

Valószínűségelmélet előadáskövető fóliák

Barczy Máttyás és Pap Gyula

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet
Szeged

2026/2027 tanév, I. félév

Ajánlott irodalom:



CSÖRGŐ SÁNDOR,
Fejezetek a valószínűségelméletből.
Polygon, 2010.



RÉNYI ALFRÉD,
Valószínűségszámítás.
Tankönyvkiadó, 1968.



BOGNÁR JÁNOSNÉ, MOGYORÓDI JÓZSEF, PRÉKOPA ANDRÁS,
RÉNYI ALFRÉD, SZÁSZ DOMOKOS,
Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény.
Tankönyvkiadó, 1971; Typotex, 2001.



BARCZY MÁTYÁS, PAP GYULA,
Valószínűségelmélet.
URL: https://www.math.u-szeged.hu/~barczy/oktatas_barczy.html

- $\mathbb{Z}$: egész számok halmaza,
- $\mathbb{N}$: pozitív egész számok halmaza,
- $\mathbb{Z}_+$: nemnegatív egész számok halmaza,
- $\mathbb{R}$: valós számok halmaza,
- $\mathbb{R}_+$: nemnegatív valós számok halmaza,
- $\mathbb{C}$: komplex számok halmaza.

Ha Ω egy nemüres halmaz és A egy részhalmaza Ω -nak, akkor ezt $A \subset \Omega$ módon fogjuk jelölni (ahol $\subset$ nem feltétlenül szigorú tartalmazást jelöl, azaz $A \subset \Omega$ esetén $A = \Omega$ is lehetséges).

Halmazalgebra, σ -algebra

Az $\Omega \neq \emptyset$ nemüres halmaz bizonyos részhalmazából álló $\mathcal{H} \subset 2^\Omega$ halmazrendszert **halmazalgebrának** nevezzük, ha

- (i) $\Omega \in \mathcal{H}$,
- (ii) zárt az unióképzésre, azaz tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A \cup B \in \mathcal{H}$,
- (iii) zárt a komplementerképzésre, azaz tetszőleges $A \in \mathcal{H}$ esetén $\bar{A} := \Omega \setminus A \in \mathcal{H}$.

Az $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ halmazalgebrát **σ -algebrának** nevezzük, ha (ii) következő erősebb változata teljesül:

- (ii') zárt a megszámlálható unióképzésre, azaz tetszőleges

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \text{ esetén } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

Ekkor az $(\Omega, \mathcal{A})$ párt **mérhetőségi térnek (mérhető térnek)** nevezzük.

Mérték

Legyen $\Omega \neq \emptyset$ nemüres halmaz és $\mathcal{H} \subset 2^\Omega$ halmazalgebra.

Azt mondjuk, hogy a $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ halmazfüggvény

- **végesen additív**, ha tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$ diszjunkt halmazok esetén $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- **mérték**, ha $\mu(\emptyset) = 0$ és σ -**additív**, azaz

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$ páronként diszjunktak és $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}$.

Ha $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ végesen additív, akkor teljes indukcióval belátható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és tetszőleges $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazok esetén $\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$.

Mértékelméleti előkészítés

Mérték

Legyen $\Omega \neq \emptyset$ nemüres halmaz, és $\mathcal{H} \subset 2^\Omega$ halmazalgebra.

Azt mondjuk, hogy a $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ mérték

- **véges**, ha $\mu(\Omega) < \infty$.
- **valószínűségi mérték**, ha $\mu(\Omega) = 1$.
- **σ -véges**, ha léteznek olyan $\Omega_1, \Omega_2, \dots \in \mathcal{H}$ halmazok úgy, hogy $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$, és $\mu(\Omega_k) < \infty$, $k \in \mathbb{N}$.

Azt mondjuk, hogy a $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [-\infty, \infty]$ halmazfüggvény

- **előjeles mérték**, ha előáll $\mu = \mu_1 - \mu_2$ alakban, ahol μ_1, μ_2 mértékek, és legalább az egyik véges.

