Az 1997. évi Schweitzer Miklós Emlékverseny feladatai

1. feladat. Definiáljuk minden k pozitív egész számra gráfoknak egy $\mathcal{G}_k$ osztályát a következő módon. Egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor eleme $\mathcal{G}_k$-nak, ha létezik éleinek olyan $\psi\colon E \to [k] = \{1, 2, \dots, k\}$ színezése, hogy a csúcsok tetszőleges $\phi\colon V \to [k]$ színezése esetén található a gráfnak olyan $e = \{x, y\}$ éle, melyre $\phi(x) = \phi(y) = \psi(e)$. Bizonyítsuk be, hogy léteznek $c_1 < c_2$ pozitív konstansok az alábbi két tulajdonsággal:

(a) minden $\mathcal{G}_k$-beli gráfnak legalább $c_1 k^2$ csúcsa van;
(b) van $\mathcal{G}_k$-ban olyan gráf, melynek legfeljebb $c_2 k^2$ csúcsa van.

2. feladat. Legyen $A = \{1, 4, 6, \dots\}$ azon n természetes számok sorozata, melyekre n páros számú, $n+1$ pedig páratlan számú prímszám szorzata (az ismétlődő prímeket multiplicitással véve). Bizonyítsuk be, hogy az A elemeinek reciprokaiból képzett sor divergens.

3. feladat. Jelölje $f_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ a $\prod_{j=1}^{n}(x + j - 1)$ polinomot. Mutassuk meg, hogy ha az α és β számokra $f_{1997}(\alpha) = f_{1999}(\beta) = 0$, akkor $f_{1997}(\alpha) \neq f_{1999}(\beta)$.

4. feladat. Egy 0-1-mátrix elemi változtatásán egy elemének és vele együtt összes vízszintes, függőleges és átlós szomszédainak (0-ról 1-re vagy 1-ről 0-ra) megváltoztatását értjük. Zérusmátrixá alakítható-e minden 1791×1791 típusú 0-1-mátrix elemi változtatásokkal?

5. feladat. Legyen $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$ nullához zató sorozat. Egy egység oldalú négyzetbe a_1 sugarú köröket teszünk átfedés nélkül egyészen addig, míg több már nem fér el. (Korábban letett kört nem szabad elmozdítani.) Ezután a_2 sugarú köröket helyezünk a megmaradt részbe addig, míg több már nem fér el. Folytassuk ezt az eljárást az $a_3, a_4, \dots$ sugarú körökkel. Mekkora lehet a körök által lefedett rész területe?

6. feladat. Legyen κ végtelen számosság és legyenek A, B κ-számosságú halmazok. Konstruáljuk meg $f\colon A \to B$ függvényeknek egy olyan 2^κ számosságú $\mathcal{F}$ családját, hogy akárhogyan választunk véges sok különböző $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ függvényt és tetszőleges $b_1, \dots, b_n \in B$ elemeket, mindig van olyan $a \in A$, amelyre $f_1(a) = b_1, \dots, f_n(a) = b_n$.

7. feladat. Legyen G egy Abel-csoport, $0 \le \epsilon < 1$ és $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ egy olyan függvény, amely kielégíti az

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \le \|f(y)\| \qquad (x, y) \in G^2$$

egyenlőtlenséget. Igazoljuk, hogy ekkor léteznek olyan $A\colon G \to \mathbb{R}^n$ additív és $\varphi\colon A(G) \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvények, hogy $f = \varphi \circ A$.

8. feladat. Legyen H végtelen dimenziós szeparábilis komplex Hilbert-tér és jelölje $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ korlátos lineáris operátorainak algebráját. Tekintsük az

$$l_\infty\big(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H})\big) = \big\{(A_n) \mid A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\ (n \in \mathbb{N}),\ \sup_n \|A_n\| < \infty\big\}$$

és

$$C\big(\beta\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathcal{H})\big) = \big\{ f \colon \beta\mathbb{N} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid f \text{ folytonos a } \mathcal{B}(\mathcal{H})\text{-beli normára nézve} \big\}$$

algebrákat a pontonkénti műveletekkel és a szuprémumnormával. Mutassuk meg, hogy ezen C^*-algebrák nem izometrikusan izomorfak. (Itt $\beta\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok halmazának Stone-Čech kompaktifikáltját.)

9. feladat. Legyen adva egy (M, g) Riemann-sokaság. Terjesszük ki a g metrikus tenzort a TM érintősokaságra a következő előírással: ha $a, b \in T_vTM$ $(v \in T_pM)$, akkor

$$\tilde{g}_v(a, b) := g_p(\dot{\alpha}(0), \dot{\beta}(0)) + g_p(D_\alpha X(0), D_\beta Y(0)),$$

ahol α, β olyan M-beli görbék, hogy $\alpha(0) = \beta(0) = p$; X és Y α- illetve β-menti vektormező az $\dot{X}(0) = a$, $\dot{Y}(0) = b$ feltétellel; D_α és D_β a Levi-Civita konnexió szerinti, a megfelelő görbék menti kovariáns deriválási operátora. Harmonikus-e az (M, g) Riemann-sokaság energiafüggvénye a $(TM, \tilde{g})$ Riemann-sokaságon?

10. feladat. Rendeljünk egy n-dimenziós kocka csúcsaihoz független standard normális eloszlású valószínűségi változókat. Egy csúcsot mondjunk nagyobbnak egy másiknál, ha a hozzárendelt szám nagyobb mint a másikhoz rendelt. Definiáljunk egy bolyongást a csúcsokon a következő szabályok szerint:

(a) a kezdőpontot az összes csúcs közül egyenlő valószínűséggel választjuk,
(b) ha utunk során olyan pontba jutunk, amelyhez található a vele szomszédos csúcsok között nála nagyobb, ezek közül egyenlő valószínűséggel választjuk a következő pontot,
(c) ha ilyen nincs, megállunk.

Igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív ε-hoz található olyan K, hogy

$$P(\lambda > K \log n) < \varepsilon$$

teljesül minden $n > 1$ mellett, ahol λ a bolyongás lépéseinek a száma.

A feladatsort Maróti Miklós gépelte újra.