Gyakorló feladatok a Sztochasztika alapjai kurzushoz

1. Kombinatorikus valószínűség

Házi feladatok

1.1. Véletlenszerűen felírunk egy valódi ötjegyű számot, tehát egy olyan ötjegyű számot, melynek nem 0 az első jegye. Mi annak a valószínűsége, hogy a szám jegyei különböző páratlan számok? Mekkora eséllyel lesznek a számban azonos számjegyek?

1.2. Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül, és mindenki rendel egy italt, összesen 3 sört, 4 vörös és 2 fehér bort. A pincér véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki olyan italt kap, amilyet kért? Mennyi az esélye annak, hogy a pincér a söröket jól osztja ki, de legalább egy bort rossz vendégnek ad?

1.3. A 32 lapos magyar kártyapakliból kihúzunk véletlenszerűen 6 lapot visszatevés nélkül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között

- **a.** pontosan 2 ász lesz;
- **b.** pontosan 3 piros, 2 zöld és 1 makk lesz;
- **c.** lesz legalább egy ász;
- **d.** lesz piros vagy lesz ász?

1.4. Oldjuk meg az előző feladatot azzal a módosítással, hogy a lapokat visszatevéssel húzzuk ki.

1.5. Egy vizsgán egy hallgató a 100 lehetséges kérdésből n-re tudja a választ. A hallgató két kérdést kap véletlenszerűen. Mekkora eséllyel fogja teljesíteni a vizsgát, ha

- **a.** megbukik, ha valamelyik kérdésre nem tud válaszolni;
- **b.** a kérdések közül elég az egyikre válaszolni?

Az egyes vizsgáztatási módok esetén a vizsgázó hány kérdésre tanulja meg a választ, ha az a célja, hogy legalább 80% valószínűséggel teljesítse a vizsgát?

További gyakorló feladatok

1.6.
- **a.** Hány lehetséges kimenetele van annak a véletlen kísérletnek, hogy feldobunk egy szabályos dobókockát? Mennyi annak az esélye, hogy páros számot dobunk?
- **b.** Hány lehetséges kimenetel van akkor, ha két dobókockát dobunk fel, egy pirosat és egy zöldet? Mennyi az esélye annak, hogy két páros számot dobunk? Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik szám páros?
- **c.** Hogyan változik az előző pont megoldása, ha két azonos színű kockával dobunk?

1.7. Magyarországon az autók rendszáma három betűből és három számjegyből áll. A betűk az angol ábécé 26 betűjéből kerülnek ki, de az első betű nem lehet U, X és Y. (Ezen betűk a motorkerékpároknak, az utánfutóknak és a lassú járműveknek vannak fenntartva.) A számjegyekre nincsen korlátozás. Hány különböző rendszám írható fel ezen szabályok szerint? Ha véletlenszerűen választunk egy lehetséges rendszámot, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy minden betű mássalhangzó és minden számjegy páratlan? Mennyi az esélye, hogy a rendszámban található magánhangzó és páros számjegy is?

1.8. Két testvér ugyanabba a 27 fős osztályba jár. Egy gyors sorakozónál mindenki találomra áll be. Mi a valószínűsége, hogy a két testvér egymás mellé kerül? Mennyi az esélye annak, hogy pontosan tizen állnak közöttük?

1.9. Betűkockákból kirakjuk a KÖRÖMPÖRKÖLT szót, majd a betűket véletlenszerűen összekeverjük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszakapjuk az eredeti szót? Mi annak az esélye, hogy a PÖRKÖLT szó részszóként kiolvasható?

1.10. Feldobunk 6 dobókockát. Mekkora valószínűséggel lesz a dobott számok összege pontosan 36? Mennyi az esélye, hogy a dobott számok összege nagyobb, mint 34? Mekkora a valószínűsége annak, hogy a dobott számok között vannak azonosak?

1.11. **A születésnap paradoxon.** A Sztochasztika alapjai gyakorlaton a csoportok 30 főre lettek meghirdetve. Mennyi annak az esélye, hogy egy 30 fős csoportban mindenki az évnek ugyanazon a napján született? Mennyi annak a valószínűsége, hogy a csoportban lesz két ember, aki azonos napon született? (A szökőnapoktól és az ikertestvérektől most tekintsünk el.)

1.12. Egy óvodás csoportba 9 gyerek jár, köztük egy testvérpár. Hányféleképpen lehet a gyerekeket egy négy-, egy három- és egy kétfős csoportba besorolni? Ha véletlenszerű a besorolás, akkor milyen valószínűséggel fog a két testvér ugyanabba a csoportba kerülni?

1.13. Piri néni nagyon szereti a kertjét, különösen a tulipánjait. Ősszel a legszebb tulipánok közül kiválaszt 5 pirosat, 4 narancssárgát és 2 fehéret, és felszedi a hagymákat. Sajnos a hagymák a téli tárolás során összekeverednek. A következő tavasszal Piri néni véletlenszerűen kiválaszt 7 hagymát, és kiülteti őket. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztot hagymák között

- **a.** pontosan 4 piros lesz;
- **b.** pontosan 4 piros, 2 narancssárga és 1 fehér lesz;
- **c.** lesz fehér;
- **d.** lesz piros;
- **e.** pontosan két különböző szín fog majd előfordulni, és ezek 4 illetve 3 tulipánon jelennek meg?

1.14. Az ötöslottón mennyi az esélye annak, hogy

a. telitalálatot érünk el;

b. pontosan k találatot érünk el, ahol $k = 0, 1, \ldots, 5$;

c. kihúzzák a 12-es és a 80-as számot;

d. kihúzzák a 12-es és a 80-as számot, és a 12 a második legkisebb nyerőszám;

e. öt egymást követő számot húznak ki?

1.15. Egy gyárban a makaront úgy csomagolják, hogy egy dobozba két csokis, egy málnás és egy narancsos sütemény kerül. Anna a három barátnőjével öt napon keresztül, hétfőtől péntekig minden nap vásárol egy doboz makaront, és a süteményeket véletlenszerűen kiosztják egymás között. Mennyi annak az esélye, hogy Anna az öt nap folyamán

a. hétfőn, szerdán és csütörtökön csokis, a többi napon nem csokis makaront kap;

b. pontosan 3 csokis makaront kap;

c. összesen 2 csokis, 2 málnás és 1 narancsos makaront kap;

d. egyszer sem kap málnás makaront;

e. legalább egyszer kap csokis vagy narancsos makaront?

1.16. Többször egymás után feldobunk egy szabályos dobókockát.

a. Mennyi az esélye, hogy az első hatos pontosan a negyedik dobásra jön? Mi annak a valószínűsége, hogy az első hatost pontosan az n-edik dobásra kapjuk?

b. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első négy dobás során kapunk legalább egy hatost? Mekkora eséllyel kapunk legalább egy hatost az első n dobás során?

c. Hányszor dobjuk fel a kockát, ha az a célunk, hogy legalább 90% valószínűséggel legyen hatos a dobások között?

1.17. Egy urnában 4 piros és n zöld golyó található. Kihúzunk két golyót az urnából.

a. Mennyi annak az esélye, hogy a kiválasztott golyók mindegyike piros? Mekkora legyen n értéke, ha az a cél, hogy ez a valószínűség kisebb legyen, mint 0,1?

b. Mennyi annak az esélye, hogy a kiválasztott golyók között van piros? Mekkora legyen n értéke, ha az a cél, hogy ez a valószínűség kisebb legyen, mint 0,1?

Oldjuk meg a feladatot visszatevéses és visszatevés nélküli húzásra is.

2. A valószínűség általános tulajdonságai, feltételes valószínűség

Házi feladatok

2.1. Egy hedge fund három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre 19%, 25% illetve 28% valószínűséggel mennek tönkre az elkövetkező öt évben. 1/20 annak az esélye, hogy az első és a második cég is csődbe megy; 1/10 a valószínűsége, hogy az első és a harmadik is elveszti a vagyonát; és 1/10 az esélye annak is, hogy a második és a harmadik is becsődöl. Annak az esélye, hogy mindhárom vállalat csődbe megy, 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy az elkövetkező öt évben

- **a.** az első vagy a második vállalat csődbe megy;
- **b.** az első becsődöl, de a harmadik nem;
- **c.** pontosan két vállalat megy csődbe, és közöttük lesz a harmadik;
- **d.** legalább két vállalat becsődöl;
- **e.** egyik vállalat sem megy csődbe?

2.2. Kiválasztunk egy végzős hallgatót, és megnézzük, hogy hány kurzusfelvétellel tudta teljesíteni a tárgyait. Jelölje A_n azt, hogy a Kalkulust az n-edik kurzusfelvételkor teljesítette, tehát például A_3 az az esemény, hogy a tárgyat a harmadik alkalommal sikerült abszolválnia. Hasonló módon jelölje B_n azt, hogy a Lineáris algebrához pontosan n felvétel volt szükséges, C_n pedig az az esemény, hogy a Valószínűségszámítás az n-edik alkalommal sikerült. Formalizáljuk a következő eseményeket:

- **a.** a Kalkulust az első, a Lineáris algebrát a második felvételkor sikerült teljesíteni;
- **b.** a Kalkulus sikerült elsőre, de a Valószínűségszámítás nem;
- **c.** a három közül legalább egy kurzust sikerült az első alkalommal teljesíteni;
- **d.** a három közül legalább egy kurzust nem sikerült az első alkalommal teljesíteni;
- **e.** a Kalkulushoz és a Valószínűségszámításhoz összesen négy felvétel kellett.

2.3. Legyenek A és B olyan események, melyek valószínűsége 0,7 illetve 0,8. Ezen információ birtokában meg tudjuk határozni egyértelműen a $P(A \cup B)$ és a $P(A \cap B)$ valószínűséget? Ha nem, akkor adjunk alsó és felső korlátot ezekre a valószínűségekre. A megoldást illusztráljuk Venn-diagrammal.

2.4. Legyen A és B két esemény, és legyen $P(B) > 0$. Mennyi az $P(A|B)$ feltételes valószínűség értéke, ha

- **a.** A és B kizáró események;
- **b.** B maga után vonja az A eseményt;
- **c.** A és B független események?

További gyakorló feladatok

2.5. Próbagyártás után két szempontból vizsgáljuk a késztermékeket. Tudjuk, hogy 0,25 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott gyártmány anyaghibás, míg 0,4 annak az esélye, hogy mérethibás. A gyártmányok 10 százaléka nem felel meg egyik szabványnak sem. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy gyártmányt, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy

- **a.** a gyártmány anyaghibás, de megfelel a méretszabványnak;
- **b.** a gyártmánynak van valamilyen hibája;
- **c.** a gyártmány pontosan egyfajta hibája van?
- **d.** a gyártmány hibátlan?

Ha a gyártmány mérethibás, akkor mennyi annak az esélye, hogy anyaghibás is?

2.6. Egy faluban három sportolási lehetőség van, foci, kosárlabda és pingpong. A lakosok 25%-a focizik, 40%-a kosárlabdázik, és 45%-a pingpongozik. Az emberek tizede szokott focizni és kosárlabdázni is, ötödük szokott focizni és pingpongozni is, továbbá negyedük szokott kosárlabdázni és pingpongozni is. Mindhárom sportot a lakosság 5%-a űzi. Véletlenszerűen kiválasztunk egy lakost, és megkérdezzük tőle, hogy melyik sporttevékenységet szokta végezni. Mennyi az esélye, hogy a kiválasztott ember

- **a.** focizik vagy pingpongozik;
- **b.** focizik, de nem kosárlabdázik;
- **c.** pontosan kettő sportot űz;
- **d.** semmit sem sportol?

Ha tudjuk, hogy a kiválasztott ember pontosan két sportot űz, akkor mennyi annak az esélye, hogy ezek között ott van a kosárlabda?

2.7. Egy cég három különböző változatot szállít egy adott termékből a vele szerződésben álló boltoknak. Ebben a hónapban a boltok fele rendelt az 1. típusból, és 57% nem rendelt a 2. típusból. A boltok 22%-a rendelt az 1. és a 2. változatból is, továbbá negyedrészük rendelt az 1. és a 3. típusú termékekből is. A boltok 14%-a mindegyik típusból rendelt, míg 0,12 részük egyikből sem. A boltok 6%-a olyan, hogy rendelt a 2. és 3. típusból is, de az 1.-ből nem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott boltba kell szállítani a 3. változatból? A boltok hányad része rendelt csak az 1. típusból? Egy véletlenszerű bolt esetén mennyi az esélye, hogy pontosan egy típust rendeltek a termékből? Feltéve, hogy a kiválasztott bolt rendelt az 1. és a 2. típusból, mennyi az esélye, hogy a 3. típusból nem rendelt?

2.8. Öt héten keresztül játszunk az ötöslottón. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik héten nyerünk valamennyi pénzt. Fejezzük ki az alábbi eseményeket az $A_1, \ldots, A_5$ események segítségével. Fogalmazzuk meg a B_1, B_2, B_4 események tagadását is.

a. $B_1 =$ minden héten nyerünk;

b. $B_2 =$ egyik héten sem nyerünk;

c. $B_3 =$ az utolsó héten nyerünk először;

d. $B_4 =$ a második héten nyerünk, de a negyedik héten nem;

e. $B_5 =$ pontosan négyszer nyerünk.

2.9. Egy porcelánmanufaktúrában három fajta tányért készítenek: levesest, laposat és salátását. Egy adott heti termelést a következő táblázat foglalja össze:

	leveses	lapos	salátás	összesen
hibátlan	470	540	380	1390
selejtes	30	60	20	110
összesen	500	600	400	1500

Véletlenszerűen kiválasztunk egy tányért. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik típusú termékből választottunk, és legyen B az az esemény, hogy a kiválasztott tányér selejtes. Határozzuk meg a következő valószínűségeket, továbbá értelmezzük őket arányossági tényezőként: $P(A_2|B)$; $P(A_1 \cup A_3|\overline{B})$; $P(B|A_2)$; $P(B|\overline{A}_2)$.

2.10. Egy feladat a mobiltelefonok előtti időkből. Az egyik barátunk egy adott estén $2/3$ valószínűséggel tartózkodik kocsmában. Ha kocsmában van, akkor egyenlő eséllyel található meg az öt környékbeli kocsma valamelyikében. Mennyi annak az esélye, hogy egy adott estén az ötödik, legtávolabbi kocsmába ment? Mennyi az esélye ugyanennek akkor, ha a másik négy kocsmában már kerestük, de nem találtuk?

2.11. Egy vállalat úgy próbálja meg népszerűsíteni az általa forgalmazott chipset, hogy a zacskókba a Micimackó című mese figuráit rejti el: Micimackót, Malackát, Tigrist és Fülest. Minden zacskóban pontosan egy figura található, és a figuráknak azonos az előfordulási gyakorisága. Megvásárolunk 4 zacskó chipset. Mennyi az esélye annak, hogy lesz egy teljes kollekciónk, tehát minden figurából találunk legalább egyet? Mi a helyzet akkor, ha 6 zsacskóval vásárolunk?

2.12. **a.** Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy a tíz dobás során az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ értékek mindegyike előfordul?

b. Tízszer feldobunk két szabályos dobókockát. Mennyi annak az esélye, hogy a tíz dobás során az $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ számpárok mindegyike előfordul?

3. Geometriai valószínűségi mezők, feltételes valószínűség, események függetlensége

Házi feladatok

3.1. Egy óvodás csoportba 9 gyerek jár, köztük egy testvérpár, egy fiú és egy lány. Egy foglalkozáson véletlenszerűen kiválasztanak 4 gyereket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy **a.** a testvérpár mindkét tagját kiválasztják; **b.** a testvérpár mindkét tagját kiválasztják, feltéve, hogy a fiú ki lett választva; **c.** a testvérpár mindkét tagját kiválasztják, feltéve, hogy legalább az egyikük ki lett választva?

3.2. Ejtőernyős ugrást hajtanak végre egy 500 m^2 területű mezőn. Az ugrás akkor sikeres, ha az ugró a mezőn kijelölt 10 m oldalhosszúságú négyzetben ér földet. Különdíjat kap az, aki a négyzet közepén megrajzolt 2 m sugarú körön belül érkezik. Feltehető, hogy az érkezés helye a mezőn megfelel az egyenletességi hipotézisnek. Mekkora valószínűséggel lesz sikeres az ugrás? Mennyi az esélye annak, hogy az ugró különdíjat kap feltéve, hogy az ugrás sikeres? Milyen kapcsolat van az ugrás sikeressége és a különdíj megszerzése között?

3.3. Adott egy kör alakú céltábla, melynek 10 centiméter a sugara. A céltáblára felrajzolunk egy vízszintes és egy függőleges egyenest úgy, hogy mindkettő átmenjen a kör középpontján. Ilyen módon a táblát négy tartományra osztjuk fel. Véletlenszerűen rálövünk a céltáblára. Adjuk meg a következő események valószínűségét:

$A =$ a céltáblát a középponttól legalább 5 centiméterre találjuk el

$B =$ a találat a bal alsó tartományba esik

Mennyi az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy B bekövetkezik? Független a két esemény egymástól? Kizárják egymást? Valamelyik maga után vonja a másikat?