Legyen Ω nemüres halmaz. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subset \Omega$.

Ha $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ és $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor azt írjuk, hogy $A_n \uparrow A$.

Ha $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ és $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor azt írjuk, hogy $A_n \downarrow A$.

Mérték tulajdonságai (például folytonossága)

Legyen $\Omega \neq \emptyset$ nemüres halmaz, és $\mathcal{H} \subset 2^\Omega$ halmazalgebra.
Legyen $\mathbb{P} : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ olyan végesen additív halmazfüggvény,
melyre $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Ekkor

- ❶ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- ❷ tetszőleges $A \in \mathcal{H}$ esetén $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;
- ❸ $\mathbb{P}$ **monoton**, azaz tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$, $A \subset B$ esetén $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$, továbbá $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$;
- ❹ tetszőleges $A \in \mathcal{H}$ esetén $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- ❺ a következő állítások ekvivalensek:
 - (a) $\mathbb{P}$ σ -additív.
 - (b) $\mathbb{P}$ **alulról folytonos**, azaz tetszőleges $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$, $A_n \uparrow A$ és $A \in \mathcal{H}$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.
 - (c) $\mathbb{P}$ **felülről folytonos**, azaz tetszőleges $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$, $A_n \downarrow A$ és $A \in \mathcal{H}$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.
 - (d) $\mathbb{P}$ **„felülről folytonos az üres halmazon”**, azaz tetszőleges $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$ és $A_n \downarrow \emptyset$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

Mérték additivitása, szubadditivitása

Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér és $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ valószínűségi mérték. Ekkor

1 $\mathbb{P}$ végesen additív;

2 $\mathbb{P}$ **σ -szubadditív**, azaz tetszőleges $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Nilván σ -algebrák tetszőleges, nemüres halmazának metszete σ -algebra.

Halmazrendszer által generált σ -algebra

Legyen $\Omega \neq \emptyset$ és $\mathcal{H} \subset 2^\Omega$ egy halmazalgebra. Legyen $\Gamma \neq \emptyset$ és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A_\gamma \in \mathcal{H}$. Az $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ halmazokat tartalmazó σ -algebrák metszetét az $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ **halmazrendszer által generált σ -algebrának** nevezzük. Jelölése: $\sigma(A_\gamma : \gamma \in \Gamma)$.

A generált σ -algebra definíciója megfogalmazható tetszőleges, nem feltétlenül egy halmazalgebrához tartozó $A_\gamma \subset \Omega$, $\gamma \in \Gamma$, halmazrendszer esetén is.

Mértékelméleti előkészítés

Tulajdonképpen $\sigma(\mathcal{A}_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ az a legszűkebb σ -algebra, mely tartalmazza az $\{\mathcal{A}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ halmazokat.

Carathéodory kiterjesztési tétele

Legyen $\Omega \neq \emptyset$ nemüres halmaz, és $\mathcal{H} \subset 2^\Omega$ halmazalgebra.

Legyen $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ σ -véges mérték.

Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $\nu : \sigma(\mathcal{H}) \rightarrow [0, \infty]$ σ -véges mérték úgy, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{H}$ esetén $\nu(A) = \mu(A)$.

Valószínűségi mező

Valószínűségi mező alatt olyan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármast értünk, ahol $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető tér, $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ valószínűségi mérték.

Az Ω elemeit **elemi eseményeknek**, az $\mathcal{A}$ elemeit pedig **eseményeknek** nevezzük. Az Ω a **biztos esemény**, az $\emptyset$ üres halmaz pedig a **lehetetlen esemény**.

