

A véletlen matematikája

Szűcs Gábor

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Amit mindenki tanul:

- Szemlélet kialakítása: véletlen jelenségek, valószínűség.
- A valószínűség kombinatorikus kiszámítási módja.
- Binomiális eloszlás.
- Statisztikai alapfogalmak.

Matematika tagozatos osztályok, szakkör, stb.:

- A valószínűség általános definíciója.
- Véletlen jelenségek végtelen sok kimenetellel.
- Feltételes valószínűség, események függetlensége.
- Valószínűségi változók.
- Matematikai statisztika.

A valószínűesszámitás rövid története

- Már az ókori görögök is? Filozófiai okokból tipikusan nem foglalkoztak véletlen jelenségekkel, nem történt elmélet építés.
- 16.–17. század: Nagyrészt szerencsejátékokkal kapcsolatos feladatok.
- 18.–19. század: Lassú fejlődés, melyet nagyrészt az alkalmazások motiváltak. (Bernoulli, Laplace, Bayes, Gauss)
- 19. század vége – 20. század eleje: A valószínűesszámitás kezd önálló tudományterületté válni. Megjelennek az első általánosabb tételek. (Markov, Csebisev, Lévy)
- Ezzel párhuzamosan fejlődésnek indul a matematikai statisztika.
- 1933: Andrej Nyikolajevics Kolmogorov. „A valószínűesszámitás alapfogalmai” című művében bevezeti a róla elnevezett axiómákat. Azóta mindenki ezt az axiómarendszert használja.
- Az élet egyre több területén alkalmaznak sztochasztikus modelleket: biztosításmatematika, tőzsdei matematika, időjárás és természeti katasztrófák modellezése, orvosi kutatások, mesterséges intelligencia.

A valószínűség kombinatorikus modellje

A **valószínűségszámítás** (másképpen **sztochasztika**) a matematikának a véletlen jelenségekkel foglalkozó területe. A fontosabb fogalmak:

- **Véletlen jelenség:** Olyan jelenség, melynek lefolyását az általunk figyelembe vehető tényezők nem határozzák meg egyértelműen.
- **Véletlen kísérlet, valószínűségi kísérlet:** Egy véletlen jelenség megfigyelése. Nincs jelentősége annak, hogy mi idézzük elő, vagy csak külső megfigyelők vagyunk.
- **Tömegjelenség:** Olyan jelenség, melyet tetszőleges sokszor meg lehet figyelni változatlan körülmények között. Egyes tankönyvek ezt is beleveszik a véletlen kísérlet definíciójába.
- **Kimenetek:** A véletlen kísérlet lehetséges eredményei. (Jelük: ω .)
- **Események:** A kísérlet aktuális kimeneteléhez kapcsolódó állítások. Egy esemény **bekövetkezik**, ha a kísérlet aktuális végrehajtásakor olyan kimenetelt kapunk, melyre ez az állítás igaz.
- **Esemény valószínűsége:** Ha sokszor megismételjük a kísérletet, akkor az esemény a végrehajtások mekkora hányadában következik be. (Ez egy rossz definíció, de egyelőre megteszi...)

Feladat. Feldobunk egy szabályos dobókockát. Mik a kísérlet lehetséges kimenetelei? Hány kimenetel létezik? Mely kimenetek esetén következnek be az alábbi események, és mennyi a valószínűségük?

- *Hatost dobunk.*
- *Páratlan számot dobunk.*

Összesen 6 darab kimenetel létezik: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Az első esemény csak a 6-os kimenetel esetén következik be.

$$P(\text{hatost dobunk}) = 1/6$$

A második esemény a 1-es, a 3-as és a 5-ös kimenetel esetén következik be.

$$P(\text{páratlant dobunk}) = P(\text{egyes}) + P(\text{hármás}) + P(\text{ötös}) = 3 \cdot 1/6 = 3/6$$

Laplace-formula; a valószínűség kombinatorikus kiszámítási módja

Tegyük fel, hogy a véletlen kísérletnek véges sok kimenetele van, és minden kimenetelnek azonos a valószínűsége. Ekkor egy tetszőleges A esemény valószínűsége a következő formulával számolható ki:

$$P(A) = \frac{\text{kedvező kimenetek száma}}{\text{összes kimenetek száma}}$$

Feladat. Feldobunk egy szabályos dobókockát kétszer egymás után. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

1. megközelítés. A lehetséges összegek: 2, 3, ..., 12.

$$P(\text{a dobott számok összege } 7) = 1/11$$

Ez nincs összhangban a hétköznapi tapasztalatokkal! Mit rontottunk el?

2. megközelítés. Minden számpárt különböző kimenetelnek tekintünk. Ez $6 \cdot 6 = 36$ kimenetelt jelent, és ezeknek már azonos a valószínűsége.

$$P(\text{a dobott számok összege } 7) = 6/36 = 1/6$$

Ez összhangban van a hétköznapi tapasztalatokkal.

	1	2	3	4	5	6
1						7
2					7	
3				7		
4			7			
5		7				
6	7					

Feladat. Hogyan változik a megoldás az alábbi esetekben?

- a. Egyszerre dobunk fel két különböző színű kockát.
- b. Egyszerre dobunk fel két azonos színű kockát.

Fontos. A természet az elemi részecskéknél nagyobb objektumokat mindig meg tudja különböztetni egymástól.

Feladat. (Születésnap paradoxon.) Egy 30 fős osztályban mennyi az esélye annak, hogy van legalább 2 tanuló, aki az évnek azonos napján született? Feltehető, hogy az osztályban nincsenek ikrek!

Képzeljük el, hogy a tanulók ábécé sorrendben felírják a születésnapjukat egy lapra. A lap lehetséges kitöltései az egyes esetek.

Összes eset: $365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365 = 365^{30}$

Rossz esetek (mindenki különböző napon született): $365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 336$

Kedvező esetek: $365^{30} - 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 336$

A kérdéses valószínűség:

$$\frac{365^{30} - 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 336}{365^{30}} \approx 0.706 = 70,6\%$$

Feladat. Hány tanuló esetén éri el az $1/2$ -et annak a valószínűsége, hogy van legalább két tanuló, aki azonos napon született?

Feladat. (Cardano, 1564.) Hányszor dobjunk egy szabályos kockával, ha az a célunk, hogy legalább $1/2$ legyen annak a valószínűsége, hogy a dobások között van legalább egy hatos?

Feladat. (Galilei, 1620.) Ha feldobunk három szabályos dobókockát, akkor az egyes összegek többféle kombinációban is előállhatnak. Például az 5 kétféleképpen állhat elő összegként: $1 + 1 + 3 = 5$ és $1 + 2 + 2 = 5$.

Azt már Galilei előtt is tudták, hogy a 9 és a 10 ugyanannyi (hatféle) különböző kombinációban áll elő összegként. Ezek alapján azt várnánk, hogy a 9 és a 10 azonos eséllyel lesz a dobott számok összege. Viszont a gyakorlati tapasztalat azt mutatja, hogy a 9-es összeg gyakrabban fordul elő, mint a 10-es összeg. Mi ennek a magyarázata? Mennyi az 9-es illetve a 10-es összeg pontos valószínűsége?

Feladat. (Chevalier de Méré, Pascal, 1654.) Az alábbiak közül melyiknek nagyobb a valószínűsége:

- 4 alkalommal feldobva egy szabályos dobókockát legalább egyszer hatost kapunk;
- 24 alkalommal feldobva két szabályos dobókockát legalább egyszer dupla hatost kapunk?

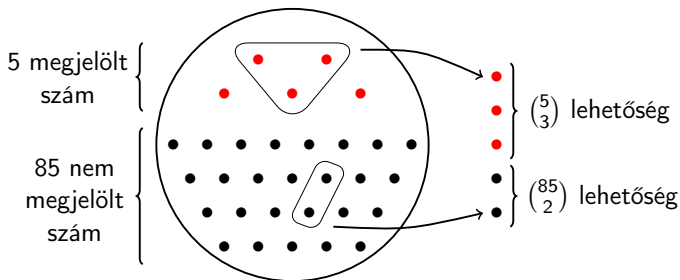
Feladat. Mik az ötösloottó sorsolás lehetséges kimenetelei? Hány lehetséges kimenetele van a kísérletnek?

A kimenetek a lehetséges számötösök. Összes eset: $\binom{90}{5}$.

Feladat. Egy szelvénnel játszunk az ötösloottón. Mennyi annak az esélye, hogy pontosan 3 találatot érünk el?

Pontosan 3 találatot akkor érünk el, ha a mi számaink közül 3-at, a többi szám közül pedig 2-őt húznak ki. A kérdéses valószínűség:

$$P(\text{pontosan 3 találat}) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{\binom{5}{3} \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \approx \frac{1}{1231}.$$



Feladat. Mennyi annak az esélye, hogy pontosan k találatot érünk el?
Mennyi az esélye, hogy nyerünk valamennyi pénzt?

Az előző oldal gondolatmenetével:

$$P(\text{pontosan } k \text{ találat}) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{\binom{5}{k} \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Találat	Valószínűség
5	$\approx 1 : 44.000.000$
4	$\approx 1 : 100.000$
3	$\approx 1 : 1000$
2	$\approx 2,25\%$
1	$\approx 23\%$
0	$\approx 74,6\%$

Pénzt akkor nyerünk, ha elérünk legalább 2 találatot:

$$P(\text{nyerünk pénzt}) = \frac{\binom{5}{2} \binom{85}{3} + \binom{5}{3} \binom{85}{2} + \binom{5}{4} \binom{85}{1} + 1}{\binom{90}{5}} \approx 2,33\%.$$

Műveletek eseményekkel, eseményalgebrák

Eseménytér: A lehetséges kimenetek halmaza. (Jele: Ω vagy U)

Az események, mint logikai állítások, reprezentálhatóak az eseménytér részhalmazaival: összegyűjtjük azokat a kimeneteket, melyekre az adott esemény bekövetkezik

- Ennek a reprezentációnak az az oka, hogy a valószínűségi számítás sok eszközt átemel a mértékelméletből. Ehhez viszont halmazokra van szükség, nem logikai állításokra.
- A halmazokkal történő reprezentációnak didaktikai előnye is van: ez egy jó vizualizációs eszköz, le lehet „rajzolni” az eseményeket.

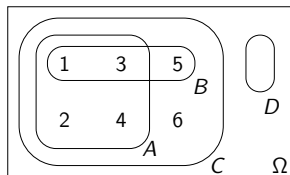
Feladat. Feldobunk egy szabályos dobókockát. Mely halmazokkal reprezentálhatóak az alábbi események?

A = 5-nél kisebbet dobunk = $\{1, 2, 3, 4\}$

B = páratlan számot dobunk = $\{1, 3, 5\}$

C = egész számot dobunk = Ω

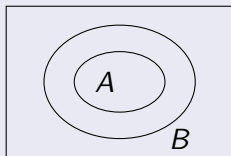
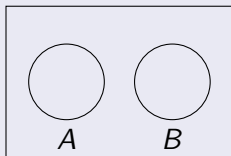
D = negatív számot dobunk = $\emptyset$



Eddig számunkra egy esemény egy logikai állítás volt, melyet egy halmazzal reprezentáltunk. A valószínűségelméletben az esemény maga a halmaz.

Nevezetes események, kapcsolat az események között

- Az Ω eseményt **biztos eseménynek** nevezzük, az $\emptyset$ esemény pedig a **lehetetlen esemény**.
- Az **elemi esemény** olyan esemény, melyben pontosan egy kimenetel található: $A = \{\omega\}$.
- Azt mondjuk, hogy A és B **kizáró** események, ha diszjunktak, tehát $A \cap B = \emptyset$. A kizáró események „kizárják” egymást, nem következhetnek be egyszerre.
- Azt mondjuk, hogy az A esemény **maga után vonja** a B eseményt, ha $A \subset B$. Jelentése: ha A bekövetkezik, akkor B is bekövetkezik; tehát $A \Rightarrow B$.

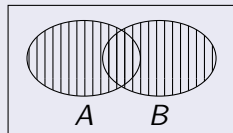


Műveletek eseményekkel

Legyenek A és B események!

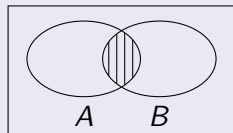
- Események **összege**:

$$A + B = A \text{ vagy } B = A \cup B$$



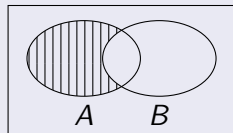
- Események **szorzata**:

$$A \cdot B = A \text{ és } B = A \cap B$$



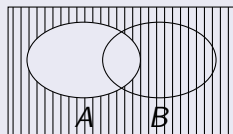
- Események **különbsége**:

$$A - B = (A \text{ igen, de nem } B) = A \setminus B$$



- Egy esemény **tagadása**:

$$\neg A = \text{nem } A = \bar{A}$$



Tekintsünk egy tetszőleges véletlen kísérletet. Láttuk, hogy

- az eseménytér (Ω) a lehetséges kimenetek halmaza;
- az események halmazok, az eseménytér részhalmazai;
- az eseményeken pedig műveleteket lehet végrehajtani.

Természetes követelmény: az eseményalgebrai műveletek révén kapott halmazok legyenek események!

Jelölés: $\mathcal{P}(\Omega)$ az Ω halmaz hatványhalmaza.

Eseményalgebra

Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tetszőleges halmazrendszer. Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer **eseményalgebra** az Ω halmazon, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- az $\mathcal{A}$ halmazrendszer zárt az elemi halmazelméleti műveletek megszámlálható sokszor való alkalmazására.

Megjegyzések:

- Ha $\mathcal{A}$ eseményalgebra, akkor $\emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$.
- Ha Ω véges halmaz, akkor elég a véges sok műveletre való zártságot megkövetelni.

Események

Tekintsünk egy tetszőleges véletlen kísérletet, és legyen Ω az eseménytér. **Eseményeknek** nevezzük egy *megfelelően megválasztott* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eseményalgebra elemeit.

Melyik eseményalgebrát válasszuk? Érdemes a lehető legbővebbet!

- Látni fogjuk, hogy valószínűsége csak eseményeknek van. Ami nem esemény, annak formálisan nem létezik valószínűsége.
- Véges vagy megszámlálhatóan végtelen számosságú eseménytér $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ mindig jó választás.
- Viszont nem megszámlálható eseménytér mellett látni fogunk olyan példát, amikor nem minden részhalmaz esemény!

Feladat. Tegyük fel, hogy a kísérletnek véges sok lehetséges kimenetele van. Legfeljebb hány különböző esemény definiálható a kísérlethez?

Legyen $N = |\Omega|$. Ekkor a hatványhalmaz számossága: $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^N$. Legfeljebb 2^N különböző esemény definiálható.

Feladat. Tekintsük azt a kísérletet, hogy feldobunk egy dobókockát. Mi a legnagyobb és a legkisebb elemszámú eseményalgebra az eseménytéren? Adjunk meg egy 4-elemű eseményalgebrát!

Eseménytér: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|\Omega| = 6$.

- Legnagyobb elemszámú (legbővebb) eseményalgebra: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
Számossága: $|\mathcal{A}| = 2^6 = 64$.
- Legkisebb számosságú (legsűkebb) eseményalgebra: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$
Számossága: $|\mathcal{A}| = 2$
- Tekintsük például a következő eseményeket:
 $B = \text{páratlan számot dobunk} = \{1, 3, 5\}$
 $\overline{B} = \text{páros számot dobunk} = \{2, 4, 6\}$
Példa 4-elemű eseményalgebrára: $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, B, \overline{B}\}$

Fontos. Valószínűsége csak eseményeknek van!

A valószínűség definíciója és tulajdonságai

Bekövetkezési gyakoriság és relatív gyakoriság

Tekintsünk egy kísérletet, és egy ehhez kapcsolódó A eseményt. Hajtsuk végre a kísérletet egymás után n alkalommal!

- **Bekövetkezési gyakoriság:** $k_n(A)$ = hányszor következett be az A esemény az n ismételés során.
- **Relatív gyakorisága:** $r_n(A) = k_n(A)/n$ = a végrehajtások mekkora hányadában következett be az A esemény.

Észrevételek:

- A valószínűség hétköznapi jelentése: a kísérletet sokszor végrehajtva ilyen arányban következik be a vizsgált esemény.
- Ez matematikailag nem pontos! Egy szabályos pénzérmét $n = 101$ alkalommal feldobva a fej aránya (relatív gyakorisága) nem lehet $1/2$.
- Tapasztalati tény: a kísérletet sokszor végrehajtva a relatív gyakoriság egy valós szám körül ingadozik, közelít hozzá. Ezt a számot nevezzük valószínűségnek: $r_n(A) \approx P(A)$.

Milyen tulajdonságokat várunk el a valószínűségtől?

- Egy A esemény relatív gyakorisága mindig 0 és 1 közé esik.

Elvárás: Legyen $0 \leq P(A) \leq 1$ minden A eseményre.

- A biztos esemény relatív gyakorisága:

$$r_n(\Omega) = \frac{k_n(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Elvárás: A biztos esemény valószínűsége legyen $P(\Omega) = 1$.

- Ha A és B kizáró események, akkor

$$r_n(A \cup B) = \frac{k_n(A \cup B)}{n} = \frac{k_n(A) + k_n(B)}{n} = r_n(A) + r_n(B)$$

Hasonló módon mutatható meg, hogy ha $A_1, A_2, \dots$ páronként kizáró eseményeknek véges vagy végtelen sorozata, akkor

$$r_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = r_n(A_1) + r_n(A_2) + \dots$$

Elvárás: Az ilyen eseményekre legyen

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Valószínűség definíciója; Kolmogorov-axiómák (1933)

Tekintsünk az Ω eseményteret, és a $\mathcal{A}$ az eseményalgebrát, tehát az események halmazát. Azt mondjuk, hogy a $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ függvény **valószínűség** vagy **valószínűségi mérték** az eseményalgebrán, ha teljesíti az alábbi két tulajdonságot:

- A biztos esemény valószínűsége $P(\Omega) = 1$.
- **σ -additivitás:** Ha $A_1, A_2, \dots$ páronként kizáró eseményeknek egy végtelen sorozata, akkor az egyesítésük valószínűsége

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Az A eseményhez rendelt $P(A)$ értéket úgy nevezzük, hogy az A **valószínűsége**. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast **valószínűségi mezőnek** hívjuk.

Ha az eseménytér véges, akkor a σ -additivitás ekvivalens az **additivitással**: tetszőleges $n \geq 1$ egészre és $A_1, \dots, A_n$ páronként kizáró eseményekre

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

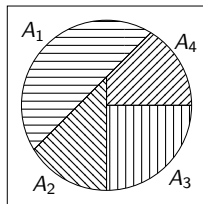
Ez pedig már tanítható középiskolás szinten is...

