat egymás modifikációja a $\mathbb{T}$ intervallumon. Ezek után már csak azt kell megmutatnunk, hogy $\mathbb{Y}$ mintafolytonos.

Mivel $\mathbb{Y}^{(n)}$ mintafolytonos, létezik $\Omega_n \in \mathcal{A}$ esemény, melyre $P(\Omega_n) = 1$, és $\mathbb{Y}^{(n)}(\omega)$ folytonos az $[a_n, b_n]$ intervallumon minden $\omega \in \Omega_n$ esetén. Legyen $\Omega^* = \cap_{n=1}^\infty \Omega_n$, és tekintsünk egy tetszőleges $\omega \in \Omega^*$ kimenetelt. Mivel ekkor az $\mathbb{Y}^{(n)}(\omega)$, $n = 1,2,\ldots$, függvények egymás folytonos meghosszabbításai, kapjuk, hogy $\mathbb{Y}(\omega)$ folytonos a $\mathbb{T}$ intervallumon. Figyelembevéve, hogy most $P(\Omega^*) = 1$, a mintafolytonosság következik. Ezzel az állítást teljesen bebizonyítottuk. $\square$

6. fejezet

A Wiener-folyamat

6.1. Gauss-folyamatok

Ebben a fejezetben olyan $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T} \subseteq [0, \infty)\}$ sztochasztikus folyamatokkal fogunk foglalkozni, melyek véges dimenziós eloszlásai megfelelő dinemziós normális eloszlást követnek. Ehhez először át kell ismételünk néhány valószínűségelméleti fogalmat.

Legyen $X = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ egy n-dimenziós normális eloszlású vektorváltozó $m \in \mathbb{R}^n$ várható érték vektorral és $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kovarianciamátrixszal. Ekkor

$$m = E(X) = \big[E(X_i)\big]_{i=1}^n, \qquad \Sigma = \mathrm{Cov}(X) = \Big[\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\Big]_{i,j=1}^n,$$

valamint a Σ mátrix szimmetrikus és pozitív szemidefinit, tehát

$$\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}\,, \quad \forall i, j, \qquad \text{és} \qquad x\Sigma x^\top = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \sigma_{i,j} \geq 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Ismert továbbá az is, hogy az $X_1, \ldots, X_n$ változók pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha Σ pozitív definit, tehát $x\Sigma x^\top > 0$ minden $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, vektor esetén. Ebben az esetben az X vektorváltozó abszolút folytonos, és a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)\Sigma^{-1}(x-m)^\top \right), \qquad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

A kovarianciamátrixok szimmetrikus és pozitív szemidefinit tulajdonságát a következő módon lehet definiálni kétváltozós valós értékű függvényekre.

6.1.1. Definíció. Egy $r(s,t)$, $s, t \in \mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$, függvény **szimmetrikus**, ha tetszőleges $s, t \in \mathbb{T}$ értékek esetén $r(s,t) = r(t,s)$. A függvény **pozitív szemidefinit**, ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$ mellett a $\Sigma = [r(t_i, t_j)]_{i,j=1}^n$ mátrix pozitív szemidefinit.

6.1.2. Definíció. Legyen $\mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$ tetszőleges indexhalmaz, és tekintsünk egy $m(t)$ tetszőleges és egy $r(s,t)$ szimmetrikus pozitív szemidefinit függvényt, $s, t \in \mathbb{T}$. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ sztochasztikus folyamat **Gauss-folyamat** m **várható érték**

függvénnyel és r **kovarianciafüggvénnyel**, ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$ esetén az $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ vektorváltozó n-dimenziós normális eloszlást követ $m_{t_1,\ldots,t_n}$ várható érték vektorral és $\Sigma_{t_1,\ldots,t_n}$ kovarianciamátrixszal, ahol

$$m_{t_1,\ldots,t_n} = \big[m(t_1), \ldots, m(t_n)\big]^\top \qquad \text{és} \qquad \Sigma_{t_1,\ldots,t_n} = \big[r(t_i, t_j)\big]_{i,j=1}^n .$$