3.4. Véletlenszerűen választunk egy x értéket a $[0, 1]$ intervallumon. Ez az érték egy x és egy $1 - x$ hosszúságú szakaszra bontja az egységnyi hosszúságú intervallumot. Mennyi annak az esélye, hogy a szakaszok hosszának szorzata nagyobb, mint $5/36$?

3.5. Egy 120 km hosszú autópályán a 40. és a 100. kilométernél van mentőállomás, nevezzük ezeket X-nek és Y-nak. Ha baleset történik, akkor azt az állomást riasztják, amelyik közelebb esik a baleset helyszínéhez.

- **a.** Egy véletlenszerű baleset esetén mennyi az esélye annak, hogy az X állomást riasztják?
- **b.** Tegyük fel, hogy négy baleset történik egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy időrendben az első két esethez az X, a második kettőhöz pedig az Y állomást riasztják? Mennyi az esélye, hogy pontosan két alkalommal riasztják az X állomást? Mi a valószínűsége annak, hogy a négyből legalább egy esethez az X állomást riasztják?
- **c.** Hány baleset esetén teljesül az, hogy legalább 99% eséllyel valamelyik esethez az X állomást fogják majd riasztani?

További gyakorló feladatok

3.6. Egy városban tíz autókölcsönző működik, ebből háromnál lehet kisbuszt is bérelni. Egy ember kisbuszt szeretne bérelni, de nem tudja, hogy ezt melyik kölcsönzőnél teheti meg, ezért elkezdi véletlenszerű sorrendben felhívni őket. Mekkora annak a valószínűsége, hogy pontosan három hívásra lesz majd szüksége? Mennyi az esélye ugyanennek, ha tudjuk, hogy az első hívás nem volt sikeres?

3.7. **a.** Háromgyerekes családok körében vizsgáljuk, hogy hány fiú és lány van a családban. Jelölje A azt az eseményt, hogy a vizsgált családban legfeljebb egy lány van, és legyen B az, hogy van fiú és lány is. Feltehető, hogy a gyerekek azonos eséllyel születnek fiúnak vagy lánynak. Mennyi az A esemény valószínűsége? Mennyi A valószínűsége, ha tudjuk, hogy B bekövetkezik? Ezek alapján mit mondhatunk a két esemény kapcsolatáról?

b. Válaszoljuk az előző pont kérdéseire négygyerekes családok esetén.

3.8. A vihar véletlenszerű helyen elszakít egy 20 km hosszú légvezetéket, ezért a vezeték két végéről egy-egy keresőcsapat indul, hogy felderítsék a szakadás helyét. A nehéz terep miatt az egyik csapat 4 km/h, a másik 6 km/h sebességgel halad. Tekintsük a következő eseményeket:

$A =$ a szakadás helyét a lasabban haladó csapat találja meg

$B =$ valamelyik csapat fél órán belül megtalálja a szakadás helyét

Mennyi az A illetve a B esemény valószínűsége? Mennyi az A esemény valószínűsége, ha a B esemény bekövetkezik? Független egymástól az A és a B esemény?

3.9. Egy metróvonalon 10 perces követési idővel járnak a szerelvények. Ha egy véletlenszerű időpontban megyünk ki az állomásra, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 5 percet kell várni? Mennyi az esélye ugyanennek, ha tudjuk, hogy a legutóbbi szerelvény már legalább 3 perce elment. Milyen kapcsolatban van az az esemény, hogy legfeljebb 5 percet kell várni, és az, hogy az előző metró már legalább 3 perce elment: kizáróak, függetlenek, vagy valamelyik maga után vonja a másikat?

3.10. Adott egy város, tőle pedig északi és keleti irányban egy-egy falu. Mindkét falu 10 kilométer távolságra helyezkedik el a várostól, továbbá a keleti falut egy nyílegyenes út köti össze a várossal. Elmegyünk túrázni a három település által meghatározott háromszögben, de eltévedünk egy véletlenszerű helyen.

a. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az eltévedéskor légvonalban legfeljebb 3 kilométerre vagyunk a várostól? Mennyi ugyanennek az esélye, ha tudjuk, hogy legfeljebb 5 kilométerre lehetünk a várostól?

b. Hogy visszajussunk a városba, déli irányba megyünk, míg el nem érjük az utat. Jelölje x azt, hogy az út elérésekor hány kilométerre vagyunk a várostól. Mik az x lehetséges értékei? Mennyi annak az esélye, hogy $x \leq 4$? Teljesül az x értékre az egyenletességi hipotézis?

3.11. Véletlenszerűen választunk egy pontot az 5 egység oldalhosszúságú négyzetben.

a. Mennyi annak az esélye, hogy a pont a legközelebbi oldaltól legfeljebb 1 egységnyire esik? Mennyi a valószínűsége ugyanennek akkor, ha tudjuk, hogy a pont az északi oldalhoz van a legközelebb? Független egymástól az, hogy a pont a legközelebbi oldaltól legfeljebb 1 egységnyire esik, illetve az, hogy a pont az északi oldalhoz van a legközelebb.

b. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválaszott pont a négyzet geometriai középpontja, tehát a két átló metszéspontja lesz? Bekövetkezhet ez az esemény?

3.12. Autóval végig akarunk menni egy 30 km hosszú egyenes útszakaszon, de balesetet szenvedünk egy véletlenszerű helyen. A közelben egyetlen egy mobiltelefon átjátszó torony van, ez az út felénél, az úttól 6 km távolságra található. A torony egy 10 km sugarú kör alakú területet képes kiszolgálni. Mennyi annak az esélye, hogy a baleset helye ebbe a körbe esik, és ezáltal telefonon segítséget tudunk hívni? Mennyi a valószínűsége ugyanennek, ha a baleset az út első 5 kilométeres szakaszán történik?

3.13. Legyen A tetszőleges esemény. Mutassuk meg, hogy A független a biztos eseménytől és a lehetetlen eseménytől.

3.14. Legyen A és B pozitív valószínűségű esemény. Mutassuk meg, hogy a két esemény nem lehet egyszerre független és kizáró.

3.15. Feldobunk két szabályos dobókockát. Mutassuk meg, hogy minden kimenetelnek azonos a valószínűsége, tehát a kísérlet leírható klasszikus valószínűségi mezővel. (Feltehető, hogy a két dobás független egymástól.)

3.16. Két héten keresztül játszunk az ötöslottón, mindkét alkalommal egy szelvényt töltünk ki. Mennyi annak az esélye, hogy az első héten elérünk legalább egy találatot? Mi a valószínűsége ugyanennek a második héten? Mennyi az esélye annak, hogy vagy az első, vagy a második héten elérünk legalább egy találatot?

3.17. Egy csatában az egyik harcoló fél ejtőernyőkkel próbál utánpótlást eljuttatni egy körbevett alakulathoz. Az erős szél miatt az ejtőernyők egymástól függetlenül és véletlenszerű helyen érnek földet a 15 km^2 területű csatatéren. Az alakulat egy 1 km^2 területű magaslaton védekezik, és az utánpótlást csak akkor kapják meg, ha az ernyő ezen a magaslaton ér földet.

a. Mennyi annak az esélye, hogy egy adott ejtőernyő eljut az alakulathoz?

b. Tegyük fel, hogy tíz ejtőernyőt dobnak le. Mennyi annak az esélye, hogy ezek közül pontosan egy ernyő jut el az alakulathoz? Mennyi annak a valószínűsége, hogy az alakulat megszerez legalább egy ejtőernyőt?

c. Hány ejtőernyőt dobjanak le ahhoz, hogy ezek közül az alakulat legalább 95 százalékos eséllyel megszerezzen legalább egyet?

3.18. Oldjuk meg az **1.16.** feladatot a függetlenség alkalmazásával.

4. Események függetlensége, a láncszabály és a teljes valószínűség tétele

Házi feladatok

4.1. A fogadóirodák szerint amerikai kosárlabdabajnokságban (NBA) a Chicago Bulls, a San Antonio Spurs illetve a Los Angeles Lakers rendre 0,5, 0,8 és 0,3 valószínűséggel nyeri meg a következő meccsét. (A csapatok nem egymással játszanak.) Feltehető, hogy a három mérkőzés eredménye független egymástól. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét:

- **a.** mindhárom csapat megnyeri a következő mérkőzését;
- **b.** a Bulls nyer, viszont a Lakers veszít;
- **c.** a három csapat közül pontosan egy nyer;
- **d.** a három csapat közül legfeljebb egy nyer.

Feltéve, hogy a három csapat közül pontosan egy nyer, mennyi annak az esélye, hogy a Bulls, a Spurs illetve a Lakers éri el a győzelmet?

4.2. Adott egy urna, benne pedig 4 piros és 2 zöld golyó. Kihúzunk három golyót visszatevés nélkül.

- **a.** Mennyi annak a valószínűsége, hogy sorban egy pirosat, egy zöldet, és még egy pirosat kapunk? Mennyi az esélye, hogy a kihúzott golyók között pontosan egy zöld lesz?
- **b.** Mennyi annak az esélye, hogy a második golyó zöld? Feltéve, hogy a második golyó zöld, mi annak a valószínűsége, hogy az első golyó piros volt? Függ az első golyó színe attól, hogy milyen színű a második?

Miben változik a megoldás menete akkor, ha a golyókat visszatevéssel húzzuk ki.

4.3. Stephen Curry, a Golden Gate Warriors kosárlabdázója a 2016/17-es szezonban a kétpontos, a hárompontos illetve a büntető dobásokat rendre 54, 41 és 90 százalékos hatékonysággal értékesítette. A próbálkozásainak 44, 36 és 20 százaléka volt kétpontos, hárompontos illetve büntető dobás.

- **a.** Curry összes próbálkozásának hány százaléka volt sikeres hárompontos dobás? Az összes próbálkozásának mekkora hányadát értékesítette?
- **b.** A sikertelen próbálkozások milyen arányban voltak kétpontos, hárompontos illetve büntető dobások?

4.4. Egy vizsgán egy tesztkérdéshez négy lehetséges válasz van megadva, melyek közül egy helyes. A vizsgázó 2/3 valószínűséggel tudja a helyes választ, és ebben az esetben meg is jelöli azt. Ha nem tudja a helyes választ, akkor a vizsgázó tippel, tehát véletlenszerűen jelöl egyet a négy válasz közül. A javítás során azt látjuk, hogy a vizsgázó helyes választ adott a kérdésre. Mennyi a valószínűsége, hogy csak tippelt?

További gyakorló feladatok

4.5. Egy útszakaszon egymás után három jelzőlámpa irányatja a forgalmat. Az egyes lámpáknál egymástól függetlenül rendre $1/2$, $2/3$ illetve $3/4$ valószínűséggel kapunk pirosat. Mennyi az alábbi események valószínűsége?

a. Mindhárom lámpánál pirosat kapunk.

b. Az első lámpánál pirosat kapunk, de a harmadiknál nem.

c. Pontosan két lámpánál kapunk pirosat.

d. Legalább két lámpánál pirosat kapunk.

Feltéve, hogy pontosan két pirosat kapunk, mennyi annak az esélye, hogy a zöldet az első, a második, illetve a harmadik lámpánál kapjuk?

4.6. Egy vizsgán a hallgatók 10%-a bukott meg. A sikeres vizsgát tevő hallgatók negyedrésze kapott jelest. Mekkora az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató jelest kapott?

4.7. Egy adott területen vegyszeres szúnyogírtást végeznek három egymás követő alkalommal. Az első permetezés után a szúnyogok 80%-a elpusztul, de az életben maradt rovaroknak nő az ellenállóképessége a szerrel szemben. Ennek az a következménye, hogy a második permetezéskor az életben maradt szúnyogoknak már csak a 40%-a pusztul el, a harmadik írtásnál pedig csak a maradék 20%-a. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szúnyog túléli mindhárom permetezést? Feltéve, hogy egy szúnyog túlélte az első permetezést, mennyi a valószínűsége annak, hogy a másodikat és a harmadikat is túléli?

4.8. Egy vacsora után n ember ki akarja sorsolni, hogy melyikük mosogasson. Fognak hát n egyforma gyufaszálat, az egyikből letörnek egy darabot, majd valaki összefogja úgy a szálakat, hogy ne látszódjon, melyik a rövid. Ezek után mindenki húz egy-egy gyufaszálat, és az mosogat, aki a rövidebbet húzza. Igazságos ez a sorsolás, tehát a húzás sorrendjétől függetlenül mindenki $1/n$ valószínűséggel kapja a rövid szálat? Vagy esetleg az első vagy az utolsó húzónak jobbak az esélyei?

4.9. Egy üzemben három gép van, az első adja a termelés 20%-át, a második pedig a 30%-át. Az első gépnél 5% a selejtarány, a másodiknál és a harmadiknál gépnél 10%. Véletlenszerűen kiválasztunk egy gyártmányt az üzem termeléséből. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott termék a harmadik gépen készült és selejtes? Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott termék selejtes? Feltéve, hogy a gyártmány nem selejtes, mennyi annak az esélye, hogy az első, a második illetve a harmadik gépen készült?

4.10. Egy csomagolóüzembe négy termelő szállít almát. A leadott gyümölcs tizede származik az első, három tizede a második, és két ötöde a harmadik termelőtől. Az egyes termelők esetén a leadott mennyiség 40, 50, 20 illetve 100 százaléka elsőosztályú.

Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy almát, akkor mi annak a valószínűsége, hogy a második termelő hozta és másodosztályú? Mennyi az esélye, hogy a kiválasztott alma másodosztályú? Feltéve, hogy az alma másodosztályú, mennyi a valószínűsége, hogy az első, a második, a harmadik, illetve a negyedik termelő szállította?

4.11. Egy képfelismerő programot készítünk azzal a céllal, hogy a számítógép eldöntse, a megadott képen látható alakzat kör, négyzet vagy háromszög. Az alábbi táblázat azt tartalmazza, hogy a program a tesztelés során a különféle inputokra mekkora valószínűséggel adta vissza a lehetséges outputokat.

input	output		
	kör	négyzet	háromszög
kör	0,6	0,4	0
négyzet	0,2	0,6	0,2
háromszög	0	0	1

Az alkalmazás során az input alakzatok rendre 30, 50 illetve 20 százaléka lesz kör, négyzet illetve háromszög. A program egy alakzatot mekkora valószínűséggel fog négyzetként felismerni? Ha egy alakzatot négyzetként ismer fel, akkor mennyi annak az esélye, hogy az input kör, négyzet illetve háromszög volt?

4.12. A hűtőben négy doboz tej van: egy friss; egy, ami egy hete lejárt, és biztosan romlott; továbbá van két doboz, ami egy napja járt le, és 0,3 valószínűséggel romlottak. Véletlenszerűen kiválasztunk egy doboz tejet. Mekkora az esélye, hogy ez a tej nem romlott? Ha megkóstoljuk a kivett tejet, és az romlottnak bizonyul, akkor mi a valószínűsége annak, hogy az egy hete lejárt tejet vettük ki?

4.13. Egy ritka betegséget ezer emberből átlagosan egy kap el. A betegségre létezik egy 95%-os megbízhatóságú szűrőteszt, azaz ekkora a valószínűsége, hogy helyes eredményt ad, akár beteg valaki, akár egészséges. Egy ember megvizsgáltatja magát, és a teszt eredménye pozitív. Mennyi a valószínűsége, hogy tényleg beteg?

4.14. Egy üzemben három gép van, az első adja a termelés felét, a második a 40%-át. Az első és a második gépnél is a termékek 3%-a selejtes. A harmadik gép esetében hány százalék a selejtarány, ha tudjuk, hogy az üzemben termelt selejtes termékek közül 32,5% készült a harmadik gépnél?

5. Diszkrét valószínűségi változók

Házi feladatok

5.1. Magyarországon minden autótulajdonosnak kötnie kell kötelező gépjármű felelősségbiztosítást. Ezen biztosítás esetében úgynevezett bonus-malus rendszert alkalmaznak. Ez azt jelenti, hogy a biztosítók az autósokat különböző fokozatokba sorolják attól függően, hogy azok a múltban hányszor okoztak balesetet. A fokozatokat egész számokkal jelölik, tipikusan -4-től $+10$-ig, és a biztosítási díj fokozatonként eltérő.

Újdonsült autótulajdonosként biztosítást kötök, és ezzel a 0 fokozatba sorolnak. A szerződés értelmében ha egy adott évben nem okozok balesetet, akkor a következő évben eggyel magasabb fokozatba kerülök; ha egynél több balesetet okozok, akkor eggyel alacsonyabb fokozatba sorolnak; míg ha pontosan egy belesetet okozok, akkor maradok a fokozatban. Tegyük fel, hogy egy adott évben 0,5 eséllyel nem okozok balesetet, 0,4 valószínűséggel okozok pontosan egy balesetet, és 0,1 eséllyel okozok egynél több balesetet. Feltehető, hogy a különböző évek eseményei függetlenek egymástól. Az alábbi táblázat azt tartalmazza, hogy az egyes fokozatokban mennyi az éves biztosítási díj.