Az additivitás azt fejezi ki, hogy ha egy eseményt felbontunk több kizáró eseményre, akkor

egész valószínűsége = részek valószínűségeinek az összege

A matematikában az additivitási szabály nem csak a valószínűségekre teljesül, hanem más fogalmakra is. Például: terület, térfogat, tömeg. Ezeket a fogalmakat összefoglaló néven **mértékeknek** nevezzük.

$$t(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = t(A_1) + t(A_2) + \dots$$



Hogyan érdemes elképzelni a valószínűséget? Egységnyi nagyságú súlyt szétterítünk az eseménytéren, és az A esemény valószínűsége az A halmaz összsúlya.

A véletlen kísérleteket mindig egy megfelelően megkonstruált $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezővel írjuk le:

- az Ω alaphalmaz a kimenetek halmaza,
- a $\mathcal{A}$ eseményalgebra az események halmaza,
- a P függvény mondja meg az egyes események valószínűségét.

A valószínűség tulajdonságai

A valószínűség definíciójából következnek az alábbi tulajdonságok:

- Lehetetlen esemény valószínűsége: $P(\emptyset) = 0$.
- **Additivitás:** Tetszőleges $n \geq 1$ egészre és $A_1, \dots, A_n$ páronként kizáró eseményekre:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n).$$

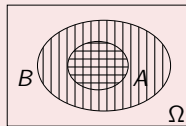
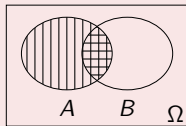
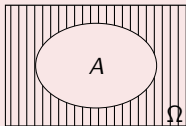
Véges eseménytéren az additivitás ekvivalens a σ -additivitással.

- Komplementer esemény valószínűsége: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- **Kivonási szabály:** Tetszőleges A és B események mellett

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$

- **Monotonitás:** Ha A maga után vonja a B eseményt, akkor

$$P(A) \leq P(B).$$



A valószínűség további tulajdonságai

- **Szubadditivitás:** Ha $A_1, A_2, \dots$ tetszőleges eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata, akkor

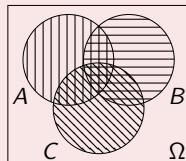
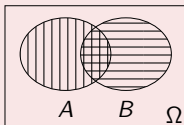
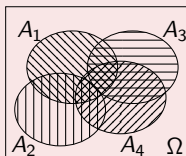
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

- Két esemény uniója: Tetszőleges A és B eseményekre

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Három esemény uniója: Tetszőleges A , B és C eseményekre

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ & - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$



A valószínűség további tulajdonságai

- **Poincaré-formula** avagy **szitaformula**: tetszőleges $A_1, \dots, A_n$ események mellett

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ \text{különböző egészek}}} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &= P(A_1) + \dots + P(A_n) \\ &\quad - \text{ketteses metszetek valószínűsége} \\ &\quad + \text{hármass metszetek valószínűsége} \\ &\quad - \text{négyes metszetek valószínűsége} \\ &\quad \dots \pm P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

Hogyan lehet bebizonyítani ezeket a formulákat?

- Formális levezetés a valószínűség definíciójából.
- Heurisztikus megközelítés: mennyi a halmazok súlya?
- Ha a Laplace-formula alkalmazható: visszavezetjük számosságokra.

Feladat. Egy társaságban az emberek 40 százaléka beszél angolul, 35 százaléka németül, 30 százaléka franciául, 15 százaléka angolul és németül, 20 százaléka angolul és franciául, 20 százaléka németül és franciául, végül az emberek 10 százaléka beszél mindhárom nyelven. Véletlenszerűen kiválasztunk egy embert. Hogyan lehet matematikailag leírni a kísérletet?

Kísérlet: véletlenszerűen kiválasztunk egy embert.

Lehetséges kimenetek: az emberek a társaságban.

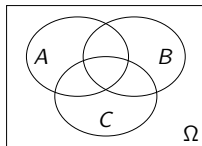
Eseménytér (kimenetek halmaza): a teljes társaság.

Bevezetünk eseményeket:

A = a kiválasztott ember beszél angolul

B = a kiválasztott ember beszél németül

C = a kiválasztott ember beszél franciául



Véletlenszerű választás $\Rightarrow$ valószínűség = arány.

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,35, \quad P(C) = 0,3, \quad P(A \cap B \cap C) = 0,1,$$

$$P(A \cap B) = 0,15, \quad P(A \cap C) = 0,2, \quad P(B \cap C) = 0,2.$$

Mennyi az alábbi események valószínűsége?

- A kiválasztott ember beszél angolul, de nem beszél franciául.

beszél angolul, de nem beszél franciául = A teljesül, de C nem = $A \setminus C$

$$P(A \setminus C) = P(A) - P(A \cap C) = 0,4 - 0,2 = 0,2$$

- A kiválasztott ember beszél németül vagy franciául.

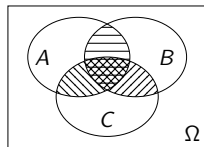
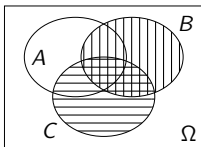
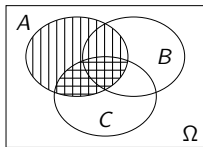
beszél németül vagy franciául = $B \cup C$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0,35 + 0,3 - 0,2 = 0,45$$

- A kiválasztott ember beszél legalább két nyelven.

D = beszél legalább két nyelven = $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$P(D) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 2P(A \cap B \cap C) = 0,35$$



- Mennyi annak az esélye, hogy a kiválasztott ember egyik nyelvet sem beszéli a három közül?

egyk nyelvet sem beszéli = nem A és nem B és nem $C = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

Ez így nem fog működni: nincsen formulánk a metszet valószínűségére.

Térjünk át az esemény tagadására (komplementer esemény):

beszéli valamelyik nyelvet = A vagy B vagy $C = A \cup B \cup C$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0,6 \end{aligned}$$

$$P(\text{egyk nyelvet sem beszéli}) = 1 - P(\text{beszéli valamelyik nyelvet}) = 0,4$$

Miért érdemes ilyen típusú feladatot tanítani?

- Szeretnénk gyakorolni a valószínűség azonosságait. De a valószínűség egy új fogalom, és az azonosságok elsőre nem feltétlenül intuitívek.
- A feladatban minden valószínűség egy arány a társaságon belül.
- Ezek az azonosságok az arányokra természetes módon teljesülnek.

Diszkrét valószínűségi mezők

Diszkrét valószínűségi mező

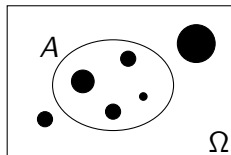
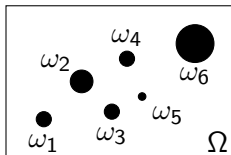
Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **diszkrét valószínűségi mező**, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok.

- Az eseménytér megszámlálható halmaz, tehát a lehetséges kimenetek egy véges vagy végtelen sorozatot alkotnak: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.
- Minden részhalmaz esemény: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Diszkrét valószínűségi mezőn a kimenetek összvalószínűsége:

$$P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots = P(\{\omega_1, \omega_2, \dots\}) = P(\Omega) = 1.$$

Egy tetszőleges $A \subset \Omega$ esemény valószínűsége: $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.



Klasszikus valószínűségi mező

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **klasszikus valószínűségi mező**, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok.

- Az eseménytér véges: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$.
- Minden részhalmaz esemény: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Minden elemi eseménynek azonos a bekövetkezési valószínűsége:

$$P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_N\}).$$

Laplace-formula; a valószínűség kombinatorikus kiszámítási módja

Klasszikus valószínűségi mezőn egy tetszőleges A esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező kimenetek száma}}{\text{összes kimenetek száma}}$$

Bizonyítás. Mivel minden kimenetelnek azonos a valószínűsége, ezért minden kimenetelnek $1/|\Omega|$ a valószínűsége. Emiatt:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Feladat. Lajos kulcscsomóján három kulcs található, ezek közül az egyik a bejárati ajtót nyitja. Egy este a barátaival italozik, és hazatérve nem tudja megkülönböztetni a kulcsait. Emiatt véletlenszerűen és visszatevéssel választ újabb és újabb kulcsot, míg ki nem nyitja az ajtót.

- *Hány lehetséges kimenetele van a kísérletnek?*

ω_n = az n . próbálkozásra választja ki a helyes kulcsot, $n = 1, 2, \dots$

ω_∞ = sosem választja ki a helyes kulcsot

Megszámlálhatóan végtelen sok kimenetel: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\infty\}$

- *Mennyi az egyes kimenetek (elemi események) valószínűsége?*

Képzeld el, hogy Lajos pontosan n alkalommal próbálkozik:

$$P(\{\omega_n\}) = P(\text{az } n. \text{ az első sikeres választás}) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{2^{n-1} \cdot 1}{3^n}$$

$$\begin{aligned} P(\text{véges sok húzással megtalálja a helyes kulcsot}) &= P(\{\omega_1, \omega_2, \dots\}) \\ &= P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots \right] = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 2/3} = 1 \end{aligned}$$

Kapjuk: $P(\{\omega_\infty\}) = 0$. Tehát az ω_∞ kimenetel nem következhet be?

Geometriai valószínűségi mezők

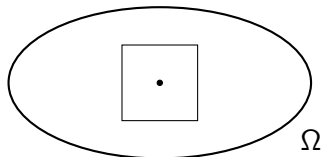
Feladat. Ejtőernyős ugrást hajtanak végre egy 500 m^2 területű réten. Az ugrás akkor sikeres, ha az ugró a réten kijelölt 10 m oldalhosszúságú négyzetben ér földet. Lajos kezdő ejtőernyős, és a réten egy véletlenszerű helyen ér földet. Mekkora valószínűséggel lesz sikeres az ugrása? Mennyi az esélye, hogy Lajos pontosan a négyzet geometriai középpontjára érkezik?

Kimenetek: a rét pontjai.

Eseménytér: maga a rét.

Mit jelent a *véletlenszerű hely*?

Heurisztikus megoldás:



$$P(\text{a négyzetben landol}) = \frac{\text{négyzet területe}}{\text{rét területe}} = \frac{10^2}{500} = \frac{1}{5}$$

$$P(\text{a négyzetben középpontjában landol}) = \frac{\text{pont területe}}{\text{rét területe}} = \frac{0}{500} = 0$$

Az előző feladat tanulságai:

- Az eseménytér egy geometriai alakzat, a valós sík egy részhalmaza. Ez egy nem megszámlálható halmaz, tehát nem diszkrét valószínűségi mezőről van szó.
- Lajos *véletlenszerű* helyen ér földet, de ez az információ most nem a Laplace-formulára utal. Ennek ellenére mi mégis a kedvező/összes formulát alkalmaztuk.
- A feladatban az események valószínűsége ténylegesen nem függött az események alakjától és elhelyezkedésétől, csak a nagyságuktól.
- Jelölje $t(A)$ egy $A \subset \mathbb{R}^d$ geometriai alakzat mértékét. A mérték dimenziótól függően a hosszúság, a terület vagy a térfogat.
- **Mérhetőnek** nevezzük azokat az A alakzatokat, melyeknek létezik a mértéke. Nem minden alakzat mérhető! Emiatt nem minden $A \subset \Omega$ halmaznak létezik valószínűsége.
- Szerencsére a nem mérhető halmazok rendkívül bonyolultak, ezekkel az egyszerűbb alkalmazásokban nem találkozunk. Amilyen alakzatot egy középiskolás diák el tud képzelni, az mind mérhető. (Amilyen alakzatot Önök el tudnak képzelni, az is mind mérhető...)

Geometriai valószínűségi mezők

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **geometriai valószínűségi mező**, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ valamilyen $d \geq 1$ egész számra.
- Az Ω halmaz mérhető és $0 < t(\Omega) < \infty$.
- Az események az Ω mérhető részhalmazai. (Tehát $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\Omega)$.)
- **Egyenletességi hipotézis:** Az események valószínűsége egyenesen arányos az események mértékével, tehát minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra $P(A) = ct(A)$ valamilyen $c > 0$ konstans mellett.

Formula a valószínűségre

Geometriai valószínűségi mezőn tetszőleges A eseményre:

$$P(A) = \frac{t(A)}{t(\Omega)} = \frac{\text{kedvező hosszúság/terület/térfogat}}{\text{összes hosszúság/terület/térfogat}}$$

Bizonyítás. A biztos esemény valószínűsége: $1 = P(\Omega) = ct(\Omega)$.
Ebből $c = 1/t(\Omega)$, vagyis $P(A) = ct(A) = t(A)/t(\Omega)$.

Feladat. (Bertrand-paradoxon, 1889.) Tekintsünk egy kört, és írjunk bele egy szabályos háromszöget. Véletlenszerűen válasszunk ki egy húrt! Mennyi az esélye, hogy a húr hosszabb, mint a beírt háromszög oldala?

- ❶ Rögzítjük a húr egyik végpontját, és a másik végpontot véletlenszerűen választjuk a körvonalon.

Kimenetek: a körvonal pontjai.

A kérdéses valószínűség: $p = 1/3$.

- ❷ Rögzítünk egy sugarat (a középpontot a körvonallal összekötő szakaszt), és véletlenszerűen választunk egy erre merőleges húrt.

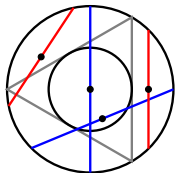
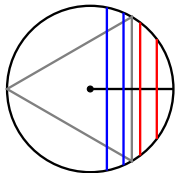
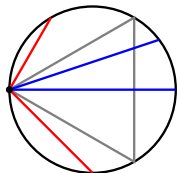
Kimenetek: a sugár (szakasz) pontjai.

A kérdéses valószínűség: $p = 1/2$.

- ❸ Véletlenszerűen választunk egy pontot a körlapon, majd megszerkesztjük azt az egyértelmű húrt, melynek ez a pont a felezőpontja.

Kimenetek: a körlap pontjai.

A kérdéses valószínűség: $p = 1/4$.



A matematikában paradoxonoknak nevezzük azokat az állításokat, melyek ellentmondanak a várakozásoknak, és emiatt matematikai ellentmondásnak tűnnek. Viszont ezek ténylegesen nem matematikai ellentmondások, csak a várakozásaink voltak tévesek.

A Bertrand-paradoxon esetében:

- Három különböző gondolatmenettel három különböző megoldást kaptunk. Ez ellentmondásnak tűnik.
- A paradoxonnak az a feloldása, hogy a feladat nem volt egyértelműen megfogalmazva: mit jelent az, hogy *véletlenszerűen választott húr*? Véletlenszerűen csak egy pontot tudunk választani, és ebből tudunk egy húrt megszerkeszteni.
- Viszont a véletlenszerű pont különböző módon történő választásaival teljesen eltérő matematikai kísérleteket kapunk, és emiatt eltér a kérdéses esemény valószínűsége.
- Tanulság: véletlen jelenségeknél pontosan meg kell fogalmazni, hogy milyen algoritmussal hajtjuk végre a kísérletet. Az eltérő algoritmusok eltérő valószínűségekhez vezethetnek.

A feltételes valószínűség

Feladat. Feldobunk egy szabályos dobókockát, és legyen A az az esemény, hogy páratlan számot dobunk. Ekkor: $P(A) = 1/2$.

Adjuk meg A valószínűségét, ha rendelkezünk az alábbi információval!

- Ha tudjuk, hogy prímszámot dobtunk: $P(A) = 2/3$.
- Ha tudjuk, hogy 5-nél kisebbet dobtunk: $P(A) = 2/4 = 1/2$.
- Ha tudjuk, hogy 3-ast vagy 5-öst dobtunk: $P(A) = 2/2 = 1$.
- Ha tudjuk, hogy páros számot dobtunk: $P(A) = 0/3 = 0$.

1 3 5 2 4 6 A Ω	1 3 5 2 4 6 A Ω	1 3 5 2 4 6 A Ω	1 3 5 2 4 6 A Ω
---	--	--	---

A háttérinformáció nagy mértékben befolyásolja a valószínűséget. Hogyan számoljunk feltételes valószínűséget nem klasszikus valószínűségi mezőn?

Adott egy véletlen kísérlet és az ezt leíró $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező.

- Egy $A \in \mathcal{A}$ esemény valószínűsége: a kísérletet sokszor megismételve a relatív gyakoriság a valószínűség körül ingadozik, $r_n(A) \approx P(A)$.
- Tegyük fel, hogy van egy háttér-információnk: tudjuk azt, hogy a B esemény bekövetkezik. Ezen háttér-információ birtokában mennyi az A esemény valószínűsége?

Feltételes relatív gyakoriság

Tekintsünk egy kísérletet, és legyenek A és B tetszőleges események. Hajtsuk végre a kísérletet n alkalommal egymás után. Az A eseménynek a B eseményre vett **feltételes relatív gyakorisága**:

$$r_n(A|B) = \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)}.$$

Jelentése: az A esemény bekövetkezéseinek az aránya azon végrehajtások között, amikor B bekövetkezett. Csak akkor értelmezhető, ha $k_n(B) > 0$.

Példa. Tegyük fel, hogy a kísérlet $n = 10$ végrehajtása után a következő eredményt kapjuk:

Kísérlet sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A bekövetkezései	A		A			A		A		A
B bekövetkezései		B	B		B	B		B		B

Az A esemény relatív gyakorisága: $r_{10}(A) = k_{10}(A)/10 = 5/10 = 1/2$

Az A feltételes relatív gyakorisága: $r_{10}(A|B) = k_{10}(A \cap B)/k_{10}(B) = 4/6$

Vegyük észre:

$$r_n(A|B) = \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{k_n(A \cap B)/n}{k_n(B)/n} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(B)} \approx \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Tehát a feltételes relatív gyakoriság a $P(A \cap B)/P(B)$ hányados körül ingadozik. Ez az észrevétel motiválja a következő definíciót.

Feltételes valószínűség

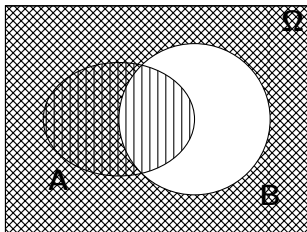
Legyenek A és B események, és tegyük fel, hogy $P(B) > 0$. Ekkor az A eseménynek a B eseményre vett **feltételes valószínűsége**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

A feltételes valószínűség megmutatja, hogy mennyi az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezik.

Szemléletesen a következő dolog történik:

- Kidobjuk azokat a kimeneteket, melyek nem következhetek be ($\bar{B}$ elemei).
- $A \cap B$ egy „szűkített eseménytér,” ezen belül nézzük az A halmaz súlyarányát.



Feltételes valószínűség klasszikus és geometriai valószínűségi mezőn

Legyenek A és B események, $P(B) > 0$. A $P(A|B)$ feltételes valószínűség a következő módon is meghatározható: kidobjuk a $\bar{B}$ halmazba eső kimeneteket, majd alkalmazzuk az alábbi formulákat.

