# Biostatisztika feladatok

# 1. Diszkrét valószínűségi változók

**1.1.** A Pick Szeged férfi kézilabda csapatában az átlövők testmagassága 193, 198, 199, 200, 203 és 203 centiméter. Véletlenszerűen kiválasztva egy játékost mi az esélye annak, hogy az ő testmagassága legalább 200 cm? Mennyi a testmagasság várható értéke és szórása?

**1.2.** A biológiai kutatások egyik új és fontos területe a sárkányok vizsgálata. A tudósok eddig 1, 3, 7 és 12 fejű sárkányokat figyeltek meg, ezek aránya a populáción belül 10, 40, 30 illetve 20 százalék. Véletlenszerűen kiválasztunk egy egyedet a populációból, és jelölje $\xi$ a fejek számát a választott egyednél! Adjuk meg a $\xi$ változó értékkészletét és valószínűségeloszlását! A valószínűségeloszlást ábrázoljuk grafikonon is! Határozzuk meg a változó móduszát, várható értékét és szórását! Mi az utolsó három mutatószám szemléletes jelentése a populációra nézve?

**1.3.** Biológusok azt vizsgálták, hogy egy nemzeti parkban hány egyed él egy ritka fafajból. Felosztották a park területét 1 hektár területű négyzetekre, és felmérték, hogy az egyes négyzetekben hány egyed található ebből a fajból. Egy egyedet sem találtak a négyzetek 40 százalékán, 1 egyedet találtak a négyzetek 30 százalékán, 2 egyedet találtak a négyzetek 20 százalékán, és végül 3 egyedet találtak a négyzetek 10 százalékán. Három egyednél többet sehol sem találtak. Legyen $\xi$ az egyedek száma egy véletlenszerűen kiválasztott négyzetben!

Adjuk meg a $\xi$ változó értékkészletét és valószínűségeloszlását! Mennyi az esélye, hogy a kiválasztott négyzeten 1-nél több egyed található a fafajból? Mennyi a $\xi$ módusza, várható értéke illetve szórása? Mi a jelentése az utolsó három mutatószámnak a teljes nemzeti parkra nézve?

**1.4.** Egy szerencsejátékban a játékos 1000, 2000, 3000 vagy 5000 forintot nyerhet, ezen nyeremények esélye 50, 30, 15 illetve 5 százalék. Egyszer játsszuk ezt a játékot, jelölje $\xi$ a nyeremény nagyságát! Adjuk meg a $\xi$ változó értékkészletét, valószínűségeloszlását, móduszát, várható értékét és szórását! Mennyi az esélye annak, hogy legfeljebb 2000 forintot nyerünk?

# 2. Folytonos valószínűségi változók

**2.1.** Jelölje $\xi$ a napi középhőmérsékletet Celsiusban egy januári napon. A $\xi$ egy folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = 1/20$ ha $-15 \leq x \leq 5$, és $f(x) = 0$ minden más $x$ esetén.

**a.** Vázlatosan rajzoljuk fel a sűrűségfüggvény grafikonját, és adjuk meg a $\xi$ változó értékkészletét!

**b.** Mennyi annak az esélye, hogy a napi középhőmérséklet $-10°$C és $10°$C közé esik? Mekkora valószínűséggel lesz a napi középhőmérséklet legalább $0°$C?

**c.** Határozzuk meg a $\xi$ változó eloszlásfüggvényét! Ezek után válaszoljunk az előző pont kérdéseire az eloszlásfüggvény alkalmazásával!

**d.** Adjuk meg a $\xi$ valószínűségi változó 80%-os kvantilisét, várható értékét és szórását! Mi ezeknek a mutatószámoknak a szemléletes jelentése?

**2.2.** Egy erdőben a fák törzsének méterben kifejezett átmérője a következő sűrűségfüggvénnyel írható le: $f(x) = 3\sqrt{x}/2$ ha $0 \leq x \leq 1$, és $f(x) = 0$ minden más $x$ esetén. Véletlenszerűen kiválasztunk egy fát, és legyen $\xi$ ezen egyed átmérője!

**a.** Vázlatosan rajzoljuk fel a sűrűségfüggvény grafikonját, és adjuk meg a $\xi$ változó értékkészletét!

**b.** Mennyi a $\mathrm{P}(0.5 \leq \xi \leq 1.5)$ és $\mathrm{P}(\xi \leq 0.8)$ valószínűségek értéke? Mi a jelentése ezeknek az értékeknek az erdő szempontjából?

**c.** Határozzuk meg a $\xi$ változó eloszlásfüggvényét! Ezek után válaszoljunk az előző pont kérdéseire az eloszlásfüggvény alkalmazásával!

**d.** Adjuk meg a várható értéket, a szórást, a mediánt illetve az alsó és a felső kvartilist! Mi a szemléletes jelentése ezeknek a mutatószámnak?

**2.3.** Egy állatpopulációban az egyedek testhossza a következő sűrűségfüggvénnyel írható le: $f(x) = 8/(3x^3)$ ha $1 \leq x \leq 2$, és $f(x) = 0$ minden más $x$ valós számra.

**a.** Rajzoljuk fel a sűrűségfüggvényt, és adjuk meg a testhossz értékkészletét!

**b.** A populációban az egyedek mekkora hányadának esik a testhossza 0.5 és 1.5 közé? Az egyedek hány százaléka éri el az 1.8 hosszúságot?

**c.** Határozzuk meg a $\xi$ változó eloszlásfüggvényét! Ezek után válaszoljunk az előző pont kérdéseire az eloszlásfüggvény alkalmazásával!

**d.** Határozzuk meg a testhossz várható értéké és szórását! Adjunk meg három intervallumot a testhosszra olyan módon, hogy mindegyikbe az egyedek harmada essen!

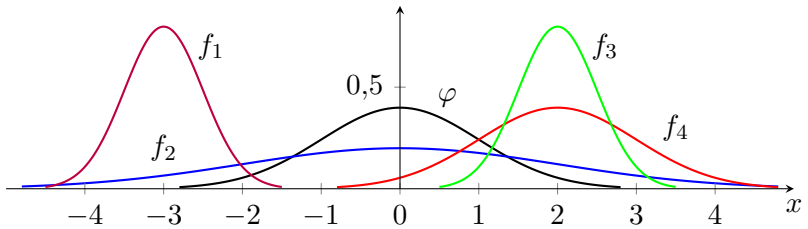
## 3. A normális eloszlás

**3.1.** Az alábbi ábrán $\varphi$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Határozzuk meg, hogy az $f_1, f_2, f_3, f_4$ sűrűségfüggvények közül melyik tartozik az alábbi $\mu$ várható értékkel és $\sigma$ szórással definiált normális eloszlásokhoz. Adjuk meg a kimaradt sűrűségfüggvényhez tartozó várható értéket és szórást is.

**a.** $\mu = 2, \sigma = 0{,}5$

**b.** $\mu = 2, \sigma = 1$

**c.** $\mu = 0, \sigma = 2$



**3.2.** Az IQ teszteket úgy állítják össze, hogy az eredmény a felnőtt népességen belül normális eloszlást kövessen 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. A felnőtt népesség mekkora hányadának esik az IQ pontszáma 90 és 120 közé? A Mensa egy nemzetközi egyesület, ahol a belépés feltétele a legalább 131 pontos IQ. A népesség hány százaléka felel meg ennek a követelménynek? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy az emberek 95 százalékának ebbe az intervallumba esik az IQ pontszáma.

**3.3.** Biológusok azt vizsgálták, hogy a szavannán élő majmok reggelente milyen eloszlás szerint ébrednek fel, és másznak le a fáról. A megfigyelések alapján az ébredési idő egy normális eloszlású valószínűségi változó. A majmok átlagosan reggel 7 órakor kelnek fel, a szórás 0.75 óra. A majmok mekkora hányada kel fel 6 és 7 óra között? Mekkora hányad ébred 8 óra után? Adjunk meg egy olyan időintervallumot, melyre teljesül, hogy a majmok 90 százaléka ebben az időintervallumban mászik le a fáról!

**3.4.** Szegeden az éves csapadékmennyiség egy olyan $\xi$ valószínűségi változó, mely normális eloszlást követ 500 ml várható értékkel és 50 ml szórással. Mennyi az esélye annak, hogy egy adott évben a csapadék mennyisége 460 ml és 525 ml közé esik? Adjunk meg egy olyan intervallumot, mely 95% valószínűséggel tartalmazza a $\xi$ változót!

## 4. Statisztikai becslések

**4.1.** A 'carData' csomagban található 'Davis' adatsor egy pszichológia felmérés eredményét tartalmazza. A változók:
sex: nem (F=nő, M=férfi)
weight: testsúly (kg)
height: testmagasság (cm)
repwt: az alany mekkorának gondolja saját testsúlyát (kg)
repht: az alany mekkorának gondolja saját testmagasságát (cm)

- **a.** Adjunk becslést a 'repwt' változó teljes sokaságban vett várható értékére és szórására! Nevezzük meg, hogy mely statisztikai becsléseket alkalmaztuk!
- **b.** Hány megfigyelés van a 'repwt' változóra, és mennyi a hiányzó adatok száma?
- **c.** Adjunk becslést a 'repwt' változónak a teljes sokaságban mért mediánjára, alsó kvartilisére és felső kvartilisére!
- **d.** Határozzuk meg a 'repwt' változó esetében a következő mutatószámok értékét: minimum, maximum, terjedelem, IQR! Mi ezeknek a mutatószámoknak a jelentése a mintára nézve?
- **e.** Adjunk meg a 'repwt' változóra három olyan intervallumot, hogy mindegyikbe a mintaelemek harmada essen!

**4.2.** A 'carData' csomagban található 'Mroz' adatsor egy amerikai felmérés eredménye, az alanyok férjezett nők. Az 'age' változó az alanyok életkorát tartalmazza.

**a.** Adjunk becslést az ‘age’ változó várható értékére, mediánjára és szórására! Nevezzük meg pontosan, hogy mely statisztikai mutatószámokat alkalmaztuk!

**b.** Hány megfigyelés van az ‘age’ változóra, és mennyi a hiányzó adatok száma?

**c.** Határozzuk meg a ‘age’ változó esetében a következő mutatószámok értékét: minimum, maximum, alsó és felső kvartilis, terjedelem, IQR! Mi ezeknek a mutatószámoknak a jelentése a mintára nézve?

**d.** Adjunk meg az ‘age’ változóra öt olyan intervallumot, hogy mindegyikbe a mintaelemek ötöde essen!

**4.3.** Régészek radiokarbonos módszerrel szeretnék meghatározni egy lelőhely igazi korát. Sajnos a radiokarbonos módszer egy adott ásatáson nem pontosan ugyanazt a kort adja minden lelet esetében. Az egyes leletek radiokarbonos kora egy $\xi$ valószínűségi változó, és a lelőhely igazi kora ennek a változónak a várható értéke.

Egy ásatáson a radiokarbonos módszert hét leleten alkalmazva a következő korokat kapták: 1180, 1220, 1230, 1250, 1270, 1290 és 1340 év.

**a.** Határozzuk meg a mintaméretet, a mintaátlagot, valamint a korrigálatlan és a korrigált empirikus szórást! Ezek alapján milyen becslés adható a lelőhely igazi korára? A két empirikus szórás közül melyikkel érdemes becsülni a $\xi$ változó igazi szórását?

**b.** Adjuk meg a minta mediánját és terjedelmét!

## 5. Statisztikai grafikonok

**5.1.** A ‘carData’ csomagban található ‘Davis’ adatsor egy pszichológia felmérés eredményét tartalmazza. A változók:
sex: nem (F=nő, M=férfi)
weight: testsúly (kg)
height: testmagasság (cm)
repwt: az alany mekkorának gondolja saját testsúlyát (kg)
repht: az alany mekkorának gondolja saját testmagasságát (cm)

**a.** Az adatsorban mely változók diszkrétek és melyek folytonosak?

**b.** Ábrázoljuk a ‘sex’ változót oszlopdiagram és kördiagram segítségével! Hány nő és hány férfi található a mintában?

**c.** Ábrázoljuk a ‘repwt’ változó hisztogramját, majd adjunk grafikus becslést a sűrűségfüggvényre! Mennyi a minta ferdesége? Ezek alapján mit állíthatunk a hisztogramról: jobbra ferde, balra ferde vagy közel szimmetrikus?

**d.** Ábrázoljuk a ‘repwt’ változó boxplotját! Hány ourlier érték van a mintában? Nevezzük meg, hogy mely statisztikai mutatószámok jelennek meg a boxploton, és adjuk meg ezen mutatószámok pontos értékét!

**e.** A fentiek alapján mit állíthatunk a ‘repwt’ változó eloszlásáról: közel normális vagy nagy mértékben különbözik a normálistól?

**f.** Ábrázoljuk a ‘weight’ változó boxplotját! Vegyük észre, hogy az egyik outlier érték nagyon kilóg! Keressük ki ezt a megfigyelést az adatsorból, és adjunk magyarázatot a jelenségre!

**5.2.** A ‘carData’ csomagban található ‘Mroz’ adatsor egy amerikai felmérés eredménye, az alanyok férjezett nők. A fontosabb változók:
age: életkor (év)
wc: rendelkezik-e főiskolai vagy egyetemi végzettséggel (yes=igen, no=nem)
k5: a legfeljebb 5 éves gyerekek száma a családban

**a.** A fenti változók közül melyek diszkrétek és melyek folytonosak?

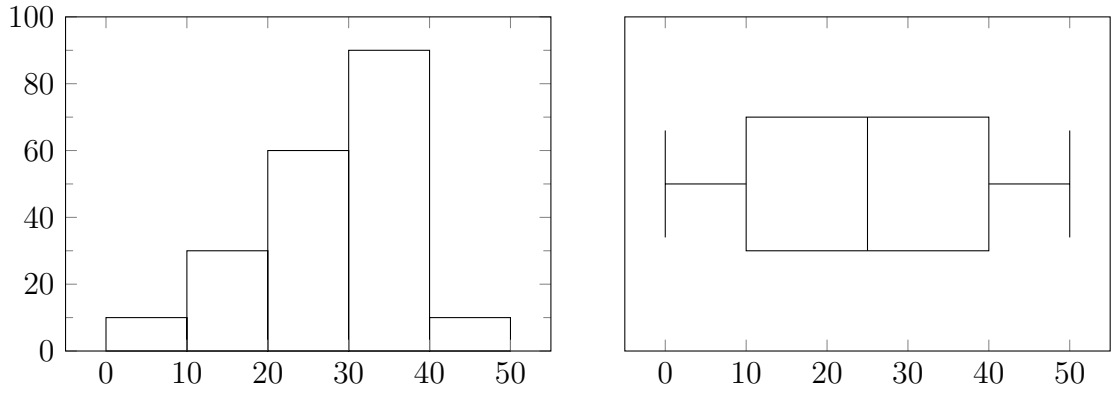
**b.** Ábrázoljuk a ‘wc’ változót oszlopdiagramon és kördiagramon! Az alanyok közül hányan rendelkeznek, és hányan nem rendelkeznek diplomával?

**c.** Ábrázoljuk az ‘age’ változó hisztogramját, majd adjunk grafikus becslést a sűrűségfüggvényre! Mennyi a minta ferdesége? Ezek alapján mit állíthatunk a hisztogramról: jobbra ferde, balra ferde vagy közel szimmetrikus?

**d.** Ábrázoljuk az ‘age’ változó boxplotját! Hány ourlier érték van a mintában? Nevezzük meg, hogy mely statisztikai mutatószámok jelennek meg a boxploton, és adjuk meg ezen mutatószámok pontos értékét!

**e.** A fentiek alapján mit állíthatunk az ‘age’ változó eloszlásáról: közel normális vagy nagy mértékben különbözik a normálistól?

**5.3.** Az alábbi ábrán egy hisztogram és egy boxplot látható.




**a.** A hisztogram alapján körülbelül mennyi a minta elemszáma? Hozzávetőlegesen mekkora a legkisebb illetve a legnagyobb elem? Milyen előjelű a ferdeség? Hány móduszt látunk az ábrán és mely értékeknél?

**b.** Nevezzük meg, hogy mely statisztikai mutatószámok jelennek meg a boxploton, majd olvassuk le ezek értékét a grafikonról! Van outlier érték?

**c.** A hisztogram és a boxplot ugyanazon statisztikai mintához tartozik? A választ indokoljuk is!

## 6. Konfidencia intervallum a várható értékre, t-próba

**6.1.** Régészek radiokarbonos kormeghatározással szeretnék meghatározni egy lelőhely korát. Sajnos a radiokarbonos módszer az adott ásatáson nem pontosan ugyanazt a kort adja minden lelet esetében. Az egyes leletek radiokarbonos kora egy normális eloszlású $\xi$ valószínűségi változó, és a lelőhely igazi kora ennek a változónak a várható értéke.

Egy ásatáson a radiokarbonos módszert öt leleten alkalmazva a következő korokat kapták: 1180, 1220, 1230, 1250 és 1270 év.

**a.** Adjunk becslést a lelőhely igazi korára, tehát a $\xi$ változó várható értékére! Számoljuk ki és értelmezzük a standard hibát is!

**b.** Írjunk fel egy 95% megbízhatóságú konfidencia intervallumot a lelőhely igazi korára!

**c.** A t-próba alkalmazásával teszteljük le 5%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a lelőhely igazi kora 1200 év!