Fokozat	-2	-1	0	$+1$	$+2$
Éves díj (ezer Ft)	200	130	100	90	85

Jelölje ξ azt, hogy két év múlva mennyi biztosítási díjat kell fizetnem. Adjuk meg a ξ valószínűségi változó értékkészletét, eloszlását, várható értékét és szórását.

5.2. Adott egy vírusos megbetegedés, melyet az emberek 1% eséllyel kapnak el. A betegségre kifejlesztettek egy tesztet, mely a vérben található antitestek alapján mutatja ki a betegség jelenlétét, de az eljárás drága, egy-egy tesztelés ezer dollárba kerül. Egy kórházban a következő módon végzik el a páciensek vizsgálatát. Nem egyesével tesztelik le őket, hanem összevárnak tíz pácienst, és összeöntik a mintáikat. Ha az eredmény negatív, akkor egyik mintában sincs antitest, tehát mindeki egészséges. Ha a teszt eredménye pozitív, akkor ismét elvégzik a tesztet, de ezúttal már mind a tíz emberen külön-külön, hogy kiderüljön, kik betegek közülük. Határozzuk meg, hogy ezzel a módszerrel átlagosan mennyibe kerül egy páciens letesztelése.

5.3. **a.** Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Jelölje ξ azt, hogy hányszor kapunk páratlan számot. Határozzuk meg ξ eloszlását, várható értékét és szórását. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 10 dobásból pontosan annyi páratlan értéket kapunk, mint párosat?

b. Ötször feldobunk két dobókockát. Jelölje η azt, hogy hányszor dobtunk két páratlan számot. Határozzuk meg η eloszlását és várható értékét.

5.4. Egy csatában az egyik harcoló fél ejtőernyőkkel próbál utánpótlást eljuttatni egy körbevett alakulathoz. Az erős szél miatt az ejtőernyők egymástól függetlenül és véletlenszerű helyen érnek földet a 15 km^2 területű csatatéren. Az alakulat egy 1 km^2 területű magaslaton védekezik, és az utánpótlást csak akkor kapják meg, ha az ernyő ezen a magaslaton ér földet. Éppen ezért a vezérkar addig dob le újabb és újabb ejtőernyőket, míg valamelyiket meg nem szerzi az alakulat. Mennyi annak az esélye, hogy pontosan öt ejtőernyőt kell majd ledobni? Mi a valószínűsége annak, hogy ötnél több ledobásra lesz majd szükség? Várhatóan hány ejtőernyőt kell ledobni?

5.5. Egy szelvénnyel játszunk a Skandináv lottón, ahol 35 számból 7-et kell megjelölni. A szabályok szerint a számok két sorsoláson is részt vesznek, egy gépin és egy kézin, ez az úgynevezett ikersorsolás. Mindkét számsorsolás alkalmával 7 számot húznak ki, és akkor nyerünk pénzt, ha valamelyik sorsoláson elérünk legalább 4 találatot.

a. Mennyi annak az esélye, hogy a gépi sorsoláson pontosan 4 találatot érünk el? Mekkora valószínűséggel érünk el legalább 4 találatot? Mennyi a gépi sorsoláson a találatok számának a várható értéke?

b. Mennyi annak az esélye, hogy a két sorsolás közül az egyiken nincs találatunk, a másikon pedig pontosan 1 találatot érünk el? Mekkora annak a valószínűsége, hogy valamelyik soroláson lesz legalább 4 találatunk, tehát nyerünk pénzt?

5.6. Orvosi kutatások szerint az egységnyi nagyságú rádioaktív besugárzás véletlen számú mutációt okoz egy kromoszomán. A mutációk száma Poisson-eloszlást követ, és a besugárzások 13,5 százalékában nem történik egy mutáció sem. Az egységnyi nagyságó besugárzás átlagosan hány mutációt okoz? Mennyi annak az esélye, hogy a besugárzás hatására a várható értéknél több mutáció történik?

További gyakorló feladatok

5.7. Mi legyen az a valós paraméter értéke, hogy a következő értékek valószínűségeloszlást alkossanak: $p_0 = 0{,}25$, $p_2 = a$, $p_8 = a^2$?

5.8. Anna, Bori és Cili pizzát rendelnek, három különböző fajtát. Amikor a pizza megérkezik, véletlenszerűen osztják ki egymás között a dobozokat. Jelölje ξ azt, hogy a lányok közül hányan kaptak olyan pizzát, amilyet rendeltek. Határozzuk meg a ξ változó eloszlását, eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását.

5.9. Feldobok egy szabályos pénzérmét. Ha az eredmény fej, akkor az érmét még egyszer, ha írás, akkor még kétszer dobom fel újra. Határozzuk meg az összesen kapott fejek számának eloszlását, eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását.

5.10. Egy gyárban három nagy teljesítményű dízelmotor üzemel, melyek egy adott időpontban egymástól függetlenül 0,5, 0,6 illetve 0,7 valószínűséggel működnek. Jelölje ξ azt, hogy egy adott időpontban hány dízelmotor üzemel.

a. Adjuk meg a ξ változó eloszlását, eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását.

b. Amennyiben egy adott időpillanatban x dízelmotor üzelem, akkor a dolgozókat $50\sqrt{x}$ dB zajterhelés éri. Határozzuk meg a zajterhelés átlagos értékét.

5.11. Szükségünk van egy működő fluxuskondenzátorra. Szerencsére ilyen berendezésből öt is van nekünk raktáron, de ezek közül csak kettő működőképes, és nem tudjuk, hogy melyik az a kettő. Éppen ezért egymás után bevizsgáljuk őket egészen addig, míg nem találunk egy működőképeset.

a. Adjuk meg a bevizsgált fluxuskondenzátorok számának eloszlását, eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását. Mennyi annak az esélye, hogy legfeljebb két berendezést kell megvizsgálnunk?

b. Egy-egy bevizsgálás 30 ezer forintunkba kerül. Határozzuk meg, hogy várhatóan mennyi pénzt költünk el összesen a bevizsgálásokra.

5.12. Egy kaszinóban a következő játékot lehet játszani. A játékos feldob egy szabályos dobókockát, és ha az eredmény 3-nál nagyobb, akkor nyer 1000 forintot, valamint jogot szerez egy újabb dobásra. Ha a második dobás nagyobb, mint 4, akkor további 2000 forintot kap, és dobhat egy harmadikat is. A játékos a harmadik alkalommal már csak akkor nyer, ha 6-ost dob, és ekkor további 6000 forint a nyereménye. Több dobásra nincsen lehetőség. Jelölje ξ az össznyereményt a játék során.

a. Határozzuk meg a ξ változó eloszlását, eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását. Mennyi annak az esélye, hogy nyerünk legalább 3000 forintot?

b. A kaszinó természetesen nem ingyen ajánlja fel a játéklehetőséget, a játékért az első kockadobás előtt egy előre meghatározott díjat kell befizetni, ez a játék ára. Mennyi a játék igazságos ára? Egy profitorientált kaszinó mennyi pénzt fog kérni a játékért? Hosszú távon a kaszinó által kiszabott ár megéri a játékosnak?

5.13. **a.** Egy ingatlanügynökségnél az eladott lakások 30%-át szokták a vevők hitel felvétele mellett fizetni. A következő hétre 6 lakás van eladásra előjegyezve. A ξ valószínűségi változó jelölje a hitelkonstrukcióban értékesített lakások számát. Adjuk meg ξ eloszlását, várható értékét és szórását. Mi annak a valószínűsége, hogy egynél több, de ötnél kevesebb lakáseladáshoz vesznek majd fel hitelt?

b. Egy másik ingatlanügynökségnél a lakások 40%-át szokták eladni hitelfelvétel mellett, és náluk 8 eladás van előjegyezve a jövő hétre. Mennyi annak az esélye, hogy az első ügynökségnél pontosan 2, a másodiknál pedig pontosan 4 lakást adnak el hitelkonstrukcióban? (A két cégnél a lakáseladások száma független.)

5.14. Oldjuk meg az **5.10.** feladat a. részét azzal a módosítással, hogy egy adott időpontban a három motor továbbra is egymástól függetlenül, de azonosan 0,6 valószínűséggel üzemel. Lehetőség szerint alkalmazzuk valamelyik nevezetes diszkrét eloszlást. Ezzel a nevezetes eloszlással meg lehet oldani az eredeti feladatot is? Miért igen vagy nem?

5.15. Lajos kulcscsomóján három kulcs van, ezek közül az egyik a lakásának a bejárati ajtaját nyitja. Egy este elmegy a barátaival italozni, és hazaérve azt tapasztalja, hogy nem tudja megkülönböztetni a kulcsait. Elhatározza, hogy addig választ véletlenszerűen újabb és újabb kulcsot, míg végül sikerül kinyitnia a lakás ajtaját.

a. Adjuk meg a szükséges próbálkozások számának az eloszlását, ha Lajos nem jegyzi meg, hogy melyik kulccsal próbálkozott már korábban, hanem minden egyes alkalommal a három közül választ egyet véletlenszerűen? Mennyi annak az esélye, hogy legfeljebb három próbálkozásra lesz majd szükség? Mennyi a próbálkozások számának a várható értéke és szórása?

b. Miben változik az a. pont megoldása, ha Lajos minden egyes próbálkozás során $1/2$ valószínűséggel fejjel lefelé próbálja meg beleerőltetni a kulcsot a zárba? (Mármint nem Lajos áll fejjel lefelé, hanem csak a kulcs. Ilyen módon Lajos a jó kulccsal sem tudja kinyitni az ajtót.)

c. Miben változik az a. pont megoldása, ha Lajos megjegyzi, hogy melyik kulccsal próbálkozott már korábban?

5.16. Addig dobunk fel két szabályos dobókockát újra és újra, míg duplát, tehát két azonos értéket nem kapunk. Mennyi annak az esélye, hogy az első duplát az ötödik dobásra kapjuk majd? Mi a valószínűsége annak, hogy ötnél több dobás kell majd? Várhatóan hanyadik dobásra kapjuk majd az első duplát?

5.17. Egy gyárban egy adott napon 50 terméket készítettek, ebből 15 selejtes. Minőségellenőrzéskor véletlenszerűen kivesznek egyszerre 5 terméket, és megvizsgálják őket. Jelölje ξ a mintában talált selejtes termékek számát. Határozzuk meg a ξ változó eloszlását és várható értékét. Mennyi annak az esélye, hogy legfeljebb egy selejtes termék lesz a mintában?

5.18. Anna és a három barátnője egy 20 fős gimnáziumi osztályba járnak, és hétfőnként biológia és kémia órájuk is van. Biológiából három, kémiából két embert szokott felelteni egy-egy órán. A tanárok egymástól függetlenül és véletlenszerűen választják ki az aznapi felelőket.

a. Jelölje ξ azt, hogy egy hétfői napon a négy barátnő közül hányan felelnek biológiából. Adjuk meg a ξ változó eloszlását és várható értékét.

b. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy hétfői napon a négy barátnő közül pontosan ketten felelnek biológiából, de senki sem felel kémiából. A lányoknak várható értékben hány felelést kell teljesíteniük a két órán összesen?

5.19. A randomizált keresőalgoritmusok a keresőalgoritmusoknak egy egyszerű változata. Tegyük fel, hogy van egy adatbázisunk 1000 adatrekorddal, és a rekordok ötöde teljesít valamilyen tulajdonságot. Szükségünk lenne 1 darab olyan rekordra, mely rendelkezik a fenti tulajdonsággal. A keresést végrehajthatjuk olyan módon is, hogy véletlenszerűen veszünk ki rekordokat az adatbázisból, és megnézzük, hogy a kiválasztott elemek megfelelnek-e számunkra. Az ilyen algoritmusok hatékonyságát mérhetjük egyrészt a futási idő várható értékével, másrészt annak a valószínűségével, hogy az eljárás végén kapunk legalább egy megfelelő rekordot.

a. Véletlenszerűen és visszatevéssel kiveszünk 50 rekordot. Mennyi az esélye, hogy lesz közöttünk olyan, ami rendelkezik a keresett tulajdonsággal? Mennyi annak az esélye, hogy pontosan 10 rekord fog rendelkezni ezzel a tulajdonsággal. Várhatóan hány rekord fog rendelkezni a keresett tulajdonsággal?

b. Oldjuk meg az a. feladatot visszatevés nélküli mintavételezéssel is.

c. Addig veszünk ki újabb és újabb rekordokat visszatevéssel, míg olyat nem kapunk, ami rendelkezik a keresett tulajdonsággal. Adjuk meg a szükséges kiválasztások számának eloszlását és várható értékét. Mennyi annak az esélye, hogy legfeljebb 10 rekordot kell majd kivenni?

5.20. Egy szerver esetében az egy órára eső lekérdezések száma Poisson-eloszlást követ, és a különböző órákra jutó lekérdezések száma független egymástól.

a. Napközben óránként átlagosan 5 lekérdezik érkezik a szerverre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott óraban pontosan 3 lekérdezés történik? Mennyi az egy órára jutó lekérdezések számának a szórása? Mennyi az esélye, hogy két egymást követő órában pontosan 2 illetve 3 lekérdezés történik?

b. Az éjszakai órákban gyérebb az adatforgalom, az órák 5 százalékában nem is érkezik lekérdezés. Éjszakánként átlagosan hány lekérdezés jut egy órára?

5.21. A randomizált kommunikációs protokollokat főleg olyan hálózatokban alkalmazzák, ahol nagy számú szerver használ egy közös csatornát, és a szerverek azonos prioritással rendelkeznek. Tegyük fel, hogy minden szervernek van egy órája, melyek szinkronizálva vannak. A szerverek időegységenként egy adatcsomagot küldhetnek, és ha egy adott időegység során több szerver is küld csomagot, akkor ütközés történik, a csomagok tönkremennek. A „slotted ALOHA" protokoll szerint a szerverek bármikor küldhetnek csomagot. Ez azt jelenti, hogy egy adott időegységben akkor történik sikeres adatátvitel, ha pontosan 1 szerver kívánja használni a csatornát.

a. Tegyük fel, hogy azon szerverek száma, melyek egy adott időpontban használni kívánják a csatornát, Poisson-eloszlást követ λ paraméterrel. Mekkora a csatorna kihasználtsága a λ paraméter függvényében, tehát egy-egy időegység során mekkora valószínűséggel történik sikeres adatátvitel? Deriválással határozzuk meg, hogy milyen λ mellett lesz maximális a csatorna kihasználtsága, és adjuk meg a maximum értékét is.

b. Mit tegyünk, ha ütközés történik? Az első ötlet az, hogy a szerverek várjanak egy kis időt, mondjuk 10 időegységet, és próbálkozzanak újra. Vegyük észre, hogy ez ismét csak ütközést okozna, hiszen minden szerver ugyanezt a szabályt követné. Egy lehetséges megoldás erre a problémára a CSMA (carrier sense multiple access), ami szerint a szerverek véletlen nagyságú ideig várakoznak. Ez úgy valósítható meg, hogy az ütközés után a szerverek egymástól függetlenül elkezdenek dobálni egy pénzérmét, mely p valószínűséggel ad fejet, és csak az után próbálkoznak újra, hogy először fejet kapnak. Mennyi annak az esélye, hogy egy szervernek 5 időegységnél többet kell várnia? Mennyi a várakozási idő várható értéke? Ha két szerver ütközött, akkor mennyi az esélye annak, hogy azonos lesz a két várakozási idő, tehát ismét ütközni fognak?

6. Folytonos valószínűségi változók

Házi feladatok

6.1. A biztosítótársaságok valószínűségi változókkal modellezik azt, hogy mekkora a kár nagysága, ha bekövetkezik a káresemény. Egy speciális biztosítás esetén a kár millió forintban kifejezett nagysága egy olyan folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} a/x^3\,, & x \geq 1\,, \\ 0\,, & x < 1\,. \end{cases}$$

a. Ábrázoljuk a sűrűségfüggvényt és adjuk meg az a paraméter értékét! Mi a valószínűségi változó értékkészlete?

b. Határozzuk meg a kárnagyság várható értékét és szórását!

6.2. Véletlenszerűen kiválasztunk egy egyedet egy állatpopulációból. A korábbi kutatások alapján ismert, hogy ekkor a kiválasztott egyed testtömege egy olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{14}\sqrt{x}\,, & 1 \leq x \leq 4\,, \\ 0\,, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a. Határozzuk meg a változó értékkészletét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott egyed tömege legfeljebb 2? Mennyi annak az esélye, hogy az egyed tömege legalább 3? Mekkora valószínűséggel kapunk 2 egységnél kisebb tömegű egyedet?

b. Írjuk fel a változó eloszlásfüggvényét! Határozzuk meg a változó mediánját illetve alsó és felső kvartilisét! Mi a jelentése ennek a három értéknek a populációra nézve?

6.3. Roger Federer a világ legsikeresebb teniszezője. Amikor szervál, a labda sebessége egy olyan valószínűségi változó, mely egyenletes eloszlást követ 48 és 60 m/s között. (Tehát 173 és 216 km/h között.)

a. Federer szerváinál mennyi a labda sebességének várható értéke illetve szórása? A szervák mekkora hányada gyorsabb, mint 50 m/s?

b. A teniszpályák 24 méter hosszúak. Jelölje η azt, hogy Federer adogatásainál a labda mennyi idő alatt teszi meg ezt az utat! Adjuk meg az η valószínűségi változó értékkészletét! Mennyi annak az esélye, hogy az η kisebb, mint 0,48 másodperc? Ezek alapján az η változó egyenletes eloszlást követ?

c. Határozzuk meg az η változó várható értékét és szórását!

d. Írjuk fel az η változó eloszlásfüggvényét illetve sűrűségfüggvényét!