❶ Klasszikus valószínűségi mező esetén

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\text{megmaradt kedvező}}{\text{megmaradt összes}}.$$

❷ Geometriai valószínűségi mező esetén

$$P(A|B) = \frac{t(A \cap B)}{t(B)} = \frac{\text{megmaradt kedvező}}{\text{megmaradt összes}}.$$

Bizonyítás.

$$1. \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

$$2. \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{t(A \cap B)/t(\Omega)}{t(B)/t(\Omega)} = \frac{t(A \cap B)}{t(B)}$$

Feladat. Véletlenszerűen kiválasztunk egy háromgyerekes családot, és tekintjük az alábbi eseményeket:

- $A =$ a gyerekek között legfeljebb egy lány van
- $B =$ a gyerekek között van fiú és lány is

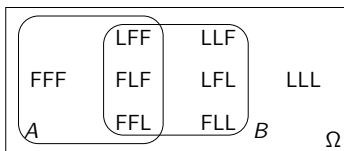
Adjuk meg az A és a B esemény valószínűségét! Mennyi a $P(A|B)$ feltételes valószínűség értéke, és hogyan értelmezhető ez az eredmény?

A kísérletnek 8 lehetséges kimenetele van, és ezek azonos valószínűségűek.

$$P(A) = 4/8 = 1/2, \quad P(B) = 6/8 = 3/4, \quad P(A \cap B) = 3/8$$

1. megoldás: definíció

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/8}{6/8} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



2. megoldás: kidobjuk a B eseményen kívül eső kimeneteleket

$$P(A|B) = \frac{\text{megmaradt kedvező}}{\text{megmaradt összes}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Észrevétel: ebben a feladatban $P(A|B) = P(A)$.

Feladat. Egy metróvonalon pontosan 10 perces követési idővel járnak a szerelvények. Véletlenszerű időpontban lemegyünk az állomásra.

- Mennyi annak a valószínűsége, hogy a következő szerelvényre legfeljebb 5 percet kell várni?

Eseménytér: $\Omega = [0, 10]$

Véletlenszerű időpont $\Rightarrow$ teljesül az egyenletességi hipotézis.

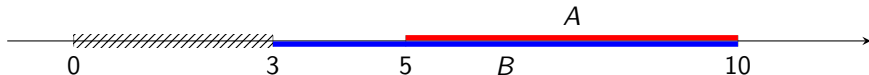
A = a következő szerelvényre legfeljebb 5 percet kell várni = $[5, 10]$

$$P(A) = 5/10 = 1/2$$

- Mennyi a valószínűsége ugyanennek, ha tudjuk, hogy a legutóbbi szerelvény már legalább 3 perce elment?

B = a legutóbbi szerelvény már legalább 3 perce elment = $[3, 10]$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/10}{7/10} = \frac{5}{7}$$



A feltételes valószínűség tulajdonságai

Felmerülhet a kérdés, hogy a feltételes valószínűség valóban valószínűség, azaz valószínűségi mérték-e.

A feltételes valószínűség valószínűségi mérték

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tetszőleges valószínűségi mező, $B \in \mathcal{A}$ pedig egy pozitív valószínűségű esemény. Ekkor teljesülnek az alábbiak:

- Tetszőleges A eseményre $P(A|B) \in [0, 1]$.
- A biztos esemény feltételes valószínűsége: $P(\Omega|B) = 1$.
- σ -additivitás: tetszőleges $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ kizáró eseményekre

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \dots$$

Ez azt jelenti, hogy a B eseményre vett feltételes valószínűség egy valószínűségi mérték. Következmény: a feltételes valószínűségre teljesül minden olyan azonosság, amit bebizonyítottunk a valószínűségi mértékekre.

Mivel a feltételes valószínűség valószínűségi mérték, teljesülnek a következő tulajdonságok:

- A lehetetlen esemény feltételes valószínűsége: $P(\emptyset|B) = 0$.

- Additivitás: ha $A_1, \dots, A_n$ kizáró események, akkor

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n | B) = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B).$$

- A komplementer esemény valószínűsége: $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$.

- Monotonitás: Ha $A_1 \subset A_2$, akkor $P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$.

- Két esemény uniójának a valószínűsége:

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2 | B).$$

- Poincaré-formula...

Fontos. A fenti azonosságokban a B esemény rögzített! A feltételes valószínűségben a feltételt nem lehet ilyen könnyen manipulálni. Például általában $P(A|\bar{B}) \neq 1 - P(A|B)$.

Láncszabály

Legyenek $A_1, \dots, A_n$ olyan események, melyekre $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$.

Ekkor

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \\ \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definícióját többször alkalmazva:

$$\begin{aligned} & P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \\ &= P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} \\ &= P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) \end{aligned}$$

Feladat. Egy urnában 2 piros és 4 zöld golyó található. Véletlenszerűen és visszatevés nélkül kihúzunk 3 golyót. Mennyi annak az esélye, hogy sorban pirosat, zöldet, majd ismét piros golyót kapunk?

$$\begin{aligned} & P(1. \text{ piros}, 2. \text{ zöld}, 3. \text{ piros}) \\ &= P(1. \text{ piros}) \cdot P(2. \text{ zöld} | 1. \text{ piros}) \cdot P(3. \text{ piros} | 1. \text{ piros}, 2. \text{ zöld}) \\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} \end{aligned}$$

Bayes-formula (Bayes, 1763)

Ha A és B pozitív valószínűségi események, akkor

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciójából és a láncszabályból is következik, hogy $P(B \cap A) = P(A|B)P(B)$. Ekkor pedig:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Feladat. Egy gyárban anyaghibás és mérethibás gyártmányok is készülnek, és ezek a teljes mennyiség 25 illetve 40 százalékát teszik ki. A mérethibás darabok ötöde anyaghibás is egyben. Az anyaghibás gyártmányok mekkora hányada mérethibás?

$$\begin{aligned} P(\text{mérethibás} | \text{anyaghibás}) &= \frac{P(\text{anyaghibás} | \text{mérethibás}) \cdot P(\text{mérethibás})}{P(\text{anyaghibás})} \\ &= \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,25} = 0,32 = 32\% \end{aligned}$$

Teljes eseményrendszer

Azt mondjuk, hogy a $B_1, \dots, B_r$ események **teljes eseményrendszert** (t.e.r.) alkotnak, ha teljesítik az alábbi tulajdonságokat:

- páronként diszjunktak: tetszőleges $i \neq j$ esetén $B_i \cap B_j = \emptyset$;
- együttesen lefedik az eseményteret: $B_1 \cup \dots \cup B_r = \Omega$.

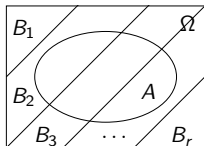
A teljes valószínűség tétele

Legyen $B_1, \dots, B_r$ pozitív valószínűségű eseményeket tartalmazó teljes eseményrendszer! Ekkor egy tetszőleges A esemény valószínűsége:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_r)P(B_r)$$

Bizonyítás. Az additivitásból és a feltételes valószínűség definíciójából:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_r) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_r)P(B_r) \end{aligned}$$

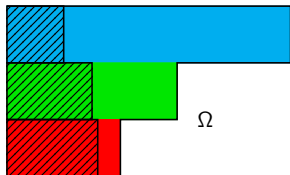


Feladat. Lajosnak lejárt a bérlete, mégis felszáll az első járműre, ami hazaviszi. A megállóban 50% valószínűséggel érkezik először busz, 30% valószínűséggel trolis, a többi esetben pedig villamos. A buszon 20% eséllyel jön ellenőr, a trolin 50% eséllyel, a villamoson pedig 80% eséllyel.

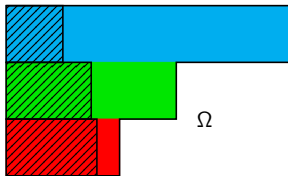
- Mennyi annak az esélye, hogy hazafelé utazva találkozik ellenőrrel?
- Ha otthon szomorúan meséli el, hogy megbüntették, akkor mennyi a valószínűsége, hogy villamossal utazott?

Bevezetünk eseményeket: A = találkozik ellenőrrel = megbüntetik,
 B_1 = busszal utazik, B_2 = trolival utazik, B_3 = villamossal utazik
 Vegyük észre: B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszert alkot.

jármű	valószínűség	ellenőr esélye
busz	$P(B_1) = 0,5$	$P(A B_1) = 0,2$
trolis	$P(B_2) = 0,3$	$P(A B_2) = 0,5$
villamos	$P(B_3) = 0,2$	$P(A B_3) = 0,8$
összesen	1	$P(A) = ?$



jármű	valószínűség	ellenőr esélye
busz	$P(B_1) = 0,5$	$P(A B_1) = 0,2$
troli	$P(B_2) = 0,3$	$P(A B_2) = 0,5$
villamos	$P(B_3) = 0,2$	$P(A B_3) = 0,8$
összesen	1	$P(A) = ?$



- *Mennyi annak az esélye, hogy hazafelé utazva találkozik ellenőrrel?*

Teljes valószínűség tétele:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\
 &= 0,2 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,2 = 0,41
 \end{aligned}$$

- *Ha megbüntették, akkor mennyi az esélye, hogy villamossal utazott?*

Bayes-formula:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{0,8 \cdot 0,2}{0,41} \approx 0,39$$

Itt igazából ezt történt:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A \cap B_3)}{P(A)} = \frac{\text{fekete és piros}}{\text{fekete}}$$

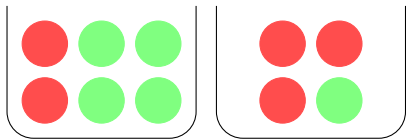
Feladat. Adott két urna. Az egyikben 2 piros és 4 zöld, a másikban 3 piros és 1 zöld golyót találhatók. Véletlenszerűen kiválasztunk egy urnát, és kiveszünk belőle egy golyót. Mennyi annak az esélye, hogy pirosat húzunk?

Bevezetünk eseményeket:

A = pirosat húzunk,

B_1 = az 1. urnát választjuk,

B_2 = az 2. urnát választjuk.



Ekkor: $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$, $P(A|B_1) = 2/6$, $P(A|B_2) = 3/4$.

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$$

Tegyük fel, hogy a húzás során zöld golyót kaptunk! Mennyi az esélye, hogy az 1. urnából húztunk?

A Bayes-formula alkalmazásával

$$P(B_1|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|B_1)P(B_1)}{P(\bar{A})} = \frac{4/6 \cdot 1/2}{11/24} = \frac{8}{11} > \frac{1}{2} = P(B_1)$$

Feladat. Összeöntjük a golyókat egy urnába, majd abból húzunk egyet.
Mennyi az esélye, hogy pirosat kapunk?

Az összeöntés után 5 piros és 5 zöld golyó van egy urnában, így

$$P(A) = 5/10 = 1/2.$$

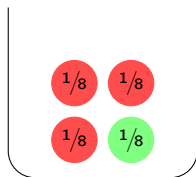
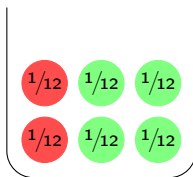
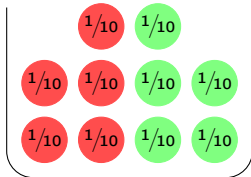
Miért változott meg a valószínűség az előző elrendezéshez viszonyítva?

- Az egyurnás elrendezésnél minden golyónak $1/10$ az esélye, ezért

$$P(A) = 5 \cdot 1/10 = 5/10.$$

- A kéturnás elrendezésnél az első urnában minden golyónak $1/12$, a másodikban $1/8$ az esélye, ezért

$$P(A) = 2 \cdot 1/12 + 3 \cdot 1/8 = 13/24.$$



Két esemény függetlensége

Két esemény függetlensége

Legyen A és B két tetszőleges esemény. Azt mondjuk, hogy a két esemény **független** egymástól, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

A függetlenséggel ekvivalens tulajdonságok

Ha A és B pozitív valószínűségű, akkor az alábbiak ekvivalensek:

- 1 A és B független egymástól.
- 2 $P(A|B) = P(A)$.
- 3 $P(B|A) = P(B)$.

Bizonyítás. Ha A és B független, akkor

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A)P(B)/P(B) = P(A).$$

A fordított irányért, ha $P(A|B) = P(A)$, akkor

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B).$$

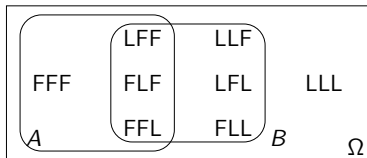
Feladat. Véletlenszerűen kiválasztunk egy háromgyerekes családot, és tekintsük az alábbi eseményeket:

- $A = a$ gyerekek között legfeljebb egy lány van
- $B = a$ gyerekek között van fiú és lány is

Független egymástól a két esemény?

Korábban láttuk, hogy

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{3}{8}, \quad P(A|B) = \frac{1}{2}$$



1. megoldás: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, tehát függetlenek.

2. megoldás: $P(A|B) = P(A)$, tehát függetlenek.

Feladat. Számoljuk végig ugyanezt négygyerekes családokra is!

Feladat. Feldobunk két szabályos dobókockát. Mutassuk meg, hogy ha a két dobás független, akkor mind a 36 kimenetelnek azonos a valószínűsége.

Tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ esetén legyen

A = az 1. kockával i -t dobunk, B = a 2. kockával j -t dobunk.

A feltevés szerint ezek független események, tehát

$$\begin{aligned} P(\text{az 1. kockával } i\text{-t, a 2. kockával } j\text{-t dobunk}) \\ = P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36. \end{aligned}$$

Feladat. Mutassunk példát olyan kísérletre, mikor a két kockadobás nem független! Ekkor is azonos a kimenetek valószínűsége?

A kísérlet: feldobok egy szabályos dobókockát, felveszem filmre, majd ezt lejátszom újra. Ekkor két szabályos kockadobást kapok, de ezek nem függetlenek. A kimenetek valószínűsége:

$$P(\text{az 1. kockával } i\text{-t, a 2. kockával } j\text{-t dobunk}) = \begin{cases} 1/6, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

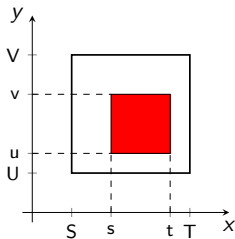
Feladat. Véletlenszerűen és egymástól függetlenül választunk egy x és egy y értéket rendre az $[S, T]$ illetve az $[U, V]$ intervallumból. Mutassuk meg, hogy ekkor az (x, y) pont teljesíti az egyenletességi hipotézist az $[S, T] \times [U, V]$ téglalapon!

Azt kell megmutatnunk, hogy az $[S, T] \times [U, V]$ téglalap tetszőleges A részhalmaza esetén

$$P((x, y) \in A) = \frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}} = \frac{A \text{ területe}}{(T - S)(V - U)}$$

Legyen először A egy téglalap: $A = [s, t] \times [u, v]$

$$\begin{aligned} P((x, y) \in A) &= P(x \in [s, t], y \in [u, v]) \\ &= P(x \in [s, t]) \cdot P(y \in [u, v]) = \frac{t - s}{T - S} \cdot \frac{v - u}{V - U} \\ &= \frac{(t - s)(v - u)}{(T - S)(V - U)} = \frac{A \text{ területe}}{(T - S)(V - U)} \end{aligned}$$



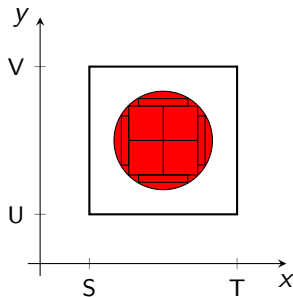
Most legyen A egy folytonos görbével határolt síkidom!

A síkidom felbontható megszámlálható sok diszjunkt téglalagra:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

Ekkor:

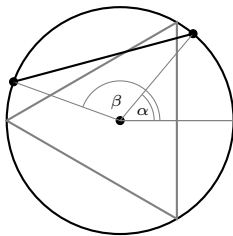
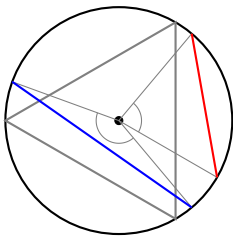
$$\begin{aligned} P((x, y) \in A) &= \sum_i P((x, y) \in A_i) \\ &= \sum_i \frac{A_i \text{ területe}}{(T - S)(V - U)} = \frac{A \text{ területe}}{(T - S)(V - U)} \end{aligned}$$



Feladat. (Bertrand-paradoxon, 1889.) Tekintsünk egy kört, és írjunk bele egy szabályos háromszöget. Véletlenszerűen és egymástól függetlenül válasszunk két pontot a körvonalon, és kössük össze őket egy egyenessel! Mennyi az esélye, hogy az így kapott húr hosszabb, mint a beírt háromszög oldala?

Meggondolható, hogy a húr pontosan akkor hosszabb, mint a háromszög oldala, ha a húr középpontból 120° -nál nagyobb szögben látszik.

A körvonal pontjait a hozzájuk tartozó forgásszöggel is leírhatjuk. Ha a pont véletlenszerű a körvonalon, akkor a forgásszög véletlenszerű a $[0^\circ, 360^\circ]$ intervallumon. Jelölje α és β a két forgásszöget!



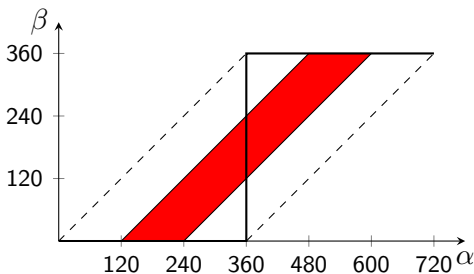
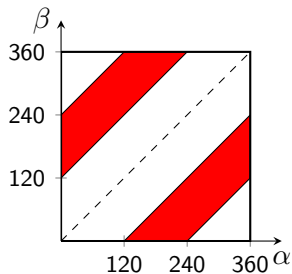
Most α és β egymástól függetlenek és véletlenszerűek a $[0^\circ, 360^\circ]$ intervallumon, azért az (α, β) pont teljesíti az egyenletességi hipotézist a $[0^\circ, 360^\circ] \times [0^\circ, 360^\circ]$ négyzeten.

Geometriai módszerekkel megmutatható, hogy a kapott húr pontosan akkor látszik a kör középpontjából 120° -nál nagyobb szög alatt, ha

$$120^\circ < |\alpha - \beta| < 240^\circ.$$

Ezek az egyenlőtlenségek definiálják a kedvező tartományt.

Direkt területszámolással vagy átdarabolással megmutatható, hogy a kedvező terület a négyzet $1/3$ része, ezért a kérdéses valószínűség $p = 1/3$.

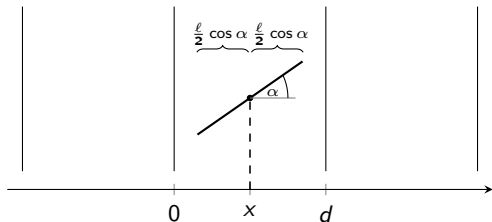


Feladat. (Buffon-féle tűprobléma, 1777.) Adott egy papírlap, melyre egymástól $d > 0$ távolságra párhuzamos egyeneseket rajzoltunk. Véletlenszerűen leejtünk egy $\ell < d$ hosszúságú pálcikát a papírlapra. Mennyi annak az esélye, hogy a pálcika metszi valamelyik egyenest?