Véletlen változó, eloszlása

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér. Azt mondjuk, hogy a $\xi : \Omega \rightarrow X$ leképezés **véletlen változó (valószínűségi változó)**, ha mérhető, azaz tetszőleges $B \in \mathcal{X}$ esetén

$$\xi^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} := \{\xi \in B\} \in \mathcal{A}.$$

A $\xi : \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változó **eloszlása** a $\mathbb{P}_\xi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_\xi(B) := \mathbb{P}(\xi \in B) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{X},$$

halmazfüggvény, mely nyilván valószínűségi mérték az $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren.

Diszkrét, illetve egyszerű véletlen vektor

Azt mondjuk, hogy a $\xi : \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha értékkészlete, a $\xi(\Omega)$ halmaz megszámlálható. Azt mondjuk, hogy a $\xi : \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változó **egyszerű**, ha értékkészlete véges halmaz.

Ha $\xi : \Omega \rightarrow X$, $\eta : \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változók és $\mathbb{P}(\xi = \eta) = 1$, akkor azt írjuk, hogy $\xi = \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b. (egyenlőek $\mathbb{P}$ -majdnem mindenütt).

Ha $X = \mathbb{R}$, illetve $X = \mathbb{R}^d$, akkor mindig az $\mathcal{X} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$, illetve $\mathcal{X} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ választásokkal élünk. Így egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mérhetősége esetünkben azt jelenti, hogy $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén (a mértékelméletben ezt Borel-mérhetőségnek hívják). Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ valószínűségi változó, akkor a véletlen vektor elnevezést is használjuk.

Ha (E, ϱ) metrikus tér, akkor azt mindig a Borel-halmazok $\mathcal{B}(E)$ σ -algebrájával látjuk el (vagyis a nyílt halmazok által generált σ -algebrával).

Egyszerű véletlen vektor

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ egyszerű véletlen vektor és az értékkészlete $\xi(\Omega) = \{x_1, \dots, x_k\}$, ahol $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ páronként különbözőek, akkor

$$\xi = \sum_{j=1}^k x_j \mathbb{1}_{A_j},$$

ahol $A_j := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_j\} \in \mathcal{A}$, $j = 1, \dots, k$, páronként diszjunkt események és $\bigcup_{j=1}^k A_j = \Omega$, azaz $A_1, \dots, A_k$ teljes eseményrendszert alkotnak.

Generált σ -algebra

Legyen Γ nemüres halmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $(X_\gamma, \mathcal{X}_\gamma)$ mérhető tér, és $\xi_\gamma : \Omega \rightarrow X_\gamma$ valószínűségi változó. A $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók által **generált σ -algebra**:

$$\sigma(\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma) := \sigma(\xi_\gamma^{-1}(B) : \gamma \in \Gamma, B \in \mathcal{X}_\gamma).$$

A $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók által generált σ -algebra az a legszűkebb σ -algebra, melyre nézve az összes $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változó mérhető.

Egyetlen véletlen változó által generált σ -algebra

Egyetlen $\xi : \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változó által generált σ -algebra:

$$\sigma(\xi) = \xi^{-1}(\mathcal{X}) := \{\xi^{-1}(B) : B \in \mathcal{X}\} \implies \sigma(\xi^{-1}(\mathcal{X})) = \xi^{-1}(\mathcal{X}).$$

Ez a σ -algebra éppen azokból az A eseményekből áll, melyekről ξ megfigyelésével ($\xi(\omega)$ ismeretében) eldönthető, hogy bekövetkeztek-e vagy sem ($\omega \in A$ teljesül-e vagy sem).

Mértékelméleti előkészítés

Felhívjuk a figyelmet, hogy ha $\sigma(\xi) = \sigma(\eta)$, akkor általában véve nem igaz, hogy $\mathbb{P}(\xi = \eta) = 1$. Például, ha $\eta := \xi + 1$, akkor $\sigma(\xi) = \sigma(\eta)$, de $\mathbb{P}(\xi = \eta) = \mathbb{P}(\xi = \xi + 1) = 0$.