Vegyük észre, hogy egy Gauss-folyamat esetén

$$E(X_t) = m(t)\,, \qquad D^2(X_t) = r(t,t)\,, \qquad \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = r(s,t)\,, \qquad s, t \in \mathbb{T}\,.$$

6.1.3. Példa (A fehér zaj folyamat normális eloszlású változókkal)**.** Tekintsünk egy olyan $\mathbb{X}=\{X_t : t\in\mathbb{T}\}$ sztochasztikus folyamatot, ahol az X_t, $t\in\mathbb{T}$, változók függetlenek és azonos eloszlásúak közös μ várható értékkel és σ szórással. Ekkor tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ és $t_1, \ldots, t_n\in\mathbb{T}$ mellett az $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^\top$ vektorváltozó n-dimenziós normális eloszlást követ, és várható értéke valamint kovarianciamátrixsza

$$m_{t_1,\ldots,t_n} = [\mu, \ldots, \mu]^\top \qquad \text{és} \qquad \Sigma_{t_1,\ldots,t_n} = \big[\sigma^2 \delta_{i,j}\big]_{i,j=1}^n .$$

Ez azt jelenti, hogy a $\mathbb{X}$ folyamat Gauss-folyamat $m(t) = \mu$ várható érték függvénnyel és $r(s,t) = \sigma^2 \delta_{s,t}$, $s, t \in \mathbb{T}$, kovarianciafüggvénnyel.

A következő állításban azt mutatjuk meg, hogy léteznek Gauss-folyamatok.

6.1.4. Tétel. *Tetszőleges $m(t)$, $t\in\mathbb{T}$, és szimmetrikus pozitív szemidefinit $r(s,t)$, $s,t\in\mathbb{T}$, függvény esetén létezik $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ sztochasztikus folyamat, ami Gauss-folyamat m várható érték függvénnyel és r kovarianciafüggvénnyel.*

Bizonyítás. A definíció szerint egy sztochasztikus folyamat pontosan akkor Gauss, ha tetszőleges $\mathbb{S} = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \mathbb{T}$ indexhalmaz esetén a kapcsolatos $\mu_\mathbb{S}$ véges dimenziós eloszlás az n-dimenziós normális eloszlás $m_\mathbb{S} = m_{s_1,\ldots,s_n}$ várható értékkel és $\Sigma_\mathbb{S} = \Sigma_{s_1,\ldots,s_n}$ kovarianciamátrixszal. Ha sikerül megmutatnunk, hogy ezen mértékek $\{\mu_\mathbb{S} : \mathbb{S}\subseteq\mathbb{T}, \mathbb{S} \text{ véges}\}$ családja konzisztens, akkor a Kolmogorov egzisztenciatétel (5.1.10. Tétel) szerint létezik ilyen $\mathbb{X} = \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ folyamat.

Konzisztenciához tekintsünk tetszőleges $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{U} \subseteq \mathbb{T}$ véges részindexhalmazokat, legyen $\mathbb{S} = \{s_1, \ldots, s_k\}$ és $\mathbb{U} = \{u_1, \ldots, u_\ell\}$. Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $B \in \mathcal{B}$ Borel-halmaz esetén $\mu_\mathbb{U}(H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B}) = \mu_\mathbb{S}(B)$, ahol

$$H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B} = \big\{x \in \mathbb{R}^\mathbb{U} : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_n}) \in B\big\} \in \mathcal{B}^\mathbb{U} .$$