Megjegyzések:

- A pálcika pozícióját tökéletesen le tudjuk írni a felezéspont (x, y) koordinátaival és az $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$ forgásszöggel.
- Feltehető, hogy $x \in (0, d]$. Az y értékkel nem kell foglalkoznunk.
- A pálcika pontosan akkor metszi valamelyik egyenest, ha

$$x - \frac{\ell}{2} \cos \alpha \leq 0 \quad \text{vagy} \quad x + \frac{\ell}{2} \cos \alpha \geq d.$$



Mit jelent az, hogy véletlenszerűen ejtjük le a pálcát? Ez számunkra a következőt jelenti:

- x véletlenszerű érték a $(0, d]$ intervallumból;
- α véletlenszerű érték a $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$ intervallumból;
- x és α választása egymástól független.

Ekkor az (α, x) pont véletlenszerű a $(-\pi/2, \pi/2] \times (0, d]$ téglalapon.

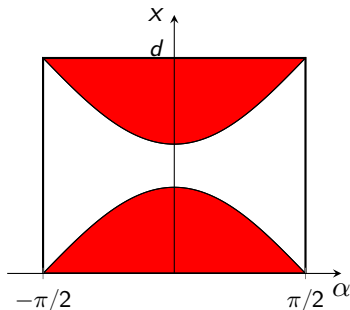
Kedvező tartomány: $x \leq \frac{\ell}{2} \cos \alpha$ vagy $x \geq d - \frac{\ell}{2} \cos \alpha$.

Integrálással a kedvező terület:

$$2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ell}{2} \cos(x) dx = 2\ell$$

A kérdéses valószínűség:

$$p = \frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}} = \frac{2\ell}{\pi d}$$



Miért érdekes a Buffon-féle tűprobléma? Azért, mert kísérleti úton becslést adhatunk π értékére:

- Hajtsuk végre a kísérletet n alkalommal, ahol n nagy szám.
- Jelölje r_n azon végrehajtások relatív gyakoriságát (tehát arányát), amikor a pálca metszi valamelyik egyenest. Ekkor

$$r_n \approx p = \frac{2\ell}{\pi d}, \quad \text{tehát} \quad \pi \approx \frac{2\ell}{r_n d}.$$

Például $d = 2\ell$ választással: $\pi \approx 1/r_n$.

Ezt hogyan lehet a gyakorlatban megvalósítani?

- Fizikailag végrehajtjuk a kísérletet.
- Írunk egy számítógépes programot.

Kettőnél több esemény függetlensége

Legyen $A_1, A_2, \dots$ eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata.

- Azt mondjuk, hogy az események **páronként függetlenek**, ha bármely kettő független egymástól, tehát tetszőleges A_i és A_j különböző eseményeket kiválasztva teljesül, hogy $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$.
- Azt mondjuk, hogy az események **(teljesen) függetlenek**, ha bármely $n \geq 1$ egész esetén tetszőleges $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ különböző eseményeket kiválasztva

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_n}).$$

A továbbiakban, ha csak az ellenkezőjét külön nem hangsúlyozzuk, akkor függetlenség alatt teljes függetlenséget értünk.

A páronkénti függetlenség azt jelenti, hogy akárhogyan is választunk ki két különböző eseményt, ezek függetlenek lesznek egymástól:

$$P(A_j|A_i) = P(A_j) \quad \text{minden } i \neq j \text{ esetén.}$$

A teljes függetlenség azt fejezi ki, hogy semmilyen kapcsolat sincs az események között: tetszőleges $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}, A_j$ különböző eseményekre

$$\begin{aligned} P(A_j | A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) &= \frac{P(A_j \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n})}{P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n})} \\ &= \frac{P(A_j)P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_n})}{P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_n})} = P(A_j) \end{aligned}$$

Az nyilvánvaló, hogy a teljes függetlenségből következik a páronkénti függetlenség. Felmerül a kérdés, hogy a kettő vajon ekvivalens-e egymással.

Kapcsolat a kétféle függetlenség között

Ha az $A_1, A_2, \dots$ események teljesen függetlenek, akkor páronként is függetlenek. Az állítás megfordítása nem igaz, tehát a páronkénti függetlenségből nem következik a teljes függetlenség.

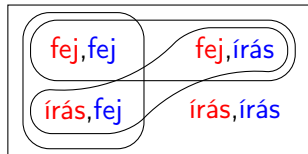
Bizonyítás. Ha az események teljesen függetlenek, akkor $n = 2$ mellett azonnal következik a páronkénti függetlenség. A következő példa pedig illusztrálja, hogy az állítás nem megfordítható.

Feldobunk két szabályos pénzérmét, egy pirosat és egy kékét. Legyen

A = a piros érmével fejet dobunk,

B = a kék érmével fejet dobunk,

C = összesen 1 fejet dobunk.



Ekkor megmutatható, hogy a három esemény páronként független. Ezzel szemben a három esemény nem teljesen független, ugyanis

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C) > 0.$$

Feladat. Háromgyerekes családokban vizsgáljuk a gyerekek nemét. Tegyük fel, hogy a gyerekek neme független egymástól!

- A feltevés mennyire van összhangban a hétköznapi tapasztalatokkal?
- Mutassuk meg, hogy ha a gyerekek $1/2$ – $1/2$ eséllyel születnek fiúnak és lánynak, akkor mind a 8 lehetséges családtípusnak azonos a valószínűsége!

Tekintsük a például a következő családtípust:

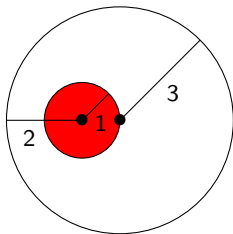
FLF = az 1. gyerek fiú, a 2. gyerek lány, a 3. gyerek fiú

A függetlenség alkalmazásával:

$$\begin{aligned} P(\text{az 1. gyerek fiú és a 2. gyerek lány és a 3. gyerek fiú}) \\ &= P(\text{az 1. gyerek fiú}) \cdot P(\text{a 2. gyerek lány}) \cdot P(\text{a 3. gyerek fiú}) \\ &= (1/2)^3 = 1/8 \end{aligned}$$

Feladat. Egy kör alakú és 3 méter sugarú kerti tó felszínén, a tó szélétől 2 méterre egy molnárka áll lesben. A víz felszínére eső apró rovarok közül azokat veszi észre, amik tőle legfeljebb 1 méterre vannak. Ha egy rovar véletlenszerűen esik a vízbe, akkor mennyi az esélye, hogy ezt a molnárka észreveszi?

$$P(\text{a molnárka észreveszi a rovar}) = \frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}} = \frac{1^2\pi}{3^2\pi} = \frac{1}{9} \approx 11\%$$



Ha 3 rovar esik egymástól függetlenül a vízre, akkor mennyi az esélye, hogy a molnárka mindhármat észreveszi?

Legyen: A_i = a molnárka észreveszi az i . rovar, $i = 1, 2, 3$.

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/9$, és A_1, A_2, A_3 független események.

$P(\text{mindhármat észreveszi}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (1/9)^3$

Ha 3 rovar esik egymástól függetlenül a vízre, akkor mennyi a valószínűsége az alábbi eseményeknek?

- *A molnárka észreveszi az elsőt, de a harmadikat nem.*

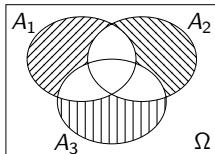
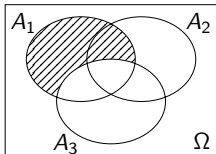
$$P(A_1 \setminus A_3) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) - P(A_1)P(A_3) = 1/9 - (1/9)^2$$

Alternatív megoldás:

$$P(A_1 \setminus A_3) = P(A_1 \cap \bar{A}_3) = P(A_1)P(\bar{A}_3) = 1/9 \cdot 8/9 \approx 10\%$$

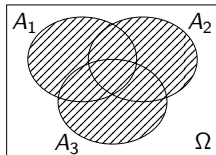
- *A molnárka a három közül pontosan egy rovart vesz észre.*

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) \\ &= 1/9 \cdot 8/9 \cdot 8/9 + 8/9 \cdot 1/9 \cdot 8/9 + 8/9 \cdot 8/9 \cdot 1/9 \approx 26\% \end{aligned}$$



Ha 3 rovar esik egymástól függetlenül a vízre, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy a molnárka észrevesz legalább egyet a három közül?

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) \\ &= 1 - (8/9)^3 \approx 30\% \end{aligned}$$



Hány rovarnak kell egymástól függetlenül a vízre esnie ahhoz, hogy a molnárka 90% eséllyel észrevegyen közülük legalább egyet?

Ha n rovar esik a víz felszínére, akkor

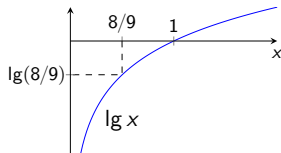
$$\begin{aligned} P(\text{a molnárka észrevesz legalább egyet}) &= 1 - P(\text{egyét sem vesz észre}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) \dots P(\overline{A_n}) = 1 - (8/9)^n \geq 0,9 \end{aligned}$$

$$(8/9)^n \leq 0,1$$

$$n \lg(8/9) = \lg(8/9)^n \leq \lg 0,1$$

$$n \geq \lg 0,1 / \lg(8/9) = 19,5$$

$$n \geq 20$$



Diszkrét valószínűségi változók

Véletlen jelenségeket vizsgálva előfordul, hogy nem közvetlenül a kísérlet kimenetelére vagyunk kíváncsiak, hanem egy véletlen mennyiségre, melyet valamilyen módon származtatunk a kimenetelből.

Feladat. Egy kaszinóban a következő játékot lehet játszani: a játékos feldob egy szabályos dobókockát, és a nyereményét az alábbi táblázat alapján határozzák meg.

<i>dobott szám</i>	<i>nyeremény</i>
1, 2	0 Ft
3, 4, 5	1000 Ft
6	6000 Ft

- *Mi a véletlen kísérlet és mik a lehetséges kimenetek?*
Feldobunk egy szabályos dobókockát, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- *Milyen hozzárendelési szabállyal írhatjuk fel a nyeremény nagyságát?*
 $1 \mapsto 0, 2 \mapsto 0, 3 \mapsto 1000, 4 \mapsto 1000, 5 \mapsto 1000, 6 \mapsto 6000$.

Valószínűségi változó; véletlen változó

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tetszőleges valószínűségi mező! Az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ alakú függvényeket **valószínűségi változóknak** vagy **véletlen változóknak** nevezzük. Az X **értékkészlete** a lehetséges értékek halmaza. Jele: R_X .

Megjegyzések:

- Ez a definíció nem teljesen pontos így, erre majd még visszatérünk.
- A véletlen változó gyakorlatilag egy véletlen szám: $X(\omega)$.
Nem attól véletlen, mert a hozzárendelési szabály véletlen, hanem attól, hogy a kísérlet ω kimenetele véletlen.

Diszkrét valószínűségi változók

Az X véletlen változó **diszkrét**, ha az értékkészlete megszámlálható halmaz. (Például: az értékkészlet véges halmaz.) A diszkrét véletlen változó **valószínűségeloszlása** avagy **súlyfüggvénye**:

$$p_x = P(X = x), \quad x \in R_X.$$

Egy diszkrét véletlen változó **módusai** azok az értékek, melyeket a változó a legnagyobb valószínűséggel vesz fel. A módusz nem mindig egyértelmű.

Valószínűségeloszlások karakterizációja

Tekintsünk egy megszámlálható $R = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ halmazt és egy ezzel azonos elemszámú $p_1, p_2, \dots \in \mathbb{R}$ számsorozatot. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

- 1 Létezik olyan X diszkrét valószínűségi változó, melynek az R halmaz az értékkészlete, és $P(X = x_i) = p_i$ minden i indexre.
- 2 $p_1, p_2, \dots > 0$ és $p_1 + p_2 + \dots = 1$.

Bizonyítás. Az $(1) \Rightarrow (2)$ irány nyilvánvaló.

A fordított irányért tegyük fel, hogy (2) teljesül!

- Tekintsünk egy tetszőleges olyan $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ halmazt, melynek a számossága azonos R számosságával!
- Legyen $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, és legyen $P(\{\omega_i\}) = p_i$ minden i -re!
- Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $X : \omega_i \mapsto x_i$ minden i -re!

Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy diszkrét valószínűségi mező, X egy valószínűségi változó, $R_X = R$, és

$$P(X = x_i) = P(\{\omega_i\}) = p_i.$$

Feladat. A kaszinós feladatban jelölje X a nyeremény nagyságát!

dobott szám	1	2	3	4	5	6
nyeremény	0	0	1000	1000	1000	6000

- Az X véletlen változó diszkrét?

Értékkészlet: $R_X = \{0, 1000, 6000\}$. A változó diszkrét.

- Adjuk meg X valószínűségeloszlását!

$$p_0 = P(X=0) = P(\text{a dobott érték 1 vagy 2}) = 2/6$$

$$p_{1000} = P(X=1000) = P(\text{a dobott érték 3, 4 vagy 5}) = 3/6$$

$$p_{6000} = P(X=6000) = P(\text{a dobott érték 6}) = 1/6$$

- Mennyi annak az esélye, hogy a játékos nyer valamennyi pénzt?

$$P(X > 0) = P(X=1000) + P(X=6000) = 4/6$$

- Hány módusza van a változónak, és mik ezek?

Egy módusz van, az 1000-es érték.

Adott egy X diszkrét valószínűségi változó, $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Kérdés: mennyi a megfigyelt értékek számtani átlaga?

Tegyük fel, hogy többször megismételjük a véletlen kísérletet, és jelölje $X_1, \dots, X_n$ a valószínűségi változó értékeit az egyes végrehajtások során.

$$\begin{aligned}\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} &= \frac{k_n(X = x_1) \cdot x_1 + k_n(X = x_2) \cdot x_2 + \dots}{n} \\ &= r_n(X = x_1) \cdot x_1 + r_n(X = x_2) \cdot x_2 + \dots \\ &\approx P(X = x_1) \cdot x_1 + P(X = x_2) \cdot x_2 + \dots\end{aligned}$$

Várható érték

Legyen X diszkrét valószínűségi változó, és tegyük fel, hogy

$$\sum_{x \in R_X} |x| P(X = x) = |x_1| P(X = x_1) + |x_2| P(X = x_2) + \dots < \infty$$

Ekkor az X **várható értéke**:

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x P(X = x) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots$$

Megjegyzések:

- Szokásos jelölések a várható értékre: E (expected value); M (mean).
- A várható érték jelentése: az X változó hosszútávú átlagos értéke.
- A várható érték és a módusz a helyzeti mutatószámok közé tartozik.
- Jellemzően: várható érték $\neq$ módusz.
- A várható érték nem mindig eleme az értékkészletnek.
- A feltétel azt követeli meg, hogy a várható értéket definiáló sor abszolút konvergens legyen. Ha ez teljesül, akkor az $E(X)$ összeg garantáltan egy véges valós szám.
- Végeselemes értékkészlet esetén a feltétel mindig teljesül, ezért ebben az esetben a feltétel kihagyható a definícióból.

Feladat. *Mennyi a nyeremény várható értéke a kaszinós feladatban?*

Valószínűségeloszlás:

$$P(X=0) = 2/6, \quad P(X=1000) = 3/6, \quad P(X=6000) = 1/6$$

Várható érték: $E(X) = 0 \cdot 2/6 + 1000 \cdot 3/6 + 6000 \cdot 1/6 = 1500$

Sok játékot játszva 1500 forint az egy játékra jutó átlagos nyeremény.

A várható értéket definiáló összegnek fontos jelentése van a fizikában.

- Képzeljük el, hogy az x tengely egy végtelen hosszú súlytalan rúd.
- Minden $x \in R_X$ pontban a rúdra egy kiterjedés nélküli és p_x nagyságú tömeg van erősítve.
- A rudat egy $a \in \mathbb{R}$ pontban alátámasztjuk.
- Az x pontban található p_x nagyságú tömeg forgatónyomatéka:

$$M_x = \text{erőkar} \cdot \text{forgató erő} = (x - a) \cdot p_x g$$

ahol g a gravitációs gyorsulás. Az eredő forgatónyomaték:

$$M = \sum_{x \in R_X} M_x = g \sum_{x \in R_X} (x - a) p_x$$

A rendszer egyensúlya szempontjából három eset lehetséges:

- Ha $M > 0$, akkor a rúd az óramutató járásának irányába billen el.
- Ha $M < 0$, akkor a rúd az ellentétes irányba billen el.
- Ha $M = 0$, akkor a rúd egyensúlyban marad.

Átrendezéssel kapjuk, hogy az egyensúly pontosan akkor teljesül, ha $a = \sum_{x \in R_X} x p_x$, tehát ha a rudat a várható értéknél támasztjuk alá. Ezt a pontot a fizikában **súlypontnak** nevezik.

Szóródási mutatószámok

Legyen X olyan diszkrét változó, melynek létezik a várható értéke!

- **Várható értéktől való átlagos eltérés:**

$$E(|X - E(X)|) = \sum_{x \in R_X} |x - E(X)| P(X = x)$$

- **Variancia, szórásnégyzet:**

$$\text{Var}(X) = E([X - E(X)]^2) = \sum_{x \in R_X} [x - E(X)]^2 P(X = x)$$

Jelentése: a várható értéktől vett átlagos négyzetes eltérés.

- **Szórás:** $D(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

- A várható értéktől való átlagos eltérés egy könnyen értelmezhető mutatószám. Hátránya: nincsenek szép matematikai tulajdonságai.
- Vegyük észre:

$$D(X) = \sqrt{E([X - E(X)]^2)} \approx E(\sqrt{[X - E(X)]^2}) = E(|X - E(X)|)$$

Tehát: szórás $\approx$ várható értéktől való átlagos eltérés.

Feladat. Mennyi a várható értéktől vett átlagos eltérés illetve a szórás a kaszinós feladatban?

$$E(X) = 1500 \quad \begin{array}{c|ccc} X & 0 & 1000 & 6000 \\ \hline p_X & 2/6 & 3/6 & 1/6 \end{array}$$

Várható értéktől vett átlagos eltérés:

$$\begin{aligned} E(|X - E(X)|) &= |0 - 1500| \cdot \frac{2}{6} + |1000 - 1500| \cdot \frac{3}{6} + |6000 - 1500| \cdot \frac{1}{6} \\ &= 1500 \cdot \frac{2}{6} + 500 \cdot \frac{3}{6} + 4500 \cdot \frac{1}{6} = 1500 \end{aligned}$$

Variancia (várható értéktől vett átlagos négyzetes eltérés):

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= [0 - 1500]^2 \cdot \frac{2}{6} + [1000 - 1500]^2 \cdot \frac{3}{6} + [6000 - 1500]^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 1500^2 \cdot \frac{2}{6} + 500^2 \cdot \frac{3}{6} + 4500^2 \cdot \frac{1}{6} = 4\,250\,000 \end{aligned}$$

Szórás:

$$D(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{4\,250\,000} \approx 2061,6$$

Véges sokaságok

Statisztikában gyakran találkozunk az alábbi problémakörrel.