**d.** Mennyi az elsőfajú illetve a másodfajú hiba nagysága ebben a feladatban?

**6.2.** Bejelentés érkezik a fogyasztóvédelemhez, hogy az egyik tejgyár 1 literes kiszerelésű dobozos teje a névleges tartalomnál kevesebbet tartalmaz. Tudni kell, hogy a töltőberendezések véletlen nagyságú hibával dolgoznak, így ténylegesen egyik dobozban sincs pontosan 1 liter tej. Feltehető, hogy a dobozokba töltött mennyiség egy $\xi$ normális eloszlású valószínűségi változó, melynek 1 liter a várható értéke, ha a gép jól van beállítva. A fogyasztóvédelem emberei beszereznek hat doboz tejet, és azt találják, hogy ezek 975, 980, 985, 995, 1000, 1005 ml tejet tartalmaznak.

**a.** Adjunk becslést a $\xi$ változó várható értékére! Számoljuk ki és értelmezzük a standard hibát is!

**b.** Adjunk meg egy 90% megbízhatóságú konfidencia intervallumot a $\xi$ változó várható értékére!

**c.** A t-próba alkalmazásával teszteljük le 10%-os szignifikancia szinten azt, hogy a gép jól van beállítva, tehát a tejesdobozokba átlagosan 1000 ml tej kerül!

## 7. Az egymintás és a páros t-próba

**7.1.** A 'vernyomas.xlsx' fájlban található adatsor egy orvosi kísérlet eredményét tartalmazza. A kísérlet keretei között két új vérnyomáscsökkentő gyógyszert vizsgáltak. Véletlenszerűen kiválasztottak 150 magas vérnyomású pácienst, és három 50 fős csoportba sorolták őket. A 'kiserleti1' és a 'kiserleti2' csoport az 1. illetve a 2. kísérleti gyógyszert szedte néhány héten át. A 'kontroll' csoport a hagyományos kezelést kapta. A változók:

CSOPNEV: betegcsoport neve
CSOPKOD: betegcsoport kódja
SYS1: kezelés előtti szisztolés vérnyomás
SYS2: kezelés utáni szisztolés vérnyomás

**a.** Adjunk becslést a 'SYS1' változó teljes sokaságban mért átlagos értékére és szórására! Mennyire pontos a sokaság átlagára kapott becslés?

**b.** Ábrázoljuk a 'SYS1' változó hisztogramját, és kérdezzük le a ferdeséget is! Mit állíthatunk a 'SYS1' változó eloszlásáról: közel normális vagy nagy mértékben különbözik a normálistól?

**c.** Teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a 'SYS1' változó teljes sokaságban mért átlagos értéke 160 Hgmm! Teszteljük le a 165 Hgmm-es értéket is! Adjunk meg egy 95% megbízhatóságú konfidencia intervallumot a sokaság átlagára! Hogyan értelmezhető ez a konfidencia intervallum?

**d.** Válogassuk le a 'kiserleti1' betegcsoport tagjait, majd adjunk becslést a 'SYS1' és a 'SYS2' változó várható értékére ebben a betegcsoportban! Ábrázoljuk a két változó hisztogramját is! Mit állíthatunk a két változó eloszlásáról?

**e.** Teszteljük le 1%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a 'kiserleti1' betegcsoportban azonos a 'SYS1' és 'SYS2' változók várható értéke! Adjunk meg egy 99% megbízhatóságú konfidencia intervallumot a várható értékek különbségére!

**f.** Ismételjük meg az utolsó két pont elemzését a 'kiserleti2' betegcsoportra!

**7.2.** Az 'iris.xlsx' állomány három Kanadában honos írisz (nőszirom) fajról tartalmaz adatokat, fajonként 50 növényről. A változók:

faj: faj megnevezése
fajkod: lásd faj
cseszehossz: szészelevél hossza (cm)
cseszeszel: csészelevél szélessége (cm)
sziromhossz: sziromlevél hossza (cm)
sziromszel: sziromlevél szélessége (cm)

**a.** Ábrázoljuk a 'sziromszel' változó hisztogramját! Hány módusza van ennek az eloszlásnak? Mi lehet ennek az oka? Mi a szokásos eljárás, ha a statisztikában ilyen adatsorral találkozunk?

**b.** Válogassuk le a 'virginica' fajhoz tartozó növényeket, és ábrázoljuk a 'sziromszel' változó hisztogramját csak erre a fajra! Mit állíthatunk a 'sziromszel' változó eloszlásáról: közel normális vagy nagy mértékben különbözik a normálistól?

**c.** Adjunk becslést a 'virginica' fajhoz tartozó növényeknél a 'sziromszel' változó várható értékére és szórására! Teszteljük le 5% szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a várható érték 2 cm! Adjunk meg egy 95% megbízhatóságú konfidencia intervallumot is erre a várható értékre!

**d.** Adjunk becslést a 'virginica' fajnál a csészelevél átlagos hosszúságára is! Teszteljük le 10% szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a 'virginica' fajnál a sziromlevél átlagos szélessége azonos a csészelevél átlagos szélességével! Adjunk meg egy 90% megbízhatóságú konfidenciai intervallumot arra, hogy a sziromlevél átlagosan mennyivel szélesebb, mint a csészelevél!

**e.** Végezzük el az előző pontok elemzését a másik két faj egyedeire is!

## 8. Az egyszempontos ANOVA és a Levene-teszt

**8.1.** Olvassuk be az 'vernyomas.xlsx' fájlban található statisztika adatsort, a leírásért lásd a **7.1.** feladatot!

**a.** Adjunk becslést a 'SYS1' változó várható értékére és szórására betegcsoportonkénti bontásban! Ábrázoljuk a változó boxplotját is, szintén betegcsoportonkénti bontásban! Látunk jelentős eltérést a három csoport között?

**b.** Ábrázoljuk a 'SYS1' változó hisztogramját és kérdezzük le a változó ferdeségét betegcsoportonkénti bontásban! Mit állíthatunk a 'SYS1' változó eloszlásáról a csoportokon belül: közel normális vagy nagyon különbözik a normálistól?

**c.** Teszteljük le 5% szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a 'SYS1' változónak azonos a szórása a három betegcsoportban! Teszteljük le a várható értékek egyenlőségét is!

**d.** Végezzük el az előző feladatrészek elemzését a 'SYS2' változóra is! Amennyiben szignifikáns eltérést tapasztalunk a várható értékek között, akkor adjunk becslést és 95% megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a csoportonkénti várható értékek közötti különbségre!

**8.2.** Olvassuk be az 'iris.xlsx' fájl tartalmát! Az adatsor leírása megtalálható a **7.2.** feladatban!

**a.** Adjunk becslést a 'sziromszel' változó várható értékére és szórására fajonkénti bontásban! Ábrázoljuk a változó boxplotját is, szintén fajonkénti bontásban!

**b.** Ábrázoljuk a 'sziromszel' változó hisztogramját és adjuk meg a változó ferdeségét betegcsoportonkénti bontásban. Mit állíthatunk a 'sziromszel' változóról normalitás szempontjából?

**c.** Teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a 'sziromszel' változó esetében a csoportonkénti szórások azonosak. A szignifikancia szint 5%.

**d.** Teszteljük le a csoportonkénti várható értékek egyenlőnlőségét is. Ha szignifikáns eltérés tapasztalható a várható értékek között, akkor adjunk becslést és 95% megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a várható értékek közötti különbségekre!

**e.** Ismételjük meg a fenti elemzést a 'cseszeszel' változóra!

## 9. Lineáris és nemlineáris regresszió

**9.1.** A 'UScars.txt' adatsorban a '80-as években az amerikai piacon forgalmazott néhány autótípus fontosabb műszaki paraméterei szerepelnek. A változók:
MODEL: a modell neve
COUNTRY: hol gyártották
VOL: utastér térfogata (köbláb)
HP: teljesítmény (lóerő)
MPG: hány mérföldet lehet megtenni 1 gallon üzemanyaggal (mérföld/gallon)
SP: végsebesség (mérföld/óra)
WT: teljes tömeg (100 font)

**a.** Ábrázoljuk az 'SP' változót a 'HP' változó függvényeként! Végezzünk lineáris regressziót a változókon, és adjuk meg a regressziós egyenes egyenletét! Mennyire jól illeszkedik a regressziós egyenes a megfigyelt értékekhez? Ezek alapján milyen becslést adhatunk egy 150 lóerős autó végsebességére?

**b.** Végezzük lineáris regressziót az 'SP' és a 'VOL' változóra is, fejezzük ki az 'SP' változót a 'VOL' függvényeként! Adjuk meg a regressziós egyenes egyenletét! Mennyire jól illeszkedik az egyenes az adatokhoz? A gyakorlati alkalmazások szempontjából ez egy jó becslés?

**c.** Ábrázoljuk az 'MPG' változót a 'HP' függvényeként! Végezzünk lineáris és nemlineáris regressziót a két változóra az alábbi módszerekkel:

Lineáris regresszió: $\mathrm{MPG} \approx a\mathrm{HP} + b$

Reciprokos regresszió: $\mathrm{MPG} \approx a/\mathrm{HP} + b$

Exponenciális regresszió: $\mathrm{MPG} \approx \exp(a\mathrm{HP} + b)$

Melyik módszer biztosítja a legjobb becslést az 'MPG' változóra?

**9.2.** A 'carData' csomag 'States' adatsora azt vizsgálja, hogy az Egyesült Államok egyes tagállamai mennyit költöttek a középsikolás oktatásra a 90'-es évek elején, és ennek hatására milyenek lettek az egyetemi felvételi eredmények. Olvassuk be az adatsort illetve kérdezzük le az adatsor leírását.

**a.** Ábrázoljuk az 'SATV' változót az 'SATM' változó függvényeként! Végezzünk lineáris regressziót a változókon, és adjuk meg a regressziós egyenes egyenletét! Mennyire jól illeszkedik a regressziós egyenes a megfigyelt értékekhez? Ezek alapján milyen becslést adhatunk egy az 'SATV' változóra egy olyan tagállamban, ahol az 'SATM' értéke 500?

**b.** Végezzük lineáris regressziót a 'pop' és 'dollars' változókra, fejezzük ki a 'dollars' változót a 'pop' függvényeként! Adjuk meg a regressziós egyenes egyenletét! Mennyire jól illeszkedik az egyenes az adatokhoz? A gyakorlati alkalmazások szempontjából ez egy jó becslés?

**c.** Ábrázoljuk az 'SATV' változót a 'percent' változó függvényeként! Végezzünk reciprokos regressziót a két változóra az alábbi formulákkal:

$$\text{SATV} \approx a\frac{1}{\text{percent}} + b, \qquad \text{SATV} \approx \frac{1}{a \cdot \text{percent} + b}.$$

Melyik formula biztosítja a jobb becslést az 'SATV' változóra?

## 10. Korrelációs együtthatók és függetlenségvizsgálat

**10.1.** Olvassuk be a 'UScars.txt' fájlban található statisztika adatsort, a leírásért lásd a **9.1.** feladatot!

**a.** Adjuk meg az 'SP' és 'HP' változók Pearson- illetve Spearman-féle korrelációs együtthatóját! Teszteljük le a két változó függetlenségét a kapcsolatos korrelációs tesztekkel! Értelmezzük is az eredményt!

**b.** Végezzük el az előző pont elemzését az 'SP' és 'VOL' változókon is!

**c.** Végezzük el az előző pont elemzését az 'MPG' és 'HP' változókon is!

**10.2.** A 'carData' csomag 'States' adatsora azt vizsgálja, hogy az Egyesült Államok egyes tagállamai mennyit költöttek a középiskolás oktatásra a 90'-es évek elején, és ennek hatására milyenek lettek az egyetemi felvételi eredmények. Olvassuk be az adatsort illetve kérdezzük le az adatsor leírását.

**a.** Adjuk meg az 'SATM' és 'SATV' változók Pearson- illetve Spearman-féle korrelációs együtthatóját! Teszteljük le a két változó függetlenségét a kapcsolatos korrelációs tesztekkel! Értelmezzük is az eredményt!

**b.** Végezzük el az előző pont elemzését a 'pop' és 'dollars' változókon is!

**c.** Végezzük el az előző pont elemzését az 'SATV' és 'percent' változókon is!

## 11. Paraméterbecslési módszerek

**11.1.** A Poisson-eloszlás egy diszkrét eloszláscsalád, amely a $\lambda > 0$ (lambda) paraméterrel van indexezve. A várható érték és a valószínűségeloszlás:

$$\mathrm{E}(\xi) = \lambda, \qquad \mathrm{P}(\xi = x) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad R_\xi = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Rendelkezésre áll egy statisztikai minta a $\xi$ változóra: 1, 0, 4, 3, 0. Adjunk becslést a minta alapján a $\lambda$ paraméter értékére a momentum módszer illetve a maximum likelihood becslés alkalmazásával!

**11.2.** Az exponenciális eloszlás egy folytonos eloszláscsalád, amely a $\lambda > 0$ paraméterrel van indexezve. A várható érték és a sűrűségfüggvény:

$$\mathrm{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \qquad f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad R_\xi = (0, \infty)$$

Egy statisztikai minta a $\xi$ változóra: 0.07, 0.21, 0.22, 0.35. Adjunk becslést a minta alapján a $\lambda$ paraméter értékére a momentum módszer illetve a maximum likelihood becslés alkalmazásával!

**11.3.** A Pareto-eloszlás egy folytonos eloszláscsalád, amely az $\alpha > 0$ paraméterrel van indexezve. A várható érték és a sűrűségfüggvény:

$$\mathrm{E}(\xi) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \qquad f_\xi(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, \qquad R_\xi = (1, \infty)$$

Egy statisztikai minta az $\xi$ változóra: 1.39, 1.02, 1.23, 1.03, 1.28. Adjunk becslést a minta alapján az $\alpha$ paraméter értékére a momentum módszer illetve a maximum likelihood becslés alkalmazásával!

## 12. Normalitásvizsgálat

**12.1.** Olvassuk be az 'vernyomas.xlsx' fájlban található statisztika adatsort, a leírásért lásd a **7.1.** feladatot!

- **a.** Adjunk becslést 'SYS1' változó várható értékére és szórására, és kérdezzük le a ferdeséget is. Ábrázoljuk a változó hisztogramját, és a grafikonra rajzoljuk fel a normális eloszlás sűrűségfüggvényét! Kérdezzük le a QQ-ábrát is! Ezek alapján a 'SYS1' változó normális eloszlásúnak tűnik?
- **b.** Teszteljük le 5% szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a 'SYS1' változó normális eloszlást követ a teljes sokaságban!
- **c.** Végezzük el az előző két feladatrész elemzését a 'SYS1' változóra is!
- **d.** Teszteljük le 5% szignifikancia szinten a 'SYS2' változó normálisát külön-külön a kísérleti csoportokban!

**12.2.** Olvassuk be az 'iris.xlsx' fájlban található statisztika adatsort, a leírásért lásd a **7.2.** feladatot!

- **a.** Adjunk becslést 'cseszeszel' változó várható értékére és szórására, és kérdezzük le a ferdeséget is. Ábrázoljuk a változó hisztogramját, és a grafikonra rajzoljuk fel a normális eloszlás sűrűségfüggvényét! Kérdezzük le a QQ-ábrát is! Ezek alapján a 'cseszeszel' változó normális eloszlásúnak tűnik?
- **b.** Teszteljük le 10% szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a 'cseszeszel' változó normális eloszlást követ a teljes sokaságban!
- **c.** Végezzük el az előző két feladatrész elemzését a 'sziromszel' változóra is!
- **d.** Teszteljük le a két változó normalitását fajonkénti bontásban! A szignifikancia szint 10%.

## 13. Valószínűségek becslése és tesztelése

**13.1.** Egy növényfaj három különböző virágszínnel fordul elő: van piros, rózsaszín és fehér változata. Genetikusok rózsaszín virágú növényeket házasítanak össze egymással. A kikelt utódnövények közül 30 lett piros, 50 rózsaszín és 40 fehér.

**a.** Mennyi a minta elemszáma? Mennyi az egyes színek gyakorisága illetve relatív gyakorisága a mintában?

**b.** Adott rózsaszín növényeknek egy nagy méretű sokasága, és ezek egymás között szaporodnak! A minta alapján milyen becslést adhatunk a piros, a rózsaszín illetve a fehér utódok arányára a teljes sokaságban? Milyen becslést adhatunk a fehér virágszín oddszára?

**c.** A genetikusok azt sejtik, hogy ennél a fajnál a virág színe intermedier módon öröklődik. Intermedier öröklődés esetén rózsaszín virágú növényeket házasítva egy-egy utód rendre 25%, 50% és 25% valószínűséggel lesz piros, rózsaszín illetve fehér virágú. Tesztelje le 5% szignifikancia szinten ezeket a hipotetikus valószínűségeket! A minta alátámasztja vagy cáfolja az intermedier öröklődést?

**d.** Intermedier öröklődés esetén mennyi a fehér szín oddsza? Mi az oddsz jelentése ebben a feladatban?

**13.2.** **a.** Feldobunk egy nem feltétlenül szabályos dobókockát 100 alkalommal. A dobások során 15 egyest, 15 kettest, 15 hármast, 15 négyest, 20 ötöst és 20 hatost kaptunk. Mekkora a minta elemszáma? A minta alapján adjunk pontbecslést az egyes értékek dobásának a valószínűségére.