Legyen $Y = (Y_1, \ldots, Y_\ell)^\top$ egy ℓ-dimenziós normális eloszlású vektorváltozó $m_\mathbb{U}$ várható érték vektorral valamint $\Sigma_\mathbb{U}$ kovariancimátrixszal. Tekintsük azt a Z k-komponensű vektorváltozót, mely az Y koponensei közül pontosan azon Y_i komponenseket tartalamazza, melyekre $u_i \in \mathbb{S}$. Ekkor Z szintén normális eloszlást követ, melynek várható értéke és kovarianciamátrixsza $\mu_\mathbb{S}$ és $\Sigma_\mathbb{S}$. Ebből azonnal következik, hogy

$$\mu_\mathbb{U}\big(H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B}\big) = P\big(Y \in H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B}\big) = P(Z \in B) = \mu_\mathbb{S}(B)\,,$$

ami pontosan a bizonyítandó egyenlőség. □

Az előző tétel bizonyítása során láttuk, hogy egy Gauss-folyamat várható érték függvénye és kovarianciafüggvénye egyértelműen meghatározza a véges dimenziós eloszlásokat, és így az 5.1.6. Tétel szerint a folyamat eloszlását. Ebből az észrevételből azonnal jön a következő állítás.

6.1.5. Tétel. *Két Gauss-folyamat pontosan akkor azonos eloszlású, ha azonos a várható érték függvényük és a kovarianciafüggvényük.*

6.2. A standard Wiener-folyamat

Ebben az alfejezetben egy olyan sztochasztikus folyamatot definiálunk és vizsgálunk, melynek számos alkalmazása van a fizika és a pénzügyi matematika különböző területein.

6.2.1. Definíció. A $\mathbb{W} = \{W_t : t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamat **standard Wiener-folyamat**, vagy másnéven **standard Brown mozgás**, ha

(W1) $W_0 = 0$ majdnem biztosan;

(W2) $\mathbb{W}$ független növekményű;

(W3) tetszőleges $t \geq s \geq 0$ esetén $W_t - W_s$ normális eloszlást követ 0 várható értékkel és $t - s$ szórásnégyzettel;

(W4) $\mathbb{W}$ mintafolytonos.

6.2.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy a $\mathbb{W} = \{W_t : t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamatra teljesülnek a standard Wiener-folyamat (W1) és (W2) definiáló tulajdonságai. Ekkor (W3) ekvivalens azzal, hogy tetszőleges $t \geq 0$ esetén a W_t változó normális eloszlást követ 0 várható értékel és t szórásnégyzettel.*

Bizonyítás. Amennyiben feltesszük, hogy (W3) teljesül, akkor $s = 0$ mellett a (W1) és a (W2) tulajdonságból következik, hogy $W_t = W_t - W_s$ normális eloszlású 0 várható értékkel és $t - s = t$ varianciával.

A fordított irányért vegyük észre, hogy a (W1) és (W2) tulajdonságok miatt a karakterisztikus függvényekre $\phi_{W_t}(\tau) = \phi_{W_t - W_s}(\tau)\phi_{W_s}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\phi_{W_t - W_s}(\tau) = \phi_{W_t}(\tau)/\phi_{W_s}(\tau) = e^{-t\tau^2/2}/e^{-s\tau^2/2} = e^{-(t-s)\tau^2/2}, \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

Ebből már következik, hogy $W_t - W_s$ normális eloszlású 0 várható értékkel és $t - s$ szórásnégyzettel. □

A következő állításban megmutatjuk, hogy a standard Wiener-folyamatot definiáló első három tulajdonság lényegében a folyamat eloszlását határozza meg.