- Adott egy véges sokaság, vagyis egy véges halmaz. Ez gyakran embereknek egy csoportja, élőlényeknek egy populációja.
- Adott egy mennyiség a sokaságon. Például: testtömeg, jövedelem, stb. Ennek a mennyiségnek az eloszlását vizsgáljuk.

Tegyük fel, hogy a sokaságban N elem/egyed található, és a mennyiség értékei az egyes elemeken: $x_1, \dots, x_N$. Kérdések:

- Milyen arányok vannak a sokaságon belül a mennyiség szempontjából?
- Mennyi a vizsgált mennyiség átlagos értéke?

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$$

- Mennyi a vizsgált mennyiség szórása?

$$\sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}}$$

Feladat. Egy családban 4 gyerek van, a testtömegük: 50, 54, 60, 70 kg.

- A gyerekek mekkora hányada esik az $[50, 60]$ intervallumba?

Válasz: 50%.

- Mennyi az átlagos testtömeg?

$$\bar{x} = \frac{50 + 54 + 60 + 70}{4} = 58,5$$

- Mennyi a testtömeg szórása?

$$\sqrt{\frac{(50 - 58,5)^2 + (54 - 58,5)^2 + (60 - 58,5)^2 + (70 - 58,5)^2}{4}} = 7,53$$

Felmerül a kérdés, hogy mindez hogyan illeszkedik a diszkrét valószínűségi változóknál tanult fogalmakhoz?

Véletlenszerűen kiválasztunk egy elemet a sokaságból, és legyen X a vizsgált mennyiség értéke a kiválasztott elemen. Ekkor:

- Az X változó diszkrét, ugyanis $R_X = \{x_1, \dots, x_N\}$.
- Valószínűségeloszlás: $P(X = x_1) = \dots = P(X = x_N) = 1/N$.
- Tetszőleges $a < b$ valós számok esetén:

$P(a \leq X \leq b) =$ az $[a, b]$ intervallumba eső elemek aránya

- Várható érték = sokaságon belüli átlag:

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x P(X = x) = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N} = \bar{x}$$

- Variancia:

$$\text{Var}(X) = \sum_{x \in R_X} [x - E(X)]^2 P(X = x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$$

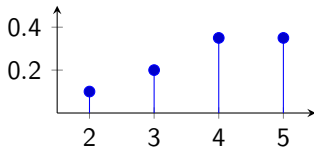
- Szórás: $D(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Az előző oldalon láttuk, hogy a sokaságokon értelmezett mennyiségek a diszkrét változók egyszerű speciális esetei. Viszont az ott bevezetett formulák csak kis méretű sokaságokra számolhatóak könnyen. Kérdések:

- Hogyan írjuk le a nagy méretű sokaságokat?
- El lehet jutni a várható érték definíciójához a sokaságokon keresztül?

Feladat: Egy lengyel felmérés alapján a fehér gólyák 2–5 tojást raknak az alábbi táblázatban található megoszlásban. Véletlenszerűen kiválasztunk egy gólyafészket, és jelölje X a fészekben található tojások számát.

x	2	3	4	5
p_x	10%	20%	35%	35%



$R_X = \{2, 3, 4, 5\}$, tehát a X diszkrét változó

$$P(X = 2) = 0,1, \quad P(X = 3) = 0,2, \quad P(X = 4) = 0,35, \quad P(X = 5) = 0,35$$

Feladat: Átlagosan hány tojás található a golyafészkekben?

Tegyük fel, hogy a sokaságban összesen N egyed található! A sokaságon belüli arányok és gyakoriságok:

x	2	3	4	5	összesen
p_x	10%	20%	35%	35%	100%
k_x	$0,1N$	$0,2N$	$0,35N$	$0,35N$	N

Ekkor az átlagos tojásszám:

$$\frac{\overbrace{2 + \dots + 2}^{0,1N \text{ db}} + \overbrace{3 + \dots + 3}^{0,2N \text{ db}} + \overbrace{4 + \dots + 4}^{0,35N \text{ db}} + \overbrace{5 + \dots + 5}^{0,35N \text{ db}}}{N}$$

$$= \frac{2 \cdot 0,1N + 3 \cdot 0,2N + 4 \cdot 0,35N + 5 \cdot 0,35N}{N}$$

$$= 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,35 + 5 \cdot 0,35 = 3,95$$

$$= 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(X = 4) + 5 \cdot P(X = 5) = E(X)$$

Megjegyzés: Hasonló módon a diszkrét valószínűségi változók varianciáját is meg lehet kapni.

Feladat. Egy kerti tó felszínén egy molnárka áll lesben, ami a vízbe eső rovarokat egymástól függetlenül $1/9$ valószínűséggel veszi észre. Jelölje X azt, hogy a molnárka a következő 3 rovar közül hányat vesz észre! Adjuk meg az X változó valószínűségeloszlását!

$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$, tehát X diszkrét változó

Legyen: $A_i =$ a molnárka észreveszi az i . rovar, $i = 1, 2, 3$.

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/9$$

$$P(X = 0) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = (8/9)^3$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) \\ &= 1/9 \cdot 8/9 \cdot 8/9 + 8/9 \cdot 1/9 \cdot 8/9 + 8/9 \cdot 8/9 \cdot 1/9 = 3(1/9)(8/9)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Hasonló módon: } P(X = 2) = 3(1/9)^2(8/9), \quad P(X = 3) = (1/9)^3.$$

Binomiális-eloszlás

Az X diszkrét valószínűségi változó **binomiális eloszlású** $n \geq 1$ egész és $p \in (0, 1)$ paraméterekkel, ha

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Megmutatható, hogy ekkor $E(X) = np$ és $\text{Var}(X) = np(1 - p)$.

Bernoulli-kísérlet

Egy véletlen kísérletet **Bernoulli-kísérletnek** nevezünk, ha mindössze két fajta kimenetele van, egy $p \in (0, 1)$ valószínűségű kedvező és egy $1 - p$ valószínűségű kedvezőtlen.

A binomiális eloszlás előállítása

Legyen adva egy Bernoulli-kísérlet, ahol p a kedvező kimenetel esélye! Ha ezt a kísérletet egymástól függetlenül n alkalommal megismételjük, akkor az összesen kapott kedvező kimenetek száma binomiális eloszlást követ n és p paraméterrel.

Bizonyítás. Legyen X a kedvező kimenetek száma!

$R_X = \{0, 1, \dots, n\}$, tehát X diszkrét valószínűségi változó.

Adjuk meg a valószínűségeloszlást:

- Először rögzítsük, hogy pontosan mely pozíciókban kapjuk a kedvező kimeneteket. Például:

$$\begin{aligned} P(\text{az első } k \text{ kísérletre kedvező, a többire kedvezőtlen kimenetelt kapunk}) \\ = \underbrace{p \cdot \dots \cdot p}_{k \text{ darab}} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot \dots \cdot (1-p)}_{(n-k) \text{ darab}} = p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Mindegy, melyik pozíciókat jelöljük ki, az eredmény mindig ugyanez.

- Hányféleképpen tudjuk kijelölni ezt a k pozíciót? Hányféleképpen tudunk kiválasztani az összesen n darab próbálkozásból k darabot visszatevés nélkül? Kijelölések száma $= \binom{n}{k}$.
- A valószínűségeloszlás:

$$P(X = k) = P(k \text{ kedvező kimenetelt kapunk}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Feladat. Egy kerti tó felszínén egy molnárka áll lesben, ami a vízbe eső rovarokat egymástól függetlenül $1/9$ valószínűséggel veszi észre. Jelölje X azt, hogy a molnárka a következő 3 rovar közül hányat vesz észre! Adjuk meg az X változó valószínűségeloszlását, várható értékét és szórását!

Értékkészlet: $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

Bernoulli-kísérlet: egy rovar a vízbe esik

Kedvező kimenetel: a molnárka észreveszi, $p = 1/9$

A Bernoulli-kísérletet megismételjük $n = 3$ alkalommal.

Az X változó binomiális eloszlású:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{8}{9}\right)^{3-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Várható érték és szórás:

$$E(X) = np = \frac{1}{3}, \quad D(X) = \sqrt{np(1-p)} = \frac{\sqrt{24}}{9} \approx 0,54$$

Hogyan értelmezhető a várható érték és a szórás ebben a feladatban?

Feladat. Egy szelvénnel játszunk az ötöslottón, és legyen X a találatok száma. Írjuk fel az X változó valószínűségeloszlását!

$$P(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Hipergeometrikus eloszlás

A X diszkrét valószínűségi változó **hipergeometrikus eloszlású** n, M, N pozitív egész paraméterekkel, ha

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Megmutatható, hogy ekkor $E(X) = nM/N$.

A hipergeometrikus eloszlás előállítása

Adott egy N elemű halmaz, melyben M elem meg van különböztetve valamilyen módon. Kihúzunk n elemet a halmazból visszatevés nélkül, és jelölje X a megkülönböztetett elemek számát a kihúzottak között. Ekkor az X változó hipergeometrikus eloszlást követ.

Feladat. Lajos kulcscsomóján három kulcs található, ezek közül az egyik a bejárati ajtót nyitja. Egy este a barátaival italozik, és hazatérve nem tudja megkülönböztetni a kulcsait. Emiatt véletlenszerűen és visszatevéssel választ újabb és újabb kulcsot, míg ki nem nyitja az ajtót. Adjuk meg a szükséges próbálkozások számának a valószínűségeloszlását!

$$\begin{aligned}
 P(X = k) &= P(\text{sorban } k-1 \text{ sikertelen, majd egy sikeres próbálkozás}) \\
 &= \underbrace{2/3 \cdot \dots \cdot 2/3}_{(k-1) \text{ darab}} \cdot 1/3 = (2/3)^{k-1} \cdot 1/3, \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Geometriai eloszlás

Az X diszkrét valószínűségi változó **geometriai eloszlású** $p \in (0, 1)$ paraméterrel, ha $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$, $k = 1, 2, \dots$

Megmutatható, hogy ekkor $E(X) = 1/p$.

A geometriai eloszlás előállítása

Legyen adva egy p paraméteres Bernoulli-kísérlet. Addig ismételjük ezt a kísérletet egymástól függetlenül, míg végül kedvező kimenetelt nem kapunk. Ekkor a próbálkozások száma geometriai eloszlást követ p paraméterrel.

Folytonos valószínűségi változók

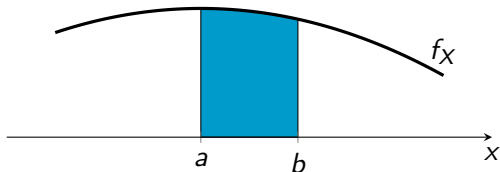
Folytonos valószínűségi változók, sűrűségfüggvény

Egy X valószínűségi változó **(abszolút) folytonos eloszlású**, ha létezik olyan $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy tetszőleges $a < b$ valós számokra

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

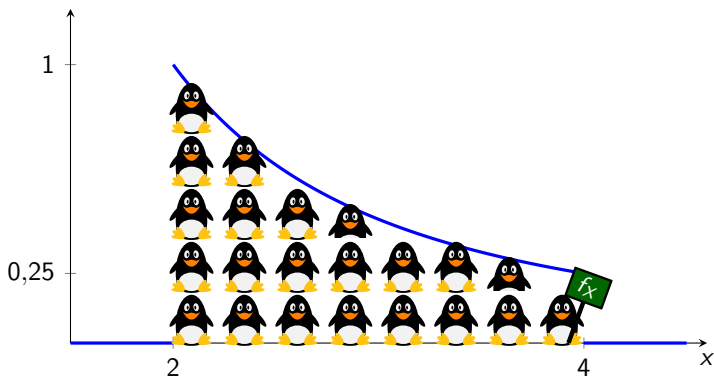
Ekkor az f_X függvényt az X **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

A definícióhoz szükséges, hogy az f_X függvény integrálható legyen az $[a, b]$ intervallumon. Az integrálhatóságot a jövőben nem hangsúlyozzuk: ha felírunk egy integrált, akkor abba mindig beleértjük, hogy létezik.



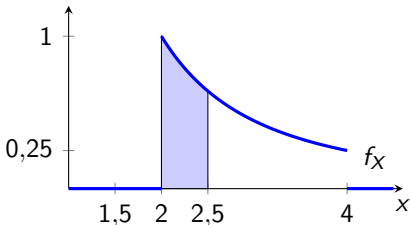
A sűrűségfüggvény szemléletes jelentése:

- Reprezentáljuk a kísérlet kimeneteleit ólomgolyócskával. A golyó súlya a kimenetel valószínűsége.
- Az egyes ólomgolyókat arra a pontra tesszük a számegyenesen, amennyi a valószínűségi változó értéke az adott kimenetel esetében.
- Ilyen módon kapunk egy rakást. A sűrűségfüggvény értéke a rakás magassága.



Feladat. Egy pingvinfajt vizsgálva X egy véletlenszerűen kiválasztott egyed testtömege kilogrammban. Az X változó az alábbi f_X sűrűségfüggvénnyel írható le. Az egyedek mekkora hányada esik 1,5 és 2,5 kg közé?

$$f_X(x) = \begin{cases} 4/x^2, & \text{ha } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} P(1,5 \leq X \leq 2,5) &= \int_{1,5}^{2,5} f_X(x) dx = \int_{1,5}^2 0 dx + 4 \int_2^{2,5} x^{-2} dx \\ &= 0 + 4 \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_2^{2,5} = 4 \left[\frac{1}{-x} \right]_2^{2,5} = 4 \left(\frac{1}{-2,5} - \frac{1}{-2} \right) = 4 \cdot 0,1 = 0,4 \end{aligned}$$

A valószínűség folytonossági tulajdonsága

- ❶ Legyen $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ eseményeknek egy szűkülő sorozata, és

$$A = \text{minden } A_n \text{ bekövetkezik} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

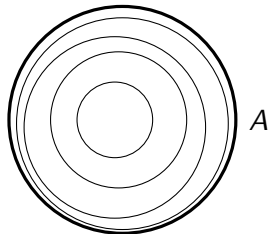
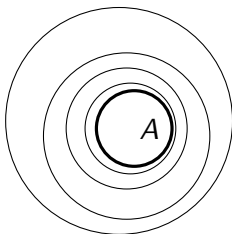
$$\text{Ekkor } P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

- ❷ Legyen $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ eseményeknek egy bővülő sorozata, és

$$A = \text{valamelyik } A_n \text{ bekövetkezik} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

$$\text{Ekkor } P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

A bal oldalon szűkülő, a jobb oldalon bővülő eseménysorozat:



A folytonos valószínűségi változók valószínűségeloszlása

Ha X folytonos valószínűségi változó, akkor tetszőleges a valós szám esetén $P(X = a) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $A_n = \{a \leq X \leq a + 1/n\}$. Ekkor

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad \text{és} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{X = a\}.$$

A valószínűség folytonosságából következik, hogy

$$P(X = a) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+1/n} f_X(x) dx.$$

Az integrál folytonos a végpontok függvényében, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+1/n} f_X(x) dx = \int_a^{a+1} f_X(x) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+1/n}^{a+1} f_X(x) dx = 0.$$

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

A folytonos valószínűségi változók további tulajdonságai

Legyen X folytonos valószínűségi változó f_X sűrűségfüggvénnyel! Ekkor teljesülnek az alábbi tulajdonságok.

- 1 A sűrűségfüggvényt definiáló formula akkor is érvényes, ha az egyik vagy mindkét $\leq$ jelet $<$ jelre cseréljük.
- 2 A sűrűségfüggvényt definiáló formula $a = -\infty$ és/vagy $b = +\infty$ esetén is érvényes.

Bizonyítás. Az állításokból csak egy-egy esetet bizonyítunk.

1 $P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) - P(X = b) = \int_a^b f_X(x) dx - 0$

2 Legyen $A_n = \{a \leq X \leq a + n\}$. Ekkor

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \quad \text{és} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a \leq X < +\infty\}.$$

A valószínűség folytonosságából következik, hogy

$$P(a \leq X < +\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{a+n} f_X(x) dx = \int_a^{+\infty} f_X(x) dx.$$

A sűrűségfüggvények általános tulajdonságai

Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, ha teljesíti az alábbi feltételeket.

- Tetszőleges $a < b$ valós számok esetén $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Bizonyítás. Csak az egyik irányt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy az f függvény egy X folytonos változó sűrűségfüggvénye! Ekkor:

- $\int_a^b f(x) dx = P(a \leq X \leq b) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = P(-\infty \leq X \leq +\infty) = 1$

A sűrűségfüggvények elégséges feltétele

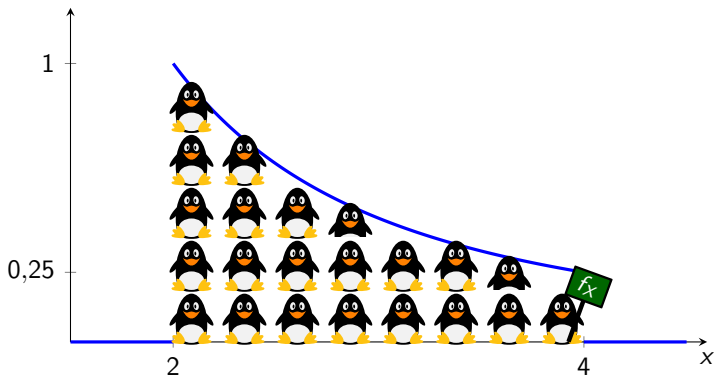
Tegyük fel, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre teljesülnek az alábbiak.

- Tetszőleges x valós számra $f(x) \geq 0$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Ekkor létezik olyan X folytonos változó, aminek f a sűrűségfüggvénye.

Folytonos valószínűségi változók értékkészlete

Ha X folytonos valószínűségi változó, akkor $R_X = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$.



Feladat. Tekintsük a pingvines feladatban megadott f_X függvényt!

- 1 Mutassuk meg, hogy az f_X függvény teljesíti a sűrűségfüggvények elégséges feltételét!
- 2 Adjuk meg az X változó értékkészletét!

Hogyan definiáljuk egy X folytonos változó várható értékét? A diszkrét eset formulája nem alkalmazható, hiszen $P(X = x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ értékre. Ötlet: közelítsünk egy diszkrét valószínűségi változóval!