6.4. Egy internetes áruházban az egymást követő vásárlások között véletlen hosszúságú idő telik el, és ez az idő exponenciális eloszlást követ. Azt is tudjuk, hogy a vásárlások átlagosan 2 percenként követik egymást. A webárúházban éppen most vásárolt valaki, és arra vagyunk kíváncsiak, hogy mikor érkezik be a következő rendelés. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a következő rendelés 1 percen belül megérkezik? Mennyi annak az esélye, hogy a következő rendelésre legalább 1, de legfeljebb 2 percet kell várni? Tegyük fel, hogy már 1 órája várunk a következő rendelésre! Mennyi az esélye, hogy ezek után a rendelés 1 percen belül meg fog majd érkezni?

További gyakorló feladatok

6.5. Egy ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ábrázoljuk a sűrűségfüggvényt és adjuk meg a ξ változó értékkészletét! Mennyi a $P(0{,}5 \leq \xi \leq 1{,}5)$ és a $P(\xi > 0{,}5)$ valószínűségek értéke? Adjuk meg a ξ változó várható értékét és szórását is!

6.6. Egy ξ folytonos változó sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = 1/(x \ln 2)$, ha $1 \leq x \leq 2$, és $f_\xi(x) = 0$ minden más x esetén. Ábrázoljuk a sűrűségfüggvényt és adjuk meg a ξ változó értékkészletét! Mennyi a $P(0{,}5 \leq \xi \leq 1{,}5)$ és a $P(\xi < 1{,}5)$ valószínűségek értéke? Adjuk meg a ξ változó várható értékét és szórását is!

6.7. Jelölje a ξ egy befektetési alap értéknövekedését az elkövetkezendő egy évben. Egy elemzés szerint a ξ változó az alábbi sűrűségfüggvénnyel írható le, az értékek millió dollárban értendőek:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0{,}08 + ax, & -1 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg az a paraméter értékét és adjuk meg az értékkészletet! Írjuk fel és ábrázoljuk a változó eloszlásfüggvényét is! Ennek segtségével adjuk meg a ξ változó 1%-os kvantilisét!

6.8. Amikor telefonálok, a beszélgetéseim percekben kifejezett hosszúsága egy ξ valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = a/x^2$, ha $1 \leq x \leq 5$, és $f_\xi(x) = 0$ egyébként. Határozzuk meg az a paraméter értékét és a ξ változó értékkészletét! Írjuk fel és ábrázoljuk az Adjuk meg a telefonhívásaim hosszának mediánját.

6.9. A TESCO-ban a narancsot a minőségtől függően változó áron árulják. Feltehető, hogy az ár egyenletes eloszlást követ 300 és 500 forint között.

a. Jelölje ξ a narancs árát egy véletlenszerűen választott napon. Írjuk fel és ábrázoljuk a ξ sűrűségfüggvényét. Átlagosan mennyibe kerül a narancs a TESCO-ban? Mennyi az ár szórása? Mennyi annak az esélye, hogy a kilónkénti ár 375 forint alatt marad?

b. Jelölje η azt, hogy 1500 forintból hány kiló narancsot tudok vásárolni. Fejezzük ki az η valószínűségi változót a ξ segítségével. Mennyi annak az esélye, hogy a pénzem elég 4 kiló narancsra? Mennyi az η várható értéke, és mit fejez ki ez a várható érték? Teljesül az az egyenlőség, hogy $E(\eta) = 1500/E(\xi)$?

c. Határozzuk meg az η változó eloszlásfüggvényét illetve sűrűségfüggvényét! Számoljuk ki az η változó várható értékét közvetlenül a sűrűségfüggvényből is! Azt az eredményt kapjuk, amit az előző pontban?

6.10. Egy adott típusú izzó élettartama exponenciális eloszlást követ ismeretlen λ paraméterrel. A tapasztalatok szerint az izzók 10%-a megy tönkre 500 óra használat során. Írjuk fel az élettartam eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét. Mekkora az izzók átlagos élettartama? Az izzók mekkora hányada éri el az 1000 órás élettartamot? Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy izzó élettartama 500 és 1000 óra közé esik? Feltéve, hogy egy izzó már 10.000 órája működik, mennyi az esélye, hogy még 1000 órán keresztül világítani fog?

6.11. A rádioaktív anyagok atomjainak élettartama exponenciális eloszlást követ. A 60-as tömegszámú kobalt izotóp felezési ideje 5,27 év, tehát ennyi idő alatt bomlik le a részecskék fele.

a. Írjuk fel a ^{60}Co atomok élettartamának eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét. Mennyi az élettartam várható értéke? A részecskék mekkora hányada bomlik le 52,7 év alatt? A részecskék mekkora hányada éri el az 52,7 éves „kort” és bomlik le utána 5,27 éven belül?

b. Feltéve, hogy egy részecske nem bomlott le 52,7 év alatt mennyi annak az esélye, hogy a következő 5,27 év folyamán sem bomlik le? Mi lehet az elméleti oka annak, hogy a rádioaktív atomok élettartama exponenciális eloszlást követ?

7. A normális eloszlás és a centrális határeloszlás-tétel

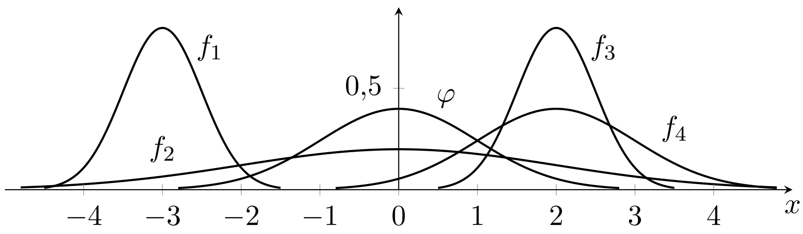
Házi feladatok

7.1. Az alábbi ábrán φ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Határozzuk meg, hogy az f_1, f_2, f_3, f_4 sűrűségfüggvények közül melyik tartozik az alábbi μ várható értékkel és σ szórással definiált normális eloszlásokhoz. Adjuk meg a kimaradt sűrűségfüggvényhez tartozó várható értéket és szórást is.

a. $\mu = 2, \sigma = 0{,}5$

b. $\mu = 2, \sigma = 1$

c. $\mu = 0, \sigma = 2$



7.2. Legyen ξ egy véletlenszerűen kiválasztott felnőtt ember szisztolés vérnyomása higanymilliméterben (mmHg) kifejezve. A statisztikai adatok alapján ξ egy-egy földrajzi területen lognormális eloszlást követ, ami azt jelenti, hogy az $\ln \xi$ valószínűségi változó normális eloszlású. A paraméterek országonként változóak, például az Egyesült Államokban az $\ln \xi$ változó várható értéke és szórása $\mu = 4{,}78$ illetve $\sigma = 0{,}16$. (Forrás: National Health and Nutrition Examination Survey, 2006.)

a. Az orvosi szakirodalom a 140 mmHg feletti vérnyomást tekinti kórosan magasnak. Ez az amerikai felnőtt népesség mekkora hányadát érinti?

b. Az emberek mekkora hányadának esik a vérnyomása az egészségesnek tekintett tartományba, tehát 90 és 130 mmHg közé?

c. Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a felnőtt népesség 95 százalékának a szisztolés vérnyomása ide esik.

7.3. A valószínűségszámítás kurzust ebben a félévben körülbelül 280 hallgató vette fel, és a korábbi tapasztalatok alapján az egyes hallgatók 65% eséllyel teljesítik a kurzust. Várhatóan hányan fognak majd megbukni? Mennyi a bukott hallgatók számának a szórása? Mennyi a valószínűsége, hogy ebben a félévben legalább 90, de legfeljebb 106 bukás lesz? Milyen t értékre teljesül, hogy 0,9 eséllyel legfeljebb t hallgató bukik meg?

7.4. Egy Coca-Cola autómatában 50 doboz jéghideg üdítő található. Egy forró nyári napon az emberek átlagosan 5 percenként vásárolnak egy doboz üdítőt, a vásárlások között eltelt idő szórása 3 perc. Várhatóan mennyi idő alatt fogy el az üdítő az autómatából? Mennyi ennek az időnek a szórása? Mennyi a valószínűsége, hogy ez az idő 220 és 270 perc közé esik? Adjunk meg egy olyan t értéket, melyre teljesül, hogy az autómata 99% eséllyel kifogy ennyi idő alatt.

További gyakorló feladatok

7.5. Egy tejgyárban az 1 literes dobozos tej csomagolását egy automata töltőberendezés végzi. A dobozokba töltött mennyiség egy normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke a névleges tartalom és szórása 10 ml. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy dobozt, akkor mennyi annak az esélye, hogy a doboz tartalma legfeljebb 2%-kal tér el a névleges tartalomtól? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a tejesdobozok 99%-ka ebbe az intervallumba esik. Mennyi legyen a töltőberendezés szórása, ha azt szeretnénk, hogy a dobozoknak csupán 10%-a tartalmazzon 990 ml-nél kevesebb tejet?

7.6. **a.** Az IQ teszteket úgy állítják össze, hogy az eredmény a felnőtt populáción belül normális eloszlást kövessen 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. A felnőtt népesség mekkora hányadának esik az IQ pontszáma 90 és 120 közé? A Mensa egy nemzetközi egyesület, ahol a belépés feltétele a legalább 131 pontos IQ. A népesség hány százaléka felel meg ennek a követelménynek? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy az emberek 95 százalékának ebbe az intervallumba esik az IQ pontszáma.

b. Az újságokban megjelenő IQ tesztek gyakran szándékosan torzítottak azért, hogy az olvasók számára kedvező pontszámok jöjjenek ki. Hány pont legyen a teszt várható értéke, ha az a cél, hogy az emberek 40 százaléka elérje a Mensa belépési feltételét? (A szórás továbbra is 15 pont.)

7.7. Biológusok azt vizsgálták, hogy a szavannán élő majmok reggelente milyen eloszlás szerint ébrednek fel, és másznak le a fáról. A megfigyelések alapján azt találták, hogy az ébredési idő egy olyan valószínűségi változó, mely normális eloszlást követ 0,75 óra szórással, továbbá a majmok 9 százaléka kel fel reggel 5 óra előtt. Átlagosan mikor ébrednek a majmok? Mekkora hányaduk kel fel 6 óra 30 perc után? Adjunk meg egy olyan időintervallumot, melyre teljesül, hogy a majmok 90 százaléka ebben az időintervallumban mászik le a fáról. (Valós kutatás alapján.)

7.8. Magyarországon az emberek 85 százaléka gyermekkorában átesik a bárányhimlőn. Megkérdezünk 1000 felnőttet, hogy átesett-e gyermekkorában ezen a betegségen. Várhatóan hányan fognak majd igent mondani? Mennyi annak az esélye, hogy a megkérdezettek közül legalább 840, de legfeljebb 860 ember esett át a bárányhimlőn. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a válaszadók legalább 88 százaléka átesett a betegségen? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy az igennel válaszolók száma 99 százalék eséllyel ebbe az intervallumba esik.

7.9. Adott két egyforma térfogatú tartály, kezdetben az egyik üres, a másikban valamennyi gáz található. A két tartályt egy cső köti össze, melyen keresztül a gázmolekulák szabadon vándorolhatnak a tartályok között. Elendően sok idő elteltével feltehető, hogy a molekulák egymástól függetlenül 1/2-1/2 valószínűséggel fognak majd elhelyezkedni az egyes tartályokban. Jelölje ξ azt, hogy egy adott időpillanatban hány molekula található a kezdetben üres tartályban.

a. Tegyük fel, hogy a gázmolekulák száma 10^6. Adjuk meg ξ eloszlását, várható értékét és szórását. Közelítőleg mennyi annak az esélye, hogy ξ értéke legfeljebb fél százalékkal fog majd eltérni a várható értéktől? A tartályban a nyomás egyenesen arányos a molekulaszámmal. A kapott eredmény hogyan magyarázza a nyomáskiegyenlítődés jelenségét?

b. Adjuk meg a ξ változó várható értékét és szórását abban az esetben is, mikor a tartály $25 \cdot 10^{24}$ gázmolekulát tartalmaz. (Légköri nyomáson körülbelül ennyi molekula található $1\,\mathrm{m}^3$ levegőben.) Közelítőleg mennyi annak az esélye, hogy a ξ változó legfeljebb 1/1.000.000.000 százalékkal tér el a várható értéktől?

7.10. Feldobunk 500 szabályos dobókockát.

a. Mennyi a kapott hatosok számának a várható értéke és szórása? Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 100 hatos kapunk? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a hatosok száma 95% százalék valószínűséggel ebbe az intervallumba esik.

b. Mennyi a dobott értékek összegének a várható értéke és szórása? Mennyi annak az esélye, hogy a dobott számok összege 1650 és 1850 közé esik? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a dobott számok összege legalább 99% valószínűséggel ebbe az intervallumba esik.

7.11. Egy biztosítótársaságnál egy adott típusú biztosítás esetében a kárérték egyenletes eloszlást követ 200 és 400 ezer forint között. Egy adott hónapban 100 egymástól független kárbejelentés érkezik. Mennyi az össz kárérték várható értéke és szórása? Az össz kárérték mekkora valószínűséggel esik 29 és 31 millió forint közé? Adjunk meg egy olyan intervallumot, amely közelítőleg 95% valószínűséggel tartalmazza a teljes kárértéket.

7.12. A repülőgépeknél az üzemanyag-fogyasztás szempontjából fontos tényező az utasok és a poggyász tömege. A statisztikai adatok szerint egy-egy utasnak és a személyes poggyászának az együttes tömege egy olyan valószínűségi változó, melynek a várható értéke 100 kg, szórása pedig 25 kg. (A különböző utasok tömege független egymástól.) Tegyük fel, hogy egy repülőgépre 120 utas száll fel. Mennyi az utasok és a poggyász teljes tömegének a várható értéke és szórása? Meg tudjuk mondani, pontosan mennyi annak az esélye, hogy ez a tömeg 12,8 tonna alatt marad? És közelítő valószínűséget tudunk mondani? Közelítőleg mi a valószínűsége annak, hogy a teljes tömeg 11.500 kg és 12.500 kg közé esik? Adjunk meg egy olyan intervallumot, mely 99% valószínűséggel tartalmazza az utasok és a poggyász teljes tömegét.

7.13. A magyar egyetemisták testtömegének az átlaga 80 kg, a szórása 15 kg. A Károlyi Kollégiumban beszáll a liftbe 8 ember, akikről feltehető, hogy egymástól független a tömegük. Határozzuk meg a 8 egyetemista együttes testtömegének várható értékét és szórását. Ennyi információ birtokában meg tudjuk azt mondani, hogy a 8 ember össztömege mekkora eséllyel éri el a 800 kg-ot, ami a lift maximális teherbírása?

7.14. Szeretnénk megmérni egy fizikai mennyiséget, melynek az értéke egy ismeretlen, de deteminisztikus a szám. Sajnos a mérési hibák miatt egy-egy mérés során nem közvetlenül az a értéket kapjuk meg eredményül, hanem csak egy ξ valószínűségi változót. Éppen ezért több mérést végzünk el, és az a értékre az $\hat{a}_n = (\xi_1 + \cdots + \xi_n)/n$ becslést adjuk, ahol n a mérések száma, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ pedig ez egyes mérések eredménye. (A $\xi_1, \ldots, \xi_n$ változók függetlenek és azonos eloszlásúak, továbbá feltehető, hogy a centrális határeloszlás-tétel már $n \geq 10$ esetén is alkalmazható.) Ennyi információ alapján tudunk bármit is mondani az a számról? Sajnos nem, hiszen semmit sem tudunk a ξ változó eloszlásáról.
Tesztméréseket végzünk el, melyek során olyan mennyiségeket mérünk meg, melyeknek ismerjük a pontos nagyságát. Tegyük fel, kiderül, hogy a mérés torzítatlan, ami azt jelenti, hogy a ξ változó várható értéke azonos a megmérni kívánt mennyiség nagyságával. Emellett az is kiderül, hogy $D(\xi) = 10$.

a. Adjuk meg $\hat{a}_n$ várható értékét és szórását az a és az n paraméter függvényében. A kapott értékek tükrében jó ötlet az $\hat{a}_n$ átlaggal becsülni az a mennyiséget?

b. Adjunk meg egy olyan intervallumot az a és az n paraméter függvényében, mely 99% eséllyel tartalmazza az $\hat{a}_n$ átlagos értéket. Hány mérést végezzünk el, ha az a célunk, hogy az a értéket 99% megbízhatósággal és 5 pontossággal megkapjuk, tehát $P(|a - \hat{a}_n| \leq 5) \geq 99\%$ teljesüljön?

c. Milyen szórással kell mérnünk ahhoz, hogy a **b.** pontban előírt megbízhatóság és pontosság $n = 10$ mérés esetén is teljesüljön: $P(|a - \hat{a}_{10}| \leq 5) \geq 99\%$.