**b.** Teszteljük le 5%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a dobókocka szabályos, tehát minden értéknek 1/6 az esélye. Teszteljük le külön azt a nullhipotézist is, hogy hatosdobás valószínűsége 1/6.

**c.** Ugyanezt a dobókockát most 1000 alkalommal dobjuk fel, melyből 150 egyest, 150 kettest, 150 hármast, 150 négyest, 200 ötöst és 200 hatost kapunk. Oldjuk meg az a. és b. feladatrészeket ezzel a módosítással.

**13.3.** A 'catsdogs.txt' adatsor véletlenszerűen kiválasztott amerikai egyetemistákról tartalmaz információt. A változók:
Gender: a hallgató neme (M=férfi, F=nő)
Smokes: dohányzik-e (yes=igen, no=nem)
CatsDogs: van-e kutyája vagy macskája (both=mindkettő, cats=macska, dogs=kutya, none=egyik sem)

**a.** Ábrázoljuk a 'CatsDogs' változót kördiagram segítségével! Adjuk meg az egyes értékek tapasztalati gyakoriságát és relatív gyakoriságát! Ezek alapján milyen becslést adhatunk az egyes értékek teljes sokaságban mért arányára?

**b.** A minta alapján adjunk becslést azon alanyok oddszára, akiknek nincs háziállata. Adjunk becslést azon alanyok oddszára is, akik rendelkeznek legalább macskával.

**c.** Teszteljük le 1% szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy az amerikai egyetemisták körében a 'CatsDogs' változó rendre 5%, 15%, 20% és 60% arányban veszi fel a 'both', 'cats', dogs' illetve 'none' értéket! Írjuk fel a várt gyakoriságokat és a próbastatisztika komponenseit is! A 'CatsDogs' változó mely értékeinél látunk kiugróan magas komponenseket?

**d.** Átkódolással hozzunk létre egy 'Dogs' nevű változót, melynek értékei 'no' és 'yes' annak függvényében, hogy az alanynak van-e kutyája!

**e.** Ábrázoljuk a 'Dogs' változót oszlopdiagram segítségével, és adjuk meg az egyes értékek tapasztalati gyakoriságát és relatív gyakoriságát! Teszteljük le 1% szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy az amerikai egyetemisták 20% arányban tartanak kutyát!

**13.4.** Augusto Pinochet 1973 és 1990 között volt Chile teljhatalmú vezetője. Tevékenysége nagyban megosztotta az ország lakosságát. Irányítása alatt a gazdaság fejlődött és az életszínvonal emelkedett, de a politikájával szembeszegülőket bebörtönöztette és kivégeztette. Mivel az őt kritizáló hangok az országon belül és kivűl is felerősödtek, 1988-ban a hatalmát egy dél-amerikai mércével mérve szabad választáson próbálta megerősíteni. A 'carData' csomag 'Chile' adatsora egy közvélemény-kutatás eredménye, melyet néhány héttel a választások előtt tartottak. Az alanyok véletlenszerűen lettek kiválasztva a szavazásra jogosult lakosok közül. A fontosabb változók:
region: melyik tartományban él
sex: nem (F=nő, M=férfi)
education: iskolai végzettség (P=alapfokú, S=középfokú, PS=felsőfokú)
vote: hogyan fog szavazni a választáson (A = távol marad, N = Pinochet ellen, U = bizonytalan, Y = Pinochet mellett)

**a.** Ábrázoljuk a 'sex' változót oszlopdiagram segítségével, továbbá adjuk meg az egyes értékek tapasztalati gyakoriságát és relatív gyakoriságát! Teszteljük le 5% szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a választásra jogosult lakosok sokaságán belül 50% a nők aránya!

Miért tesztelünk le valamit, amiről tudjuk, hogy igaz? Mert kíváncsiak vagyunk arra, hogy a minta tényleg reprezentálja-e a sokaságot. Ha esetleg elvetjük a nyilvánvalóan igaz nullhipotézist, akkor olyan szintű ellenmondás van a minta és a valóság között, hogy a minta nem lehet reprezentatív.

**b.** Ábrázoljuk az 'education' változót kördiagram segítségével! Adjunk becslést arra, hogy a választásra jogosult lakosságon belül az emberek milyen arányban rendelkeznek alapfokú, középfokú illetve felsőfokú végzettséggel!

**c.** Teszteljük le 5% szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a választók körében 40% az alapfokú, 40% a középfokú és 20% a felsőfokú végzettség aránya! Adjuk meg a várt gyakoriságokat és a próbastatisztika komponenseit is! Az 'education' változó mely értékeinél látunk kiugróan magas komponenseket?

## 14. Diszkrét változók együttes eloszlása és függetlensége

**14.1.** Egy ország lakosságát vizsgáljuk haj- és szemszín szempontjából, az alábbi táblázat a lehetséges kombinációk teljes sokaságon belüli arányait tartalmazza.

| | fekete haj | barna haj | szőke haj |
|---|---|---|---|
| sötét szem | 25% | 30% | 5% |
| világos szem | 5% | 20% | 15% |

**a.** Adjuk meg a hajszín illetve a szemszín marginális eloszlását! Mennyi az oddsza a sötét szemnek illetve a szőke hajnak?

**b.** Véletlenszerűen kiválasztunk egy embert az országból. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott ember fekete hajú, ha tudom, hogy sötét a szeme? Mennyi az a esélye annak, hogy világos szemű, ha tudom, hogy szőke alanyt választottam. Hogyan értelmezhetőek ezek a valószínűségek arányszámként?

**c.** Független egymástól a szem és a haj színe a sokaságon belül? Milyen arányban fordulnának elő a lehetséges kombinációk, ha a haj és a szem színe független lenne egymástól?

**d.** Adjuk meg a világos szem relatív kockázatát a szőke hajú emberek körében a fekete hajú alanyokhoz viszonyítva! Hogyan értelmezhető a relatív kockázat ebben a feladatban?

**14.2.** A 'catsdogs.txt' adatsor véletlenszerűen kiválasztott amerikai egyetemistákról tartalmaz információt, az adatsor leírása megtalálható a **13.3.** feladatban.

**a.** Írjuk fel a 'CatsDogs' és 'Gender' változók kontingenciatáblázatát! Becsüljük meg a két változó együttes eloszlását, továbbá a 'CatsDogs' változó 'Gender' változóra vett feltételes eloszlását! Ezek alapján milyen becslés adható a 'cats' érték relatív kockázatára a nők körében a férfiakhoz viszonyítva?

**b.** Teszteljük le 1% szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a két változó független egymástól! Ha elvetjük a nullhipotézist, akkor hol érhető tetten, hogy a két változó nem független egymástól?

**c.** Kódoljuk át a 'Smokes' változót egy 'Smokes2' változóba, ahol a 'Smokes2' értékei 'no' és 'yes'.

**d.** Adjuk meg a 'Gender' és 'Smokes2' változók kontingenciatáblázatát! Adjunk becslést az együttes eloszlásra és a 'Smokes2' változó 'Gender' változóra vett feltételes eloszlására! Mennyi a dohányzás relatív kockázatára a férfiak körében a nőkhöz viszonyítva?

**e.** Teszteljük le a 'Gender' és 'Smokes2' változók függetlenségét!

**14.3.** Olvassuk be a 'carData' csomag 'Chile' adatsorát. A változók leírása megtalálható a **13.4.** feladatban.

**a.** Írjuk fel a 'region' és 'sex' változók kontingenciatáblázatát! Teszteljük le 5% szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a változók függetlenek, tehát az egyes régiókban azonos a férfiak és a nők egymáshoz viszonyított aránya.

Miért tesztelünk olyan dolgot, amiről tudjuk, hogy igaz? Ellenőrizni akarjuk, hogy a minta reprezentatív, nem mond ellent a nyilvánvaló tényeknek.

**b.** Adjuk meg az 'education' és 'vote' változók kontingenciatáblázatát! Teszteljük le 5% szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a két változó független egymástól, tehát az alanyok iskolai végzettsége nem befolyásolja Pinochet megítélését! Írjuk fel a várt gyakoriságok táblázatát is!

**c.** Ha az előző pontban elvetettük a változók függetlenségét, akkor vizsgáljuk meg a khi-négyzet komponenseket is! Magyarázzuk el, hogy az 'education' változó által definiált három csoport hogyan viszonyul Pinochet újraválasztásához!

## 15. Többszörös lineáris regresszió és többszempontos ANOVA

**15.1.** Az $\xi$ és az $\eta$ változóra az alábbi megfigyeléseket kaptunk:

| $\xi$ | 1 | 2 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $\eta$ | 2 | 0 | 8 | 6 |

**a.** Határozzuk meg a Pearson-féle korrelációs együtthatót! Ezek alapján milyen irányú, milyen erősségű és milyen típusú kapcsolat van a két változó között?

**b.** Végezzünk lineáris regressziót, adjunk becslést a $\xi$ változóra az $\eta$ alapján! Mennyire pontos ez a becslés?

**c.** Milyen becslés adható a $\xi$ változóra abban az esetben, amikor $\eta = 5$?

**d.** Ábrázoljuk a mintaelemeket és a regressziós egyenest koordináta-rendszerben!

**15.2.** Olvassuk be a 'UScars.txt' fájlban található statisztika adatsort, a leírásért lásd a **9.1.** feladatot!

**a.** Modellezzük az 'MPG' változót a következő formában:
$\mathrm{MPG} \approx a_1\mathrm{HP} + a_2\mathrm{VOL} + a_3\mathrm{WT} + b$
Adjunk becslést az ismeretlen együtthatókra! Mely együtthatók különböznek szignifikáns módon a 0 értéktől? Mennyire pontos a kapott előrejelzés az 'MPG' változóra?

**b.** Vegyük ki az **a.** feladatrészben felírt modellből azokat a tagokat, melyek nem szignifikánsak, és végezzünk lineáris regressziót a megmaradt változókon! Milyen becslést adhatunk az együtthatókra, és mennyire pontos az előrejelzés az 'MPG' változóra?

**c.** Bővítsük a **b.** feladatrész modelljét, vegyük be az 1/HP magyarázó változót is! Milyen becslést adhatunk az ismeretlen együtthatókra, és mennyire pontos az előrejelzés? Mindegyik együttható különbözik szignifikáns módon nullától?

**15.3.** A ‘carData’ csomag ‘States’ adatsorát már vizsgáltuk a **9.2.** feladatban.

**a.** Modellezzük az ‘percent’ változót a következő formában:
percent $\approx a_1\text{pop} + a_2\text{dollars} + a_3\text{pay} + b$
Adjunk becslést az ismeretlen együtthatókra! Mely együtthatók különböznek szignifikáns módon a 0 értéktől? Mennyire pontos a kapott előrejelzés?

**b.** Vegyük ki az **a.** feladatrészben felírt modellből azokat a tagokat, melyek nem szignifikánsak, és végezzünk lineáris regressziót a megmaradt változókon! Mit kapunk?

**c.** Bővítsük a **b.** feladatrész modelljét a log(dollars) magyarázó változóval! Mit kapunk?

**d.** Vegyük ki a **c.** feladatrész modelljéből azt a tagot, amelyiknek a legnagyobb a p-értéke, és futtassuk le a regressziót a megmaradt modellre!

**15.4.** A ‘vernyomas2.xlsx’ táblázat nagyrészt azonos a **7.1.** feladatban megismert adatsorral. Mindössze annyi a változás, hogy most az alanyok nemét is ismerjük, ez a ‘NEM’ változó. Értékei: F=férfi, N=nő.

**a.** Végezzünk kétszempontos varianciaanalízist a SYS1 változón a CSOPNEV és NEM változók szempontjából, és a modellbe vegyük be az interakciót is! Kimutatható csoporthatás valamelyik szempontra? Tapasztalunk interakciót?

**b.** Teszteljük le a SYS1 változó esetében a cellánkénti szórások egyenlőségét is!

**c.** Ismételjük meg az a. feladatrész elemzését a SYS2 változóra!

**d.** Adjunk becslést a SYS2 változó esetében a csoporthatásokra és az interakciós hatásokra!

**e.** Teszteljük le a cellánkénti szórások egyenlőségét a SYS2 változóra is!

## 16. Paraméteres próbák és rangpróbák

**16.1.** A $\xi$ és $\eta$ változókra az alábbi összetartozó mintákat kaptuk:

| $\xi$ | 70 | 80 | 10 | 100 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\eta$ | 30 | 100 | 10 | 80 | 20 |

**a.** Határozzuk meg a rangszámokat mindkét változó esetében! Ábrázoljuk az eredeti mintát illetve a rangszámokat koordináta-rendszerben!

**b.** Határozzuk meg a $\xi$ változó rangszámainak $\overline{R}_\xi$ mintaátlagát és $\mathrm{D}_n^*(R_\xi)$ korrigált empirikus szórását!

**c.** Le lehet vezetni, hogy $n$ elemű minta esetén a rangszámok mintaátlaga illetve szórása mindig az alábbi:

$$\overline{R}_\xi = \overline{R}_\eta = \frac{n+1}{2}, \qquad \mathrm{D}_n^*(R_\xi) = \mathrm{D}_n^*(R_\eta) = \sqrt{\frac{n(n+1)}{12}}.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizzük le, hogy az előző feladatrészben tényleg ezeket az értékeket kaptuk meg!

**d.** Adjuk meg a $\xi$ és $\eta$ változók Spearman-féle korrelációs együtthatóját! Ezek alapján a két változó között milyen kapcsolat tapasztalható?

**e.** Teszteljük le 5% szignifikancia szinten a két változó függetlenségét!

**16.2.** Olvassuk be az 'vernyomas.xlsx' fájlban található statisztika adatsort, a leírásért lásd a **7.1.** feladatot! A szignifikancia szint a feladatban végig 5%.

**a.** Ábrázoljuk a 'SYS1' változó hisztogramját és kérdezzük le a ferdeséget! A változó szimmetrikus eloszlásúnak tűnik?

**b.** Egymintás t-próbával illetve Wilcoxon-féle előjeles rangpróbával teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a 'SYS1' várható értéke 160! Teszteljük le a 159-es értéket is! Hasonlítsuk össze a két próba által adott eredményeket!

**c.** Válogassuk le a 'kiserleti1' csoport tagjait és hozzuk létre a 'SYS1'−'SYS2' változót. Ábrázoljuk az új változó hisztogtamját és kérdezzük le a ferdeséget! A különbségváltozó szimmetrikus eloszlásúnak tűnik?

**d.** Páros t-próba illetve páros Wilcoxon-próba alkalmazásával teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a 'SYS1' és 'SYS2' változóknak azonos a várható értéke a 'kiserleti1' csoportban! Teszteljük le ugyanezt a nullhipotézist egymintás t-próba illetve Wilcoxon-féle előjeles rangpróba segítségével is!

**e.** Maradjunk a 'kiserleti1' csoportnál! Teszteljük le azt, hogy a 'SYS1' változó várható értéke 10 higanymilliméterrel magasabb, mint a 'SYS2' várható értéke!

**f.** Térjünk vissza a teljes adatsorhoz, majd válogassuk le a 'kiserleti2' és a 'kontroll' betegcsoport tagjait! A kapott adatsoron ábrázoljuk a 'SYS2' változó hisztogramját csoportonkénti bontásban! A két sűrűségfüggvény egymás eltoltjának tűnik? Teszteljük le a szórások egyenlőségét is!

**g.** Kétmintás t-próba és Mann–Whitney-féle U-próba alkalmazásával teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a 'SYS2' változónak azonos a várható értéke a 'kiserleti2' és a 'kontroll' csoportban! Teszteljük le azt is, hogy a 'kiserleti2' csoportban a 'SYS2' várható értéke 12 higanymilliméterrel magasabb, mint a 'kontroll' csoportban!

**16.3.** Cyril Burt egy angol pszichológus volt, aki azt vizsgálta, hogy az IQ pontszám kialakulásában a genetikai vagy a környezeti tényezőknek van nagyobb hatása. Olyan egypetéjű ikreket hasonlított össze statisztikai módszerekkel, akikek különböző családokban neveltek. Az ötlet egyszerű: ha a testvérek IQ pontszámai között erős kapcsolat van, akkor az intelligenciahányadost nagyrészt a genetikai tényezők határozzák meg; ha pedig a kapcsolat nem erős, akkor a környezeti tényezőknek is nagy szerepük van. A statisztikai elemzésből kiderült, hogy alapvetően a genetikai tényezőknek van jelentősége.

Cyril Burt úttörő eredményeket ért el ezen a területen. Utólag viszont felmerült a gyanú, hogy a statisztikai adatokat egyszerűen meghamisította azért, hogy az elemzés az általa előzetesen várt eredményeket szolgáltassa. A 'carData' csomag 'Burt' adatsora egy ilyen (potenciálisan módosított) mintát tartalmaz. A változók:

IQbio: a biológiai szülők által nevelt testvér IQ pontszáma
IQfoster: a nevelőszülők által nevelt testvér IQ pontszáma
class: társadalmi osztály (értékei: high, medium, low)

**a.** Hány megfigyelés (ikerpár) áll rendelkezésre az egyes társadalmi osztályokból? Ezek alapján bátran használhatjuk a paraméteres próbákat, vagy óvatosabban kell eljárnunk?