- Osszuk be a valós számegyeneset $\delta > 0$ hosszúságú intervallumokra:

$$[k\delta, (k+1)\delta), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Tetszőleges ω kimenetel esetén legyen $Y(\omega) = k\delta$, ahol k az az egész szám, melyre $X(\omega) \in [k\delta, (k+1)\delta)$.
- Ez egy jó közelítés, hiszen $|X(\omega) - Y(\omega)| < \delta$ minden ω esetén.
- Ekkor Y diszkrét valószínűségi változó, és a valószínűségeloszlása:

$$P(Y = k\delta) = P(k\delta \leq X < (k+1)\delta) = \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} f_X(x) dx.$$

- Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (k\delta) P(Y = k\delta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} (k\delta) f_X(x) dx \\ &\approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx. \end{aligned}$$

Folytonos valószínűségi változó várható értéke

Legyen X folytonos valószínűségi változó f_X sűrűségfüggvénnyel!
Tegyük fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx < \infty.$$

Ekkor az X **várható értéke** a következő formulával van definiálva:

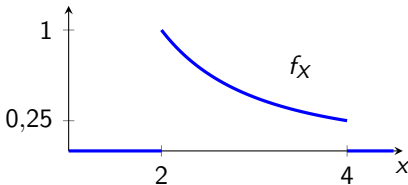
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx.$$

Megjegyzések:

- Ha az integrálhatósági feltevés teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a valószínűségi változónak **létezik a várható értéke**. Ebben az esetben a várható érték ténylegesen egy véges valós szám.
- Tegyük fel, hogy egy $[a, b]$ véges intervallumra teljesül, hogy minden $x \notin [a, b]$ szám esetén $f_X(x) = 0$. Ekkor az integrálhatósági feltétel automatikusan teljesül, és a várható érték létezik.
- Szemléletesen: várható érték = átlagos érték.
- Vegyük észre a hasonlóságot a diszkrét esettel!

Feladat. A pingvines feladatban létezik az X változó várható értéke? Ha igen, akkor mennyi a várható érték?

$$f_X(x) = \begin{cases} 4/x^2, & \text{ha } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$



A várható érték létezik, hiszen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx = \int_2^4 |x| f_X(x) dx \leq \int_2^4 4 f_X(x) dx = 4 \int_2^4 f_X(x) dx = 4 \cdot 1 < \infty$$

A várható érték:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_2^4 x \cdot \frac{4}{x^2} dx = 4 \int_2^4 x^{-1} dx \\ &= 4 \left[\ln |x| \right]_2^4 = 4 (\ln 4 - \ln 2) = 2,77 \end{aligned}$$

Feladat. A várható érték miért nem azonos a $[2, 4]$ felezőpontjával?

A diszkrét valószínűségi változók varianciáját és szórását a következő módon definiáltuk, feltéve(!), hogy a várható érték létezik:

$$\text{Var}(X) = E\left([X - E(X)]^2\right), \quad D(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Ezek univerzális formulák, a folytonos esetre is alkalmazhatóak.

A variancia meghatározása

Legyen X folytonos valószínűségi változó f_X sűrűségfüggvénnyel, és tegyük fel, hogy létezik a várható értéke. Ekkor

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx.$$

- Heurisztikus bizonyítás: a várható értékhez hasonló gondolatmenettel egy diszkrét valószínűségi változóval közelítünk.
- Precíz bizonyítás: analízisbeli eszközökkel megmutatható, hogy egy $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre megfelelő feltételek mellett

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x) dx.$$

Alkalmazzuk ezt $h(x) = [x - E(X)]^2$ választással!

Amikor egy valószínűségi változót vizsgálunk, akkor általában az alábbi kérdésekre keressük a választ:

- Mekkora valószínűséggel esik a változó egy adott intervallumba?
- Mekkora a változó átlagos értéke, tehát mi a várható érték?
- Milyen mértékű a változó értékeinek szórádása, tehát mennyi a szórás?

Ezekre a kérdésekre az alábbi eszközökkel tudunk válaszolni.

- Diszkrét valószínűségi változó esetén: valószínűségeloszlás.
- Folytonos valószínűségi változó esetén: sűrűségfüggvény.

Vajon létezik olyan univerzális eszköz, mely mindkét esetben alkalmazható?

Olyan eszközre lenne szükségünk, mely

- minden fontos információt tartalmaz a kapcsolatos valószínűségi változóval kapcsolatban;
- de nem csak a diszkrét vagy a folytonos esetben alkalmazható.

Meglepő módon ilyen univerzális eszköz létezik.

Eloszlásfüggvény

Legyen X tetszőleges valószínűségi változó. A X **eloszlásfüggvénye** az az $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény, melyet az alábbi formulával definiálunk:

$$F_X(t) = P(X < t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Megjegyzések:

- Tetszőleges t valós szám esetén az $F_X(t)$ érték azt mutatja meg, hogy az X változó mekkora valószínűséggel esik a számegyenesen a t -től balra, tehát a $(-\infty, t)$ intervallumba.
- Az eloszlásfüggvény tetszőleges valószínűségi változó esetén létezik, nem csak a diszkrét vagy a folytonos esetben.
- Egyes tankönyvek az eloszlásfüggvényt az $F_X(t) = P(X \leq t)$, $t \in \mathbb{R}$, egyenlőséggel definiálják. Ez kisebb változásokat okoz bizonyos formulákban, de ez alapvetően nem befolyásolja az alkalmazásokat.

Az eloszlásfüggvény definíciója: $F_X(t) = P(X < t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Valószínűsége csak eseménynek van! Hogyan kell értelmezni az „ $X < t$ ” egyenlőtlenséget, mint az eseménytér részhalmaza? A következő módon:

$$\{X < t\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\} \subset \Omega$$

Ez a halmaz mindig esemény, tehát eleme az eseményalgebrának? NEM!!!

A valószínűségi változók precíz definíciója

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a véletlen kísérletet leíró valószínűségi mező. Egy $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **mérhető**, ha tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{X < t\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\} \in \mathcal{A}.$$

Ekkor a X függvényt **valószínűségi változónak** nevezzük.

- Diszkrét valószínűségi mezőn minden $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mérhető.
- Megmutatható, hogy ha a mérhetőségi tulajdonság teljesül, akkor tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$ intervallum esetén

$$\{X \in I\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A}.$$

Tehát a $P(X \in I) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\})$ jól definiált.

Feladat. Egy kaszinóban a következő játékot lehet játszani: a játékos feldob egy szabályos dobókockát, és a nyereményét az alábbi táblázat alapján határozzák meg.

dobott szám	1	2	3	4	5	6
nyeremény	0	0	1000	1000	1000	6000

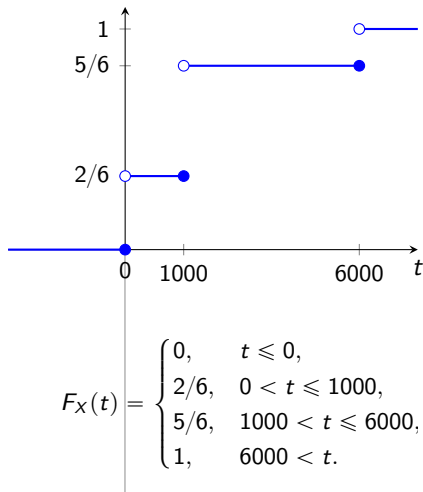
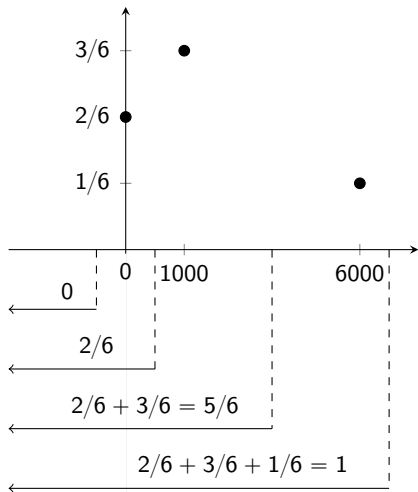
Írjuk fel a nyeremény eloszlásfüggvényét! Milyen kapcsolat fedezhető fel a valószínűségeloszlás és az eloszlásfüggvény között?

$$P(X=0) = 2/6, \quad P(X=1000) = 3/6, \quad P(X=6000) = 1/6$$

Diszkrét valószínűségi változók eloszlásfüggvénye

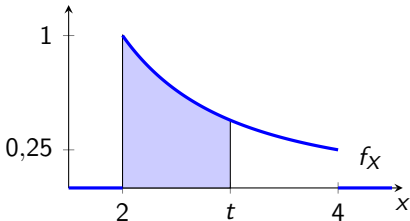
Egy diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye egy olyan lépcsős (szakaszonként konstans) függvény, mely pontosan a változó lehetséges értékeiben ugrik, és egy $t \in R_X$ helyen az ugrás nagysága $P(X = t)$.

$$P(X=0) = 2/6, \quad P(X=1000) = 3/6, \quad P(X=6000) = 1/6$$



Feladat. Egy folytonos X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az alábbi f_X függvény. Írjuk fel az X eloszlásfüggvényét! Milyen kapcsolat fedezhető fel a sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény között?

$$f_X(x) = \begin{cases} 4/x^2, & \text{ha } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

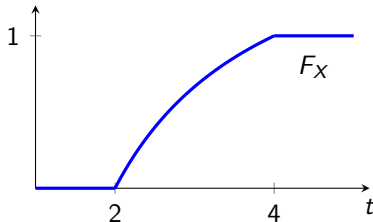


Eloszlásfüggvény definíciója: $F_X(t) = P(X < t)$, $t \in \mathbb{R}$.

- Ha $t < 2$: $F_X(t) = P(X < t) = 0$.
- Ha $t > 4$: $F_X(t) = P(X < t) = 1$.
- Ha $2 \leq t \leq 4$:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(X < t) = P(-\infty \leq X \leq t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx = 4 \int_2^t x^{-2} dx \\ &= 4 \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_2^t = 4 \left[-\frac{1}{x} \right]_2^t = 4 \left[\left(-\frac{1}{t} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = 2 - \frac{4}{t} \end{aligned}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 2, \\ 2 - 4/t, & 2 \leq t \leq 4, \\ 1, & t > 4. \end{cases}$$



Feladat. Formális deriválással mutassuk meg, hogy $F'_X = f_X$.

Folytonos valószínűségi változók eloszlásfüggvénye

Egy X valószínűségi változó pontosan akkor abszolút folytonos eloszlású, ha létezik olyan $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx.$$

Ekkor az f_X függvény a sűrűségfüggvény, és $f_X = F'_X$.

Sok tankönyvben a fenti piros dobozzal definiálják a folytonos valószínűségi változókat. Abban a felépítésben a mi definíciónk csak egy tétel.

Feladat. Véletlenszerűen választunk egy p pontot az $r = 2$ sugarú zárt körlapon. Jelölje X a választott pontnak a kör középpontjától való távolságát! Adjuk meg az X valószínűségi változó értékkészletét!

X = a pont távolsága a középponttól, $R_X = [0, 2]$

Mennyi annak az esélye, hogy a változó értéke 1-nél kisebb?

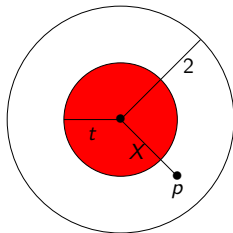
$$P(X < 1) = P(\text{a pont az 1 sugarú nyílt körlapra esik}) = \frac{1^2\pi}{2^2\pi} = \frac{1}{4}$$

Határozzuk meg az X változó eloszlásfüggvényét!

Eloszlásfüggvény: $F_X(t) = P(X < t)$, $t \in \mathbb{R}$.

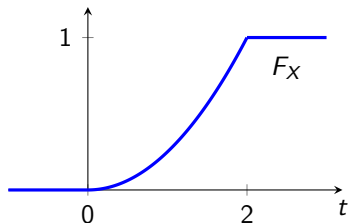
- Ha $t < 0$, akkor $F_X(t) = 0$.
- Ha $t > 2$, akkor $F_X(t) = 1$.
- Ha $0 \leq t \leq 2$, akkor

$$F_X(t) = P(X < t) = P(\text{a pont a } t \text{ sugarú körlapra esik}) = \frac{t^2\pi}{2^2\pi} = \frac{t^2}{4}$$



Az X változó eloszlásfüggvénye:

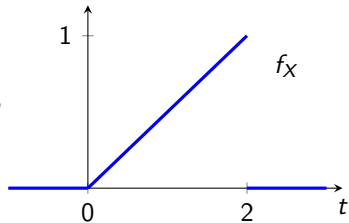
$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^2/4, & 0 \leq t \leq 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$



Feladat. Mutassuk meg, hogy az X változó abszolút folytonos!

Ha létezik sűrűségfüggvény, akkor az csak az eloszlásfüggvény deriváltja lehet:

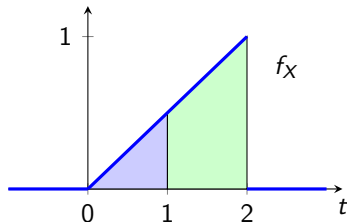
$$f_X(t) = F'_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t/2, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$



Ellenőrizhető, hogy ekkor $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.

Feladat. Mennyi annak az esélye, hogy az X változó 1-nél kisebb értéket vesz fel? Mennyi annak az esélye, hogy a változó nagyobb, mint 1?

$$f_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t/2, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$



$$P(X < 1) = P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \frac{t}{2} dt = \left[\frac{t^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$P(X > 1) = P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \frac{t}{2} dt = \left[\frac{t^2}{4} \right]_1^2 = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Az előző feladatban a $[0, 1]$ és $[1, 2]$ intervallumok azonos hosszúságúak. Az X változó miért nem esik azonos eséllyel ezekre az intervallumokra?

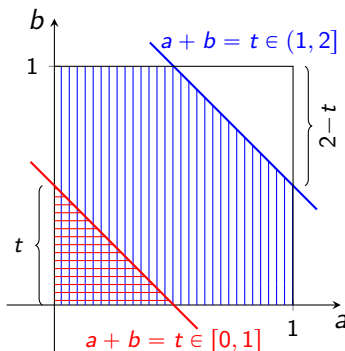
Feladat. Véletlenszerűen és egymástól függetlenül választunk a és b értékeket a $[0, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg az $X = a + b$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

Most (a, b) véletlenszerű pont a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzeten.

Az X értékkészlete: $R_X = [0, 2]$.

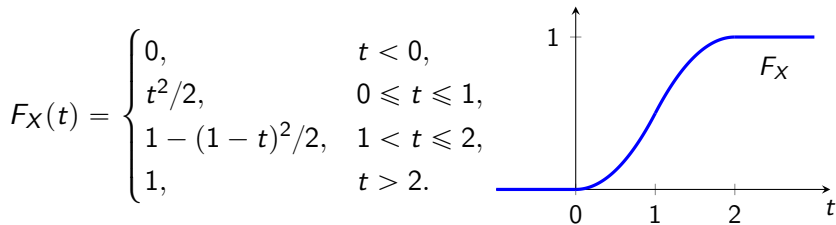
Eloszlásfüggvénye: $F_X(t) = P(X < t)$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^2/2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - (2 - t)^2/2, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$



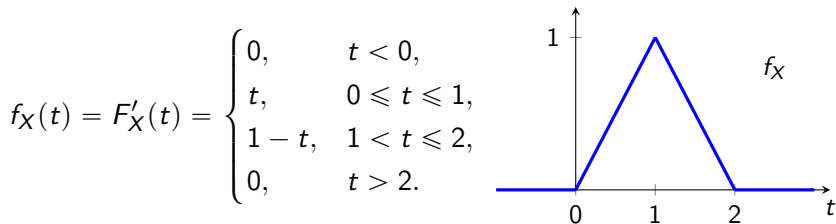
$$0 \leq t \leq 1: F_X(t) = P(X < t) = \frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}} = \frac{t^2/2}{1}$$

$$1 < t \leq 2: F_X(t) = 1 - P(X \geq t) = 1 - \frac{(2 - t)^2/2}{1}$$



Feladat. Mutassuk meg, hogy az X valószínűségi változó abszolút folytonos, továbbá adjuk meg a sűrűségfüggvényét!

Ha létezik sűrűségfüggvény, akkor az csak az eloszlásfüggvény deriváltja lehet:



Házi feladat: minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx$.

Feladat. Definiáljuk az X valószínűségi változót a következő módon. Feldobok egy szabályos pénzérmét. Ha az eredmény fej, akkor $X = 0$. Ha írás, akkor X egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon.

Határozzuk meg az X valószínűségi változó értékkészletét!

$$R_X = [0, 1]$$

Írjuk fel az X változó eloszlásfüggvényét!

Ha $t \leq 0$, akkor $F_X(t) = P(X < t) = 0$.

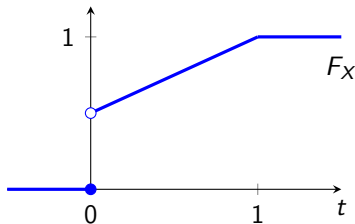
Ha $t > 1$, akkor $F_X(t) = P(X < t) = 1$.

Ha $0 < t \leq 1$, akkor alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(X < t) = P(X < t \mid \text{fej})P(\text{fej}) + P(X < t \mid \text{írás})P(\text{írás}) \\ &= 1 \cdot 1/2 + t \cdot 1/2 = (t + 1)/2 \end{aligned}$$



$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ (t + 1)/2, & 0 < t \leq 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$



Az X valószínűségi változó diszkrét vagy abszolút folytonos eloszlású?

Egyik sem. Ez egy **kevert eloszlású** változó, amit egy diszkrét és egy folytonos eloszlás keverésével kaptunk.

Minden eloszlás megkapható egy diszkrét és egy folytonos eloszlás keverésével?

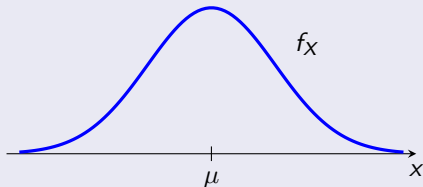
Az eloszlásoknak három tiszta típusa van: diszkrét, folytonos és szinguláris. Minden eloszlás megkapható ezen három keverékeként.

A normális eloszlás

Normális eloszlás (Gauss, 1809)

Egy X folytonos valószínűségi változó **normális eloszlást** avagy **Gauss-eloszlást** követ $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha a sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



A sűrűségfüggvényét **Gauss-görbének** avagy **haranggörbének** nevezzük.

A normális eloszlás alkalmazásai:

- Fizikai mérések elmélete: mért érték = igazi érték + mérési hiba.
A mérési hibát gyakran modellezzik normális eloszlással.
- Ipari töltő- és vágóberendezések: ezek méréssel járnak.
- Élettudományok: számos mennyiség (testmagasság, vérnyomás, IQ) normális vagy a normálisból származtatott eloszlást követ.

A normális eloszlás sűrűségfüggvénye

Legyenek $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ tetszőleges paraméterértékek! Ekkor az f_X függvény sűrűségfüggvény.

Bizonyítás. Most $f_X(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx$$

Helyettesítéssel integrálás, új változót vezetünk be:

$$y = \frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}, \quad dy = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dx$$

Az új integrálási határok:

- alsó végpont: $x = -\infty \implies y = -\infty$
- felső végpont: $x = +\infty \implies y = +\infty$

Mindezt visszaírjuk az integrálba:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1.$$

A normális eloszlás tulajdonságai

Legyen X normális eloszlású változó μ és σ paraméterekkel! Ekkor $R_X = \mathbb{R}$, $E(X) = \mu$ és $D(X) = \sigma$.