6.2.3. Állítás. *A (W1), (W2), (W3) tulajdonságok együttesen ekvivalensek azzal, hogy $\mathbb{W}$ Gauss-folyamat $m(t) = 0$, $t \geq 0$, várható érték függvénnyel és $r(s,t) = \min(s,t)$, $s, t \geq 0$, kovarianciafüggvénnyel.*

Bizonyítás. Adott $n \geq 1$ egész és $0 = t_0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ értékek esetén legyen

$$V = \begin{bmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{bmatrix}, \qquad V' = \begin{bmatrix} W_{t_1} - W_{t_0} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{bmatrix}.$$

Legyen továbbá $\Sigma = [\sigma_{i,j}]_{i,j=1}^n$, $\Sigma' = [\sigma'_{i,j}]_{i,j=1}^n$ és $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n$, ahol

$$\sigma_{i,j} = r(t_i, t_j) = \min\{t_i, t_j\}, \qquad \sigma'_{i,j} = \begin{cases} t_i - t_{i-1}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad a_{i,j} = \begin{cases} 1, & j \leq i, \\ 0, & j > i. \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy ekkor a definiált változókra $V = AV'$.

Ha a $\mathbb{W}$ folyamat teljesíti a (W1)-(W3) tulajdonságokat, akkor a V' vektorváltozó n dimenziós normális eloszlást követ 0 várható érték vektorral és Σ' kovarianciamátrixszal, amiből azonnal jön, hogy V is normális $E(V) = AE(V') = 0$ várható értékkel és $\mathrm{Cov}(V) = A\mathrm{Cov}(V')A^\top = \Sigma$ kovarianciamátrixszal. Ebből azonnal következik, hogy $\mathbb{W}$ Gauss-folyamat az állításban szereplő várható érték és kovarianciafüggvénnyel.

Visszafelé, ha feltesszük, hogy $\mathbb{W}$ Gauss-folyamat, akkor definíció szerint V normális eloszlású vektorváltozó 0 várható érték vektorral és Σ' kovarianciamátrixszal. Ekkor $V' = A^{-1}V$ szintén mormális 0 várható értékkel és Σ kovarianciamátrixszal. Ebből azonnal jön, hogy $\mathbb{W}$ független növekményű normális eloszlású növekményekkel. Továbbá, az egydimenziós W_0 vektorváltozó eloszlása szintén normális 0 várható értékkel és 0 szórással, ami azt jelenti, hogy $W_0 = 0$ majdnem biztosan. Ezzel a bizonyítás végére értünk. $\square$

Vegyük észre, hogy ugyan definiáltuk a standard Wiener-folyamatot, de eddig még semmi sem garantálja, hogy ilyen folyamat valóban létezik is. A folyamat létezését a 6.2.5. Tételben fogjuk megmutatni, de ehhez szükségünk lesz egy segédállításra.

6.2.4. Állítás. *Az $r(s,t) = \min(s,t)$, $s, t \geq 0$, függvény szimmetrikus és pozitív szemidefinit.*

Bizonyítás. A szimmetria nyilvánvaló. Tekintsünk tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $0 = t_0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ értékeket. Legyen továbbá $Z_1, \ldots, Z_n$ független normális eloszlású véletlen változó 0 várható értékkel és rendre $t_i - t_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, varianciával. Ekkor a $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)^\top$ vektorváltozó eloszlása megegyezik az előző tétel bizonyításában bevezetett V' vektor eloszlásával. Szintén az előző bizonyítás jelöléseit használva tekintsük az AZ vektorváltozót, melyre $\mathrm{Cov}(AZ) = A\Sigma'A^\top = \Sigma$. Mivel Σ egy jól definiált vektorváltozó kovarianciamátrixsza, kapjuk, hogy Σ pozitív szemidefinit mátrix, amiből már jön az állítás. $\square$

6.2.5. Tétel. (i) *Létezik $\widetilde{\mathbb{W}}$ folyamat, mely teljesíti a standard Wiener-folyamatot definiáló (W1), (W2), (W3) tulajdonságokat.*

(ii) *Létezik $\mathbb{W}$ standard Wiener-folyamat.*

Bizonyítás. (i) Alkalmazzuk a 6.2.3. Állítást és a Gauss-folyamatok létezését garantáló 6.1.4. Tételt.