**b.** Ábrázoljuk az 'IQbio' változó hisztogramját a 'class' változó által definiált csoportok szerinti bontásban. Mit állíthatunk az egyes csoportokról szimmetria szempontjából?

**c.** Teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a 'high' csoportban az 'IQbio' változó várható értéke 105! Teszteljük le ugyanezt a nullhipotézist a 'medium' csoportban is!

**d.** Térjünk vissza a teljes adatsorhoz, és hozzunk létre egy új változót a következő formulával: IQdiff = IQfoster − IQbio. Ábrázoljuk az 'IQdiff' változó hisztogramját is csoportonkénti bontásban!

**e.** Teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a 'high' csoportban a biológiai szülők illetve a nevelőszülők által nevelt testvéreknél azonos az IQ pontszám várható értéke!

**f.** Teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a 'medium' csoportban a nevelőszülők által nevelt testvér IQ pontszáma átlagosan 10-zel magasabb, mint a biológiai szülők által nevelt testvért IQ pontszáma!

**g.** Térjünk vissza a teljes adatsorhoz, majd válogassuk le azokat az alanyokat, akik nem a 'low' csoporthoz tartoznak! Teszteljük le azt a nullhipotézist, hogy a megmaradt két csoportban egyenlő az 'IQbio' változó szórása! Ezek után teszteljük le a várható értékek azonosságát is!

## 17. Diszkriminanciaanalízis

**17.1.** Az 'iris.txt' állomány három Kanadában honos írisz (nőszirom) fajról tartalmaz adatokat. Az adatsor leírása megtalálható a **7.2.** feladatban.

**a.** Olvassuk be az adatsort, majd válogassuk le azokat az egyedeket, melyek nem a 'setosa' fajba tartoznak!

**b.** Ábrázoljuk az adatsort koordináta rendszerben, jelöljük a két fajt két különböző színnel. A grafikonok alapján mely változók segítségével lehet a legjobban elkülöníteni a 'versicolor' illetve a 'virginica' fajt?

**c.** Hozzunk létre egy 0–1 értékű változót, ami a növényfajt kódolja! Végezzünk ezen a változón logisztikus regressziót a 'sziromhossz' változó segítségével! Adjuk meg a regressziós függvényt, majd ábrázoljuk is a regressziós görbét koordináta-rendszerben! Határozzuk meg a 'sziromhossz' változó azon értékét, ami elvágja egymástól a két csoportot! Ezen vágópont segítségével fogalmazzunk meg egy egyszerű szabályt arra, hogy mikor soroljuk a növényeket az egyes fajokba.

**d.** Készítsünk egy összefoglaló táblázatot arról, hogy a logisztikus regresszió a tanulóminta elemei közül hányra ad helyes előrejelzést! Mennyire hatékony az előrejelzés a mintán?

**e.** Az alábbi táblázat két olyan írisz növényt tartalmaz, melyekről nem tudjuk, hogy melyik fajhoz tartoznak. Adjunk előrejelzést a fajra, és adjuk meg az előrejelzések megbízhatóságát is!

| cseszehossz | cseszeszel | sziromhossz | siromszel |
|---|---|---|---|
| 6.3 | 3.2 | 4.5 | 1.1 |
| 7.5 | 2.8 | 4.9 | 2 |

**f.** Végezzünk logisztikus regressziót a 'cseszehossz' változóval is, majd válaszoljunk a fenti kérdésekre!

**17.2.** A 'UScars.txt' adatsorban a '80-as években az amerikai piacon forgalmazott néhány autótípus fontosabb műszaki paraméterei szerepelnek. A részletes leírásért lásd a **9.1.** feladatot!

**a.** Olvassuk be az adatsort az R-be, majd válogassuk le azokat az autókat, melyek nem az Egyesült Államokban készültek!

**b.** Ábrázoljuk az adatsort koordináta rendszerben, jelöljük az Európai illetve a Japán autókat különböző színekkel. A grafikonok alapján mely változók segítségével lehet a legjobban elkülöníteni a két országból származó járműveket?

**c.** Hozzunk létre egy 0–1 értékű változót, ami az országokat kódolja, jelöljük a japán autókat 1-es kóddal! Végezzünk ezen a változón logisztikus regressziót az 'MPG' változó segítségével! Adjuk meg a regressziós függvényt, majd ábrázoljuk is a regressziós görbét koordináta-rendszerben! Határozzuk meg az 'MPG' változó azon értékét, ami elvágja egymástól a két csoportot! Ezen vágópont segítségével fogalmazzunk meg egy egyszerű szabályt arra, hogy az 'MPG' változó alapján milyen előrejelzést tehetünk a gyártási országra!

**d.** Készítsünk egy összefoglaló táblázatot arról, hogy a logisztikus regresszió a tanulóminta elemei közül hányra ad helyes előrejelzést! Mennyire hatékony az előrejelzés a mintán?

**e.** Az alábbi táblázat egy olyan autó adatait tartalmazza, melyről nem tudjuk, hogy melyik országban készült. Adjunk előrejelzést a származási országra, és adjuk meg az előrejelzés megbízhatóságát is!

| VOL | HP | MPG | SP | WT |
|---|---|---|---|---|
| 120 | 110 | 24 | 100 | 36 |

**f.** Végezzünk logisztikus regressziót a 'WT' változóval is, majd válaszoljunk a fenti kérdésekre!

**17.3.** Az 'iris.txt' állomány három Kanadában honos írisz (nőszirom) fajról tartalmaz adatokat. Az adatsor leírása megtalálható a **7.2.** feladatban.

**a.** Ábrázoljuk az adatsort koordináta rendszerben, jelöljük a három fajt három különböző színnel. A grafikonok alapján melyik két változó segítségével lehet a legjobban elkülöníteni a három fajt?

**b.** Végezzünk lineáris diszkriminanciaanalízist az adatsoron: adjunk előrejelzést a fajra a 'sziromhossz' és 'sziromszel' változók segítségével! Készítsünk egy összefoglaló táblázatot arról, hogy az algoritmust a tanulómintára alkalmazva hány esetben kapunk helyes előrejelzést! Mennyire hatékony az előrejelzés a mintán?

**c.** Az alábbi táblázat két olyan írisz növényt tartalmaz, melyekről nem tudjuk, hogy melyik fajhoz tartoznak. Adjunk előrejelzést a fajra, és adjuk meg az előrejelzések megbízhatóságát is!

| cseszehossz | cseszeszel | sziromhossz | sziromszel |
|---|---|---|---|
| 6.3 | 3.2 | 4.5 | 1.1 |
| 7.5 | 2.8 | 4.9 | 2 |

**d.** Oldjuk meg az előző két feladatrészt olyan módon is, hogy az előrejelzés során mind a négy változót felhasználjuk!

**17.4.** A 'UScars.txt' adatsorban a '80-as években az amerikai piacon forgalmazott néhány autótípus fontosabb műszaki paraméterei szerepelnek. A részletes leírásért lásd a **9.1.** feladatot!

**a.** Olvassuk be az adatsort! Ábrázoljuk a mintát koordináta rendszerben, jelöljük a három fajt három különböző színnel! A grafikonok alapján melyik két változó segítségével lehet a legjobban elkülöníteni a három fajt?

**b.** Végezzünk lineáris diszkriminanciaanalízist az adatsoron: adjunk előrejelzést a fajra a gyártási országra a 'HP' és 'WT' változók segítségével! Készítsünk egy összefoglaló táblázatot arról, hogy az algoritmust a tanulómintára alkalmazva hány esetben kapunk helyes előrejelzést! Mennyire hatékony az előrejelzés a mintán?

**c.** Az alábbi táblázat egy olyan autó adatait tartalmazza, melyről nem tudjuk, hogy melyik országban készült. Adjunk előrejelzést a származási országra, és adjuk meg az előrejelzés megbízhatóságát is!

| VOL | HP | MPG | SP | WT |
|---|---|---|---|---|
| 120 | 110 | 24 | 100 | 36 |

**d.** Oldjuk meg az előző két feladatrészt olyan módon is, hogy az előrejelzés során mind az öt numerikus változót felhasználjuk!

## Megoldások

**1.1.** $\xi =$ a kiválasztott játékos testmagassága

$\mathrm{P}(\xi \geq 200) = 50\% = 0.5$, $\mathrm{E}(\xi) = 199.33$, $\mathrm{D}(\xi) = 3.4$

**1.2.** $R_\xi = \{1, 3, 7, 12\}$

$\mathrm{P}(\xi = 1) = 0.1$, $\mathrm{P}(\xi = 3) = 0.4$, $\mathrm{P}(\xi = 7) = 0.3$, $\mathrm{P}(\xi = 12) = 0.2$

módusz $= 3$, jelentése: a legnagyobb arányban előforduló érték

$\mathrm{E}(\xi) = 5.8$, jelentése: a fejek számának átlagos értéke

$\mathrm{D}(\xi) = 3.7$, jelentése: a várható értéktől vett átlagos eltérés

**1.3.** $R_\xi = \{0, 1, 2, 3\}$

$\mathrm{P}(\xi = 0) = 0.4$, $\mathrm{P}(\xi = 1) = 0.3$, $\mathrm{P}(\xi = 2) = 0.2$, $\mathrm{P}(\xi = 3) = 0.1$

$\mathrm{P}(\xi > 1) = 0.3 = 30\%$

módusz $= 0$, jelentése: a legnagyobb arányban előforduló érték

$\mathrm{E}(\xi) = 1$, jelentése: átlagosan ennyi fa található az 1 hektáros négyzetekben

$\mathrm{D}(\xi) = 1$, jelentése: a várható értéktől vett átlagos eltérés

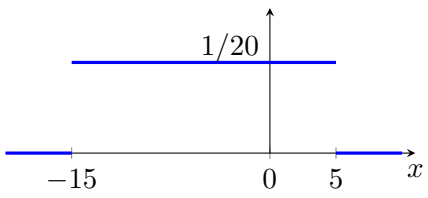
**1.4.** $R_\xi = \{1000, 2000, 3000, 5000\}$

$\mathrm{P}(\xi = 1000) = 0.5$, $\mathrm{P}(\xi = 2000) = 0.3$, $\mathrm{P}(\xi = 3000) = 0.15$, $\mathrm{P}(\xi = 5000) = 0.05$

módusz $= 1000$, $\mathrm{E}(\xi) = 1800$, $\mathrm{D}(\xi) = 1030$

$\mathrm{P}(\xi \leq 2000) = 0.8$

**2.1.a.** $R_\xi = [-15, +5]$




**b.** $\mathrm{P}(-10 \leq \xi \leq +10) = \int_{-10}^{+10} f_\xi(x)\,dx = 0.75$

$\mathrm{P}(\xi \geq 0) = \int_{0}^{+5} f_\xi(x)\,dx = 0.25$

**c.**

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < -15, \\ \frac{t+15}{20}, & -15 \le t \le +5, \\ 1, & +5 < t, \end{cases}$$

$\mathrm{P}(-10 \le \xi \le +10) = F_\xi(+10) - F_\xi(-10) = 0.75$

$\mathrm{P}(\xi \ge 0) = \mathrm{P}(0 \le \xi \le +5) = F_\xi(+5) - F_\xi(0) = 0.25$

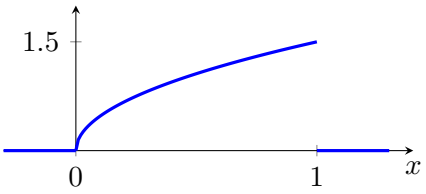
**d.** $q_\alpha = 20\alpha - 15, \;\; q_{80\%} = +1$

Jelentése: a napi középhőmérséklet 80% eséllyel lesz +1 Celsiusnál alacsonyabb

$\mathrm{E}(\xi) = -5,$ jelentése: a napi középhőmérséklet átlagos értéke januárban

$\mathrm{D}(\xi) = 5.77,$ jelentése: a napi középhőmérséklet átlagosan ennyivel tér el a $-5$ fokos várható értéktől

**2.2.a.** $R_\xi = [0, 1]$




**b.** $\mathrm{P}(0.5 \le \xi \le 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} f_\xi(x)\,dx = 0.65,$ a fák 65 százaléka esik 0.5 és 1.5 közé

$\mathrm{P}(\xi \le 0.8) = \int_{0}^{0.8} f_\xi(x)\,dx = 0.72,$ a fák 72 százaléka legfeljebb 0.8 átmérőjű

**c.**

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^{3/2}, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & 1 < t, \end{cases}$$

$\mathrm{P}(0.5 \le \xi \le 1.5) = F_\xi(1.5) - F_\xi(0.5) = 0.65$

$\mathrm{P}(\xi \le 0.8) = \mathrm{P}(0 \le \xi \le 0.8) = F_\xi(0.8) - F_\xi(0) = 0.72$

**d.** $\mathrm{E}(\xi) = 0.6,$ jelentése: a törzs átlagos átmérője az erdőben

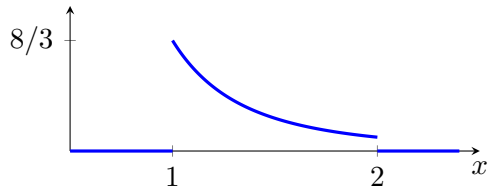
$\mathrm{D}(\xi) = 0.26,$ jelentése: a törzs átmérője átlagosan ennyivel tér el a várható értéktől

$q_\alpha = \alpha^{2/3}, \;\; q_{25\%} = 0.4, \;\; q_{50\%} = 0.63, \;\; q_{75\%} = 0.83$

Jelentésük: az alábbi intervallumok mindegyikébe a fák negyede esik:
$[0, 0.4], \;\; [0.4, 0.63], \;\; [0.63, 0.83], \;\; [0.83, 1]$

**2.3.** $\xi =$ egy véletlenszerűen kiválasztott egyed testhossza

**a.** $R_\xi = [1, 2]$




**b.** $\mathrm{P}(0.5 \le \xi \le 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} f_\xi(x)\,dx = 0.74$

$\mathrm{P}(\xi \ge 1.8) = \int_{1.8}^{2} f_\xi(x)\,dx = 0.08$

**c.**

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ \frac{4}{3} - \frac{4}{3t^2}, & 1 \le t \le 2, \\ 1, & 2 < t, \end{cases}$$

$\mathrm{P}(0.5 \le \xi \le 1.5) = F_\xi(1.5) - F_\xi(0.5) = 0.74$

$\mathrm{P}(\xi \ge 1.8) = \mathrm{P}(1.8 \le \xi \le 2) = F_\xi(2) - F_\xi(1.8) = 0.08$

**d.** $\mathrm{E}(\xi) = 1.33$, jelentése: átlagos érték a populációban

$\mathrm{D}(\xi) = 0.27$, jelentése: a várható értéktől vett átlagos eltérés

$q_\alpha = \sqrt{\frac{4}{4-3\alpha}}$, $q_{33.3\%} = 1.15$, $q_{66.6\%} = 1.41$

Az intervallumok: $[1, 1.15]$, $[1.15, 1.41]$, $[1.41, 2]$

**3.1.** **a.** $f_3$; **b.** $f_4$; **c.** $f_2$. Kimaradt sűrűségfüggvény ($f_1$): $\mu = -3$, $\sigma = 0{,}5$.

**3.2.** 66%; 2%; $[70.6, 129.4]$

**3.3.** 41%; 9%; $[5.77, 8.23]$

**3.4.** 47%; $[402, 598]$

**4.1.a.** $\mathrm{E}(\text{repwt}) \approx \overline{\text{repwt}} = 65.62$ (empirikus várható érték, mintaátlag)

$\mathrm{D}(\text{repwt}) \approx \mathrm{D}_n^*(\text{repwt}) = 13.78$ (korrigált empirikus szórás)

**b.** Mintaméret: $n = 183$, hiányzó adatok száma: 17

**c.** $q_{25\%} \approx \hat{q}_{25\%} = 55$, $q_{50\%} \approx \hat{q}_{50\%} = 63$, $q_{75\%} \approx \hat{q}_{75\%} = 73.5$

**d.** Minimum = legkisebb mintaelem = 41

Maximum = legnagyobb mintaelem = 124

Terjedelem = minimum − maximum = 83
Jelentése: ilyen hosszúságú intervallumon helyezkedik el a teljes minta.

IQR = $\hat{q}_{75\%} - \hat{q}_{25\%} = 18.5$
Jelentése: ilyen hosszúságú intervallumon helyezkedik el a minta középső 50%-a.

**e.** $\hat{q}_{33.3\%} = 57, \quad \hat{q}_{66.6\%} = 69.2$

Az intervallumok: $[41, 57], \quad [57, 69.2], \quad [69.2, 124]$

**4.2.a.** $\mathrm{E}(\mathrm{age}) \approx \overline{\mathrm{age}} = 42.54$ (empirikus várható érték, mintaátlag)

$\mathrm{D}(\mathrm{age}) \approx \mathrm{D}_n^*(\mathrm{age}) = 8.07$ (korrigált empirikus szórás)

$q_{50\%} \approx \hat{q}_{50\%} = 43$ (empirikus medián)

**b.** $n = 753$, nincs hiányzó adat

**c.** Minimum = legkisebb mintaelem = 30

Maximum = legnagyobb mintaelem = 60

$\hat{q}_{25\%} = 36$, jelentése: a minta alsó negyedelőpontja

$\hat{q}_{75\%} = 49$, jelentése: a minta felső negyedelőpontja

Terjedelem = minimum − maximum = 30
Jelentése: ilyen hosszúságú intervallumon helyezkedik el a teljes minta.

