A 2009. évi Schweitzer Miklós Emlékverseny feladatai

október 30 - november 9.

1. Egy kártyapakli minden kártyáján a szabályos 17-szög látható oldalaival és átlóival együtt, csúcsai 1-től 17-ig vannak számozva. Minden kártyán az összes szakasz (oldalak és átlók) az 1,2,...,105 színek valamelyikével van kiszínezve úgy, hogy a következő tulajdonság teljesül: a 17-szög bármely 15 csúcsa közötti 105 szakasz csupa különböző színnel van színezve a pakli legalább egy kártyáján. Minimum hány kártya kell a pakliba?

2. Legyenek $p_1, \ldots, p_k$ prímszámok, és legyen S az egész számok azon részhalmaza, melynek elemei nem oszthatók $p_1, \ldots, p_k$-tól különböző prímszámmal. Az egészek egy véges A részhalmaza esetén jelöljük $\mathcal{G}(A)$-val azt a gráfot, melynek csúcsai az A elemei, élei pedig azon $a, b \in A$ párok, melyekre $a - b \in S$. Létezik-e minden $m \geq 3$-ra egészeknek olyan m elemű A részhalmaza, melyre

(i) $\mathcal{G}(A)$ teljes?

(ii) $\mathcal{G}(A)$ összefüggő, de minden csúcsának a fokszáma legfeljebb 2?

3. Bizonyítsuk be, hogy léteznek pozitív c és n_0 konstansok az alábbi tulajdonsággal. Ha A egész számokból álló véges halmaz, $|A| = n > n_0$, akkor

$$|A - A| - |A + A| \leq n^2 - cn^{8/5}.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \frac{x^n + x^m - 2}{x^{\gcd(m,n)} - 1}$$

polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett minden $n > m > 0$ egész szám esetén.

5. Legyen G véges nemkommutatív csoport, melynek rendje $t = 2^n m$, ahol n, m pozitív egész számok és m páratlan. Bizonyítsuk be, hogy ha a csoport tartalmaz 2^n-ed rendű elemet, akkor

(i) G nem egyszerű csoport;

(ii) G tartalmaz m-ed rendű normális részcsoportot.

6. Egy véges (S, L) illeszkedési struktúrát Steiner hármasrendszernek nevezünk, ha $L \neq \emptyset$, bármely két $x, y \in S$, $x \neq y$ pontra illeszkedik egyetlen $\ell \in L$ egyenes és minden $\ell \in L$ egyenesre illeszkedik pontosan három pont. Legyen (S, L) Steiner hármasrendszer, az $x \neq y$ pontokra illeszkedő egyenes harmadik pontját jelölje xy. Legyen A olyan csoport, amelynek a $C(A)$ centruma szerinti faktorcsoportja prímhatvány rendű. Legyenek $f, h : S \to A$ olyan leképezések, hogy $C(A)$ tartalmazza f képhalmazát, h képhalmaza pedig generálja A-t.
Igazoljuk, hogy ha S bármely két különböző x, y elemére

$$f(x) = h(x)h(y)h(x)h(xy)$$

teljesül, akkor A kommutatív csoport, és van olyan $k \in A$, hogy minden $x \in S$ elemre $f(x) = kh(x)$.

7. Legyen H az M differenciálható sokaság $\mathsf{Diff}^{\infty}(M)$ diffeomorfizmuscsoportjának tetszőleges részcsoportja. Az X $\mathcal{C}^{\infty}$-vektormező a H csoportot *gyengén érinti*, ha van olyan pozitív egész k szám és olyan $\mathcal{C}^{\infty}$-differenciálható $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[^k \times M \to M$ leképezés, amelyre

(i) rögzített $t_1, \dots, t_k$ esetén a

$$\varphi_{t_1,\dots,t_k} : x \in M \mapsto \varphi(t_1, \dots, t_k, x)$$

leképezés diffeomorfizmusa M-nek, és $\varphi_{t_1,\dots,t_k} \in H$;

(ii) $\varphi_{t_1,\dots,t_k} = \mathsf{Id}$, ha valamely $t_j = 0$, $1 \le j \le k$;

(iii) tetszőleges $f : M \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^{\infty}$-függvényre

$$Xf = \left.\frac{\partial^k (f \circ \varphi_{t_1,\dots,t_k})}{\partial t_1 \dots \partial t_k}\right|_{(t_1,\dots,t_k)=(0,\dots,0)}.$$

Igazoljuk, hogy a $H \subset \mathsf{Diff}^{\infty}(M)$ csoportot gyengén érintő $\mathcal{C}^{\infty}$-vektormezők kommutátorai is gyengén érintik H-t.