A generált σ -algebra definíciója megfogalmazható tetszőleges, nem feltétlenül mérhető függvényekből álló függvényrendszer esetén is.

Például, egy tetszőleges $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvény által generált σ -algebra

$$\sigma(g) := \sigma(g^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) = g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) = \{g^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\},$$

és $\sigma(g)$ az a legszűkebb σ -algebra, melyre nézve g mérhető.

Mérhetőség rész- σ -algebrára nézve

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér, $\xi : \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változó és $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ rész- σ -algebra. Azt mondjuk, hogy ξ **$\mathcal{F}$ -mérhető**, ha $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, $\forall B \in \mathcal{X}$, vagyis $\sigma(\xi) \subset \mathcal{F}$.

Mértékelméleti előkészítés

Szeperábilis metrikus tér

Egy metrikus teret **szeperábilis**nak nevezünk, ha van megszámlálható mindenütt sűrű részalmaza. Egy metrikus tér egy A részalmazát akkor nevezzük szeperábilisnak, ha az mint metrikus tér szeperábilis az eredeti metrikának az $A \times A$ -ra való megszorításával.

Közelítés egyszerű véletlen változókkal

Legyen (E, ϱ) szeperábilis metrikus tér. Tetszőleges $\xi : \Omega \rightarrow E$ valószínűségi változó esetén léteznek olyan $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ egyszerű valószínűségi változók, hogy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén

$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$. Ha $(E, \|\cdot\|)$ szeperábilis normált tér, úgy ξ_n választható úgy, hogy $\|\xi_n\| \leq \|\xi\|, \forall n \in \mathbb{N}$.

Közelítés egyszerű véletlen változókkal

Tetszőleges $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív valószínűségi változó esetén létezik nemnegatív egyszerű valószínűségi változókból álló $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat úgy, hogy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\eta_n(\omega) \uparrow \eta(\omega)$, ha $n \rightarrow \infty$.

Például az

$$\eta_n = \sum_{j=1}^{n2^n} (j-1)2^{-n} \mathbb{1}_{\{(j-1)2^{-n} \leq \eta < j2^{-n}\}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\eta_n = \sum_{j=1}^{n2^n} (j-1)2^{-n} \mathbb{1}_{\{(j-1)2^{-n} \leq \eta < j2^{-n}\}} + n \mathbb{1}_{\{\eta \geq n\}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

sorozatok megfelelnek.

Véletlen változó mérhető függvénye

Legyen $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér, $\xi : \Omega \rightarrow X$ valószínűségi változó.

- ➊ Ha $(Y, \mathcal{Y})$ mérhető tér, $g : X \rightarrow Y$ mérhető függvény, akkor a $g \circ \xi : \Omega \rightarrow Y$ összetett függvény $\sigma(\xi)$ -mérhető valószínűségi változó, azaz $\sigma(g \circ \xi) \subset \sigma(\xi)$.
- ➋ Ha $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ $\sigma(\xi)$ -mérhető valószínűségi változó, akkor létezik olyan $g : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ mérhető függvény, hogy $\eta = g \circ \xi$.

"Jó halmazok" módszere

Legyenek $(\Omega, \mathcal{A})$ és $(X, \mathcal{X})$ mérhető terek, $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$, és $\xi : \Omega \rightarrow X$ egy leképezés. Ekkor $\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E})) = \xi^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$. Továbbá, feltételezve, hogy $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{X}$, a ξ leképezés akkor és csak akkor véletlen változó, ha $\xi^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

Valós értékű véletlen változó egy jellemzése

Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ egy mérhető tér és $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy leképezés. Ekkor a ξ leképezés akkor és csak akkor $\mathbb{R}$ -beli értékű véletlen változó, ha $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Vektor értékű leképezés mérhetősége

Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ egy mérhető tér. Egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ leképezés akkor és csak akkor valószínűségi vektorváltozó, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}^d$ esetén $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$.

Egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ leképezés esetén a $\sigma(\xi)$ σ -algebra az a legszűkebb rész- σ -algebra, melyre nézve ξ mérhető.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ egy mérhető tér, $d \in \mathbb{N}$, és $\xi_1, \dots, \xi_d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ leképezések. Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\xi(\omega) := (\xi_1(\omega), \dots, \xi_d(\omega))$, $\omega \in \Omega$. Ekkor a ξ leképezés akkor és csak akkor $\mathbb{R}^d$ -beli értékű véletlen változó, ha ξ_i , $i = 1, \dots, d$, valós értékű véletlen változók.

Mértékelméleti előkészítés

Véletlen vektor eloszlásfüggvénye

A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye** $F_\xi : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\xi(x) := \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_d < x_d), \quad x = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d.$$

Legyen $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$, $j = 1, \dots, d$, és

$$\Delta_{[a_j, b_j]}^{(j)} g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{[a_j, b_j]}^{(j)} g)(x) &:= g(x_1, \dots, x_{j-1}, b_j, x_{j+1}, \dots, x_d) \\ &\quad - g(x_1, \dots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \dots, x_d), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$(\Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \cdots \Delta_{[a_d, b_d]}^{(d)} g)(x) = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{0, 1\}^d} (-1)^{\sum_{k=1}^d \varepsilon_k} g(c_1, \dots, c_d),$$

ahol $c_k := \varepsilon_k a_k + (1 - \varepsilon_k) b_k$, $k = 1, \dots, d$.

Így $\Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \cdots \Delta_{[a_d, b_d]}^{(d)} g$ konstans függvény.

Mértékelméleti előkészítés

Ha $a, b \in \mathbb{R}^d$, akkor $a \leq b$, illetve $a < b$ azt jelenti, hogy minden $j = 1, \dots, d$ esetén $a_j \leq b_j$, illetve $a_j < b_j$ teljesül, és jelölje $[a, b) := \{x \in \mathbb{R}^d : a \leq x < b\}$.

Többdimenziós eloszlásfüggvény jellemzése

Az $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye valamely $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ valószínűségi változónak, ha

- (1) F minden változójában monoton növekvő,
- (2) F minden változójában balról folytonos,

(3) $\lim_{\min\{x_1, \dots, x_d\} \rightarrow \infty} F(x) = 1$, és

$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_d) = 0$$

minden $i \in \{1, \dots, d\}$ és $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ esetén,

(4) tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$ esetén $\Delta_{[a_1, b_1)}^{(1)} \cdots \Delta_{[a_d, b_d)}^{(d)} F \geq 0$.

Mértékelméleti előkészítés

Ha $d = 1$, akkor a (4) feltétel következik az (1) feltételből.

Téglatestbe esés valószínűsége

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ valószínűségi változó, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$ esetén

$$\mathbb{P}_\xi([a, b)) = \mathbb{P}(\xi \in [a, b)) = \Delta_{[a_1, b_1)}^{(1)} \cdots \Delta_{[a_d, b_d)}^{(d)} F_\xi \geq 0,$$

ahol F_ξ a ξ eloszlásfüggvényét jelöli. Tehát $\mathbb{P}_\xi$ az F_ξ eloszlásfüggvényhez tartozó Lebesgue-Stieltjes mérték.

Egydimenziós eloszlásfüggvények egyenlősége

Legyenek $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ és $G : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ egydimenziós eloszlásfüggvények. Ha F és G minden közös $x \in \mathbb{R}$ folytonossági pontjában $F(x) = G(x)$, akkor $F = G$. Általánosabban, ha $S \subset \mathbb{R}$ egy olyan sűrű részhalmaza $\mathbb{R}$ -nek, hogy $F(x) = G(x)$ minden $x \in S$ esetén, akkor $F = G$.

Függetlenség, Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye

σ -algebrák, események, illetve véletlen vektorok függetlensége

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres halmaz.

- Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\mathcal{F}_\gamma \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra. Azt mondjuk, hogy az $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ rész- σ -algebrák **függetlenek**, ha a Γ különböző elemeiből álló minden $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ véges részhalmaz esetén és minden $A_{\gamma_1} \in \mathcal{F}_{\gamma_1}, \dots, A_{\gamma_n} \in \mathcal{F}_{\gamma_n}$ választással teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(A_{\gamma_1} \cap \dots \cap A_{\gamma_n}) = \mathbb{P}(A_{\gamma_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{\gamma_n}).$$

- Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A_\gamma \in \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy az $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ események **függetlenek**, ha az általuk generált $\{\{\emptyset, A_\gamma, \Omega \setminus A_\gamma, \Omega\} : \gamma \in \Gamma\}$ rész- σ -algebrák függetlenek.
- Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $(X_\gamma, \mathcal{X}_\gamma)$, illetve $(Y_\gamma, \mathcal{Y}_\gamma)$ egy mérhető tér és $\xi_\gamma : \Omega \rightarrow X_\gamma$, illetve $\eta_\gamma : \Omega \rightarrow Y_\gamma$ valószínűségi változók. Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha az általuk generált $\{\sigma(\xi_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ σ -algebrák függetlenek.

Függetlenség, Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye

- Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók **függetlenek** az $\{\eta_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változóktól, ha a $\sigma(\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ és $\sigma(\eta_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ σ -algebrák függetlenek.
- Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók **függetlenek** az $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ eseményektől, ha a $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók függetlenek az $\{\mathbb{1}_{A_\gamma} : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változóktól.

A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha $F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$, $x,y \in \mathbb{R}$, ahol $F_{\xi,\eta}$, F_ξ és F_η a (ξ,η) , ξ , illetve η eloszlásfüggvényét jelöli.

Függetlenség, Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye

Független véletlen vektorok függvényei függetlenek

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező. Ha a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ véletlen vektorok függetlenek, akkor tetszőleges $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^r$, $h : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^p$ mérhető függvények esetén a $g \circ \xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$ és $h \circ \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ véletlen vektorok is függetlenek. Továbbá, ha $\xi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$, független véletlen vektorok és $g_n : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^r$, $n \in \mathbb{N}$, mérhető függvények, akkor a $g_n \circ \xi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^r$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok is függetlenek.

Független halmazalgebrák által generált σ -algebrák függetlenek

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező. Ha az $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{A}$ és $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{A}$ rész-halmazalgebrák függetlenek abban az értelemben, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{F}_0$ és $B \in \mathcal{G}_0$ esetén

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

akkor a generált $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{F}_0)$ és $\mathcal{G} := \sigma(\mathcal{G}_0)$ rész- σ -algebrák is függetlenek.

Függetlenség, Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye

Jelölés rész- σ -algebrák által generált σ -algebrára

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres halmaz.

Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\mathcal{F}_\gamma$ rész- σ -algebrája $\mathcal{A}$ -nak.

Legyen $\mathcal{F}_\emptyset := \{\emptyset, \Omega\}$ (azaz a triviális σ -algebra).

Ha $\Lambda \subset \Gamma$, $\Lambda \neq \emptyset$, akkor legyen

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\Lambda &:= \bigvee_{\gamma \in \Lambda} \mathcal{F}_\gamma := \sigma(\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Lambda) := \sigma\left(\bigcup_{\gamma \in \Lambda} \mathcal{F}_\gamma\right) \\ &= \sigma(\{A : A \in \mathcal{F}_\gamma \text{ valamely } \gamma \in \Lambda \text{ esetén}\}).\end{aligned}$$

Független σ -algebrák által generált σ -algebrák függetlenek

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres halmaz. Ha $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ független rész- σ -algebrái $\mathcal{A}$ -nak, és F_1, F_2 véges, diszjunkt részhalmazai Γ -nak, akkor $\mathcal{F}_{F_1}$ és $\mathcal{F}_{F_2}$ függetlenek.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres halmaz. Ha $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ független rész- σ -algebrái $\mathcal{A}$ -nak, és F_1, F_2 diszjunkt részhalmazai Γ -nak, akkor $\mathcal{F}_{F_1}$ és $\mathcal{F}_{F_2}$ függetlenek.