Bizonyítás. Értékkészlet: $R_X = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\} = \mathbb{R}$.

Improprius integrálás:

$$\begin{aligned} E(X) - \mu &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx - \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - \mu}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^{+K} -\frac{2(x - \mu)}{2\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \lim_{K \rightarrow \infty} \left[e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right]_{-K}^{+K} \\ &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \lim_{K \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{(+K-\mu)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(-K-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

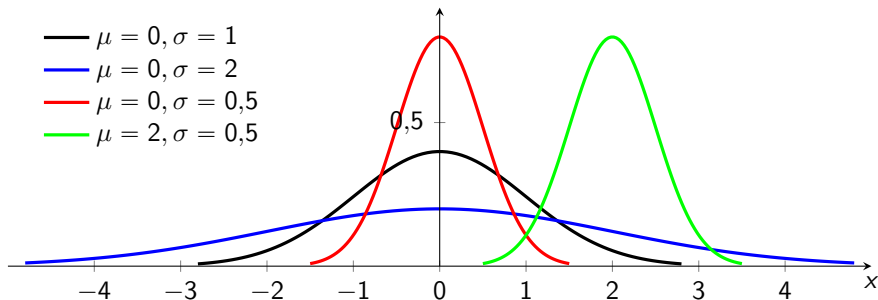
A varianciához parciális integrálás és helyettesítéses integrálás kell:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx = \dots = \sigma^2.$$

Hogyan befolyásolja a két paraméter a sűrűségfüggvény alakját?

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

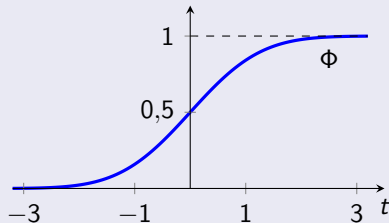
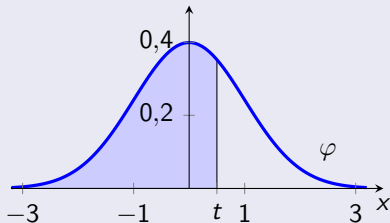
- μ : eltolásparaméter
- σ : alakparaméter



Standard normális eloszlás

A $\mu = 0$ és $\sigma = 1$ paraméteres normális eloszlást **standard normális eloszlásnak** nevezzük. Jelölésben: Z . Sűrűség- és eloszlásfüggvénye:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(t) = P(Z < t) = \int_{-\infty}^t \varphi(x) dx.$$



A normális eloszlás eloszlásfüggvénye

Legyen X normális eloszlású μ és σ paraméterekkel! Ekkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

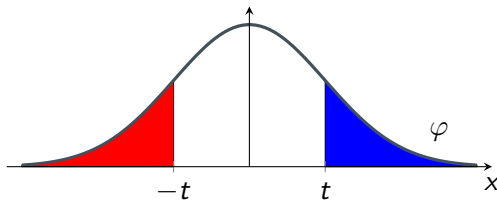
$$F_X(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right), \quad \Phi(-t) = 1 - \Phi(t).$$

Bizonyítás. Az első állítást helyettesítéses integrálással kapjuk:

$$\begin{aligned}F_X(t) &= \int_{-\infty}^t f_X(x) dx = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\&= \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \varphi(y) dy = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \\y &= \frac{x-\mu}{\sigma}, \quad dy = \frac{1}{\sigma} dx\end{aligned}$$

A második állítás következik a sűrűségfüggvény alakjából:

$$\begin{aligned}\Phi(-t) &= P(Z < -t) = \int_{-\infty}^{-t} \varphi(x) dx = \int_t^{+\infty} \varphi(x) dx \\&= P(Z \geq t) = 1 - P(Z < t) = 1 - \Phi(t)\end{aligned}$$

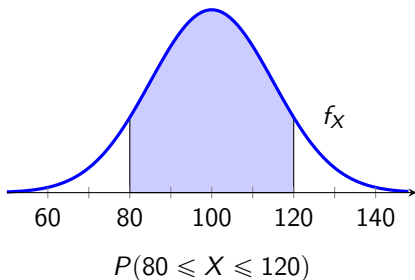
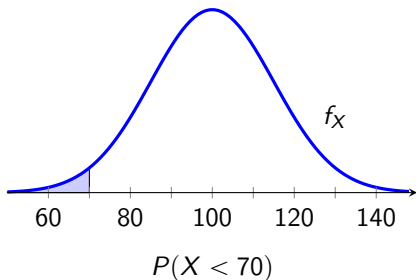


Feladat. Az IQ tesztek úgy állítják össze, hogy az eredmény a felnőtt populáción belül normális eloszlást kövessen 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. (Létezik 20 pont szórásu teszt is.) A felnőtt népesség mekkora hányadának esik az IQ pontszáma 70 alá? Mekkora hányad esik 80 és 120 pont közé?

Véletlenszerűen kiválasztunk egy embert a felnőtt népességből-

X = a kiválasztott ember IQ pontszáma

X normális eloszlású, $\mu = 100$, $\sigma = 15$



Ha X normális eloszlású μ és σ paraméterrel, akkor tetszőleges a és b valós számok esetén

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Ez az integrál nem számítható ki analízisbeli eszközökkel!

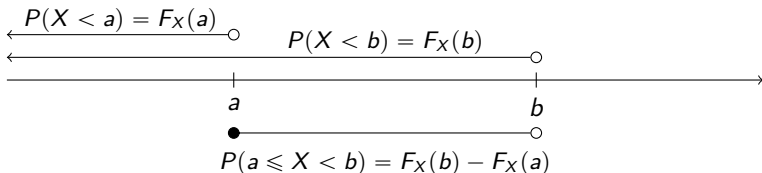
Valószínűségek számítása az eloszlásfüggvény segítségével

Tetszőleges X valószínűségi változó és $a \leq b$ valós számok esetén:

$$P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Speciálisan ha az X változó folytonos eloszlású, akkor

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$



Feladat. A népesség mekkora hányadának esik az IQ pontszáma 70 alá?

$$\begin{aligned}P(X < 70) &= F_X(70) = \Phi\left(\frac{70 - 100}{15}\right) = \Phi(-2) \\&= 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228 \approx 2,3\%\end{aligned}$$

Feladat. Az emberek mekkora hányada esik 80 és 120 pont közé?

$$\begin{aligned}P(80 \leq X \leq 120) &= F_X(120) - F_X(80) = \Phi\left(\frac{120 - 100}{15}\right) - \Phi\left(\frac{80 - 100}{15}\right) \\&= \Phi(1,33) - \Phi(-1,33) = 0,9082 - 0,0918 = 0,8164 \approx 81,6\%\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk azt, hogy

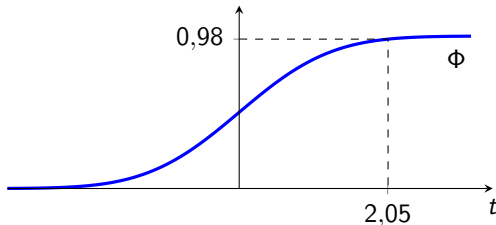
$$\Phi(-1,33) = 1 - \Phi(1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918$$

Feladat. A Mensa egy nemzetközi egyesület a kiemelkedően magas IQ pontszámú emberek számára. A belépésnek az a feltétele, hogy a jelölt a népesség felső 2 százalékához tartozzon IQ szempontjából. Hány pontot kell ehhez elérni?

Jelölje a a szükséges pontszámot! Ekkor $P(X \geq a) = 0,02$, tehát

$$0,98 = P(X < a) = F_X(a) = \Phi\left(\frac{a - 100}{15}\right)$$

A Φ függvény táblázatából: $0,98 = \Phi(2,05)$



A Φ függvény szigorú monotonitása miatt:

$$\frac{a - 100}{15} = 2,05 \implies a \approx 130,8$$

A de Moivre–Laplace-tétel

Feladat. Feldobunk 100 alkalommal egy szabályos pénzérmét, és legyen X a kapott fejek száma! Adjuk meg X valószínűségeloszlását, várható értékét és szórását!

Értékkészlet: $R_X = \{0, 1, \dots, 100\}$

Bernoulli-kísérlet: egy érmedobás

Kedvező kimenetel: fejet kapunk, $p = 1/2$

A Bernoulli-kísérletet megismételjük $n = 100$ alkalommal.

Az X változó binomiális eloszlású:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{100}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{100-k} = \binom{100}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

Várható érték és szórás:

$$E(X) = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50, \quad D(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 5$$

Feladat. Mennyi az esélye, hogy 100 dobás után legalább 40, de legfeljebb 60 fejet kapunk?

A kérdéses valószínűség:

$$P(40 \leq X \leq 60) = \sum_{k=40}^{60} P(X = k) = \sum_{k=40}^{60} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

Ezt nehéz papíron kiszámolni:

- az összes sok tagból áll;
- a binomiális együtthatót bonyolult meghatározni.

Ezek a nehézségek annál súlyosabbak minél nagyobb az n paraméter értéke!

Elképzelhető, hogy a pontos értéket nehéz meghatározni. De nem lehetne mondjuk egy ügyes közelítést találni?

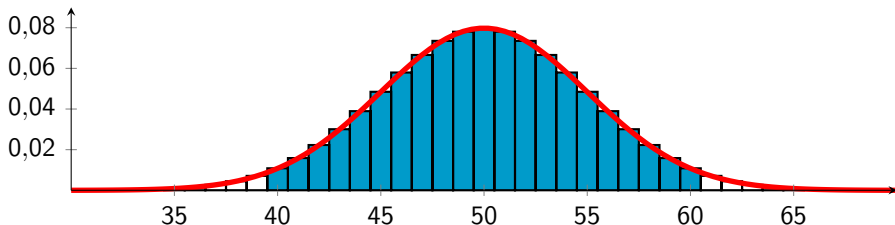
Ábrázoljuk a valószínűségeloszlást grafikonon!

- Az ábrán az oszlopok szélessége 1, és a k érték feletti oszlop magassága $P(X = k)$. Ekkor a kék tartomány összterülete:

$$\sum_{k=40}^{60} 1 \cdot P(X = k) = \sum_{k=40}^{60} P(X = k) = P(40 \leq X \leq 60)$$

- Keressünk egy f függvényt, ami jól követi az oszlopok tetejét!
- A 40 és a 60 értékek között a függvény alatti terület jó közelítéssel megegyezik a kék színű tartomány területével, vagyis

$$P(40 \leq X \leq 60) \approx \int_{40}^{60} f(x) dx$$



Sorozatok aszimptotikus egyenlősége

Legyenek a_n és b_n valós számsorozatok. Azt mondjuk, hogy a két sorozat **aszimptotikusan egyenlő**, ha $a_n/b_n \rightarrow 1$ amint $n \rightarrow \infty$.

Jelölésben: $a_n \sim b_n$.

Az aszimptotikusan egyenlő sorozatoknak számos szép tulajdonsága van:

- Ha $a_n \sim b_n$, akkor nagy n esetén $a_n \approx b_n$.
- Ha $a_n \sim b_n$ és $c_n \sim d_n$, akkor $a_n c_n \sim b_n d_n$ és $a_n/c_n \sim b_n/d_n$.
- Ha $a_n \sim b_n$ és $a_n \rightarrow a$, akkor $b_n \rightarrow a$.
- Ha $a_n \rightarrow a$ és $b_n \rightarrow a$, akkor $a_n \sim b_n$ NEM következik!

Példa: $1/n \rightarrow 0$ és $1/n^2 \rightarrow 0$, de $1/n \not\sim 1/n^2$.

Stirling-formula

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$$

Következmény: Ha n , k és $n - k$ nagy, akkor

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}$$

A binomiális eloszlás aszimptotikája

Legyen X binomiális eloszlású változó n és p paraméterrel! Ha n , k és $n - k$ elegendően nagy, akkor

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \approx f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

Bizonyítás. A bizonyítás csak analízisbeli eszközöket igényel. Az első lépés a Stirling-formula alkalmazása a binomiális együtthatóra.

A kapott f függvény van ábrázolva a korábbi grafikonon. Ez mi lehet?

Tekintsük a normális eloszlást a következő paraméterekkel: $\mu = np$ és $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Ekkor a sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2np(1-p)}}$$

Tehát a binomiális eloszlást a normális eloszlással lehet közelíteni.

Adjunk heurisztikus magyarázatot, hogy miért így kalibráljuk a normális eloszlás paramétereit!

Most tekintsünk $0 \leq a < b \leq n$ egész számokat. Ekkor

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^b P(X = k) \approx \int_a^b f(x) dx$$

Legyen Y egy olyan normális eloszlású változó, aminek a bevezetett f a sűrűségfüggvénye. Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx = P(a \leq Y \leq b) = F_Y(b) - F_Y(a) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

de Moivre–Laplace-tétel (1738)

Legyen X binomiális eloszlású változó n és p paraméterrel! Ha n nagy, akkor $0 \leq a < b \leq n$ egész számok esetén

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Megjegyzés: A tételt precízebben is ki lehet mondani egy konvergencia formájában, de annak a bizonyítása több eszközt igényel.

Feladat. Feldobunk 100 alkalommal egy szabályos pénzérmét, és legyen X a kapott fejek száma! Mennyi az esélye, hogy 100 dobás után legalább 40, de legfeljebb 60 fejet kapunk?

Az X változó binomiális eloszlású, $n = 100$ és $p = 1/2$.

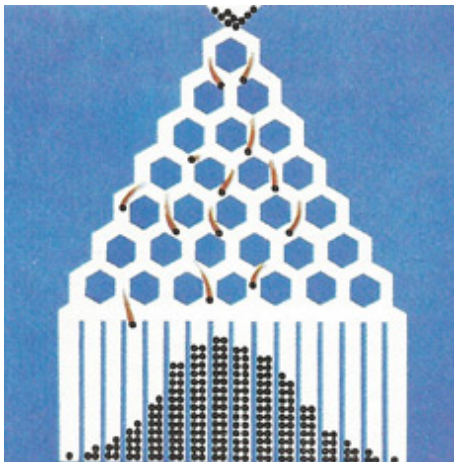
Várható érték és szórás: $E(X) = np = 50$, $D(X) = \sqrt{np(1-p)} = 5$.

Legyen Y normális eloszlású, ahol $\mu = 50$ és $\sigma = 5$.

Ekkor a normális közelítés alkalmazásával:

$$\begin{aligned} P(40 \leq X \leq 60) &\approx P(40 \leq Y \leq 60) = F_Y(60) - F_Y(40) \\ &= \Phi\left(\frac{60-50}{5}\right) - \Phi\left(\frac{40-50}{5}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) \\ &= \Phi(2) - [1 - \Phi(2)] = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544 \approx 95,4\% \end{aligned}$$

A **Galton-deszka** (Francis Galton, 1889) egy fizikailag is megvalósítható szemléltetőeszköz, a leírása elérhető a Wikipedian magyarul és angolul.



- Ha a deszkán n éksor van, akkor alul $n + 1$ darab azonos szélességű tartály található. Számozzuk ezeket 0-tól n -ig.
- Legurítunk egy golyót a deszkán, és jelölje X azt, hogy a golyó melyik tartályba esik! Ekkor $R_X = \{0, 1, \dots, n\}$.
- A golyó akkor esik a k -adik tartályba, ha pontosan k éknél tér ki jobbra. Tehát az X binomiális eloszlást követ n és $p = 1/2$ paraméterrel.
- Ha sok (N) golyót gurítunk le, mondjuk egy 1 méter magas golyóoszlopot, akkor a k -adik tartályban a golyóoszlop magassága:

$$r_N(X = k) \approx P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- Tehát ilyen módon vizuálisan is meg lehet jeleníteni a binomiális valószínűségeloszlást.
- A Galton-deszkára időnként felfestik a Gauss-görbét is: [video](#).

Valószínűségi változók függetlensége

Diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlása

Legyenek X és Y azonos $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett diszkrét valószínűségi változók! A két változó **együttes eloszlása**:

$$P(X = x, Y = y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}), \quad x \in R_X, y \in R_Y.$$

Marginális eloszlások: a két változó külön-külön vett eloszlása.

A marginális eloszlások meghatározása

Legyenek X és Y azonos valószínűségi mezőn értelmezett diszkrét valószínűségi változók! Ekkor tetszőleges $x \in R_X$ és $y \in R_Y$ esetén

$$P(X = x) = \sum_{y \in R_Y} P(X = x, Y = y),$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in R_X} P(X = x, Y = y).$$

Feladat. Adott két szabályos pénzérme, melyek egyik oldalára a 0, a másik oldalára az 1 értéket írjuk. Feldobjuk a két érmét, és legyen X a dobott számok összege, Y pedig a dobott számok szorzata. Adjuk meg a két változó együttes eloszlását és a marginális eloszlásokat!

X = dobott számok összege, $R_X = \{0, 1, 2\}$

Y = dobott számok szorzata, $R_Y = \{0, 1\}$

Együttes eloszlás:

$$P(X = 0, Y = 0) = P(\text{két 0-t dobunk}) = 1/4$$

$$P(X = 1, Y = 0) = P(\text{egy 0-t és egy 1-est dobunk}) = 1/2$$

$$P(X = 2, Y = 1) = P(\text{két 1-est dobunk}) = 1/4$$

$$P(X = 0, Y = 1) = P(X = 1, Y = 1) = P(X = 2, Y = 0) = 0$$

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	össz.
$Y = 1$	0	0	1/4	1/4
$Y = 0$	1/4	1/2	0	3/4
össz.	1/4	1/2	1/4	1

Két diszkrét valószínűségi változó függetlensége

Legyenek X és Y azonos valószínűségi mezőn értelmezett diszkrét valószínűségi változók! Azt mondjuk, hogy a két valószínűségi változó **független egymástól**, ha tetszőleges $x \in R_X$ és $y \in R_Y$ esetén

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Megjegyzések:

- A definíció azt követeli meg, hogy az $\{X = x\}$ és $\{Y = y\}$ események függetlenek legyenek. Ezt a következő módon is felírhatjuk:

$$P(X = x | Y = y) = P(X = x), \quad x \in R_X, \quad y \in R_Y.$$

- A fenti definíció szigorúan csak diszkrét változókra alkalmazható. Például folytonos változók mellett tetszőleges $x \in R_X$ és $y \in R_Y$ esetén

$$P(X = x, Y = y) = 0 = P(X = x)P(Y = y).$$

Feladat. Adott két szabályos pénzérme, melyek egyik oldalára a 0, a másik oldalára az 1 értéket írjuk. Feldobjuk a két érmét, és legyen X a dobott számok összege, Y pedig a dobott számok szorzata. Független egymástól a két változó?