$\mathrm{IQR} = \hat{q}_{75\%} - \hat{q}_{25\%} = 13$
Jelentése: ilyen hosszúságú intervallumon helyezkedik el a minta középső 50%-a.

**d.** $\hat{q}_{20\%} = 34, \quad \hat{q}_{40\%} = 40, \quad \hat{q}_{60\%} = 45, \quad \hat{q}_{80\%} = 50$

Az intervallumok: $[30, 34], \quad [34, 40], \quad [40, 45], \quad [45, 50], \quad [50, 60]$

**4.3.a.** $n = 7, \quad \overline{\xi} = 1254.3, \quad \mathrm{D}_n(\xi) = 48.1, \quad \mathrm{D}_n^*(\xi) = 51.9$

A lelőhely igazi kora = $\mathrm{E}(\xi) \approx \overline{\xi} = 1254.3$

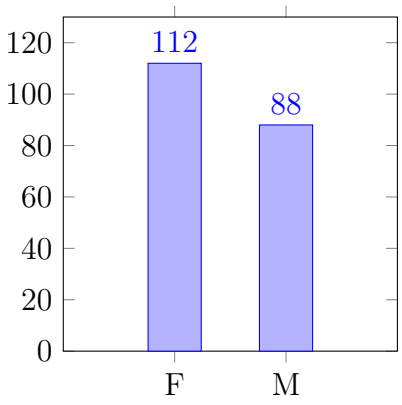
$\mathrm{D}(\xi) \approx \mathrm{D}_n^*(\xi) = 51.9$
A kis mintaméret miatt a korrigált empirikus szórás pontosabb becslés.

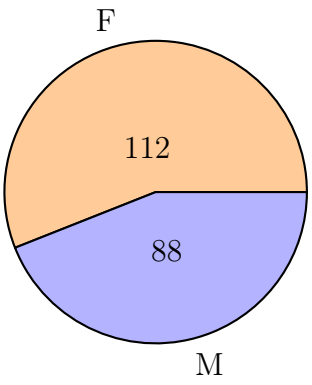
**b.** Empirikus medián = középső mintaelem = 1250

Terjedelem = maximum − minimum = 160

**5.1.a.** Diszkrét változók: sex.
Folytonos változók: weight, height, repwt, repht.

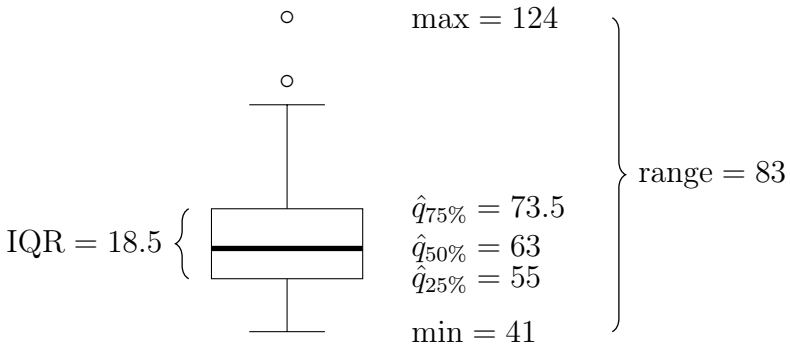
**b.** A mintában 112 nő és 88 férfi szerepel.




**c.** skewness = 1.04, a hisztogram jobbra ferde.

**d.** A mintában 2 outlier érték található.

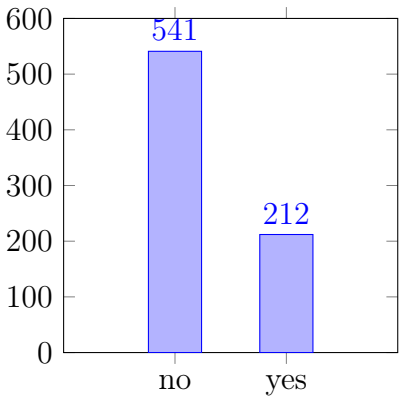


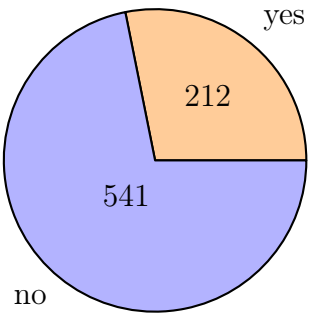

**e.** A változó enyhén jobbra ferde. A minta valószínűleg nem normális eloszlásból származik, de az eloszlás nem különbözik nagy mértékben a normálistól.

**f.** A 12. alanynál van egy elírás, felcserélték a weight illetve a height változó értékét.

**5.2.a.** Diszkrét változók: wc, k5. Folytonos változó: age.

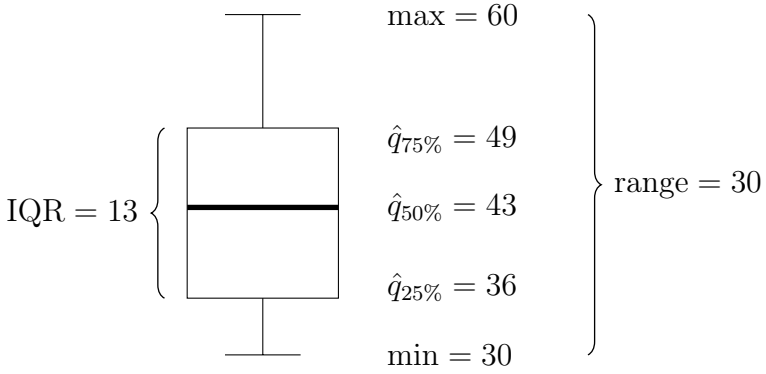
**b.** 212 alany rendelkezik, 541 nem rendelkezik diplomával.



**c.** A hisztogram ránézésre jobbra ferde. Viszont a skewness értéke 0.15, tehát a minta igazából közel szimmetrikus.

**d.** A mintában nem található outlier érték.




**e.** A boxplot és a skewness alapján a változó közel normális eloszlásúnak tűnik. Ezzel szemben a hisztogramra egyáltalán nem illeszkedik a normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Emiatt a végső konklúzió az, hogy változó eloszlása nagyban különbözik a normálistól.

**5.3.a.** A megfigyelések száma körülbelül 200. A legkisebb elem valahol 0 és 10 között, a legnagyobb 40 és 50 között található. A ferdeség negatív előjelű. A grafikonon egy móduszt látunk valahol 30 és 40 között.

**b.** Minimum: 0, alsó kvartilis: 10, medián: 25, felső kvartilis: 40, maximum: 50. A terjedelem 50, az IQR 30. Nincs outlier érték.

**c.** A két ábrán azonosnak tűnik a minimum és a maximum értéke, de ez önmagában semmit sem jelent.

A hisztogram ferde, a boxplot ezzel szemben szimmetrikus. Viszont a boxploton nem mindig jelennek meg a részletek, tehát ez sem bizonyító erejű.

A boxploton az elemek negyede esik 0 és 10 közé, és megint csak a negyedük 40 és 50 közé. Ezzel szemben a hisztogramon ezen intervallumokba csak körülbelül 10–10 elem esik, ami a 200 elemű mintának jóval kisebb hányada. Tehát a két grafikon nem azonos mintához tartozik.

**6.1.a.** $\mathrm{E}(\xi) \approx \overline{\xi} = 1230; \quad \mathrm{SE} = 15.17$

A standard hiba jelentése: egy $n = 5$ elemű minta alapján átlagosan ekkora hibával lehet megbecsülni a várható értéket.

**b.** Most $\alpha = 0.05$ és $n = 5$, ezért $\quad c_\alpha = \Phi_4^{-1}(0.975) = 2.776.$

Konfidencia intervallum: $\quad [\overline{\xi} - c_\alpha \mathrm{SE}, \overline{\xi} + c_\alpha \mathrm{SE}] = [1187.89, 1272.11].$

**c.** Nullhipotézis: $\mathrm{H}_0 : \mathrm{E}(\xi) = 1200$.

Hipotetikus várható érték: $\mu_0 = 1200$.

Próba statisztika: $t = (\overline{\xi} - \mu_0)/\mathrm{SE} = 1.978$.

Döntés: $|t| \leq c_\alpha$, ezért a nullhipotézist elfogadjuk. A minta alapján hihető, hogy a lelőhely igazi kora 1200 év.

**d.** Elsőfajú hiba: 5%.

Másodfajú hiba: nem ismerjük a nagyságát.

**6.2.a.** $\mathrm{E}(\xi) \approx \overline{\xi} = 990$; $\mathrm{SE} = 4.83$

A standard hiba jelentése: egy $n = 6$ elemű minta alapján átlagosan ekkora hibával lehet megbecsülni a várható értéket.

**b.** Most $\alpha = 0.1$ és $n = 6$, ezért $c_\alpha = \Phi_5^{-1}(0.95) = 2.015$.

Konfidencia intervallum: $[\overline{\xi} - c_\alpha \mathrm{SE}, \overline{\xi} + c_\alpha \mathrm{SE}] = [980.27, 999.73]$.

**c.** Nullhipotézis: $\mathrm{H}_0 : \mathrm{E}(\xi) = 1000$.

Hipotetikus várható érték: $\mu_0 = 1000$.

Próba statisztika: $t = (\overline{\xi} - \mu_0)/\mathrm{SE} = -2.07$

Döntés: $|t| > c_\alpha$, ezért a nullhipotézist elvetjük. A minta alapján nem hihető, hogy a töltőberendezés jól van beállítva.

**7.1.a.** $\mathrm{E}(\mathrm{SYS1}) \approx \overline{\mathrm{SYS1}} = 160.2$, $\mathrm{D}(\mathrm{SYS1}) \approx \mathrm{D}_n^*(\mathrm{SYS1}) = 5.7$.

A becslés várható hibája: $\mathrm{SE} = 0.46$.

**b.** A hisztogram közel szimmetrikus, skewness = 0.06, a normális eloszlás sűrűségfüggvénye jól illeszkedik. Normális vagy közel normális eloszlásról van szó.

**c.** $\mathrm{H}_0 : \mathrm{E}(\mathrm{SYS1}) = 160$, egymintás t-próba: p-érték=0.626, elfogadjuk.

$\mathrm{H}_0 : \mathrm{E}(\mathrm{SYS1}) = 165$, egymintás t-próba: p-érték=0.000, a nullhipotézist elvetjük.

Konfidencia intervallum: $[159.31, 161.14]$. Ezek a „hihető” várható értékek, a teszt az intervallumba eső értékeket fogadja el igazi várható értéknek.

**d.** A ‘kiserleti1’ csoportban: $\mathrm{E}(\mathrm{SYS1}) \approx 160.02$, $\mathrm{E}(\mathrm{SYS2}) \approx 150.5$.

A hisztogramok alapján mindkét változó közel normális eloszlású.

**e.** $\mathrm{H}_0 : \mathrm{E}(\mathrm{SYS1}) = \mathrm{E}(\mathrm{SYS2})$, páros t-próba, p-érték=0.000, a nullhipotézist elvetjük.

Konfidencia intervallum az $\mathrm{E}(\mathrm{SYS1}) - \mathrm{E}(\mathrm{SYS2})$ különbségre: $[6.98, 12.06]$.

**f.** A ‘kiserleti2’ csoportban: $\mathrm{E}(\mathrm{SYS1}) \approx 159.36$, $\mathrm{E}(\mathrm{SYS2}) \approx 160.86$.

$\mathrm{H}_0 : \mathrm{E}(\mathrm{SYS1}) = \mathrm{E}(\mathrm{SYS2})$, páros t-próba, p-érték=0.11, a nullhipotézist elfogadjuk.

Konfidencia intervallum az $\mathrm{E}(\mathrm{SYS1}) - \mathrm{E}(\mathrm{SYS2})$ különbségre: $[-3.98, 0.98]$.

**7.2.a.** Legalább 2, de talán 3 módusz is van. Ennek az az oka, hogy az adatsor több különböző fajról tartalmaz adatokat. Érdemesebb az elemzéseket nem a teljes adatsoron, hanem inkább fajonkénti bontásban elvégezni.

**b.** A hisztogram alapján a 'sziromszel' változó nem tűnik normális eloszlásúnak, de a szimmetria miatt ez még közel normális.

**c.** A 'virginica' növényeknél: $\mathrm{E}(\text{sziromszel}) \approx 2.03$, $\mathrm{D}(\text{sziromszel}) \approx 0.27$.

$\mathrm{H}_0 : \mathrm{E}(\text{sziromszel}) = 2$, egymintás t-próba: p-érték=0.51, elfogadjuk.

Konfidencia intervallum a várható értékre: $[1.95, 2.10]$.

**d.** A 'virginica' növényeknél: $\mathrm{E}(\text{cseszeszel}) \approx 2.97$

$\mathrm{H}_0 : \mathrm{E}(\text{sziromszel}) = \mathrm{E}(\text{cseszeszel})$, páros t-próba, p-érték=0, elvetjük.

Konfidencia intervallum az $\mathrm{E}(\text{sziromszel}) - \mathrm{E}(\text{cseszeszel})$ különbségre: $[-1.02, -0.88]$.

**e.** Azonos módszerekkel, mint az előző pontokban.

**8.1.a.** A becslések csoportonkénti bontásban:

| | mean | sd |
|---|---|---|
| kiserleti1 | 160.02 | 6.19 |
| kiserleti2 | 159.36 | 5.11 |
| kontroll | 161.30 | 5.64 |

Nem látható jelentős eltérés a mintaátlagok és a korrigált empirikus szórások között, illetve a boxplotok is nagyon hasonlóak. Emiatt megfogalmazhatjuk azt a sejtést, hogy a három csoportban azonos az elméleti várható érték és az elméleti szórás.

**b.** A ferdeségek és a hisztogrammok alapján a 'SYS1' változó mindhárom csoportban normális vagy közel normális.

| | skewness |
|---|---|
| kiserleti1 | 0.10 |
| kiserleti2 | −0.23 |
| kontroll | 0.17 |

**c.** Nullhipotézis: a csoportonkénti szórások azonosak. Formálisan:

$\mathrm{H}_0 : \mathrm{D}(\text{SYS1} \mid \text{kiserleti1}) = \mathrm{D}(\text{SYS1} \mid \text{kiserleti2}) = \mathrm{D}(\text{SYS1} \mid \text{kontroll})$

Levene-teszt, p-érték=0.24. A nullhipotézist elfogadjuk, nincs szignifikáns eltérés a szórások között.

Nullhipotézis: a csoportonkénti várható értékek azonosak. Formálisan:

$\mathrm{H}_0 : \mathrm{E}(\text{SYS1} \mid \text{kiserleti1}) = \mathrm{E}(\text{SYS1} \mid \text{kiserleti2}) = \mathrm{E}(\text{SYS1} \mid \text{kontroll})$

Egyszempontos ANOVA, p-érték=0.22. A nullhipotézist elfogadjuk, nem találtunk szignifikáns eltérést a várható értékek között.

**d.** A becslések csoportonkénti bontásban:

| | mean | sd | skewness |
|---|---|---|---|
| kiserleti1 | 150.50 | 2.45 | 0.20 |
| kiserleti2 | 160.86 | 5.30 | −0.27 |
| kontroll | 149.44 | 6.19 | 0.22 |

A becslések és a boxpotok alapján a várható értékek és a szórások között is van különbség. A ferdeségek és a hisztogramok alapján a csoportonkénti normalitás rendben van.

$H_0$ : D(SYS2 | kiserleti1) = D(SYS2 | kiserleti2) = D(SYS2 | kontroll)

Levene-teszt, p-érték=0.000. Elvetjük a szórások egyenlőségét.

$H_0$ : E(SYS2 | kiserleti1) = E(SYS2 | kiserleti2) = E(SYS2 | kontroll)

Welch-féle F-próba, p-érték=0.000. Elvetjük a várható értékek egyenlőségét.

A páronkénti összehasonlítás alapján a 'kiserleti1' és a 'kontroll' csoport között nincs szignifikáns eltérés, de a 'kiserleti2' csoport már szignifikáns módon különbözik. Becslés és konfidencia intervallum a csoportonkénti várható értékek különbségére:

| | becslés | konf. int. |
|---|---|---|
| kiserleti2 − kiserleti1 | 10.36 | $[8.03, 12.69]$ |
| kontroll − kiserleti1 | −1.06 | $[-3.39, 1.27]$ |
| kontroll − kiserleti2 | −11.42 | $[-13.75, -9.09]$ |

**8.2.a.** A becslések csoportonkénti bontásban:

| | mean | sd |
|---|---|---|
| setosa | 0.246 | 0.105 |
| versicolor | 1.326 | 0.198 |
| virginica | 2.026 | 0.275 |

A mintaátlagok között látványos az eltérés, és valószínűleg a szórások sem lesznek egyenlőek. Ugyanez jelenik meg a boxploton is.