8. Együttes eloszlás és korrelációs együttható

Ezt a témakört csak azon csoportokban kérjük számon, ahol ténylegesen jutott idő ilyen feladatokat venni.

8.1. Feldobok egy szabályos dobokóckát, és legyen ξ a dobott érték kettővel, η pedig a dobott érték hárommal vett maradéka. Adjuk meg a két változó együttes eloszlását és korrelációs együtthatóját. Független egymástól a ξ és az η változó?

8.2. Adott két szabályos pénzérme, melyek egyik oldalára 1-es számot, a másik oldalára 0-t írunk. Feldobva az érméket jelölje ξ a kapott számok összegét, η pedig a kapott számok szorzatát. Határozzuk meg a két változó együttes eloszlását és a korrelációs együtthatót.

8.3. Egy vállalat egy hónapra eső profitja a havi teljes bevétel és a havi teljes kiadás különbségeként áll elő, ahol a bevétel és a kiadás is valószínűségi változó. A bevétel várható értéke 120 millió forint 30 millió forint szórással, míg a kiadás várható értéke 80 millió forint 20 millió forint szórással. Határozzuk meg az egy hónapra jutó profit várható értékét és szórását akkor, ha a bevétel és a kiadás független, illetve akkor, ha a közöttük lévő korrelációs együttható 0,8. A korreláció függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk grafikonon a profit várható értékét és varianciáját.

8.4. A megtakarított pénzünket értékpapírba fektetjük, 20 darabot vásárolunk az A vállalat és 10 darabot a B vállalat részvényeiből. Egy év múlva a két vállalat részvényei várható értékben 700 illetve 1500 dollárt fognak majd érni, az árfolyamok szórása pedig 20 illetve 80 dollár.

- **a.** Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama független egymástól. Várhatóan menynyit fog majd érni a portfóliónk egy év múlva? Mennyi a portfólió értékének a szórása?
- **b.** Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama nem független egymástól. Az árfolyamok közötti korrelációs együttható függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk a portfólió értékének várható értékét és varianciáját.
- **c.** Milyen kapcsolat van a korrelációs együttható és a befektetés kockázata között? Ha én egy kockázatkerülő befektető vagyok, akkor pozitív vagy negatív korrelációjú értékpapírokból állítsak össze portfóliót?

8.5. A Tisza és a Maros vízhozama egy számunkra ismeretlen eloszlást követ. Azt tudjuk, hogy közvetlenül Maros torkolata előtt a Tisza vízhozamának várható értéke 660 m^3/s, szórása 160 m^3/s, míg a Maros vízhozamának várható értéke 200 m^3/s, szórása 50 m^3/s.

- **a.** Tegyük fel, hogy a két folyó vízhozama független egymástól. Adjuk meg a Tisza Belvárosi hídnál mért vízhozamának várható értékét és szórását.

b. Tegyük fel, hogy a két vízhozam nem független egymástól. A vízhozamok közötti korrelációs együttható függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk a Belvárosi hídnál mért vízhozam várható értékét és varianciáját.

c. A valóságban független egymástól a két vízhozam? Ha nem, akkor pozitív vagy negatív előjelű a korrelációs együttható értéke? Az árvízi védekezés szempontjából melyik lenne jobb, a pozitív vagy a negatív korreláció?

9. Alapstatisztikák, konfidencia intervallumok, paraméterbecslések

9.1. Egy ξ valószínűségi változó értékeit megfigyelve a következő statisztikai mintát kapjuk: 6,5, 7,3, 5,4, 6,5, 2,1.

a. Ábrázoljuk a minta empirikus eloszlásfüggvényét, valamint számoljuk ki a következő statisztikákat: empirikus várható érték, korrigálatlan/korrigált empirikus variancia és empirikus szórás, medián.

b. Tegyük fel, hogy a ξ háttérváltozó normális eloszlást követ 2 szórással. Adjunk 95% megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a ξ várható értékére.

c. Oldjuk meg az előző feladatrészt azzal a módosítással, hogy a változó szórását a mintából becsüljük. Adjunk meg egy 95% megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a ξ szórására is.

9.2. Bejelentés érkezik a fogyasztóvédelemhez, hogy az egyik tejgyár 1 literes kiszerelésű dobozos teje a névleges tartalomnál kevesebbet tartalmaz. Tudni kell, hogy a töltőberendezések véletlen nagyságú hibával dolgoznak, így ténylegesen egyik dobozban sincs pontosan 1 liter tej. Feltehető, hogy a dobozokba töltött mennyiség egy ξ normális eloszlású valószínűségi változó, melynek 1 liter a várható értéke, ha a gép jól van beállítva. A fogyasztóvédelem emberei beszereznek hat doboz tejet, és azt találják, hogy ezek 975, 980, 985, 995, 1000, 1010 ml tejet tartalmaznak. (A dobozokban található tej mennyisége független egymástól.)

a. Ábrázoljuk a minta empirikus eloszlásfüggvényét, valamint számoljuk ki a következő statisztikákat: empirikus várható érték, korrigálatlan/korrigált empirikus variancia és empirikus szórás, medián.

b. Tegyük fel, hogy a ξ háttérváltozó normális eloszlást követ 10 ml szórással. Adjunk 90% megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a ξ várható értékére.

c. Oldjuk meg az előző feladatrészt azzal a módosítással, hogy a változó szórását a mintából becsüljük. Adjunk meg egy 90% megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a ξ szórására is.

9.3. Egy almáskertben a fákat egy betegség támadja meg. A kertben tíz ültetvény található, melyekben rendre 0, 3, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 1 és 2 beteg fát találtak. Feltehető, hogy a beteg fák száma az egyes ültetvényekben független egymástól és Poisson-eloszlást követ. Adjunk becslést a Poisson-eloszlás λ paraméterése a maximum likelihood illetve a momentum módszer segítségével.

9.4. Egy adott típusú izzó egy-egy felkapcsolás során rendre $p \in (0, 1)$ valószínűséggel ég ki. A gyárban n izzót tesztelve azt tapasztalják, hogy ezek $x_1, \ldots, x_n$ felkapcsolás után égtek ki. Adjunk becslést a p értékre a maximum likelihood illetve a momentum módszer segítségével.

9.5. Adott egy véletlen kísérlet, és egy ehhez kapcsolódó A esemény. Becslést szeretnénk adni az esemény ismeretlen $p = P(A)$ valószínűségére. Ennek érdekében n alkalommal megismételjük a kísérletet, és jelölje $k_n(A)$ az A esemény bekövetkezési gyakoriságát, tehát azt, hogy az esemény hányszor következett be az n darab végrehajtás során. Ekkor $k_n(A)$ egy 1 elemszámú minta az n és p paraméteres binomiális eloszlású valószínűségi változóra. Adjunk becslést a p paraméterre a maximum likelihood és a momentum módszerrel. (Az n paraméter ismert, ezt nem kell becsülni.)

9.6. A bálnaállomány becslésére a következő módszert szokták alkalmazni. Néhány napon át kb. 30 cm hosszú fémhengereket lőnek be a bálnák zsírpárnájába, közvetlenül a bőr alá. Feljegyzik, hogy hány bálnát jelölnek meg (M), majd felszólították a bálnavadászokat, hogy adják meg, hány bálnát fogtak ki összesen (n), és ezek közül hány volt megjelölve (k). Ezen mennyiségek ismeretében a momentumok módszerét alkalmazva adjunk becslést a bálnák N számára.

9.7. **a.** Mutassuk meg, hogy az alábbi f függvény sűrűségfüggvény tetszőleges $a > -1$ esetén. Határozzuk meg a sűrűségfüggvényhez tartozó várható értéket is.

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)x^a\,, & 0 < x < 1\,, \\ 0\,, & \text{különben.} \end{cases}$$

b. A következő minta az f sűrűségfüggvény által definiált eloszlásból származik: 0,1, 0,4, 0,6, 0,8, 0,9. Adjunk becslést az a paraméter értékére a maximum likelihood illetve a momentum módszer alkalmazásával.

9.8. Egy adatszerverre a lekérdezések exponenciális időközönként érkeznek ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterrel. Hat véletlenszerűen kiválasztott időköz hosszúsága 1,94, 0,33, 2,51, 5,27, 1,73 és 0,61 perc. Adjunk becslést a paraméterre a maximum likelihood illetve a momentum módszer alkalmazásával.

9.9. **a.** Mutassuk meg, hogy az alábbi függvény sűrűségfüggvény minden $\alpha > 0$ esetén.

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha x(1-x^2)^{\alpha-1}\,, & 0 < x < 1\,, \\ 0\,, & \text{különben.} \end{cases}$$

b. Egy $x_1, \ldots, x_n$ statisztikai minta alapján adjunk maximum likelihood becslést az α paraméter értékére.

c. Érdemes ebben az esetben a momentumok módszerével próbálkozni?

10. A várható érték és a szórás tesztelése

10.1. Tekintsük a **9.1.** feladatban megadott adatsort, ami egy ξ normális eloszlású háttérváltozótól származó minta.

a. Tegyük fel, hogy a ξ változó szórása ismert, és $D(\xi) = 2$. Teszteljük 5%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a ξ változó elméleti várható értéke 8.

b. Oldjuk meg az a. feladatrészt azzal a módosítással is, hogy a ξ változó szórását nem ismerjük.

10.2. Tekintsük a **9.2.** feladatban megadott adatsort, és tegyük fel, hogy a ξ változó normális eloszlást követ.

a. Tegyük fel, hogy a ξ változó szórása ismert, és $D(\xi) = 10$ ml. Teszteljük 10%-os szignifikancia szinten az a nullhipotézist, hogy a töltőberendezés jól van beállítva, tehát a ξ változó várható értéke 1000 ml.

b. Oldjuk meg az a. feladatrészt azzal a módosítással is, hogy a ξ változó szórását nem ismerjük.

10.3. Régészek radiokarbonos kormeghatározással szeretnék meghatározni egy lelőhely korát. Ismert, hogy a radiokarbonos módszert az egyazon ásatáson talált különböző leleteken alkalmazva nem pontosan ugyanazt a kort fogjuk megkapni minden lelet esetében, hanem a kapott korok (közelítőleg) normális eloszlást követnek, melynek elméleti várható értéke a lelőhely igazi kora.

a. A radiokarbonos módszert hét leleten alkalmazva a következő korokat kapjuk: 1180, 1220, 1230, 1250, 1270, 1290 és 1340 év. Adjunk becslést a lelőhely korára, valamint írjunk fel egy 95% megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot erre a korra. Teszteljük 5%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a lelőhely kora 1220 év.

b. Egy másik, közeli ásatásról 6 leletet vetnek alá kormeghatározásnak. A mintaátlag 1100 évnek, a korrigált empirikus szórás 50 évnek adódik. (Feltehető, hogy a két lelőhelyről származó minták esetében azonos a radiokarbonos módszerrel kapott korok elméleti szórása.) Teszteljük 10%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a két lelőhely egyidős, tehát azonos az elméleti várható érték. Adjunk meg egy 90% megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a lelőhelyek kora közötti különbségre.

c. Ellenőrizzük le a b. feladatrész feltevését, teszteljük le 10%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a két lelőhelyen azonos az elméleti szórás.

10.4. A '80-as években egy klinikai kísérlet keretei között azt vizsgálták, hogy a nagydózisú kálciumbevitelnek van-e vérnyomáscsökkentő hatása. A kísérlet időtartama alatt 10 alany kálciumtablettákat szedett, míg 11 másik ember, a kontroll csoport, placebot kapott. A 12 hetes kísérlet végén a kísérleti alanyok vérnyomása 100, 114, 105, 112, 115, 116, 106, 102, 125 és 104 Hgmm volt, míg a kontroll csoportban mért vérnyomásértékek 124, 97, 113, 105, 95, 119, 114, 114, 121, 118 és 133 Hgmm voltak. Feltehető, hogy a vérnyomásértékek mindkét csoportban normális eloszlást követnek.

a. Tegyük fel, hogy a kíséreti és a kontroll csoportban azonos a vérnyomásértékek elméleti szórása. Teszteljük le 5%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a két csoportban azonos a vérnyomásértékek elméleti várható értéke. Érdemes bevezetni a gyógyászatban a nagydózisú kálciumkezelést, mint a magas vérnyomás ellenszerét?

b. Teszteljük le azt a feltevést, hogy a két csoportban azonos a vérnyomásértékek elméleti szórása.

10.5. Ismert, hogy a kakukkok más madarak fészkeibe rakják a tojásukat. 1940-ben Edgar Chance angol ornitológus azt vizsgálta, hogy a kakukktojások mérete függ-e attól, hogy a kakukk milyen fajtájú madár fészkébe csempészi bele a tojását. Megmért 16 illetve 15 kakukktojást, melyeket vörösbegyek illetve ökörszemek fészkében talált. A vörösbegyfészkekben talált tojások átlagos hosszúsága 22,4 mm volt, míg ugyanez az érték az ökörszemfészkekben talál tojásoknál 21,2 mm volt. A korriált empirikus szórás a két minta esetében 0,94 mm illetve 0,68 mm volt. Feltehető, hogy a kakukktojások hossza mindkét fészekben normális eloszlást követ.

a. Tegyük fel, hogy a két fészektípus esetében azonos a kakukktojások hosszának az elméleti szórása. Teszteljük le 10%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a kakukktojások hosszának az elméleti várható értéke azonos a vörösbegyek és az ökörszemek esetében. Adjunk 90% megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a várható értékek különbségére.

b. Teszteljük le az a. pontban alkalmazott feltevésünket is, tehát azt, hogy a két fészektípus esetében megegyezik a kakukktojások hosszának a szórása. A szignifikancia szint legyen 10%.

11. A χ^2-próba és a lineáris regresszió

11.1. **a.** Feldobunk egy nem feltétlenül szabályos dobókockát 100 alkalommal. A dobások során 15 egyest, 15 kettest, 15 hármast, 15 négyest, 20 ötöst és 20 hatost kaptunk. Mi most a statisztikai minta, és mekkora az elemszáma? A minta alapján adjunk pontbecslést az egyes értékek dobásának a valószínűségére. Teszteljük 5%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a dobókocka szabályos, tehát minden értéknek 1/6 az esélye. Teszteljük külön azt a nullhipotézist is, hogy hatosdobás valószínűsége 1/6.

b. Ugyanezt a dobókockát most 1000 alkalommal dobjuk fel, melyből 150 egyest, 150 kettest, 150 hármast, 150 négyest, 200 ötöst és 200 hatost kapunk. Oldjuk meg az a. feladatrészt ezzel a módosítással.

11.2. Egy növény háromfajta színben fordul elő, van piros, rózsaszín és fehér változata. Genetikusok azt sejtik, hogy a szín intermedier módon öröklődik. Ellenőrzésképpen rózsaszín növényeket házasítanak össze egymással, és megvizsgálják, hogy az utódnövények milyen színűek. Intermedier öröklődés esetén egy-egy utódnövény 0,25, 0,5 illetve 0,25 valószínűséggel lesz piros, rózsaszín illetve fehér. A kikelt utódnövények közül 30 lett piros, 50 rózsaszín és 40 fehér.

a. Hány elemű most a minta? Milyen becslést adhatunk annak a valószínűségére, hogy két rózsaszín növényt összeházasítva egy utód rózsaszínű lesz?

b. Teszteljük 10 százalékos szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a szín intermedier módon öröklődik.

11.3. Az alábbi két táblázat azt tartalmazza, hogy egy főiskolán a hallgatók közül a tanulmányaik mellett hányan dolgoznak rész- vagy teljes munkaidőben. Az első táblázat életkor szerinti bontásban mutatja a hallgatókat, a második a 20-24 éves korosztályt részletezi ki nemek szerint is bontva.

Korcsoport	Rész-	Teljes	Össz.
15-19	355	33	388
20-24	571	122	693
25-34	183	186	369
35-	90	198	288
Összes	1199	539	1738

Nem	Rész-	Teljes	Össz.
Férfi	272	59	331
Nő	299	63	362
Összes	571	122	693

a. Mekkora a teljes minta elemszáma? A hallgatók mekkora hányada dolgozik részmunkaidőben; mekkora hányaduk 35 év feletti; illetve mekkora hányaduk dolgozik részmunkaidőben ÉS 35 év feletti. Ezek alapján függetlennek tűnik a hallgatók életkorától az, hogy napi hány órában dolgoznak? Teszteljük 1%-os szignifikancia szinten a két tényező függetlenségét.

b. Mekkora a minta elemszáma a második táblázatban? A 20-24 éves korcsoportban teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a hallgatók neme nem befolyásolja azt, hogy napi hány órában vállalnak munkát. A szignifikancia szint 1%.