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	össz.
$Y = 1$	0	0	$1/4$	$1/4$
$Y = 0$	$1/4$	$1/2$	0	$3/4$
össz.	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

A két változó nem független, ugyanis

$$P(X = 0, Y = 1) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 1) = 1/4 \cdot 1/4$$

Alternatív megoldás:

$$P(X = 0 | Y = 1) = \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{0}{1/4} = 0 \neq P(X = 0) = 1/4$$

Feladat. Legyenek X és Y azonos valószínűségi mezőn értelmezett diszkrét változók az alábbi marginális eloszlásokkal. Hogyan adjuk meg az együttes eloszlást, hogy a két változó független legyen egymástól?

- $P(X = 0) = 1/4, \quad P(X = 1) = 1/2, \quad P(X = 2) = 1/4$
- $P(Y = 0) = 3/4, \quad P(Y = 1) = 1/4$

A két változó pontosan akkor független egymástól, ha tetszőleges $x \in R_X$ és $y \in R_Y$ esetén

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Ez egyértelműen meghatározza az együttes eloszlást:

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	össz.
$Y = 1$	$1/16$	$1/8$	$1/16$	$1/4$
$Y = 0$	$3/16$	$3/8$	$3/16$	$3/4$
össz.	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

Tetszőleges valószínűségi változók függetlensége

Legyenek X és Y azonos valószínűségi mezőn értelmezett tetszőleges valószínűségi változók! A két változó **független egymástól**, ha bármely $x \in \mathbb{R}$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

A definíció azt követeli meg, hogy az $\{X \leq x\}$ és $\{Y \leq y\}$ események függetlenek legyenek. Ezt a következő módon is felírhatjuk:

$$P(X \leq x | Y \leq y) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Páronként független diszkrét valószínűségi változók

Legyen $X_1, X_2, \dots$ azonos valószínűségi mezőn értelmezett diszkrét valószínűségi változóknak egy véges vagy végtelen sorozata! Azt mondjuk, hogy ezek a változók **páronként függetlenek**, ha tetszőleges $i \neq j$ esetén X_i és X_j függetlenek.

A két definíció kapcsolata

Legyenek X és Y azonos valószínűségi mezőn értelmezett diszkrét valószínűségi változók! Ekkor a változók függetlenségére adott két definíció ekvivalens egymással.

Bizonyítás. Legyenek $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$, $R_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$.
Először tegyük fel, hogy bármely $x_i \in R_X$ és $y_j \in R_Y$ mellett

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

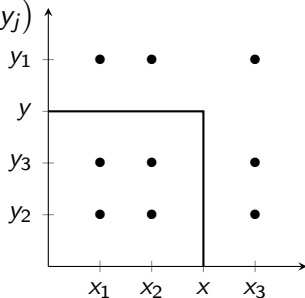
Ekkor tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{\substack{x_i \in R_X \\ x_i \leq x}} \sum_{\substack{y_j \in R_Y \\ y_j \leq y}} P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_{\substack{x_i \in R_X \\ x_i \leq x}} \sum_{\substack{y_j \in R_Y \\ y_j \leq y}} P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

$$= \sum_{\substack{x_i \in R_X \\ x_i \leq x}} P(X = x_i) \cdot \sum_{\substack{y_j \in R_Y \\ y_j \leq y}} P(Y = y_j)$$

$$= P(X \leq x)P(Y \leq y).$$



A fordított irányt csak véges értékészletre bizonyítjuk:

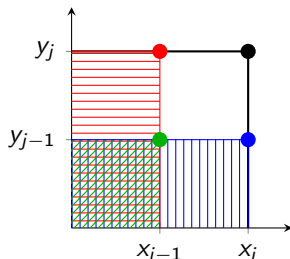
- $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, ahol $x_1 < x_2 < \dots < x_m$
- $R_Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, ahol $y_1 < y_2 < \dots < y_n$

Legyen továbbá $x_0 = x_1 - 1$, $y_0 = y_1 - 1$.

Tegyük fel, hogy tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Ekkor bármely $x_i \in R_X$ és $y_j \in R_Y$ mellett



$$\begin{aligned} &P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= P(X \leq x_i, Y \leq y_j) - P(X \leq x_{i-1}, Y \leq y_j) \\ &\quad - P(X \leq x_i, Y \leq y_{j-1}) + P(X \leq x_{i-1}, Y \leq y_{j-1}) \\ &= P(X \leq x_i)P(Y \leq y_j) - P(X \leq x_{i-1})P(Y \leq y_j) \\ &\quad - P(X \leq x_i)P(Y \leq y_{j-1}) + P(X \leq x_{i-1})P(Y \leq y_{j-1}) \\ &= \left[P(X \leq x_i) - P(X \leq x_{i-1}) \right] \left[P(Y \leq y_j) - P(Y \leq y_{j-1}) \right] \\ &= P(X = x_i)P(Y = y_j) \end{aligned}$$

A várható érték tulajdonságai

Legyenek X és Y azonos valószínűségi mezőn értelmezett változók véges várható értékkel! Ekkor teljesülnek az alábbi azonosságok.

- 1 Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén $E(aX) = aE(X)$.
- 2 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Bizonyítás. Az állításokat csak diszkrét változókra bizonyítjuk.

- 1 Most $R_{aX} = \{ax : x \in R_X\}$, ezért

$$E(aX) = \sum_{x \in R_X} (ax)P(X = x) = a \sum_{x \in R_X} xP(X = x) = aE(X)$$

- 2 Most $R_{X+Y} = \{x + y : x \in R_X, y \in R_Y\}$, ezért

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} (x + y)P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x \in R_X} x \sum_{y \in R_Y} P(X = x, Y = y) + \sum_{y \in R_Y} y \sum_{x \in R_X} P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x \in R_X} xP(X = x) + \sum_{y \in R_Y} yP(Y = y) = E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

Kettőnél több változó összegének a várható értéke

Legyenek $X_1, \dots, X_n$ azonos valószínűségi mezőn értelmezett változók véges várható értékkel! Ekkor $E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$.

Bizonyítás.

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2 + \dots + X_n) = \dots = E(X_1) + \dots + E(X_n)$$

Szorzat várható értéke

Legyenek X és Y független valószínűségi változók véges várható értékkel! Ekkor $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Bizonyítás. Ezt is csak diszkrét változókra bizonyítjuk.

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} (xy)P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} xyP(X = x)P(Y = y) \\ &= \left[\sum_{x \in R_X} xP(X = x) \right] \left[\sum_{y \in R_Y} yP(Y = y) \right] = E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Feladat. *Egymás után feldobok egy szabályos dobókockát két alkalommal. Ezek után rajzolok egy olyan téglalapot, melynek oldalhosszúságai a dobott értékek. Adjuk meg a téglalap kerületének és területének a várható értékét!*

Legyenek X és Y a dobott értékek!

- Értékkészlet: $R_X = R_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Eloszlás: $P(X = k) = P(Y = k) = 1/6$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- A két változó nyilvánvalóan független egymástól. (Miért?)
- Várható érték:

$$E(X) = E(Y) = \sum_{k=1}^6 kP(X = k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{1}{6} \frac{6(6+1)}{2} = \frac{7}{2}$$

- Kerület és terület várható értéke:

$$E(2(X+Y)) = 2(E(X)+E(Y)) = 14, \quad E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{49}{4}.$$

Házi feladat: Oldjuk meg a feladatot olyan módon, hogy meghatározzuk a kerület és a terület valószínűségeloszlását, majd alkalmazzuk a várható érték definícióját!

Kovariancia és korreláció

Ha két változó független egymástól, akkor ezekkel könnyű számolni. De hogyan jellemezhető két változó kapcsolata a függő esetben?

Kovariancia

Legyenek X és Y azonos valószínűségi mezőn értelmezett változók véges szórással! Ekkor a két változó **kovarianciája**

$$\text{Cov}(X, Y) = E\left([X - E(X)][Y - E(Y)]\right).$$

Megjegyzés. A véges szórások miatt $E(X)$ és $E(Y)$ léteznek.

A kovariancia végessége

Legyenek X és Y azonos valószínűségi mezőn értelmezett változók véges szórással! Ekkor a kovariancia jól definiált, ugyanis

$$E\left(\left|[X - E(X)][Y - E(Y)]\right|\right) < \infty.$$

Továbbá $|\text{Cov}(X, Y)| \leq D(X)D(Y)$.

Bizonyítás. Az állítást csak diszkrét változókra bizonyítjuk. Először tegyük fel, hogy mindkét változónak véges az értékkészlete! Jelölések:

- $R_X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $R_Y = \{y_1, \dots, y_n\}$
- $\bar{x}_i = x_i - E(X)$, $\bar{y}_j = y_j - E(Y)$, $p_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j)$
- $\sum_i = \sum_{i=1}^m$, $\sum_k = \sum_{k=1}^m$, $\sum_j = \sum_{j=1}^n$, $\sum_\ell = \sum_{\ell=1}^n$

Ekkor teljesülnek a következő azonosságok:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E\left([X - E(X)][Y - E(Y)]\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [x_i - E(X)][y_j - E(Y)]P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i,j} \bar{x}_i \bar{y}_j p_{i,j} \end{aligned}$$

$$\text{AbsCov}(X, Y) = E\left(\left|[X - E(X)][Y - E(Y)]\right|\right) = \sum_{i,j} |\bar{x}_i| |\bar{y}_j| p_{i,j}$$

$$\sum_{i,j} \bar{x}_i^2 p_{i,j} = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2 \sum_{j=1}^n P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2 P(X = x_i) = D^2(X)$$

$$\sum_{i,j} \bar{y}_j^2 p_{i,j} = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j^2 \sum_{i=1}^m P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j^2 P(Y = y_j) = D^2(Y)$$

Elemi algebrai átalakításokkal:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{i,j,k,\ell} (|\bar{x}_i||\bar{y}_\ell| - |\bar{x}_k||\bar{y}_j|)^2 p_{i,j} p_{k,\ell} \\
 &= \sum_{i,j,k,\ell} \bar{x}_i^2 \bar{y}_\ell^2 p_{i,j} p_{k,\ell} + \sum_{i,j,k,\ell} \bar{x}_k^2 \bar{y}_j^2 p_{i,j} p_{k,\ell} - 2 \sum_{i,j,k,\ell} |\bar{x}_i||\bar{y}_j||\bar{x}_k||\bar{y}_\ell| p_{i,j} p_{k,\ell} \\
 &= \sum_{i,j} \bar{x}_i^2 p_{i,j} \sum_{k,\ell} \bar{y}_\ell^2 p_{k,\ell} + \sum_{k,\ell} \bar{x}_k^2 p_{k,\ell} \sum_{i,j} \bar{y}_j^2 p_{i,j} - 2 \sum_{i,j} |\bar{x}_i||\bar{y}_j| p_{i,j} \sum_{k,\ell} |\bar{x}_k||\bar{y}_\ell| p_{k,\ell} \\
 &= D^2(X) D^2(Y) + D^2(X) D^2(Y) - 2(\text{AbsCov}(X, Y))^2
 \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a kovariancia létezik, hiszen

$$(\text{AbsCov}(X, Y))^2 \leq D^2(X) D^2(Y) < \infty.$$

Ha ugyanezt megcsináljuk abszolút értékek nélkül, akkor

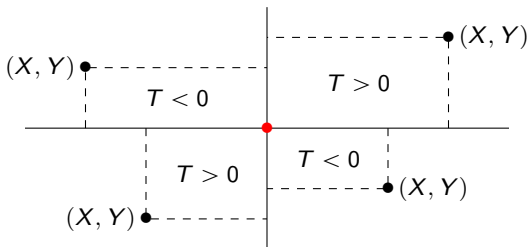
$$0 \leq 2D^2(X) D^2(Y) - 2(\text{Cov}(X, Y))^2.$$

Ebből azonnal kapjuk, hogy $|\text{Cov}(X, Y)| \leq D(X) D(Y)$.

Ha a változóknak nem véges az értékészlete, akkor a piros egyenlőségek (=) helyett $m \rightarrow \infty$ illetve $n \rightarrow \infty$ határátmenetre van szükség.

Mit fejez ki szemléletesen a kovariancia?

Jelölje T az (X, Y) és $(E(X), E(Y))$ pontok által kifeszített véletlen téglalap előjeles területét: $T = (X - E(X))(Y - E(Y))$.



Kovariancia: $\text{Cov}(X, Y) = E(T)$.

- Ha $\text{Cov}(X, Y) > 0$, akkor jellemzően $T > 0$, vagyis X és Y között pozitív irányú kapcsolat tapasztalható.
- Ha $\text{Cov}(X, Y) < 0$, akkor jellemzően $T < 0$, vagyis X és Y között negatív irányú kapcsolat tapasztalható.
- Ha $\text{Cov}(X, Y) = 0$, akkor nem tapasztalható ilyen kapcsolat.

A kovarianciának nem csak az előjele hordoz információt, hanem az abszolút értéke is. Minél nagyobb az abszolút érték, annál erősebb a két változó közötti pozitív vagy negatív irányú kapcsolat.

Korreláció

Legyenek X és Y azonos valószínűségi mezőn értelmezett változók véges szórással! Ekkor a két változó **korrelációja** avagy **korrelációs együtthatója**

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{D(X)D(Y)}.$$

Ha valamelyik változónak 0 a szórása, akkor legyen $\text{corr}(X, Y) = 0$.

Megjegyzések:

- Korábban láttuk, hogy $|\text{Cov}(X, Y)| \leq D(X)D(Y)$. Emiatt $|\text{corr}(X, Y)| \leq 1$.
- A korreláció szintén a két változó közötti kapcsolat irányát és erősségét fejezi ki, de ez át van skálázva a $[-1, +1]$ intervallumba.

Feladat. Az X és Y diszkrét változók együttes eloszlása az alábbi táblázatban van megadva. Határozzuk meg a két változó kovarianciáját és korrelációját!

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	össz.
$Y = 1$	0	0	1/4	1/4
$Y = 0$	1/4	1/2	0	3/4
össz.	1/4	1/2	1/4	1

A várható értékek és a szórások kiszámolhatóak a marginális eloszlásokból:

$$E(X) = 1, \quad D(X) = 1/\sqrt{2}, \quad E(Y) = 1/4, \quad D(Y) = \sqrt{3}/4.$$

Kovariancia és korreláció:

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} [x - E(X)][y - E(Y)]P(X = x, Y = y)$$

$$= [0 - 1] \left[0 - \frac{1}{4} \right] \frac{1}{4} + [1 - 1] \left[0 - \frac{1}{4} \right] \frac{1}{2} + [2 - 1] \left[1 - \frac{1}{4} \right] \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{D(X)D(Y)} = \frac{1/4}{1/\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}/4} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82$$

Tehát ebben az esetben a két változó között pozitív irányú kapcsolat van.

A kovariancia tulajdonságai

Legyenek X és Y azonos valószínűségi mezőn értelmezett változók véges szórással!

- 1 Szimmetria: $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- 2 $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$. (Ez motiválja a „kovariancia” elnevezést.)
- 3 $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- 4 Ha X és Y függetlenek, akkor $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Bizonyítás.

- 1 $\text{Cov}(X, Y) = E\left([X - E(X)][Y - E(Y)]\right) = \text{Cov}(Y, X)$
- 2 $\text{Cov}(X, X) = E\left([X - E(X)]^2\right) = \text{Var}(X)$
- 3
$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E\left(XE(Y)\right) - E\left(E(X)Y\right) + E\left(E(X)E(Y)\right) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$
- 4 Ha X és Y függetlenek, akkor $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Korrelálatlan változók

Legyenek X és Y azonos valószínűségi mezőn értelmezett változók! Akkor mondjuk, hogy a két változó **korrelálatlan**, ha $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Függetlenség és korrelálatlanság

Ha két változó független, akkor korrelálatlanok is. Ennek megfordítása nem igaz, a korrelálatlanságból nem következik a függetlenség.

Bizonyítás. Az első állítást már bebizonyítottuk az előző oldalon.

A második állításért tekintsünk X és Y diszkrét változókat az alábbi együttes eloszlással. Házi feladat igazolni, hogy a két változó korrelálatlan, de nem független.

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$	össz.
$Y = 1$	1/8	0	1/8	1/4
$Y = 0$	0	1/2	0	1/2
$Y = -1$	1/8	0	1/8	1/4
össz.	1/4	1/2	1/4	1

Változók összegének a kovarianciája

Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, Y$ azonos valószínűségi mezőn értelmezett változók véges szórással! Ekkor a kovariancia additív művelet:

- $\text{Cov}(X_1 + \dots + X_n, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \dots + \text{Cov}(X_n, Y)$
- $\text{Cov}(Y, X_1 + \dots + X_n) = \text{Cov}(Y, X_1) + \dots + \text{Cov}(Y, X_n)$

Bizonyítás. Kezdjük az $n = 2$ esettel:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) &= E\left([X_1 + X_2 - E(X_1 + X_2)][Y - E(Y)]\right) \\&= E\left([X_1 - E(X_1)][Y - E(Y)] + [X_2 - E(X_2)][Y - E(Y)]\right) \\&= \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)\end{aligned}$$

Most általánosan:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_1 + X_2 + \dots + X_n, Y) &= \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2 + \dots + X_n, Y) \\&= \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y) + \dots + \text{Cov}(X_n, Y).\end{aligned}$$

A második állítás következik abból, hogy a kovariancia szimmetrikus.

Változók összegének a varianciája

Legyenek $X_1, \dots, X_n$ azonos valószínűségi mezőn értelmezett változók véges szórással! Ekkor

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Ha speciálisan $X_1, \dots, X_n$ páronként függetlenek, akkor

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n).$$

Bizonyítás. A kovariancia linearitását felhasználva

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) &= \text{Cov}(X_1 + \dots + X_n, X_1 + \dots + X_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i, X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

Ha a változók páronként függetlenek, akkor $i \neq j$ esetén $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$.

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i, X_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

Feladat. Feldobok 100 alkalommal egy szabályos dobókockát. Határozzuk meg a dobott számok összegének a várható értékét és szórását! Hogyan értelmezhetők ezek a mutatószámok?

Jelölje $X_1, \dots, X_{100}$ a dobott értékeket!

- Értékkészlet: $R_{X_1} = \dots = R_{X_{100}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Eloszlás: $P(X_1 = k) = \dots = P(X_{100} = k) = 1/6, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- Várható érték: $E(X_1) = \dots = E(X_{100}) = 7/2$
- Variancia: $\text{Var}(X_1) = \dots = \text{Var}(X_{100}) = 35/12$
- Az $X_1, \dots, X_{100}$ változók függetlenek.

Meg tudjuk adni az összeg eloszlását? Nagyon sok lehetséges értéke van:

$$R_{X_1 + \dots + X_{100}} = \{100, 101, \dots, 600\}$$

Alkalmazzuk inkább az ismert azonosságokat:

- $E(X_1 + \dots + X_{100}) = E(X_1) + \dots + E(X_{100}) = 100 \cdot 7/2 = 350$
- $\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = 100 \cdot 35/12 \approx 291,67$
- $D(X_1 + \dots + X_n) = \sqrt{3500/12} \approx 17,08$