**b.** A 'setosa' fajon belül a változó jobbra ferde, de ez még tekinthető közel szimmetrikusnak. A másik két fajnál a változó közel szimmetrikus.

| | skewness |
|---|---|
| setosa | 1.25 |
| versicolor | −0.03 |
| virginica | −0.13 |

**c.** $H_0$ : D(sziromszel | setosa) = D(sziromszel | versicolor) = D(sziromszel | virginica)

Levene-teszt: p-érték=0.000, elvetjük a nullhipotézist.

**d.** $H_0$ : E(sziromszel | setosa) = E(sziromszel | versicolor) = E(sziromszel | virginica)

Welch-féle F-próba: p-érték=0.000, elvetjük a nullhipotézist.

A páronkénti összehsonlítás alapján szignifikáns különbség van mindhárom várható érték között. Becslés és konfidencia intervallum a várható értékek különbségére:

| | becslés | konf. int. |
|---|---|---|
| versicolor − setosa | 1.08 | $[0.98, 1.18]$ |
| virginica − setosa | 1.78 | $[1.68, 1.88]$ |
| virginica − versicolor | 0.70 | $[0.60, 0.80]$ |

**e.** A 'cseszeszel' változó esetében a Levene-teszt elfogadja a csoportonkénti szórások azonosságát. Emiatt alkalmazhatjuk az ANOVA tesztet, ami elveti a várható értékek egyenlőségét.

**9.1.a.** $\text{SP} \approx 0.24 \cdot \text{HP} + 84.45$

$R^2 = 0.93$, jó az illeszkedés a regressziós egyeneshez, a becslés pontos

Ha $\text{HP} = 150$, akkor $\text{SP} \approx 0.24 \cdot 150 + 84.45 = 120.45$

**b.** $\text{SP} \approx -0.03 \cdot \text{VOL} + 115.11$

$R^2 = 0.002$, nagyon rossz az illeszkedés a regressziós egyeneshez, a becslés pontatlan, a gyakorlatban nem alkalmazható

**c.** Lineáris regresszió: $\text{MPG} \approx -0.14 \cdot \text{HP} + 50.07, \quad R^2 = 0.62$

Reciprokos regresszió:

Új változó: $\text{repHP} = 1/\text{HP}$

$\text{MPG} \approx 2373.11 \cdot \text{repHP} + 9.73 = 2373.11/\text{HP} + 9.73, \quad R^2 = 0.84$

Exponenciális regresszió:

Új változó: $\text{logMPG} = \log(\text{MPG})$

$\text{logMPG} \approx -0.0046 \cdot \text{HP} + 4.01, \quad R^2 = 0.73$

$\text{MPG} \approx \exp(-0.0046 \cdot \text{HP} + 4.01)$

A három módszer közül a reciprokos regresszió adja a legjobb becslést.

**9.2.a.** $\text{SATV} \approx 0.86 \cdot \text{SATM} + 21.53$

$R^2 = 0.93$, jó az illeszkedés a regressziós egyeneshez, a becslés pontos

Ha $\text{SATM} = 500$, akkor $\text{SATV} \approx 0.86 \cdot 500 + 21.53 = 451.53$

**b.** $\text{dollars} \approx 0.00004 \cdot \text{pop} + 4.998$

$R^2 = 0.02$, nagyon rossz az illeszkedés a regressziós egyeneshez, a becslés a gyakorlatban nem alkalmazható

**c.** Első formula:

Új változó: $\text{repPercent} = 1/\text{percent}$

$\text{SATV} \approx 428.1 \cdot \text{repPercent} + 421, \quad R^2 = 0.69$

$\text{SATV} \approx 428.1/\text{percent} + 421$

Második formula:

Új változó: $\text{repSATV} = 1/\text{SATV}$

$\text{repSATV} \approx 0.0000054 \cdot \text{percent} + 0.002, \quad R^2 = 0.74$

$\text{SATV} \approx 1/(0.0000054 \cdot \text{percent} + 0.002)$

A második formula egy kicsivel jobb illeszkedést biztosít, de a két becslés közel azonos pontosságú.

**10.1.a.** $H_0$ : 'SP' és 'HP' független változók

Pearson-féle korrelációs teszt: p-érték = 0.000, a nullhipotézist elvetjük

Pearson-féle korrelációs együttható: $r_n(\text{SP}, \text{HP}) = 0.97$

A teszt alapján a két változó között lineáris kapcsolat tapasztalható. A korrelációs együttható alapján a kapcsolat erős és pozitív irányú.

Spearman-féle korrelációs teszt: p-érték = 0.000, a nullhipotézist elvetjük

Spearman-féle korrelációs együttható: $\rho_n(\text{SP}, \text{HP}) = 0.88$

A teszt alapján a két változó között rendezési kapcsolat tapasztalható. A korrelációs együttható alapján a kapcsolat erős és pozitív irányú.

**b.** $H_0$ : 'SP' és 'VOL' független változók

Pearson-féle korrelációs teszt: p-érték = 0.7, a nullhipotézist elfogadjuk

Pearson-féle korrelációs együttható: $r_n(\text{SP}, \text{VOL}) = -0.04$

A teszt alapján a két változó között nem tapasztalható lineáris kapcsolat, ezért elfogadjuk a függetlenséget.

Spearman-féle korrelációs teszt: p-érték = 0.005, a nullhipotézist elvetjük

Spearman-féle korrelációs együttható: $\rho_n(\text{SP}, \text{VOL}) = 0.31$

A teszt alapján a két változó között rendezési kapcsolat tapasztalható, ezért elvetjük a függetlenséget. A kapcsolat pozitív irányú, de nagyon gyenge.

**c.** $H_0$ : 'MPG' és 'HP' független változók

Pearson-féle korrelációs teszt: p-érték = 0.000, a nullhipotézist elvetjük

Pearson-féle korrelációs együttható: $r_n(\text{MPG}, \text{HP}) = -0.79$

A teszt alapján a két változó között lineáris kapcsolat tapasztalható. A korrelációs együttható alapján a kapcsolat közepesen erős és negatív irányú.

Spearman-féle korrelációs teszt: p-érték = 0.000, a nullhipotézist elvetjük

Spearman-féle korrelációs együttható: $\rho_n(\text{MPG}, \text{HP}) = -0.91$

A teszt alapján a két változó között rendezési kapcsolat tapasztalható. A korrelációs együttható alapján a kapcsolat erős és negatív irányú.

**10.2.a.** $H_0$ : 'SATM' és 'SATV' független változók

Pearson-féle korrelációs teszt: p-érték = 0.000, a nullhipotézist elvetjük

Pearson-féle korrelációs együttható: $r_n(\text{SATM}, \text{SATV}) = 0.96$

A teszt alapján a két változó között lineáris kapcsolat tapasztalható. A korrelációs együttható alapján a kapcsolat erős és pozitív irányú.

Spearman-féle korrelációs teszt: p-érték = 0.000, a nullhipotézist elvetjük

Spearman-féle korrelációs együttható: $\rho_n(\text{SATM}, \text{SATV}) = 0.95$

A teszt alapján a két változó között rendezési kapcsolat tapasztalható. A korrelációs együttható alapján a kapcsolat erős és pozitív irányú.

**b.** $H_0$ : 'pop' és 'dollars' független változók

Pearson-féle korrelációs teszt: p-érték = 0.31, a nullhipotézist elfogadjuk

Pearson-féle korrelációs együttható: $r_n(\text{pop}, \text{dollars}) = 0.14$

A teszt alapján a két változó között nem tapasztalható lineáris kapcsolat, ezért elfogadjuk a függetlenséget.

Spearman-féle korrelációs teszt: p-érték = 0.54, a nullhipotézist elvetjük

Spearman-féle korrelációs együttható: $\rho_n(\text{pop}, \text{dollars}) = 0.09$

A teszt alapján a két változó között nem tapasztalható rendezési kapcsolat, ezért elfogadjuk a függetlenséget.

**c.** $H_0$ : 'percent' és 'SATV' független változók

Pearson-féle korrelációs teszt: p-érték = 0.000, a nullhipotézist elvetjük

Pearson-féle korrelációs együttható: $r_n(\text{percent}, \text{SATV}) = -0.86$

A teszt alapján a két változó között lineáris kapcsolat tapasztalható. A korrelációs együttható alapján a kapcsolat közepesen erős és negatív irányú.

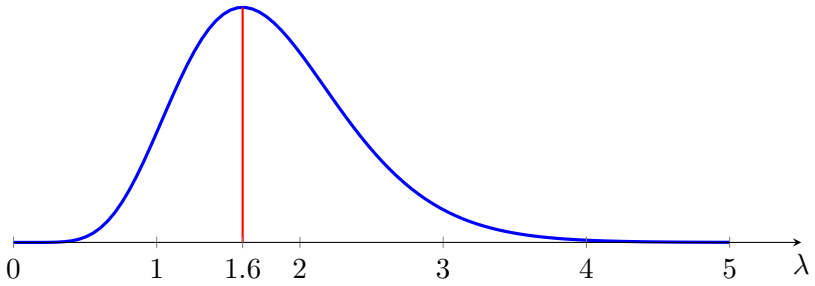
Spearman-féle korrelációs teszt: p-érték = 0.000, a nullhipotézist elvetjük

Spearman-féle korrelációs együttható: $\rho_n(\text{percent}, \text{SATV}) = -0.85$

A teszt alapján a két változó között rendezési kapcsolat tapasztalható. A korrelációs együttható alapján a kapcsolat erős és negatív irányú.

**11.1.** Momentum módszer: $\lambda = \mathrm{E}(\xi) \approx \mathrm{E}_n(\xi) = 1.6$

Maximum likelihood becslés:

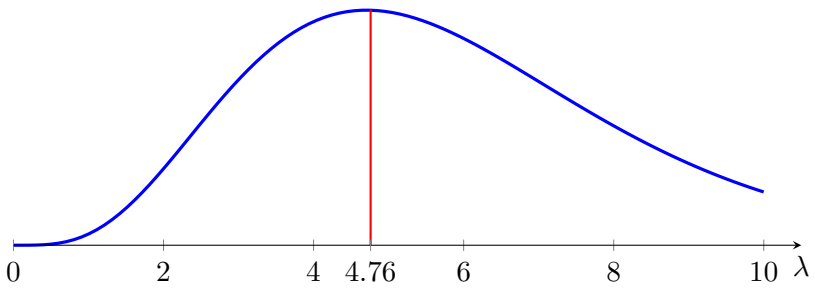


A két módszernél azonos a végeredmény: $\lambda \approx 1.6$.

**11.2.** Momentum módszer: $1/\lambda = \mathrm{E}(\xi) \approx \mathrm{E}_n(\xi) = 0.21$

Végeredmény: $\lambda \approx 1/0.21 = 4.76$.

Maximum likelihood becslés:

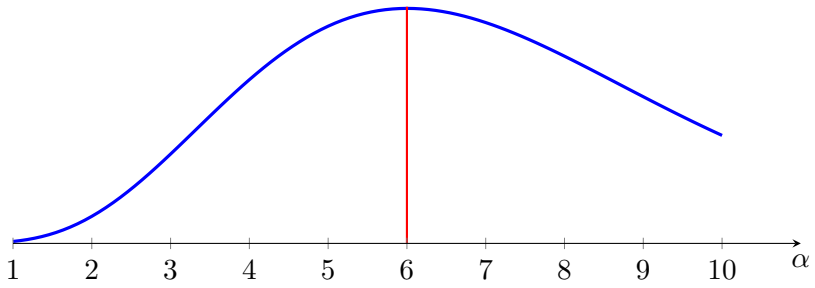



Végeredmény: $\lambda \approx 1/0.21 = 4.76$.

**11.3.** Momentum módszer: $\alpha/(\alpha-1) = \mathrm{E}(\xi) \approx \mathrm{E}_n(\xi) = 1.19$

Végeredmény: $\alpha \approx 6.26$

Maximum likelihood becslés:




Végeredmény: $\alpha \approx 6$.

**12.1.a.** $\mathrm{E(SYS1)} \approx 160.23$, $\mathrm{D(SYS1)} \approx 5.68$, skewness $= 0.06$

A ferdeség alapján a hisztogram majdnem tökéletesen szimmetrikus. A sűrűségfüggvény jól illeszkedik a hisztogramhoz. A QQ-ábrán a mintaelemek közel helyezkednek el az egyeneshez. Minden arra utal, hogy a 'SYS1' változó normális eloszlású.

**b.** $\mathrm{H}_0$ : a 'SYS1' változó normális eloszlású a teljes populációban

Shapiro–Wilk-próba, p-érték=0.550, a nullhipotézist elfogadjuk.

**c.** $\mathrm{E(SYS2)} \approx 153.6$, $\mathrm{D(SYS2)} \approx 7.11$, skewness $= 0.34$

A hisztogram enyhén jobbra ferde, és a sűrűségfüggvény nem illeszkedik szépen a hisztogramhoz. A QQ-ábrán sem illeszkednek a mintaelemek az egyeneshez. A minta közel normális eloszlású, de nem biztos, hogy normális.

$H_0$ : a 'SYS2' változó normális eloszlású a teljes populációban

Shapiro–Wilk-próba, p-érték=0.006, a nullhipotézist elvetjük.

**d.** A normalitást a Shapiro–Wilk-próba alkalmazásával tudjuk tesztelni csoportonként. Minden csoportban elfogadjuk a nullhipotézist, ugyanis a p-értékek:

| csoport | p-érték |
|---|---|
| kiserleti1 | 0.437 |
| kiserleti2 | 0.759 |
| kontroll | 0.230 |

**12.2.a.** $E(SYS1) \approx 3.06$, $D(SYS1) \approx 0.44$, skewness $= 0.32$

A 'cseszeszel' változó enyhén jobbra ferde. A normális eloszlás sűrűségfüggvénye nem igazán illeszkedik a hisztogramhoz, és a QQ-ábra sem tökéletes. A 'cseszeszel' változó közel normális, de valógszínűleg nem normális eloszlású.

**b.** $H_0$ : a 'cseszeszel' változó normális eloszlású a teljes populációban

Shapiro–Wilk-próba, p-érték=0.101, a nullhipotézist elfogadjuk.

Az eredmény meglepő, de vegyük észre, hogy a p-érték rendkívül alacsony. Ez éppen egy határeset a nullhipotézis elfogadása és elvetése között.

**c.** $E(SYS1) \approx 1.2$, $D(SYS1) \approx 0.76$, skewness $= -0.1$

A ferdeség rendben van, de ez ne tévesszen meg minket! A hisztogram alapján ez egy többmóduszú eloszlás, tehát nem lehet normális. A QQ-ábra pocsék.

$H_0$ : a 'sziromszel' változó normális eloszlású a teljes populációban

Shapiro–Wilk-próba, p-érték=0.000, a nullhipotézist elvetjük.

**d.** A normalitást fajonkénti bontásban is a Shapiro–Wilk-próbával tudjuk tesztelni. Az alábbi táblázat tartalmazza a p-értékeket. A 'cseszeszel' változó normalitását minden csoportban elfogadjuk, míg a 'sziromszel' változó normalitását minden csoportban elvetjük.

| faj | cseszeszel | sziromszel |
|---|---|---|
| setosa | 0.271 | 0.000 |
| versicolor | 0.338 | 0.027 |
| virginica | 0.181 | 0.087 |

**13.1.a.** A minta elemszáma $n = 120$, a gyakoriságok és relatív gyakoriságok:

| szín ($x_i$) | piros | rózsaszín | fehér | össz. |
|---|---|---|---|---|
| $k_n(x_i)$ | 30 | 50 | 40 | 120 |
| $r_n(x_i)$ | 0.25 | 0.42 | 0.33 | 1 |

**b.** $P(\text{piros}) \approx 0.25$, $P(\text{rózsaszín}) \approx 0.42$, $P(\text{fehér}) \approx 0.33$

$\text{oddsz(fehér)} \approx 0.33/0.67 = 0.5$

**c.** $H_0$ : P(piros) = 0.25, P(rózsaszín) = 0.5, P(fehér) = 0.25

| szín ($x_i$) | piros | rózsaszín | fehér | össz. |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0.25 | 0.5 | 0.25 | 1 |
| $np_i$ | 30 | 60 | 30 | 120 |

Khi-négyzet próba valószínűségek tesztelésére: $\chi^2 = 5$, $c_\alpha = 5.991$, elfogadjuk.

**d.** Intermedier öröklődés esetén: oddsz(fehér) = 0.25/0.75 = 0.33

Harmadannyi fehér egyed van a teljes sokaságban, mint nem fehér.

**13.2.a.** A statisztikai minta a dobott számok sorozata, a minta elemszáma $n = 100$. Az ismeretlen valószínűségeket a relatív gyakoriságokkal becsülhetjük:

| dobás ($x_i$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | össz. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_n(x_i)$ | 15 | 15 | 15 | 15 | 20 | 20 | 100 |
| $r_n(x_i)$ | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.2 | 0.2 | 1 |

**b.** A szabályosság tesztelése:

$H_0$ : P(dobás = 1) = ... = P(dobás = 6) = 1/6.

| dobás ($x_i$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | össz. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1 |
| $np_i$ | 16.67 | 16.67 | 16.67 | 16.67 | 16.67 | 16.67 | 100 |

Khi-négyzet próba valószínűségek tesztelésére: $\chi^2 = 2$, $c_\alpha = 11.07$, elfogadjuk.