Farok- σ -algebra

Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér, $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres halmaz. Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\mathcal{F}_\gamma$ rész- σ -algebrája $\mathcal{A}$ -nak. Azt mondjuk, hogy az $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ σ -algebrákhoz tartozó **farok- σ -algebra**:

$$\mathcal{T} := \bigcap_{\{F : F \subset \Gamma, F \text{ véges}\}} \mathcal{F}_{\Gamma \setminus F}.$$

1. Ha Γ véges, akkor $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, és így $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$, $A \in \mathcal{T}$.
2. Egy $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^\infty$ rész- σ -algebra sorozat esetén a farok- σ -algebra:

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(\mathcal{F}_k : k \geq n),$$

ahol $\sigma(\mathcal{F}_k : k \geq n) \downarrow \mathcal{T}$, ha $n \rightarrow \infty$.

Függetlenség, Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye

3. Ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, ξ_n , $n \in \mathbb{N}$, véletlen változók, akkor a következő események benne vannak a $\sigma(\xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, rész- σ -algebrákhoz rendelt farok- σ -algebrában:

$$\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \text{ létezik} \right\},$$

$$\left\{ \omega \in \Omega : \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \leq x \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \text{ létezik és } \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \leq x \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega)}{n} \text{ létezik} \right\}.$$

Éppen azok az események vannak benne a szóban forgó farok- σ -algebrában, melyek bekövetkezését nem befolyásolja véges sok ξ_n értékének megváltoztatása. Valóban, minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots) = \bigcap_{n=N}^{\infty} \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots).$$

Függetlenség, Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye

Viszont az

$$\left\{ \omega \in \Omega : \xi_n(\omega) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

esemény nincs benne a $\{\sigma(\xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ σ -algebrákhoz rendelt farok- σ -algebrában.

Farok- σ -algebra megszámlálhatóan végtelen Γ esetén

Legyen Γ egy megszámlálhatóan végtelen halmaz és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\mathcal{F}_\gamma$ rész- σ -algebrája $\mathcal{A}$ -nak. Legyenek továbbá $F_n \subset \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$, olyan véges részhalmazai Γ -nak, hogy $F_n \uparrow \Gamma$, ha $n \rightarrow \infty$. Ekkor az $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ σ -algebrákhoz tartozó farok- σ -algebra:

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\Gamma \setminus F_n}.$$

Speciálisan, ha $\Gamma = \mathbb{N}$, akkor $\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(\mathcal{F}_k : k \geq n)$ (ahogyan azt már korábban láttuk).

Függetlenség, Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye

Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres halmaz.
Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\mathcal{F}_\gamma$ rész- σ -algebrája $\mathcal{A}$ -nak, és jelölje $\mathcal{T}$ a hozzájuk tartozó farok- σ -algebrát.
Ha az $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ rész- σ -algebrák függetlenek, akkor tetszőleges $A \in \mathcal{T}$ esetén $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$.

Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye

Legyenek $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ független valószínűségi változók és jelölje $\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma(\xi_k : k \geq n)$ a $\{\sigma(\xi_n)\}_{n=1}^\infty$ σ -algebrákhoz rendelt farok- σ -algebrát.
Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{T}$ esetén $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(A) = 1$.