11.4. Az embereket a tudosók négy vércsoportba sorolják annak megfelelően, hogy a vérükben megtalálható-e az A illetve a B típusú antigén. Az A vércsoport esetében jelen van az A típusú, de nincs jelen a B típusú antigén. A B vércsoportnál ez éppen fordítva van. Az AB vércsoportnál mindkét antigén jelen van, a 0 vércsoportnál egyik sem. Egy magyar vizsgálat során 1000 embertől vesznek vért, és azt találják, hogy 32% a 0, 44% az A, 16% a B, végül pedig 8% az AB vércsoportba esik.

Az előző feladathoz hasonlóan készítsünk egy olyan táblázatot, mely összefoglalja, hogy a megvizsgált alanyok közül hánynak a vérében volt jelen illetve nem volt jelen az A illetve a B típusú antigén. Ennek segítségével teszteljük le 5%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a magyar emberek vérében az A illetve a B típusú antigén jelenléte független egymástól.

11.5. 1960-ban az Egyesült Államokban egy orvosi kutatás keretei között felmérték, hogy az egyes tagállamokban milyenek a dohányzási szokások, illetve mekkora a különféle ráktípusok gyakorisága. Az alábbi táblázat hat tagállam adatait tartalmazza. A cigeretta oszloban az található meg, hogy egy év alatt a lakosok átlagosan hány száll cigerettát szívtak el. A tüdőrák és a leukémia oszlop azt mutatja, hogy mennyi volt a halálesetek száma ebből a két betegségből kifolyólag 100 ezer főre vetítve.

Tagállam	Cigeretta	Tüdőrák	Leukémia
Florida	2827	23,57	6,07
Kalifornia	2860	22,07	7,06
Michigan	2496	22,72	6,91
New York	2914	25,02	7,23
Texas	2257	20,74	7,02
Washington	2117	20,34	7,48

a. Mekkora a minta elemszáma? Határozzuk meg a cigeretta és a tüdőrák változó empirikus korrelációs együtthatóját. Teszteljük le 5%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a tűdőrákos halálesetek száma független az egy főre jutó cigerettafogyasztástól. Ezek alapján tapasztalható kapcsolat a dohányzási szokások és a tüdőrák kialakulása között? Ha igen, akkor ez a kapcsolat milyen irányú? Végezzünk lineáris regressziót a cigeretta és a tüdőrák változón.

b. 5%-os szignifikancia szint mellett van statisztikailag kimutatható kapcsolat a dohányzási szokások és a leukémiás halálesetek száma között?

11.6. Fizikusok egy kísérlet keretei között azt vizsgálták, hogy különböző hőmérsékleteken mennyi a szilárd hidrogén-bromid hőkapacitása. Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza. (Forrás: Giaugue and Wiebe: The Heat Capacity of Hydrogen Bromide from 15K to its Boiling Point and its Heat of Vaporization, *American Chemist*, 1928, Vol. 50, 2193-2203.)

Hőmérséklet (K)	119	130	139	153	173	182
Hőkapacitás (cal/mol/K)	10,79	10,96	11,08	11,25	11,91	12,32

Mi a minta elemszáma? Adjuk meg a hőmérséklet és a hőkapacitás empirikus korrelációs együtthatóját. Teszteljük 10%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a hőkapacitás független a hőmérséklettől. Amennyiben kimutatható kapcsolat, akkor ez milyen irányú? Végezzünk lineáris regressziót a két változó között.

Megoldások

1.1. $5!/(9\cdot 10^4)$; $(9\cdot 10^4 - 9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6)/(9\cdot 10^4)$.

1.2. $3!\cdot 4!\cdot 2!/9!$; $(3!\cdot 4\cdot 2\cdot 4! + 3!\cdot 2\cdot 4\cdot 4! + 3!\cdot 4\cdot 3\cdot 4!)/9!$

1.3. **a.** $\binom{4}{2}\binom{28}{4}/\binom{32}{6}$; **b.** $\binom{8}{3}\binom{8}{2}\binom{8}{1}/\binom{32}{6}$; **c.** $\left[\binom{32}{6}-\binom{28}{6}\right]/\binom{32}{6}$; **d.** $\left[\binom{32}{6}-\binom{21}{6}\right]/\binom{32}{6}$.

1.4. **a.** $\binom{6}{2}4^2 28^4/32^6$; **b.** $\binom{6}{3}\binom{3}{2}8^3 8^2 8/32^6$; **c.** $(32^6-28^6)/32^6$; **d.** $(32^6-21^6)/32^6$.

1.5. **a.** $\binom{n}{2}/\binom{100}{2}$; 90; **b.** $\left[\binom{100}{2}-\binom{100-n}{2}\right]/\binom{100}{2}$; 55.

1.6. **a.** $|\Omega| = 6$; P(páros számot dobunk) $= 3/6$
b. $|\Omega| = 36$; P(két páros) $= 9/36$; P(valamelyik páros) $= (36-9)/36$
c. Semmi sem változik a b. ponthoz viszonyítva.

1.7. $(23\cdot 26\cdot 26)\cdot 10^3 = 15.548.000$;
$(19\cdot 21\cdot 21)\cdot 5^3/15.548.000 \approx 0{,}067$;
$5.376.750/15.548.000 \approx 0{,}346$, ugyanis a kedvező esetek száma:
$(23\cdot 26\cdot 26 - 19\cdot 21\cdot 21)(10^3-5^3) = 5.376.750$

1.8. $(26\cdot 2)\cdot 25!/27!$; $(16\cdot 2)\cdot 25!/27!$

1.9. $2!\cdot 4!\cdot 2!/12!$; $6\cdot(1\cdot 4\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 1)\cdot 5!/12!$

1.10. $1/6^6$; $7/6^6$; $(6^6-6!)/6^6$

1.11. $365/365^{30}$; $(365^{30} - 365\cdot 364\cdot\ldots\cdot 336)/365^{30} \approx 0{,}706 = 70{,}6\%$

1.12. $\binom{9}{4}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = 1260$; $\left[\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2}+\binom{7}{4}\binom{3}{1}\binom{2}{2}+\binom{7}{4}\binom{3}{3}\right]/1260$

1.13. **a.** $\binom{5}{4}\binom{6}{3}/\binom{11}{7}$ **b.** $\binom{5}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{1}/\binom{11}{7}$ **c.** $\left[\binom{11}{7}-\binom{9}{7}\right]/\binom{11}{7}$ **d.** 1 **e.** $\left[\binom{5}{4}\binom{4}{3}+\binom{5}{3}\binom{4}{4}\right]/\binom{11}{7}$

1.14. **a.** $1/\binom{90}{5} \approx 1/44.000.000$ **b.** $\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}/\binom{90}{5}$ **c.** $\binom{88}{3}/\binom{90}{5}$ **d.** $\binom{11}{1}\binom{77}{2}/\binom{90}{5}$ **e.** $86/\binom{90}{5}$

1.15. **a.** $2^3 2^2/4^5$ **b.** $\binom{5}{3}2^3 2^2/4^5$ **c.** $\binom{5}{2}\binom{3}{2}2^2 1^2 1/4^5$ **d.** $3^5/4^5$ **e.** $(4^5-1^5)/4^5$

1.16. **a.** $(5^3\cdot 1)/6^4$; $(5^{n-1}\cdot 1)/6^n$; **b.** $(6^4-5^4)/6^4$; $(6^n-5^n)/6^n$; **c.** 13.

1.17. visszatevés nélkül: **a.** $\binom{4}{2}/\binom{4+n}{2}$; $n\geq 8$ **b.** $\left[\binom{4+n}{2}-\binom{n}{2}\right]/\binom{4+n}{2}$; $n \geq 75$
visszatevéssel: **a.** $4^2/(4+n)^2$; $n\geq 9$ **b.** $\left[(4+n)^2-n^2\right]/(4+n)^2$; $n\geq 74$

2.1. **a.** 0,39; **b.** 0,09; **c.** 0,16; **d.** 0,21; **e.** 0,51.

2.2. **a.** $A_1\cap B_2$; **b.** $A_1\setminus C_1$; **c.** $A_1\cup B_1\cup C_1$; **d.** $\overline{A_1}\cup\overline{B_1}\cup\overline{C_1}$; **e.** $(A_1\cap C_3)\cup(A_2\cap C_2)\cup(A_3\cap C_1)$.

2.3. A kettő közül egyik esemény valószínűsége sem határozható meg egyértelműen, az események valószínűsége az alábbi korlátok között bármilyen értéket felvehet:

$0{,}5 \le P(A \cap B) \le 0{,}7$; $0{,}8 \le P(A \cup B) \le 1$.

2.4. **a.** 0; **b.** 1; **c.** $P(A)$.

2.5. **a.** 0,15 **b.** 0,55 **c.** 0,45 **d.** 0,45; utolsó kérdés: 0,25

2.6. **a.** 0,5 **b.** 0,15 **c.** 0,4 **d.** 0,4; utolsó kérdés: 0,625

2.7. 0,48; 0,17; 0,49; $0{,}8/0{,}22 \approx 0{,}36$

2.8. **a.** $B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$

$\overline{B_1}$ = valamelyik héten nem nyerünk = $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4} \cup \overline{A_5}$

b. $B_2 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}$

$\overline{B_2}$ = valamelyik héten nyerünk = $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$

c. $B_3 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap A_5$

d. $B_4 = A_2 \setminus A_4 = A_2 \cap \overline{A_4}$

$\overline{B_4}$ = a második héten nem nyerünk vagy a negyediken igen = $\overline{A_2} \cup A_4$

e. $B_5 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \overline{A_5}) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_4} \cap A_5) \cup \cdots \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$

2.9. a lapos tányérok aránya a selejtesek között: $P(A_2|B) = 60/110$;

a leveses és a salátás tányérok együttes aránya a hibátlanok között:
$P(A_1 \cup A_3|\overline{B}) = (470 + 380)/1390$;

a selejtesek aránya a lapos tányérok között: $P(B|A_2) = 60/600$;

a selejtesek aránya a nem lapos tányérok között: $P(B|\overline{A}_2) = (30 + 20)/(500 + 400)$.

2.10. 2/15; 2/7

2.11. P(elég 4 chipset megvenni) $= 4!/4^4$

P(elég 6 chipset megvenni) $= 1 - P$(6 chips után valamelyik még hiányzik)
$= 1 - \left[4(\frac{3}{4})^6 - \binom{4}{2}(\frac{2}{4})^6 + \binom{4}{3}(\frac{1}{4})^6 - 0\right] \approx 0{,}38$

2.12. **a.** P(mind előfordul) $= 1 - P$(valamelyik nem fordul elő)

$= 1 - \left[6\left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \binom{6}{2}\left(\frac{4}{6}\right)^{10} + \binom{6}{3}\left(\frac{3}{6}\right)^{10} - \binom{6}{4}\left(\frac{2}{6}\right)^{10} + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{10} - 0\right] \approx 27{,}2\%$;

b. P(mind előfordul) $= 1 - P$(valamelyik nem fordul elő)

$= 1 - \left[6\left(\frac{35}{36}\right)^{10} - \binom{6}{2}\left(\frac{34}{36}\right)^{10} + \binom{6}{3}\left(\frac{33}{36}\right)^{10} - \binom{6}{4}\left(\frac{32}{36}\right)^{10} + \binom{6}{5}\left(\frac{31}{36}\right)^{10} - \left(\frac{30}{36}\right)^{10}\right] \approx 0{,}00005$.

3.1. **a.** $\binom{7}{2}/\binom{9}{4}$; **b.** $\binom{7}{2}/\binom{8}{3}$; **c.** $\binom{7}{2}/\left[\binom{9}{4} - \binom{7}{4}\right]$.

3.2. 0,2; $\pi/25 \approx 0{,}126$; a különdíj maga után vonja azt, hogy az ugrás sikeres.

3.3. $P(A) = 0{,}75$; $P(B) = 0{,}25$; $P(A|B) = 0{,}75$; nem zárják ki egymást, egyik sem vonja maga után a másikat, de függetlenek egymástól.

3.4. $P(x(1-x) > 5/36) = P(1/6 < x < 5/6) = 2/3$.

3.5. **a.** 7/12; **b.** $(7/12)^2 \cdot (5/12)^2$; $6 \cdot (7/12)^2 \cdot (5/12)^2$; $1 - (5/12)^4$; **c.** 6.

3.6. $(7 \cdot 6 \cdot 3)/(10 \cdot 9 \cdot 8)$; $(6 \cdot 3)/(9 \cdot 8)$

3.7. **a.** $P(A) = 1/2 = P(A|B)$; A és B független egymástól.

b. $P(A) = 5/16$; $P(A|B) = 4/14$; A és B nem független.

3.8. $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}25$; $P(A|B) = 0{,}4$; függetlenek egymástól.

3.9. 0,5; 5/7; az, hogy legfeljebb 5 percet kell várni, maga után vonja azt, hogy az előző szerelvény már legalább 3 perce element.

3.10. **a.** $9\pi/200$; 9/25.

b. A lehetséges értékek a $[0, 10]$ intervallum elemei; 32/50; nem teljesül.

3.11. **a.** 16/25; 16/25; függetlenek egymástól. **b.** 0; igen.

3.12. 16/30; 0

3.13. $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A)P(\Omega)$; $P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(A)P(\emptyset)$

3.14. Ha A és B pozitív valószínűségű és független, akkor $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$. Ez azt jelenti, hogy $A \cap B \neq \emptyset$, tehát nem kizáróak.

3.15. $P(\text{első kockán } i \cap \text{második kockán } j) = P(\text{első kockán } i)P(\text{ második kockán } j)$
$= 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

3.16. $1 - \binom{85}{5}/\binom{90}{5}$; $1 - \binom{85}{5}/\binom{90}{5}$; $1 - \left[\binom{85}{5}/\binom{90}{5}\right]^2$

3.17. **a.** 1/15 **b.** $10 \cdot 1/15 \cdot (14/15)^9$; $1 - (14/15)^{10}$ **c.** 44

3.18. **a.** $(5/6)^3 \cdot 1/6$; $(5/6)^{n-1} \cdot 1/6$; **b.** $1 - (5/6)^4$; $1 - (5/6)^n$; **c.** 13.

4.1. **a.** 0,12; **b.** 0,35; **c.** 0,38; **d.** 0,45; utolsó kérdés: $\approx 0{,}184$; $\approx 0{,}737$; $\approx 0{,}079$.

4.2. Visszatevés nélkül: **a.** $4/6 \cdot 2/5 \cdot 3/4$; 3/5; **b.** 2/6; 4/5; igen, függ.

Visszatevéssel: **a.** $4/6 \cdot 2/6 \cdot 4/6$; 4/9; **b.** 2/6; 4/6; nem függ.

4.3. **a.** 14,76%; 56,52%; **b.** 46,55%; 48,85%; 4,5%.

4.4. 1/9.

4.5. **a.** 1/4 **b.** 1/8 **c.** 11/24 **d.** 17/24

utolsó kérdés: 6/11; 3/11; 2/11

4.6. 0,225

4.7. 0,096; 0,48

4.8. Igazságos, a húzás sorrendjének nincs jelentősége.

4.9. 0,05; 0,09; $\approx 0{,}209$; $\approx 0{,}297$; $\approx 0{,}495$

4.10. 0,15; 0,53; 0,06/0,53; 0,15/0,53; 0,32/0,53; 0

4.11. $P(\text{output}=\text{négyzet}) = 0{,}42$
$P(\text{input}=\text{kör} \,|\, \text{output}=\text{négyzet}) = 0{,}29$
$P(\text{input}=\text{négyzet} \,|\, \text{output}=\text{négyzet}) = 0{,}71$
$P(\text{input}=\text{háromszög} \,|\, \text{output}=\text{négyzet}) = 0$

4.12. 0,6; 0,625

4.13. $\approx$1,87%

4.14. 13%

5.1. Mindent összeget ezer forintban értünk: $R_\xi = \{85, 90, 100, 130, 200\}$, az eloszlás:

k	200	130	100	90	85
$P(\xi = k)$	0,01	0,08	0,26	0,4	0,25

$E(\xi) = 95{,}65$; $D(\xi) = 15{,}79$.

5.2. Jelölje ξ azt, hogy egy 10 fős betegcsoportot hány vizsgálattal lehet letesztelni.

$P(\xi = 1) = P(\text{mindenki egészséges}) = 0{,}99^{10} \approx 0{,}9$,

$P(\xi = 11) = P(\text{van közöttük beteg}) = 1 - P(\text{mindenki egészséges}) \approx 0{,}1$,

$E(\xi) \approx 2$, tehát a 10 fős betegcsoportok átlagosan 2 vizsgálattal tesztelhetőek le, ami átlagosan 2000 dollár költség. Ez 1 főre vetítve átlagosan 200 dollárt jelent.

5.3. **a.** A ξ binomiális eloszlású $n = 10$ és $p = 0{,}5$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, \dots, 10\}$, $P(\xi = k) = \binom{10}{k} 0{,}5^k 0{,}5^{10-k}$, $E(\xi) = 5$, $D(\xi) \approx 1{,}58$, $P(\xi = 5) \approx 0{,}246$.

b. Az η binomiális eloszlású $n = 5$ és $p = 0{,}25$ paraméterrel: $R_\eta = \{0, 1, \dots, 5\}$, $P(\eta = k) = \binom{5}{k} 0{,}25^k 0{,}75^{5-k}$, $E(\xi) = 1{,}25$.