A hatosdobás tesztelése:

$H_0$ : P(dobás = 6) = 1/6, P(dobás $\neq$ 6) = 5/6.

| dobás ($x_i$) | 6 | nem 6 | össz. |
|---|---|---|---|
| $k_n(x_i)$ | 20 | 80 | 100 |
| $r_n(x_i)$ | 0.2 | 0.8 | 1 |
| $p_i$ | 1/6 | 5/6 | 1 |
| $np_i$ | 16.67 | 83.33 | 100 |

Khi-négyzet próba valószínűségek tesztelésére: $\chi^2 = 0.8$, $c_\alpha = 3.841$, elfogadjuk.

**c.** Az elemszám $n = 1000$, a relatív gyakoriságok azonosak az előző feladatrésszel.

A szabályosság tesztelése:

$H_0$ : P(dobás = 1) = ... = P(dobás = 6) = 1/6.

Khi-négyzet próba valószínűségek tesztelésére: $\chi^2 = 20$, $c_\alpha = 11.07$, elvetjük.

A hatosdobás tesztelése:

$H_0$ : P(dobás = 6) = 1/6, P(dobás $\neq$ 6) = 5/6.

Khi-négyzet próba valószínűségek tesztelésére: $\chi^2 = 8$, $c_\alpha = 3.841$, elvetjük.

**13.3.a.** A teljes sokaságban mért arányokat a relatív gyakoriságokkal becsülhetjük.

| $x_i$ | both | cats | dogs | none | össz. |
|---|---|---|---|---|---|
| $k_n(x_i)$ | 24 | 156 | 200 | 620 | 1000 |
| $r_n(x_i)$ | 0.024 | 0.156 | 0.2 | 0.62 | 1 |

$\mathrm{P}(\mathrm{CatsDogs} = \mathrm{both}) \approx 0.024$, $\mathrm{P}(\mathrm{CatsDogs} = \mathrm{cats}) \approx 0.156$,
$\mathrm{P}(\mathrm{CatsDogs} = \mathrm{dogs}) \approx 0.2$, $\mathrm{P}(\mathrm{CatsDogs} = \mathrm{none}) \approx 0.62$

**b.** oddsz(nincs háziállata) $\approx 0.62/(1-0.62) = 1.63$
63 százalékkal több alany él háziállat nélkül, mint háziállattal.

oddsz(van macskája) $\approx (0.024+0.156)/(0.2+0.62) = 0.22$
A macskával rendelkező alanyok száma a nem macskások számának 22 százaléka.

**c.** $\mathrm{H}_0$ : $\mathrm{P}(\mathrm{CatsDogs} = \mathrm{both}) = 0.05$, $\mathrm{P}(\mathrm{CatsDogs} = \mathrm{cats}) = 0.15$,
$\mathrm{P}(\mathrm{CatsDogs} = \mathrm{dogs}) = 0.2$, $\mathrm{P}(\mathrm{CatsDogs} = \mathrm{none}) = 0.6$

Khi-négyzet próba valószínűségek tesztelésére: p-érték=0.002, elvetjük.

| $x_i$ | both | cats | dogs | none | össz. |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0.05 | 0.15 | 0.2 | 0.6 | 1 |
| $np_i$ | 50 | 150 | 200 | 600 | 1000 |
| $\chi^2$ | 13.52 | 0.24 | 0 | 0.67 | 14.43 |

A 'both' értéknél látunk kiugróan magas komponenst.

**e.** A teljes sokaságban mért arányokat a relatív gyakoriságokkal becsülhetjük.

| $x_i$ | no | yes | össz. |
|---|---|---|---|
| $k_n(x_i)$ | 776 | 224 | 1000 |
| $r_n(x_i)$ | 0.776 | 0.224 | 1 |

$\mathrm{P}(\mathrm{Dogs} = \mathrm{yes}) \approx 0.224$, $\mathrm{P}(\mathrm{Dogs} = \mathrm{no}) \approx 0.776$

$\mathrm{H}_0$ : $\mathrm{P}(\mathrm{Dogs} = \mathrm{yes}) = 0.2$, $\mathrm{P}(\mathrm{Dogs} = \mathrm{no}) = 0.8$

Khi-négyzet próba valószínűségek tesztelésére: p-érték=0.058, elfogadjuk.

**13.4.a.** A gyakoriságok és relatív gyakoriságok:

| $x_i$ | F | M |
|---|---|---|
| $k_n(x_i)$ | 1379 | 1321 |
| $r_n(x_i)$ | 0.51 | 0.49 |

$\mathrm{H}_0$ : $\mathrm{P}(\mathrm{sex} = \mathrm{F}) = 0.5$, $\mathrm{P}(\mathrm{sex} = \mathrm{M}) = 0.5$

Khi-négyzet próba valószínűségek tesztelésére: p-érték=0.264, elfogadjuk.

**b.** A gyakoriságok és relatív gyakoriságok:

| $x_i$ | P | PS | S |
|---|---|---|---|
| $k_n(x_i)$ | 1107 | 462 | 1120 |
| $r_n(x_i)$ | 0.41 | 0.17 | 0.42 |

$\mathrm{P}(\mathrm{educ} = \mathrm{P}) \approx 0.41$, $\mathrm{P}(\mathrm{educ} = \mathrm{PS}) \approx 0.17$, $\mathrm{P}(\mathrm{educ} = \mathrm{S}) \approx 0.42$

**c.** $H_0$ : P(education = P) = 0.4, P(education = PS) = 0.2, P(education = S) = 0.4

Khi-négyzet próba valószínűségek tesztelésére: p-érték=0.001, elvetjük.

A minta elemszáma $n = 2689$

| $x_i$ | P | PS | S | összesen |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0.4 | 0.2 | 0.4 | 1 |
| $np_i$ | 1075.6 | 537.8 | 1075.6 | 2689 |
| $\chi^2$ | 0.92 | 10.68 | 1.83 | 14.43 |

A 'PS' értékeknél látunk kiugróan magas komponenst.

**14.1.a.** A marginális eloszlások:

| | fekete haj | barna haj | szőke haj | összesen |
|---|---|---|---|---|
| sötét szem | 25% | 30% | 5% | 60% |
| világos szem | 5% | 20% | 15% | 40% |
| összesen | 30% | 50% | 20% | 100% |

oddsz(sötét szem) = 1.5
A sötét szemű emberek másfélszer annyian vannak, mint a nem sötét szeműek.

oddsz(szőke haj) = 1/4
A szőke hajú emberek negyedannyian vannak, mint a nem szőke hajúak.

**b.** P(fekete haj | sötét szem) = 41.7%
Jelentése: a fekete haj aránya a sötét szemű emberek körében.

P(világos szem | szőke haj) = 75%
Jelentése: a világos szem aránya a szőke hajú emberek körében.

**c.** A hajszín és a szemszín nem független egymástól. Például:

P(fekete haj | sötét szem) = 41.7% ≠ P(fekete haj) = 30%
A sötét szem megnöveli a fekete haj valószínűségét.

P(világos szem | szőke haj) = 75% ≠ P(világos szem) = 40%
A szőke haj megnöveli a világos szem valószínűségét.

Függetlenség esetén az alábbi arányokat látnánk a sokaságban:

| | fekete haj | barna haj | szőke haj | összesen |
|---|---|---|---|---|
| sötét szem | 18% | 30% | 12% | 60% |
| világos szem | 12% | 20% | 8% | 40% |
| összesen | 30% | 50% | 20% | 100% |

**d.** P(világos szem | szőke haj) = 75% = 0.75

P(világos szem | fekete haj) = 1/6

RR = 4.5. A szőke hajú emberek körében a világos szem 4.5-szer gyakrabban fordul elő, mint a fekete hajú emberek körében.

**14.2.a.** Tapasztalati gyakoriságok:

| | both | cats | dogs | none |
|---|---|---|---|---|
| F | 15 | 97 | 98 | 206 |
| M | 9 | 59 | 102 | 414 |

Együttes eloszlás:

| | both | cats | dogs | none | össz. |
|---|---|---|---|---|---|
| F | 1.5% | 9.7% | 9.8% | 20.6% | 41.6% |
| M | 0.9% | 5.9% | 10.2% | 41.4% | 58.4% |
| össz. | 2.4% | 15.6% | 20% | 62% | 100% |

Feltételes eloszlás:

| | both | cats | dogs | none | össz. |
|---|---|---|---|---|---|
| F | 3.6% | 23.3% | 23.6% | 49.5% | 100% |
| M | 1.5% | 10.1% | 17.5% | 70.9% | 100% |

$P(\text{cats} \mid \text{F}) \approx 23.3\%, \quad P(\text{cats} \mid \text{M}) \approx 10.1\%$

RR $\approx 2.3$. A nők körében 2.3-szer gyakoribb a macskatartás, mint a férfiak körében.

**b.** Függetlenség esetén a várt gyakoriságok:

| | both | cats | dogs | none |
|---|---|---|---|---|
| F | 10.0 | 64.9 | 83.2 | 257.9 |
| M | 14.0 | 91.1 | 116.8 | 362.0 |

$H_0$ : a 'Gender' és a 'CatsDogs' változó független egymástól

Khi-négyzet próba függetlenség tesztelésére: p-érték=0.000, elvetjük.

A khi-négyzet komponensek alapján a tapasztalati és a várt gyakoriságok a 'cats' oszlopban térnek el a legnagyobb mértékben egymástól. Emellett jelentős eltérések vannak a 'none' oszlopban is.

**c.** Tapasztalati gyakoriságok:

| | no | yes |
|---|---|---|
| F | 345 | 71 |
| M | 462 | 122 |

Együttes eloszlás és feltételes eloszlás:

| | no | yes | össz. |
|---|---|---|---|
| F | 34.5% | 7.1% | 41.6% |
| M | 46.2% | 12.2% | 58.4% |
| össz. | 80.7% | 19.3% | 100% |

| | no | yes | össz. |
|---|---|---|---|
| F | 82.9% | 17.1% | 100% |
| M | 79.1% | 20.9% | 100% |

$P(\text{yes} \mid \text{M}) \approx 0.209, \quad P(\text{yes} \mid \text{F}) \approx 0.171$

RR $= 1.22$. A férfiaknál a dohányosok aránya 1.22-ször annyi, mint nők körében.

**d.** $H_0$ : a 'Gender' és a 'Smokes' változó független egymástól

Khi-négyzet próba függetlenség tesztelésére: p-érték=0.13, elfogadjuk.

**14.3.a.** Együttes gyakoriságok:

| | C | M | N | S | SA |
|---|---|---|---|---|---|
| F | 300 | 51 | 168 | 362 | 498 |
| M | 300 | 49 | 154 | 356 | 462 |

$H_0$ : a 'region' és 'sex' változók független egymástól

Khi-négyzet próba függetlenség tesztelésére: p-érték=0.938, elfogadjuk.

**b.** Bal oldalon a tapasztalati gyakoriságok, jobb oldalon a várt gyakoriságok:

| | A | N | U | Y |
|---|---|---|---|---|
| P | 52 | 266 | 296 | 422 |
| PS | 32 | 224 | 52 | 130 |
| S | 103 | 397 | 237 | 311 |

| | A | N | U | Y |
|---|---|---|---|---|
| P | 76.8 | 364.4 | 240.3 | 354.5 |
| PS | 32.5 | 154.0 | 101.6 | 149.9 |
| S | 77.7 | 368.6 | 243.1 | 358.6 |

$H_0$ : az 'education' és 'vote' változók független egymástól

Khi-négyzet próba függetlenség tesztelésére: p-érték=0.000, elvetjük.

**c.** A khi-négyzet komponensek táblázata:

| | A | N | U | Y |
|---|---|---|---|---|
| P | 8.02 | 26.56 | 12.91 | 12.85 |
| PS | 0.01 | 31.77 | 24.21 | 2.64 |
| S | 8.23 | 2.19 | 0.15 | 6.32 |

Középfokú végzettség (S): A khi-négyzet komponensek relatíve alacsonyak, tehát sehol sincs nagy mértékű eltérés a tapasztalati és a várt gyakoriság között. Ez azt jelenti, hogy ezen a csoporton belül a választók hasonló arányban támogatják illetve ellenzik Pinochet hatalmát, mint a teljes lakosságon belül.

Felsőfokú végzettség (PS): Az 'A' és az 'Y' oszlopban a khi-négyzet komponens értéke alacsony, tehát a tapasztalati gyakoriság közel van a várt gyakorisághoz. Viszont az 'N' és az 'U' oszlopban magas értékeket találunk, itt jelentős eltérések vannak az országos arányokhoz viszonyítva. A gyakorisági táblázatok alapján a teljes népességhez viszonyítva a diplomások körében jóval alacsonyabb a bizonytalanok aránya, és jóval magasabb az ellenzékiek aránya.

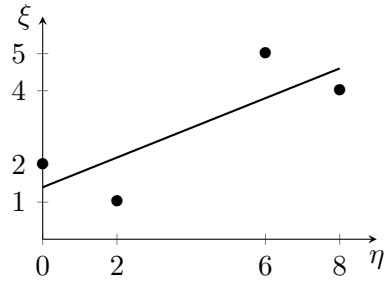
Alapfokú végzettség (P): Az 'N', az 'U' és az 'Y' oszlopban is magas a khi-négyzet komponens értéke, jelentős az eltérés a tapasztalati és a várt gyakoriság között. A teljes népességhez viszonyítva az alapfokú végzettséggel rendelkezők körében magasabb Pinochet támogatóinak az aránya és alacsonyabb az ellenzékiek aránya. Emellett náluk relatív sok a bizonytalan is.

**15.1.a.** $\overline{\xi} = 3, \quad \overline{\eta} = 4, \quad \mathrm{D}_n^*(\xi) = 1.83, \quad \mathrm{D}_n^*(\eta) = 3.65, \quad r_n(\xi, \eta) = 0.8$

**b.** $\xi \approx 0.4\eta + 1.4, \quad R^2 = 0.64$

**c.** $\xi \approx 0.4 \cdot 5 + 1.4 = 3.4$

**d.**




**15.2.a.** $a_1 \approx -0.031, \quad a_2 \approx -0.034, \quad a_3 \approx -0.894, \quad b \approx 68.44$

$\text{MPG} \approx -0.031 \cdot \text{HP} - 0.034 \cdot \text{VOL} - 0.894 \cdot \text{WT} + 68.44, \quad R^2 = 0.83$

A HP és a VOL változó együtthatója nem különbözik szignifikáns módon a 0 értéktől, ezeket ki lehet hagyni a modellből.

**b.** $\text{MPG} \approx a\text{WT} + b,$

$a \approx -1.11, \quad b \approx 68.17$

$\text{MPG} \approx -1.11 \cdot \text{WT} + 68.17, \quad R^2 = 0.82$

**c.** $\text{MPG} \approx a_1/\text{HP} + a_2\text{WT} + b$

$a_1 \approx 1387.18, \quad a_2 \approx -0.54, \quad b \approx 36.54$

$\text{MPG} \approx 1387.18/\text{HP} - 0.54 \cdot \text{WT} + 36.54, \quad R^2 = 0.89$

Mindegyik együttható szignifikáns módon különbözik nullától.

**15.3.a.** $\text{percent} \approx 0.00032 \cdot \text{pop} + 10.02 \cdot \text{dollars} + 0.68 \cdot \text{pay} - 40.83, \quad R^2 = 0.52$

A pop és pay változók együtthatója nem különbözik szignifikáns módon a 0 értéktől.

**b.** $\text{percent} \approx 12.44 \cdot \text{dollars} - 30.64, \quad R^2 = 0.51$

A dollars változó együtthatója szignifikánsan különbözik a 0 értéktől.

**c.** $\text{percent} \approx -0.85 \cdot \text{dollars} + 73.37 \cdot \log(\text{dollars}) - 80.11, \; R^2 = 0.52$

Túl sok magyarázó változót tettünk a modellbe, emiatt nagyok a p-értékek. A dollars változó esetében magasabb a p-érték, ez a tag a kevésbé szignifikáns.

**d.** $\text{percent} \approx 68.8 \cdot \log(\text{dollars}) - 77.15, \quad R^2 = 0.51$

A lineáris és a logaritmikus regresszió ugyanolyan jó előrejelzést biztosít. Viszont a c. feladatrész modellje feleslegesen túl van bonyolítva: eggyel több magyarázó változót tartalmaz, de nem biztosít szignifikánsan jobb illeszkedést.

**15.4.a.** Kétszempontos ANOVA interakcióval:

$\text{H}_0 : a_1 = a_2 = a_3 = 0, \quad$ p-érték=0.228, $\quad$ elfogadjuk.

$\text{H}_0 : b_1 = b_2 = 0, \quad$ p-érték=0.318, $\quad$ elfogadjuk.

$H_0 : c_{ij} = 0$ minden $i$ és $j$ esetén, p-érték=0.986, elfogadjuk.

Nincsen sem csoporthatás, sem interakciós hatás, a SYS1 változó várható értékét nem befolyásolják a vizsgált szempontok.

**b.** $H_0$ : a SYS1 változó szórása azonos minden cellában

Levene-próba: p-érték=0.115, elfogadjuk.