(ii) A normális eloszlás elemi tulajdonságai szerint tetszőleges $0 \le s \le t$ mellett

$$E\big(|\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s|^4\big) = E\big(\mathrm{Normal}(0, t-s)^4\big) = (t-s)^2 E\big(\mathrm{Normal}(0,1)^4\big) = 3(t-s)^2 .$$

Ekkor a Kolmogorov–Csentsov-tétel (5.3.4. Tétel) alkalmazásával $\alpha = 4$, $\beta = 1/2$ és $\gamma = 3$ mellett kapjuk, hogy a $\widetilde{\mathbb{W}}$ folyamatnak létezik $\mathbb{W}$ mintafolytonos modifikációja. Mivel a modifikációra áttérve a folyamat eloszlása nem változik, az új $\mathbb{W}$ folyamat szintén kielégíti a (W1)-(W3) tulajdonságokat. □

Jogosan merülhethet fel a kérdés, hogy meg lehet-e konstruálni a standard Wiener-folyamatot a Kolmogorov egzisztenciatétel és a Kolmogorov–Csentsov-tétel alkalmazása nélkül. Erre a problémára egy lehetséges módszer az úgynevezett Karhunen–Loève-sorfejtés, mely az $L^2[0,1]$ tér trigonometrikus bázisa segítségével ad egy reprezentációt. Az eredményt bizonyítás nélkül közöljük.

6.2.6. Tétel. *Ha $Z_1, Z_2, \ldots$ független standard normális eloszlású véletlen változó, akkor*

$$W_t = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \frac{\sin\big((k-1/2)\pi t\big)}{(k-1/2)\pi} , \qquad 0 \le t \le 1 ,$$

standart Wiener-folyamat a $[0,1]$ intervallumon.

A standard Wiener-folyamat egy lehetséges általánosítását vezeti be a következő definíció.

6.2.7. Definíció. Az $\mathbb{X} = \{X_t : t \ge 0\}$ sztochasztikus folyamat **Wiener-folyamat**, vagy másnéven **Brown mozgás** $a \in \mathbb{R}$ drifttel és $b > 0$ volatilitással, ha mintafolytonos Gauss-folyamat $m(t) = at$, $t \ge 0$, várható érték függvénnyel és $r(s,t) = b^2 \min(s,t)$, $s, t \ge 0$, kovarianciafüggvénnyel.

6.2.8. Állítás. *Az $\mathbb{X} = \{X_t : t \ge 0\}$ folyamat pontosan akkor Wiener-folyamat a drifttel és b volatilitással, ha létezik $\mathbb{W} = \{W_t : t \ge 0\}$ standard Wiener-folyamat, hogy*

$$X_t = at + bW_t , \qquad t \ge 0 .$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $X_t = at + bW_t$, $t \ge 0$. Ekkor $\mathbb{X}$ nyilvánvalóan mintafolytonos. Vegyük észre, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $t_1, \ldots, t_n \ge 0$ időpontok esetén

$$\begin{bmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{bmatrix} .$$

Tehát az $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^\top$ vektorváltozó előáll, mint a $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})^\top$ változó egy lineáris transzformáltja, vagyis $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^\top$ normális eloszlást követ. Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{X}$ egy Gauss-folyamat. A várható érték függvény és a kovarianciafüggvény

$$m(t) = E(X_t) = at + aE(W_t) = at , \qquad t \ge 0 ,$$

valamint

$$r(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = b^2 \mathrm{Cov}(W_s, W_t) = b^2 \min(s,t)\,, \qquad s,t \geq 0\,.$$

Visszafelé, ha tudjuk, hogy $\mathbb{X}$ Wiener-folyamat a drifttel és b volatilitással, akkor tekintsük a $W_t = (X_t - at)/b$, $t \geq 0$, folyamatot. Ekkor a bizonyítás első felében alkalmazott módszerek segítségével megmutatható, hogy W_t, $t \geq 0$, standard Wiener-folyamat. $\square$

Tárgymutató