5.4. Legyen ξ a ledobott ejtőernyők száma, ami geometriai eloszlást követ $p = 1/15$ paraméterrel: $R_\xi = \{1, 2, 3, \dots\}$, $P(\xi = 5) = (14/15)^4 \cdot (1/15)$, $P(\xi > 5) = (14/15)^5$, $E(\xi) = 15$.

5.5. Legyen ξ és η a találatok száma a gépi illetve a kézi sorsoláson. A két változó független egymástól és hipergeometrikus eloszlású $N = 35$, $M = 7$ és $n = 7$ paraméterrel: $R_\xi = R_\eta = \{0, 1, \ldots, 7\}$, $P(\xi = k) = P(\eta = k) = \binom{7}{k}\binom{28}{7-k}/\binom{35}{7}$.

a. $P(\xi = 4) \approx 0{,}017$, $P(\xi \geq 4) \approx 0{,}018$, $E(\xi) = 7 \cdot 7/35 = 1{,}4$.

b. $P(\xi = 0, \eta = 1 \text{ vagy } \xi = 1, \eta = 0) = P(\xi = 0)P(\eta = 1) + P(\xi = 1)P(\eta = 0) = 0{,}138$,

$P(\xi \geq 4 \text{ vagy } \eta \geq 4) = 1 - P(\xi < 4 \text{ és } \eta < 4) \approx 1 - (1 - 0{,}018)^2 \approx 0{,}034$.

Másik megoldás: $P(\xi \geq 4 \text{ vagy } \eta \geq 4) = P(\xi \geq 4) + P(\eta \geq 4) - P(\xi \geq 4 \text{ és } \eta \geq 4)$ $\approx 2 \cdot 0{,}018 - 0{,}018^2 \approx 0{,}034$.

5.6. Legyen ξ a mutációk száma. Most $P(\xi = 0) = 0{,}135$ és $P(\xi = 0) = e^{-\lambda}$, amiből $\lambda = -\ln 0{,}135 \approx 2$. Ekkor $E(\xi) = 2$ és $P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leq 2) \approx 0{,}68$.

5.7. $a = 0{,}5$

5.8. $P(\xi = 0) = 2/6$, $P(\xi = 1) = 3/6$, $P(\xi = 3) = 1/6$, $E(\xi) = 1$, $D(\xi) = 1$.

5.9. $P(\xi = 0) = 1/8$, $P(\xi = 1) = 4/8$, $P(\xi = 2) = 3/8$, $E(\xi) = 1{,}25$, $D(\xi) \approx 0{,}66$.

5.10. **a.** $P(\xi = 0) = 0{,}06$, $P(\xi = 1) = 0{,}29$, $P(\xi = 2) = 0{,}44$, $P(\xi = 3) = 0{,}21$, $E(\xi) = 1{,}8$, $D(\xi) = \sqrt{0{,}7} \approx 0{,}84$.

b. $E(50\sqrt{\xi}) \approx 63{,}8$.

5.11. **a.** Legyen ξ a bevizsgált berendezések száma. $P(\xi = 1) = 0{,}4$, $P(\xi = 2) = 0{,}3$, $P(\xi = 3) = 0{,}2$, $P(\xi = 4) = 0{,}1$; $E(\xi) = 2$, $D(\xi) = 1$, $P(\xi \leq 2) = 0{,}7$.

b. $E(30.000\xi) = 60.000$ Ft.

5.12. **a.** $P(\xi = 0) = 1/2$; $P(\xi = 1000) = 1/3$; $P(\xi = 3000) = 5/36$; $P(\xi = 9000) = 1/36$; $E(\xi) = 1000$; $D(\xi) \approx 1683$; $P(\xi \geq 3000) = 1/6$.

b. Az igazságos ár 1000 forint, hiszen ez a játékosok átlagos nyereménye. A kaszinó ennél magasabb árat fog kérni, és ez a játékosoknak hosszú távon nem éri meg.

5.13. **a.** A ξ változó binomiális eloszlású $n = 6$ és $p = 0{,}3$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, \ldots, 6\}$, $P(\xi = k) = \binom{6}{k}0{,}3^k 0{,}7^{6-k}$, $E(\xi) = 1{,}8$, $D(\xi) \approx 1{,}12$, $P(1 < \xi < 5) \approx 0{,}57$.

b. $\binom{6}{2}0{,}3^2 0{,}7^4 \binom{8}{4}0{,}4^4 0{,}6^4 \approx 0{,}075$.

5.14. A ξ változó binomiális eloszlású $n = 3$ és $p = 0{,}6$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, 2, 3\}$, $P(\xi = k) = \binom{3}{k}0{,}6^k 0{,}4^{10-k}$, $E(\xi) = 1{,}8$, $D(\xi) \approx 0{,}85$.
Az eredeti feladatban a három motor különböző valószínűséggel üzemel, így ott a ξ változó nem binomiális eloszlást követ.

5.15. Jelölje ξ azt, hogy hanyadik próbálkozásra sikerül kinyitni az ajtót.

a. A változó geometriai eloszlású $p = 1/3$ paraméterrel: $R_\xi = \{1, 2, \ldots\}$, $P(\xi = k) = (2/3)^{k-1}(1/3)$, $P(\xi \leq 3) = 1 - (2/3)^3 \approx 0{,}7$, $E(\xi) = 3$, $D(\xi) \approx 2{,}45$.

b. A változó geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel: $R_\xi = \{1, 2, \dots\}$,
$P(\xi = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$, $P(\xi \le 3) = 1 - (5/6)^3 \approx 0{,}42$, $E(\xi) = 6$, $D(\xi) \approx 5{,}48$.

c. A ξ változó nem nevezetes eloszlást követ: $R_\xi = \{1, 2, 3\}$,
$P(\xi = 1) = P(\xi = 2) = P(\xi = 3) = 1/3$, $P(\xi \le 3) = 1$, $E(\xi) = 2$, $D(\xi) \approx 0{,}82$.

5.16. Jelölje ξ azt, hogy hanyadik dobásra kapom az első duplát. A ξ változó geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel: $R_\xi = \{1, 2, \dots\}$, $P(\xi = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$, $P(\xi = 5) \approx 0{,}08$, $P(\xi > 5) = (5/6)^5 \approx 0{,}4$, $E(\xi) = 6$.

5.17. A ξ változó hipergeometrikus eloszlású $N = 50$, $M = 15$ és $n = 5$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, \dots, 5\}$, $P(\xi = k) = \binom{15}{k}\binom{35}{5-k}/\binom{50}{5}$, $E(\xi) = 1{,}5$, $P(\xi \le 1) = 0{,}52$.

5.18. **a.** A ξ változó hipergeometrikus eloszlású $N = 20$, $M = 4$ és $n = 3$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, 2, 3\}$, $P(\xi = k) = \binom{4}{k}\binom{16}{3-k}/\binom{20}{3}$, $E(\xi) = 0{,}6$.

b. Jelölje η, hogy a lányok közül hányan felelnek kémiából. Az η hipergeometrikus $N = 20$, $M = 4$ és $n = 2$ paraméterrel: $E(\xi + \eta) = E(\xi) + (\eta) = 0{,}6 + 0{,}4 = 1$,

$P(\xi = 2, \eta = 0) = P(\xi = 2)P(\eta = 0) = \binom{4}{2}\binom{16}{1}/\binom{20}{3} \cdot \binom{4}{0}\binom{16}{2}/\binom{20}{2}$.

5.19. **a.** Legyen ξ az 50 kiválasztott rekord között azoknak a száma, melyek rendelkeznek a keresett tulajdpnsággal. A ξ binomiális eloszlású $n = 50$ és $p = 0{,}2$ paraméterrel:

$P(\xi > 0) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - 0{,}8^{50}$, $P(\xi = 10) = \binom{50}{10}0{,}2^{10}0{,}8^{40}$, $E(\xi) = 10$.

b. A visszatevés nélküli esetben ξ hipergeometrikus eloszlású $N = 1000$, $M = 200$ és $n = 50$ paraméterrel:

$P(\xi > 0) = 1 - \binom{800}{50}/\binom{1000}{50}$, $P(\xi = 10) = \binom{200}{10}\binom{800}{40}/\binom{1000}{50}$, $E(\xi) = 10$.

c. Legyen ξ a szükséges kiválasztások száma, ami geometriai eloszlás követ $p = 0{,}4$ paraméterrel:

$P(\xi = k) = 0{,}8^{k-1}0{,}2$, $k = 1, 2, \dots$, $E(\xi) = 1/0{,}2 = 5$, $P(\xi \le 10) = 1 - 0{,}8^{10}$.

5.20. **a.** Legyen ξ_1 és ξ_2 az első illetve a második órára jutó lekérdezések száma, melyek független és Poisson-eloszlást követnek azonos paraméterrel. Most $E(\xi_1) = 5$, tehát $\lambda = 5$. Ekkor $P(\xi_1 = 3) = \frac{5^3}{3!}e^{-5}$, $D(\xi_1) = \sqrt{5}$, $P(\xi_1 = 2, \xi_2 = 3) = \frac{5^2}{2!}e^{-5}\frac{5^3}{3!}e^{-5}$.

b. $\lambda = -\ln 0{,}05 \approx 3$.

5.21. **a.** $p(\lambda) = P(\text{sikeres adatátvitel}) = \lambda e^{-\lambda}$, $\lambda_{\max} = 1$, $p(\lambda_{\max}) = 1/e \approx 0{,}37$.

b. Legyen ξ_1 és ξ_2 a két szerver várakozási ideje, melyek egymástól független és geometriai eloszlású változók p paraméterrel: $P(\xi_1 > 5) = (1-p)^5$, $E(\xi_1) = 1/p$,

$P(\xi_1 = \xi_2) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi_1 = k, \xi_2 = k) = \sum_{k=1}^{\infty}[(1-p)^{k-1}p]^2 = p^2/[1 - (1-p)^2]$.

6.1. **a.** $a = 2$; $R_\xi = [1, \infty)$.

b. $E(\xi) = 2$; $D(\xi) = \infty$.

6.2. **a.** $R_\xi = [1, 4]$; $P(\xi \leq 2) \approx 0{,}26$; $P(\xi \geq 3) \approx 0{,}4$; $P(\xi \leq 2) = P(\xi < 2)$.

b.

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 1\,, \\ \big(x^{3/2} - 1\big)/7\,, & 1 \leq t \leq 4\,, \\ 1\,, & t > 4\,. \end{cases}$$

$q_{25\%} = 1{,}96$; $q_{50\%} = 2{,}73$; $q_{75\%} = 3{,}39$; ezek az értékek négy azonos létszámú részre bontják fel a teljes populációt.

6.3. **a.** Legyen ξ a szerva sebessége! $E(\xi) = 54$; $D(\xi) = \sqrt{12}$; $P(\xi > 50) = 5/6$.

b. $R_\eta = [0{,}4, 0{,}5]$; $P(\eta < 0{,}48) = P(\xi > 50) = 5/6$.

Ha az η változó egyenletes eloszlású lenne a $[0{,}4, 0{,}5]$ intervallumon, akkor teljesülne a $P(\eta < 0{,}48) = 0{,}8$ egyenlőség. Ez nem teljesül, tehát η nem egyenletes eloszlású.

c. $E(\eta) = 0{,}446$; $D(\eta) = 0{,}029$.

d.

$$F_\eta(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0{,}4\,, \\ 5 - 2/t\,, & 0{,}4 < t < 0{,}5\,, \\ 1\,, & t > 0{,}5\,. \end{cases} \qquad f_\eta(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0{,}4\,, \\ 2/t^2\,, & 0{,}4 < t < 0{,}5\,, \\ 0\,, & t > 0{,}5\,. \end{cases}$$

6.4. $1 - e^{-1/2}$; $e^{-1/2} - e^{-1}$; $1 - e^{-1/2}$.

6.5. $R_\xi = [0, 1]$; $P(0{,}5 \leq \xi \leq 1{,}5) = P(\xi > 0{,}5) \approx 0{,}65$; $E(\xi) = 0{,}6$; $D(\xi) \approx 0{,}26$.

6.6. $R_\xi = [1, 2]$; $P(0{,}5 \leq \xi \leq 1{,}5) = P(\xi < 1{,}5) \approx 0{,}58$; $E(\xi) = 1/\ln 2$; $D(\xi) \approx 0{,}29$.

6.7. $a = 0{,}08$; $R_\xi = [-1, 4]$;

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < -1, \\ 0{,}04(t+1)^2 & -1 \leq t \leq 4, \\ 1, & t > 4. \end{cases}$$

$q_{1\%} = -0{,}5$.

6.8. $a = 1{,}25$; $R_\xi = [1, 5]$;

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1{,}25 - 1{,}25/t, & 1 \leq t \leq 5, \\ 1, & t > 5. \end{cases}$$

$q_{50\%} = 5/3$.

6.9. **a.**

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1/200, & 300 \le x \le 500, \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

$E(\xi) = 400$; $D(\xi) \approx 57{,}74$; $P(\xi < 375) = 37{,}5\%$.

b. $\eta = 1500/\xi$; $P(\eta \ge 4) = P(\xi \le 375) = 37{,}5\%$;
$E(\eta) = E(1500/\xi) = 7{,}5 \ln(5/3) \approx 3{,}83$;
1500 forintból átlagosan 3,83 kiló narancsot vehetünk; $1500/E(\xi) = 3{,}75 \ne E(\eta)$.

c.

$$F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ 2{,}5 - 7{,}5/t, & 3 \le t \le 5, \\ 1, & t > 5. \end{cases} \qquad f_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ 7{,}5/t^2, & 3 \le t \le 5, \\ 0, & t > 5. \end{cases}$$

6.10. Legyen ξ az élettartam ezer órában kifejezve. Ekkor $0{,}1 = P(\xi < 0{,}5) = 1 - e^{-0{,}5\lambda}$, amiből $\lambda = -\ln(0{,}9)/0{,}5 \approx 0{,}21$.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0{,}21x}, & x \ge 0\,, \\ 0\,, & x < 0\,, \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} 0{,}21e^{-0{,}21x}, & x \ge 0\,, \\ 0\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

$E(\xi) = 1/\lambda \approx 4{,}75$; $P(0{,}5 < \xi < 1) = F_\xi(1) - F_\xi(0{,}5) = e^{-0{,}5\lambda} - e^{-\lambda}$;
$P(\xi \ge 1) = 1 - F_\xi(1) = e^{-\lambda} = 0{,}81$; $P(\xi \ge 11 \mid \xi \ge 10) = P(\xi \ge 1) = 0{,}81$.

6.11. Legyen ξ egy véletlenszerűen választott atom élettartama, ami exponenciális eloszlást követ ismeretlen λ paraméterrel. Mivel $0{,}5 = P(\xi < 5{,}27) = 1 - e^{-5{,}27\lambda}$, ezért $\lambda \approx 0{,}132$.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0{,}132x}, & x \ge 0\,, \\ 0\,, & x < 0\,, \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} 0{,}132e^{-0{,}132x}, & x \ge 0\,, \\ 0\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

Az átlagos élettartam $E(\xi) = 1/\lambda \approx 7{,}6$ év, a további valószínűségek:
$P(\xi \ge 52{,}7) = e^{-52{,}7\lambda} = 0{,}5^{10}$; $P(52{,}7 \le \xi < 52{,}7{+}5{,}27) = e^{-52{,}7\lambda} - e^{-57{,}97\lambda} = 0{,}5^{11}$;
$P(\xi \ge 52{,}7 + 5{,}27 \mid \xi \ge 52{,}7) = P(\xi \ge 5{,}27) = 0{,}5$.

A rádioaktív atomok magja nem öregszik, a maghasadás nem valamiféle elkopásnak az eredménye. A maghasadást véletlenszerű külső és belső tényezők eredményezik, melyek függetlenek az atommag „korától.” A lebomlás ugyanakkora eséllyel történik meg egy „fiatal” és egy „öreg” atom esetében. Emiatt az atommag élettartamára teljesül az örökifjú tulajdonság, ami viszont csak az exponenciális eloszlásra jellemző.

7.1. **a.** f_3; **b.** f_4; **c.** f_2. Kimaradt sűrűségfüggvény (f_1): $\mu = -3$, $\sigma = 0{,}5$.

7.2. 16%; 67%; $[87, 163]$.

7.3. 98; 8; 0,68; 108.

7.4. 250 perc; $\approx$21,21 perc; 0,75; $t = 299{,}3$.

7.5. 0,955; $[974{,}2 \text{ ml}, 1026{,}8 \text{ ml}]$; $\sigma = 7{,}8$ ml.

7.6. **a.** 66%; 2%; $[70{,}6, 129{,}4]$; **b.** 127,2.

7.7. $\mu = 6$; 25,5%; $[4{,}77, 7{,}23]$.

7.8. 850; 0,62; 0,004; $[821, 879]$.