**c.** Kétszempontos ANOVA interakcióval:

$E(\text{SYS2} \mid i, j) = m + a_i + b_j + c_{ij}$

$H_0 : a_1 = a_2 = a_3 = 0$, p-érték=0.000, elvetjük.

$H_0 : b_1 = b_2 = 0$, p-érték=0.431, elfogadjuk.

$H_0 : c_{ij} = 0$ minden $i$ és $j$ esetén, p-érték=0.003, elvetjük.

Az első szempont (CSOPNEV) szerinti csoporthatás és az interakció szignifikánsan különbözik nullától. A második szempont (NEM) szerint nincs csoporthatás.

**d.** Az $\overline{\text{SYS2}}_{ij}$ cellánkénti mintaátlagokat a program megadja:

| | F | N |
|---|---|---|
| kiserleti1 | 149.36 | 151.64 |
| kiserleti2 | 162.96 | 158.76 |
| kontroll | 149.40 | 149.48 |

A bázisérték becslése az $\overline{\text{SYS2}}_{ij}$ értékek számtani átlaga: $m \approx \widehat{m} = 153.6$

Az $a_1, a_2, a_3$ hatások szignifikáns módon különböznek egymástól, ezeket becsülni kell. Ehhez először ki kell számolni az $\overline{\text{SYS2}}_{ij}$ értékek soronkénti számtani átlagát:

| $i$ | CSOPNEV | sorátlag | $\hat{a}_i = \text{sorátlag} - \widehat{m}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | kiserleti1 | 150.50 | −3.10 |
| 2 | kiserleti2 | 160.86 | +7.26 |
| 3 | kontroll | 149.44 | −4.16 |

A $b_1, b_2$ hatások nem különböznek szignifikáns módon nullától: $b_1 = b_2 = 0$.
Viszont a későbbiek miatt ezeket is meg kell becsülni. Ehhez először kiszámoljuk az $\overline{\text{SYS2}}_{ij}$ értékek oszloponkénti számtani átlagát:

| $j$ | NEM | oszlopátlag | $\hat{b}_j = \text{sorátlag} - \widehat{m}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | F | 153.91 | +0.32 |
| 2 | N | 153.29 | −0.31 |

Megjegyzés: a csoporthatások összege valóban nulla mindkét szempont esetében.

Most van interakció, az egyes cellák hatásának a becslése: $\hat{c}_{ij} = \overline{\text{SYS2}}_{ij} - \widehat{m} - \hat{a}_i - \hat{b}_j$.
Ez található az alábbi táblázatban:

| | F | N |
|---|---|---|
| kiserleti1 | −1.44 | +1.44 |
| kiserleti2 | +1.79 | −1.79 |
| kontroll | −0.35 | +0.35 |

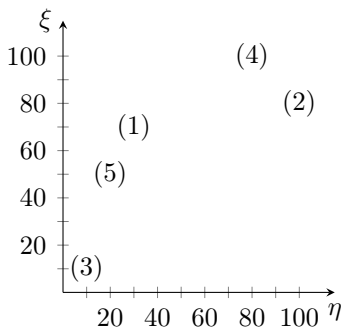
Megjegyzés: a cellák hatásának valóban nulla az összege minden sorban és minden oszlopban.

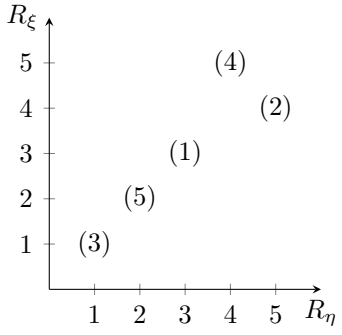
**e.** $H_0$ : a SYS2 változó szórása azonos minden cellában

Levene-próba: p-érték=0.000, elvetjük. Tehát a c. és d. pontban elvégzett elemzést kidobhatjuk a kukába...

**16.1.a.** A rangszámok:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_\xi$ | 3 | 4 | 1 | 5 | 2 |
| $R_\eta$ | 3 | 5 | 1 | 4 | 2 |




**b.** $\overline{R}_\xi = 3, \quad D_n^*(R_\xi) = 1.58$

**c.** Ugyanazt kapjuk.

**d.** $C_n(R_\xi, R_\eta) = 2.25, \quad \rho_n(\xi, \eta) = r_n(R_\xi, R_\eta) = 0.9$

Erős pozitív irányú rendezési kapcsolat.

**e.** $H_0$ : $\xi$ és $\eta$ független változók

Korrelációs teszt: $t_n = 3.58, \ c_\alpha = \Phi_3^{-1}(0.975) = 3.182,$ a nullhipotézist elvetjük.

**16.2.a.** skenewss = 0.06, a változó szimmetrikus eloszlásúnak tűnik.

**b.** $H_0$ : E(SYS1) = 160

Egymintás t-próba: p-érték=0.626, elfogadjuk.

Wilcoxon-féle előjeles rangpróba: p-érték=0.733, elfogadjuk.

**c.** skenewss = 0.3, a változó közelítőleg szimmetrikus eloszlásúnak tűnik.

**d.** $H_0$ : E(SYS1 | kiserleti1) = E(SYS2 | kiserleti1)

Páros t-próba: t=10.064, p-érték=0.000, elvetjük.

Páros Wilcoxon-féle előjeles rangpróba: V=1164.5, p-value=0.000, elvetjük.

$H_0$ : E(SYS1 − SYS2 | kiserleti1) = 0

Egymintás t-próba: t=10.064, p-érték=0.000, elvetjük.
Pontosan ugyanezt kaptuk a páros t-próbával is.

Wilcoxon-féle előjeles rangpróba: V=1164.5, p-value=0.000, elvetjük.
Pontosan ugyanezt kaptuk a páros Wilcoxon-próbával is.

**e.** A feladat megoldható egymintás t-próbával és Wilcoxon-féle előjeles rangpróbával úgy, hogy teszteljük a következőt: $H_0 : E(SYS1 - SYS2 \mid kiserleti1) = 10$

Viszont a kérdésre páros t-próbával és páros Wilcoxon-próbával is lehet válaszolni:

Új változó: $SYS2plusz10 = SYS2 + 10$

$H_0 : E(SYS1 \mid kiserleti1) = E(SYS2 \mid kiserleti1) + 10$

Ezzel ekvivalens: $H_0 : E(SYS1 \mid kiserleti1) = E(SYS2plusz10 \mid kiserleti1)$

Páros t-próba: p-érték=0.614, elfogadjuk.

Páros Wilcoxon-féle előjeles rangpróba: p-érték= 0.573, elfogadjuk.

**f.** A hisztogramok alapján a két sűrűségfüggvény egymás eltoltjának tűnik.

$H_0 : D(SYS2 \mid kiserleti2) = D(SYS2 \mid kontroll)$

Levene-teszt: p-érték=0.333, elfogadjuk.

**g.** $H_0 : E(SYS2 \mid kiserleti2) = E(SYS2 \mid kontroll)$

Kétmintás t-próba: p-érték=0.000, elvetjük.

Mann–Whitney-féle U-próba: p-érték=0.000, elvetjük.

$H_0 : E(SYS2 \mid kiserleti2) = E(SYS2 + 12 \mid kontroll)$

Új változó: $SYS2plusz = SYS2 + 12 \cdot (CSOPKOD == \text{"kontroll"})$

A nullhipotézis: $H_0 : E(SYS2plusz \mid kiserleti2) = E(SYS2plusz \mid kontroll)$

Kétmintás t-próba: p-érték=0.616, elfogadjuk.

Mann–Whitney-féle U-próba: p-érték=0.79, elfogadjuk.

**16.3.a.** A ‘class’ változó értékeinek gyakorisága a mintában:

| Érték | high | low | medium |
|---|---|---|---|
| Gyakoriság | 7 | 14 | 6 |

Az alacsony mintaméretek miatt érdemes rangpróbákat alkalmazni.

**b.** A hisztogram minden csoportban közel szimmetrikus, a ‘low’ csoportban talán még a normalitás is rendben van.

**c.** $H_0 : E(IQbio \mid high) = 105$

Wilcoxon-féle előjeles rangpróba: p-érték=0.938, elfogadjuk.

$H_0 : E(IQbio \mid medium) = 105$

Wilcoxon-féle előjeles rangpróba: p-érték=0.063, elfogadjuk, de eléggé határeset.

**d.** A szimmetria nagyrészt rendben van. Ez azt jelenti, hogy a páros Wilcoxon-próba alkalmazható.

**e.** 1. megoldás: $H_0 : E(\text{IQbio} \mid \text{high}) = E(\text{IQfoster} \mid \text{high})$

Páros Wilcoxon-féle előjeles rangpróba: p-érték=0.141, elfogadjuk.

2. megoldás: $H_0 : E(\text{IQdiff} \mid \text{high}) = 0$

Wilcoxon-féle előjeles rangpróba: p-érték=0.141, elfogadjuk.

**f.** 1. megoldás: $\text{IQplusz10} = \text{IQbio} + 10$

$H_0 : E(\text{IQfoster} \mid \text{medium}) = E(\text{IQbioplusz10} \mid \text{medium})$

Páros Wilcoxon-féle előjeles rangpróba: p-érték=0.063, elfogadjuk.

2. megoldás: $H_0 : E(\text{IQdiff} \mid \text{medium}) = 10$

Wilcoxon-féle előjeles rangpróba: p-érték=0.063, elfogadjuk.

**g.** $H_0 : D(\text{IQbio} \mid \text{high}) = D(\text{IQbio} \mid \text{medium})$

Levene-teszt: p-érték=0.194, elfogadjuk.

$H_0 : E(\text{IQbio} \mid \text{high}) = E(\text{IQbio} \mid \text{medium})$

Mann–Whitney-féle U-próba: p-érték=0.252, elfogadjuk.

**17.1.b.** A 'sziromhossz' illetve a 'siromszel' változó alkalmazásával számíthatunk a legjobb elkülönítésre.

**c.** Regressziós függvény:

$$p(x) = \mathrm{P}\big(\text{a növény a 'virginica' fajhoz tartozik} \mid \text{sziromhossz} = x\big) = \frac{1}{1 + e^{-9x+43.78}}$$

Vágópont: 4.86. Ha sziromhossz $> 4.86$, akkor 'virginica' az előrejelzés; ha pedig sziromhossz $< 4.86$, akkor 'versicolor'.

**d.** A teljes mintán 100 növényből 93 jól lett besorolva, ez 93 százalékos hatékonyság.

| | előrejelzés | |
|---|---|---|
| igazi faj | versicolor | virginica |
| virginica | 46 | 4 |
| versicolor | 3 | 47 |

**e.** Első növény: $\text{sziromhossz} = 4.5 < 4.86$, ezért a 'versicolor' fajba soroljuk.

Megbízhatóság:

$\mathrm{P}(\text{a növény a 'versicolor' fajhoz tartozik} \mid \text{sziromhossz} = 4.5) = 1 - p(4.5) = 96.3\%$

Második növény: $\text{sziromhossz} = 4.9 > 4.86$, ezért a 'virginica' fajba soroljuk.

Megbízhatóság:

$\mathrm{P}(\text{a növény a 'virginica' fajhoz tartozik} \mid \text{sziromhossz} = 4.9) = p(4.9) = 58\%$

**f.** Regressziós függvény:

$$p(x) = \mathrm{P}\big(\text{a növény a 'virginica' fajhoz tartozik} \mid \text{cseszehossz} = x\big) = \frac{1}{1 + e^{-2.01x+12.57}}$$

Vágópont: 6.25. Ha cseszehossz $> 6.25$, akkor 'virginica' az előrejelzés; ha pedig cseszehossz $< 6.25$, akkor 'versicolor'.

A teljes mintán 100 növényből 73 jól lett besorolva, ez 73 százalékos hatékonyság.

| | előrejelzés | |
|---|---|---|
| igazi faj | versicolor | virginica |
| virginica | 36 | 14 |
| versicolor | 13 | 37 |

Első növény: cseszehossz $= 6.3 > 6.25$, ezért a 'virginica' fajba soroljuk.

Megbízhatóság:

P(a növény a 'virginica' fajhoz tartozik | cseszehossz $= 6.3$) $= p(6.3) = 52\%$

Második növény: cseszehossz $= 7.5 > 6.25$, ezért ezt is a 'virginica' fajba soroljuk.

Megbízhatóság:

P(a növény a 'virginica' fajhoz tartozik | cseszehossz $= 7.5$) $= p(7.5) = 92\%$

**17.2.b.** Az 'MPG' és a 'WT' változó alkalmazásával számíthatunk a legjobb elkülönítésre.

**c.** Regressziós függvény:

$$p(x) = \mathrm{P}\big(\text{az autó Japánból származik} \mid \text{MPG} = x\big) = \frac{1}{1 + e^{-0.25x+6.07}}$$

Vágópont: 24.28. Ha MPG $> 24.28$, akkor 'Japan' az előrejelzés; ha MPG $< 24.28$, akkor pedig 'Europe'.

**d.** A teljes mintán 49 autóból 44 jól lett besorolva, ez 89.8 százalékos hatékonyság.

| | előrejelzés | |
|---|---|---|
| igazi ország | Europe | Japan |
| Europe | 7 | 3 |
| Japan | 2 | 37 |

**e.** MPG $= 24 < 24.28$, ezért 'Europe' az előrejelzés.

Megbízhatóság: P(az autó Európában készült | MPG $= 24$) $= 1 - p(24) = 51.7\%$

**f.** Regressziós függvény:

$$p(x) = \mathrm{P}\big(\text{az autó Japánban készült} \mid \text{WT} = x\big) = \frac{1}{1 + e^{0.32x-12.05}}$$

Vágópont: 37.66. Ha WT $< 37.66$, akkor 'Japan' az előrejelzés; ha WT $> 37.66$, akkor pedig 'Europe'.

Ismét 44 autó lett jól besorolva, tehát 89.8 százalékos a hatékonyság.

| | előrejelzés | |
|---|---|---|
| igazi ország | Europe | Japan |
| Europe | 7 | 3 |
| Japan | 2 | 37 |

Ismeretlen autó: $\text{WT} = 36 > 37.66$, ezért a 'Japan' az előrejelzés.

Megbízhatóság: $\text{P}(\text{az autó Japánban készült} \mid \text{WT} = 36) = p(36) = 62.9\%$

**17.3.a.** A 'sziromhossz' és 'sziromszel' változókkal lehet a legjobban megkülönböztetni a három fajt.

**b.** Az algoritmus a 150 növényből 144 növényt sorol be helyesen, ez 96 százalékos hatékonyság.

| | előrejelzés | | |
|---|---|---|---|
| igazi faj | setosa | versicolor | virginica |
| setosa | 50 | 0 | 0 |
| versicolor | 0 | 48 | 2 |
| virginica | 0 | 4 | 46 |

**c.** Első növény: a 'versicololor' fajba soroljuk. Megbízhatóság:

$\text{P}(\text{a 'versicolor' fajhoz tartozik} \mid \text{sziromhossz} = 4.5, \text{sziromszel} = 1.1) = 99.99\%$

Második növény: a 'virginica' fajba soroljuk. Megbízhatóság:

$\text{P}(\text{a 'virginica' fajhoz tartozik} \mid \text{sziromhossz} = 4.9, \text{sziromszel} = 2) = 98.28\%$

**d.** Négy magyarázó változó esetén a 150 növényből 147 lesz jól besorolva, ami 98 százalékos hatékonyság.

| | előrejelzés | | |
|---|---|---|---|
| igazi faj | setosa | versicolor | virginica |
| setosa | 50 | 0 | 0 |
| versicolor | 0 | 48 | 2 |
| virginica | 0 | 1 | 49 |

Első növény: a 'versicololor' fajba soroljuk. Megbízhatóság:

$\text{P}(\text{'versicolor'} \mid \text{a magyarázó változók értéke 6.3, 3.2, 4.5, 1.1}) = 100\%$

Második növény: a 'virginica' fajba soroljuk. Megbízhatóság:

$\text{P}(\text{'virginica'} \mid \text{a magyarázó változók értéke 7.5, 2.8, 4.9, 2}) = 71.44\%$

**17.3.a.** Egyik grafikon sem biztató, talán a 'HP' és 'WT' változókkal különül el legjobban a három csoport.

**b.** A 82 autóból 52 autót soroltunk be helyesen, ez 63.4 százalékos hatékonyság.

| | előrejelzés | | |
|---|---|---|---|
| igazi ország | Europe | Japan | U.S. |
| Europe | 5 | 0 | 5 |
| Japan | 2 | 30 | 7 |
| U.S. | 0 | 16 | 17 |

**c.** A modell szerint az autó az Egyesült Államokban készült. Megbízhatóság:

$P(\text{U.S.} \mid \text{HP} = 110, \text{WT} = 36) = 70.5\%$

**d.** Öt magyarázó változó esetén a 82 autóból 56 lesz jól besorolva, ami 68.3 százalékos hatékonyság.

| | előrejelzés | | |
|---|---|---|---|
| igazi ország | Europe | Japan | U.S. |
| Europe | 5 | 0 | 5 |
| Japan | 2 | 31 | 6 |
| U.S. | 0 | 13 | 20 |

A modell szerint az extra autó Európából származik. Megbízhatóság:

$P(\text{Europe} \mid \text{a magyarázó változók értéke 120, 110, 24, 100, 36}) = 95.7\%$