8. Legyen $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a számegyenes mérhető részhalmazainak egy olyan sorozata, amely majdnem minden pontot végtelen sokszor lefed. Igazoljuk, hogy megadható $B \subset \mathbb{N}$ nullsűrűségű halmaz úgy, hogy $\{A_n\}_{n\in B}$ is majdnem minden pontot végtelen sokszor lefed. ($B \subset \mathbb{N}$ nullsűrűségű, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{B\cap\{0,\dots,n-1\}\}}{n} = 0$.)

9. Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^m$ egy nemüres kompakt konvex halmaz és $f : P \to \mathbb{R}_+$ egy konkáv függvény. Igazoljuk, hogy minden $\xi \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$\int_P \langle \xi, x\rangle f(x)dx \le \left[\frac{m+1}{m+2} \sup_{x\in P} \langle \xi, x\rangle + \frac{1}{m+2} \inf_{x\in P} \langle \xi, x\rangle\right] \cdot \int_P f(x)dx.$$

10. Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $L : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos, a második változójában elsőfokú pozitív homogén, $U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ fölött pozitív és C^2-osztályú Lagrange-függvény, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $p \in U$ esetén a

$$\{v \in \mathbb{R}^n | L(p, v) = 1\}$$

hiperfelület Gauss-görbülete seholsem zérus. Határozzuk meg L extremálisait, ha eleget tesz a

$$\sum_{k=1}^{n} y^k \partial_k \partial_{n+i} L = \sum_{k=1}^{n} y^k \partial_i \partial_{n+k} L \quad (i \in \{1, \dots, n\})$$

parciális differenciálegyenlet-rendszernek, ahol $y^k(u, v) := v^k$, ha $(u, v) \in U \times \mathbb{R}^n$, $v = (v^1, \dots, v^n)$.

11. Jelölje H_n az $n \times n$-es önadjungált komplex mátrixok lineáris terét és ebben P_n a pozitív szemidefinit mátrixok kúpját. Tekintsük H_n-en a szokásos belsőszorzatot

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr} AB \qquad (A, B \in H_n)$$

és a belőle származó metrikát. Mutassuk meg, hogy bármely $\phi : P_n \to P_n$ izometria (azaz a fenti metrikára vonatkozó, nem feltétlenül szürjektív távolságtartó leképezés) előáll

$$\phi(A) = UAU^* + X \qquad (A \in H_n)$$

vagy

$$\phi(A) = UA^TU^* + X \qquad (A \in H_n)$$

alakban valamely $n\times n$-es U unitér mátrix és X pozitív szemidefinit mátrix segítségével, ahol ^{T} a transzponálást, * az adjungálást jelöli.

12. Legyenek Z_1, $Z_2 \dots$, Z_n d-dimenziós standard normális eloszlású független (oszlop)vektorok, $n-1>d$. Legyen továbbá

$$\overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i, \quad S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})(Z_i-\overline{Z})^\top$$

a mintaátlag, illetve a korrigált tapasztalati kovarianciamátrix. Tekintsük az $Y_i = S_n^{-1/2}(Z_i-\overline{Z})$, $i=1,2,\dots,n$ standardizált mintát. Bizonyítandó, hogy

$$\frac{E|Y_1-Y_2|}{E|Z_1-Z_2|} > 1,$$

és a hányados nem függ d-től, csak n-től.

Beadási határidő: **2009. november 9. (hétfő) 12.00 óra.** A megoldásokat a Bolyai János Matematikai Társulat helyi tagozatánál kell benyújtani vagy ezen időpontig ajánlottan postára kell adni a versenybizottság címére:

Győry Kálmán, DE TTK, Matematikai Intézet
4032, Debrecen, Egyetem tér 1.

Jó munkát kíván

a Versenybizottság