7.9. **a.** ξ binomiális $n = 1.000.000$ és $p = 0{,}5$ paraméterrel; 500.000; 500.
Az általunk használt táblázat 4 tizedesjegy pontossággal tartalmazza a standard normális eloszlásfüggvény értékeit. Ezt a táblázatot használva a kérdéses valószínűség 1. Ha az eloszlásfüggvényt mondjuk számítógéppel számoljuk ki, akkor megkapható a pontos eredmény: 0,99999943.

b. ξ binomiális $n = 25 \cdot 10^{24}$ és $p = 0{,}5$ paraméterrel; $12{,}5 \cdot 10^{24}$; $2{,}5 \cdot 10^{12}$.
Az eloszlástáblázat alapján a kérdéses valószínűség 4 tizedesjegyre kerekített értéke 1. Számítógépet használva kiderül, hogy a kerekítési hiba kisebb, mint 10^{-500}.

7.10. **a.** 83,3; 8,33; 0,023; $[67, 100]$;

b. 1750; 38,24; 0,99; $[1651, 1849]$.

7.11. 30 millió forint; $\approx$577,4 ezer forint; 0,916; $[28{,}87, 31{,}13]$.

7.12. 12.000 kg; 273,86 kg; nem tudunk pontos értéket mondani, ugyanis nem ismert az eloszlás; 0,998; 0,93; $[11.295 \text{ kg}, 12.705 \text{ kg}]$.

7.13. 640 kg; $\approx$42,43 kg; nem alkalmazható, ugyanis túl kicsi az összeg tagszáma: $n = 8$.

7.14. **a.** $E(\hat{a}_n) = a$; $D(\hat{a}_n) = 10/\sqrt{n}$. Mivel a szórás nullához konvergál, amint $n \to \infty$, nagy n esetén az $\hat{a}_n$ átlag kis szórással ingadozik az a várható érték körül, tehát ez egy pontos becslés lesz.

b. $P(a - 25{,}8/\sqrt{n} \le \hat{a}_n \le a + 25{,}8/\sqrt{n}) = 99\%$; $n \ge 27$.

c. $D(\xi) \le 6{,}13$.

8.1. Az együttes eloszlás és a marginális eloszlások:

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	ξ
0	1/6	1/6	1/6	1/2
1	1/6	1/6	1/6	1/2
η	1/3	1/3	1/3	1

$E(\xi) = 0{,}5$; $D(\xi) = 0{,}5$; $E(\eta) = 1$; $D(\eta) = 0{,}82$; $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0$; $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$; függetlenek.

8.2. $P(\xi = 0, \eta = 0) = 1/4$, $P(\xi = 1, \eta = 0) = 1/2$, $P(\xi = 2, \eta = 1) = 1/4$, $E(\xi) = 1$, $E(\eta) = 0{,}25$, $D(\xi) = 1{,}225$, $D(\eta) = 0{,}433$, $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0{,}25$, $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0{,}47$.

8.3. A profit $\xi - \eta = 1 \cdot \xi + (-1) \cdot \eta$, ahol ξ és η a bevétel illetve a kiadás millió forintban számolva.

$E(\xi - \eta) = E(\xi) - E(\eta) = 40$; a várható érték nem függ a korrelációs együtthatótól.

$D^2(\xi - \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) - 2D(\xi)D(\eta)\,\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 1300 - 1200\,\mathrm{corr}(\xi, \eta)$.

Ha ξ és η független, akkor $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$, tehát $D(\xi - \eta) = \sqrt{1300}$.

Ha $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0{,}8$, akkor $D(\xi - \eta) = \sqrt{340}$.

8.4. Legyen ξ és η az A illetve a B vállalat részvényeinek az ára egy év múlva. Ekkor a portfólióm értéke egy év múlva $20\xi + 10\eta$.

$E(20\xi + 10\eta) = 20 \cdot 700 + 10 \cdot 1500 = 29.000$; a korreláció nem befolyásolja.

$D^2(20\xi + 10\eta) = 20^2 \cdot 20^2 + 10^2 \cdot 80^2 + 2 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 80 \cdot \mathrm{corr}(\xi, \eta)$
$= 800.000 + 640.000\,\mathrm{corr}(\xi, \eta)$.

Ebből behelyettesítéssel megkapható a szórás tetszőleges korrelációra. A független esetben $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$. Negatív korreláció esetén kisebb a portfólió értékének szórása, ezért ez ajánlott kockázatkerülő befektetőknek.

8.5. Legyen ξ és η a Tisza illetve a Maros vízhozama közvetkenül a Maros torkolata előtt. Ekkor a Belvárosi hídnál mért vízhozam $\xi + \eta$.

$E(\xi + \eta) = 660 + 200 = 860 = 29.000$; a korreláció nem befolyásolja.

$D^2(20\xi + 10\eta) = 160^2 + 50^2 + 2 \cdot 160 \cdot 50 \cdot \mathrm{corr}(\xi, \eta) = 28.100 + 16.000\,\mathrm{corr}(\xi, \eta)$.

Ebből behelyettesítéssel megkapható a szórás tetszőleges korrelációra. A független esetben $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$. A két folyó vízhozama között pozitív korreláció van, hiszen tipikusan egyszerre áradnak és apadnak. Az árvízi védekezés szempontjából a negatív korreláció jobb lenne.

9.1. **a.** $n = 5$; $E_n(\xi) = 5{,}56$; $V_n(\xi) = 3{,}36$; $D_n(\xi) = 1{,}83$; $V_n^*(\xi) = 4{,}2$; $D_n^*(\xi) = 2{,}05$; median $= 6{,}5$;

$$F_n(x) = \begin{cases} 0\,, & x \le 2{,}1\,, \\ 0{,}2\,, & 2{,}1 < x \le 5{,}4\,, \\ 0{,}4\,, & 5{,}4 < x \le 6{,}5\,, \\ 0{,}8\,, & 6{,}5 < x \le 7{,}3\,, \\ 1\,, & 7{,}3 < x\,. \end{cases}$$

b. $[3{,}81, 7{,}31]$ $(x_\alpha = 1{,}96)$

c. $[3{,}01, 8{,}11]$ $(x_\alpha = 2{,}776)$; $[1{,}23, 5{,}89]$ $(a = 0{,}484,\ b = 11{,}143)$

9.2. **a.** $n = 6$; $E_n(\xi) = 990{,}83$; $V_n(\xi) = 145{,}14$; $D_n(\xi) = 12{,}05$; $V_n^*(\xi) = 174{,}17$;

$D_n^*(\xi) = 13{,}2;\quad \text{median} = 990;$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0\,, & x \le 975\,, \\ 1/6\,, & 975 < x \le 980\,, \\ 2/6\,, & 980 < x \le 985\,, \\ 3/6\,, & 985 < x \le 995\,, \\ 4/6\,, & 995 < x \le 1000\,, \\ 5/6\,, & 1000 < x \le 1010\,, \\ 1\,, & 1010 < x\,. \end{cases}$$

b. $[984{,}10, 997{,}57]\quad (x_\alpha = 1{,}65)$

c. $[979{,}97, 1001{,}69]\quad (x_\alpha = 2{,}015);\quad [8{,}87, 27{,}58]\quad (a = 1{,}145,\ b = 11{,}07)$

9.3. A becslés mindkét módszerrel $\hat{\lambda}_n = (x_1 + \cdots + x_n)/n$. Most: $\hat{\lambda}_{10} = 1$.

9.4. A becslés mindkét módszerrel $\hat{p}_n = n/(x_1 + \cdots + x_n)$.

9.5. A becslés mindkét módszerrel $\hat{p}_n = k_n(A)/n$.

9.6. $\hat{N} = nM/k$.

9.7. **a.** $f \ge 0$ és $\int_\infty^\infty f(x)dx = 1$; $E(\xi) = (a+1)/(a+2)$.

b. A paraméterbecslés egy általános $x_1, \ldots, x_n$ minta alapján a maximum likelihood módszerrel illetve a momentumok módszerével:

$$\hat{a}_n = -\frac{n}{\ln(x_1 \cdots x_n)} - 1\,, \qquad \hat{a}_n = \frac{2E_n(\xi) - 1}{1 - E_n(\xi)}\,.$$

A megadott realizáció alapján kapott becslések: 0,232 és 0,273.

9.8. A becslés mindkét módszerrel $\hat{\lambda}_n = n/(x_1 + \cdots + x_n)$. Most: $\hat{\lambda}_6 = 0{,}48$.

9.9. **a.** $f \ge 0$ és $\int_\infty^\infty f(x)dx = 1$.

b. $\hat{\alpha}_n = -n/\ln[(1 - x_1^2) \cdots (1 - x_n^2)]$.

c. Nem, ugyanis az elméleti várható érték nem írható fel könnyel kezelhető alakban.

10.1. **a.** $H_0 : \mu = \mu_0$, ahol most $\mu_0 = 8$. u-próba: $u = -2{,}73$, $u_\alpha = 1{,}96$, elvetjük.

b. $H_0 : \mu = \mu_0$, ahol most $\mu_0 = 8$. t-próba: $t = -2{,}66$, $t_\alpha = 2{,}775$, elfogadjuk.

10.2. **a.** $H_0 : \mu = \mu_0$, ahol most $\mu_0 = 1000$. u-próba: $u = -2{,}25$, $u_\alpha = 1{,}65$, elvetjük.

b. $H_0 : \mu = \mu_0$, ahol most $\mu_0 = 1000$. t-próba: $t = -1{,}7$, $t_\alpha = 2{,}015$, elfogadjuk.

10.3. **a.** $n = 7$, $E_n(\xi) = 1254{,}3$, $V_n(\xi) = 2310{,}2$, $V_n^*(\xi) = 2695{,}2$, $D_n^*(\xi) = 51{,}9$, $x_\alpha = 2{,}775$, $[1199{,}8, 1308{,}8]$.

$H_0 : \mu = \mu_0$, ahol most $\mu_0 = 1220$. t-próba: $t = 1{,}75$, $t_\alpha = 2{,}447$, elfogadjuk.

b. $n_2 = 6$, $E_{n_2}(\eta) = 1100$, $D_{n_2}^*(\eta) = 50$, $D_{n_1,n_2}^* = 28{,}4$, $x_\alpha = 1{,}796$, $[103{,}3, 205{,}3]$.

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta$, ahol $\Delta = 0$. Kétmintás t-próba: $t = 5{,}43$, $t_\alpha = 1{,}796$, elvetjük. Tehát a két lelőhely kora szignifikánsan különbözik.

c. $H_0 : \sigma_1/\sigma_2 = \tau_0$, ahol $\tau_0 = 1$. F-próba: $F = 1{,}077$, $F_\alpha = 4{,}95$, elfogadjuk.

10.4. $n_1 = 10$, $E_{n_1}(\xi) = 109{,}9$, $V_{n_1}(\xi) = 54{,}69$, $D_{n_1}^*(\xi) = 7{,}8$,
$n_2 = 11$, $E_{n_2}(\eta) = 113{,}9$, $V_{n_2}(\eta) = 116{,}63$, $D_{n_2}^*(\eta) = 11{,}33$, $D_{n_1,n_2}^* = 4{,}29$,

a. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$. Kétmintás t-próba: $t = -0{,}93$, $t_\alpha = 2{,}093$, elfogadjuk. A kísétleti csoportban és a kontroll csoportban a vérnyomás várható értéke nem különbözik szignifikáns módon egymástól. Ez azt jelenti, hogy a kálciumtabláttak hatása nem mutatható ki, ezt a gyógymódot nem érdemes bevezetni.

b. $H_0 : \sigma_1/\sigma_2 = 1$. F-próba: $F = 2{,}13$, $F_\alpha = 3{,}964$, elfogadjuk. (Meg kell cserélni a két minta szereposztását!)

10.5. $n_1 = 16$, $E_{n_1}(\xi) = 22{,}4$, $D_{n_1}^*(\xi) = 0{,}94$, $V_{n_1}(\xi) = 0{,}83$,
$n_2 = 15$, $E_{n_2}(\eta) = 21{,}2$, $D_{n_2}^*(\eta) = 0{,}68$, $V_{n_2}(\eta) = 0{,}43$, $D_{n_1,n_2}^* = 0{,}296$.

a. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$, kétmintás t-próba: $t = 4{,}054$, $t_\alpha = 1{,}699$, elvetjük. Tehát van statisztikailag kimutatható különbség a két fészektípusban található tojások átlagos mérete között. Konfidencia intervallum a különbségre: $[0{,}7, 1{,}7]$.

b. $H_0 : \sigma_1/\sigma_2 = 1$, F-próba: $F = 1{,}93$, $F_\alpha = 2{,}463$, elfogadjuk.

11.1. **a.** A statisztikai minta a dobott értékek sorozata, a minta elemszáma $n = 100$. Legyen A_i az az esemény, hogy a kockával i-t dobunk, ahol $i = 1, \ldots, 6$. Ekkor az ismeretlen valószínűségeket a relatív gyakoriságokkal becsülhetjük: $P(A_1) \approx 0{,}15$, $P(A_2) \approx 0{,}15$, $P(A_3) \approx 0{,}15$, $P(A_4) \approx 0{,}15$, $P(A_5) \approx 0{,}2$, $P(A_6) \approx 0{,}2$.

A szabályosság tesztelése: $H_0 : P(A_i) = 1/6$ minden i-re.
χ^2-próba: $\chi^2 = 2$, $\chi^2_\alpha = 11{,}07$, elfogadjuk.

A hatosdobás tesztelése: $H_0 : P(A_6) = 1/6$, $P(\overline{A_6}) = 5/6$.
χ^2-próba: $\chi^2 = 0{,}8$, $\chi^2_\alpha = 3{,}841$, elfogadjuk.

b. Az elemszám $n = 1000$, a relatív gyakoriságok azonosak az előző feladatrésszel.

A szabályosság tesztelése: $H_0 : P(A_i) = 1/6$ minden i-re.
χ^2-próba: $\chi^2 = 20$, $\chi^2_\alpha = 11{,}07$, elvetjük.

A hatosdobás tesztelése: $H_0 : P(A_6) = 1/6$, $P(\overline{A_6}) = 5/6$.
χ^2-próba: $\chi^2 = 8$, $\chi^2_\alpha = 3{,}841$, elvetjük.

11.2. Egy piros és egy fehér növényt házasítva jelölje A, B és C rendre azt az esemény, hogy az utódnövény piros, rózsaszín illetve fehér lesz.

$n = 120$; $P(A) \approx 30/120$, $P(B) \approx 50/120$, $P(C) = 40/120$.

$H_0 : P(A) = 0{,}25, P(B) = 0{,}5, P(C) = 0{,}25$.
χ^2-próba: $\chi^2 = 5$, $\chi^2_\alpha = 4{,}605$, elvetjük.

11.3. **a.** $n = 1738$;   69%;   17%;   5%;   nem, ugyanis $0{,}69 \cdot 0{,}17 = 0{,}12 \not\approx 0{,}05$.

H_0 : az életkor és a munkaidő független egymástól,
χ^2-próba: $\chi^2 = 406{,}67$, $\chi^2_\alpha = 11{,}345$, elvetjük.

b. $n = 693$; H_0 : a nem és a munkaidő független egymástól,
χ^2-próba: $\chi^2 = 0{,}021$, $\chi^2_\alpha = 6{,}635$, elfogadjuk.

11.4. A táblázat:

	A jelen van	Nincs jelen	Összesen
B jelen van	80	160	240
Nincs jelent	440	320	760
Összesen	520	480	1000

χ^2-próba: $\chi^2 = 44{,}1$, $\chi^2_\alpha = 3{,}841$, elvetjük.

11.5. Véletlenszerűen kiválasztva egy USA tagállamot legyen:
ξ = egy főre jutó cigerettafogyasztás,
η = 100 ezer főre jutó tűdőrákos halálesetek száma;
η' = 100 ezer főre jutó leukémiás halálesetek száma;

a. $n = 6$; $E_6(\xi) = 2578{,}5$, $D_6(\xi) = 310$, $E_6(\eta) = 22{,}41$, $D_6(\eta) = 1{,}6$,
$\mathrm{Cov}_6(\xi, \eta) = 422{,}5$, $r_6(\xi, \eta) = 0{,}85$.

$H_0 : r(\xi, \eta) = 0$, korrelációs teszt: $t = 3{,}22$, $t_\alpha = 2{,}776$, elvetjük, tehát a két változó között statisztikailag kimutatható kapcsolat van. A kapcsolat pozitív irányú.

Regressziós egyenes: $y = 0{,}0044x + 11{,}08$.

b. $E_6(\eta') = 6{,}96$, $D_6(\eta') = 0{,}44$, $\mathrm{Cov}_6(\xi, \eta') = -59{,}6$, $r_6(\xi, \eta') = -0{,}44$.

$H_0 : r(\xi, \eta') = 0$, korrelációs teszt: $t = -0{,}98$, $t_\alpha = 2{,}776$, elfogadjuk, tehát a két változó között nem mutatható ki szignifikáns kapcsolat.

11.6. Legyen ξ a hőmérséklet, η a hőkapacitás. A mintaméret $n = 6$, $r_6(\xi, \eta) = 0{,}97$.

$H_0 : r(\xi, \eta) = 0$, korrelációs teszt: $t = 8{,}4$, $t_\alpha = 2{,}132$, elvetjük. A két mennyiség között statisztikailag kimutatható kapcsolat van, ami pozitív irányú. A regressziós egyenes: $y = 0{,}024x + 7{,}86$.