Példa: Ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ független véletlen változók és

$$\bar{S}_n := \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

akkor

$$\mathbb{P} \left(\{\bar{S}_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konvergens} \right) \in \{0, 1\},$$

és léteznek $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ úgy, hogy

$$\mathbb{P} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = a \right) = 1, \quad \mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = b \right) = 1.$$

Ezért, ha $\mathbb{P} \left(\{\bar{S}_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konvergens} \right) = 1$, akkor létezik $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = c \right) = 1.$$

Függetlenség, Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye

Megszámlálható sok halmaz $\limsup$ -ja és $\liminf$ -je

Ha $\Omega \neq \emptyset$ nemüres halmaz, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subset \Omega$, akkor jelölje

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ végtelen sok } n \in \mathbb{N} \text{ esetén}\},$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ véges sok } n \in \mathbb{N} \text{ kivételével}\}.$$

Legyenek $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ események az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőben. Ekkor a $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ és $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ események benne vannak a $\{\emptyset, A_n, \Omega \setminus A_n, \Omega\}$, $n \in \mathbb{N}$, σ -algebrákhoz tartozó farok- σ -algebrában.

Ha A_n , $n \in \mathbb{N}$, függetlenek is, akkor a Kolmogorov 0 vagy 1 törvény alapján $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \in \{0, 1\}$, azaz vagy 1 valószínűséggel végtelen sok esemény bekövetkezik ezek közül, vagy pedig 1 valószínűséggel legfeljebb csak véges sok.

Borel–Cantelli lemmák (1909, 1917)

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ események.

1 Ha $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, akkor $\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0$

(vagyis ezen események közül 1 valószínűséggel legfeljebb csak véges sok következik be).

2 Ha az $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ események függetlenek és $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$,

akkor $\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 1$ (vagyis ezen események közül 1 valószínűséggel végtelen sok következik be).

Függetlenség, Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye

Tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén jelölje $\mathcal{N}(\omega)$, hogy hány darab A_n , $n \in \mathbb{N}$, esemény esetén teljesül, hogy $\omega \in A_n$.

Nyilván, $\mathcal{N}(\omega) \in \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}$, $\mathcal{N}$ (kiterjesztett valós értékű) valószínűségi változó, és a várható érték később tárgyalandó tulajdonságai miatt

$$\mathbb{E}(\mathcal{N}) = \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

A Borel-Cantelli lemma 1. része azt állítja, hogy ha véges a bekövetkező események számának várható értéke, akkor a bekövetkező események száma 1-valószínűséggel véges.

Továbbá, mivel $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\mathcal{N} = \infty\}$, a Borel-Cantelli lemma 2. része alapján kapjuk, hogy független események esetén, ha a bekövetkező események számának várható értéke végtelen, akkor $\mathcal{N}$, azaz a bekövetkező események száma 1-valószínűséggel végtelen.

Várható érték

Egyszerű véletlen változó várható értéke

Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egyszerű véletlen változó, és $\xi(\Omega) = \{x_1, \dots, x_\ell\}$, ahol $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$ páronként különbözőek. Ekkor az

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) := \sum_{j=1}^{\ell} x_j \mathbb{P}(\xi = x_j)$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük.

Nilván a várható érték végesen additív és monoton az egyszerű véletlen változókon.

Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív véletlen változó.

- 1 Ha ζ és $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemnegatív egyszerű valószínűségi változók, és tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\eta_n(\omega) \uparrow \xi(\omega) \geq \zeta(\omega)$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) \geq \mathbb{E}(\zeta)$.
- 2 Ha $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemnegatív egyszerű valószínűségi változók, és tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\eta_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$, $\zeta_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\zeta_n)$.

Nemnegatív véletlen változó várható értéke

Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív valószínűségi változó. Legyen $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemnegatív egyszerű valószínűségi változókból álló sorozat úgy, hogy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$ ha $n \rightarrow \infty$. Ekkor az

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n)$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük.

Egy nemnegatív ξ véletlen változó várható értéke $\mathbb{E}(\xi) \in [0, \infty]$ egyértelműen van definiálva. Továbbá

$$\mathbb{E}(\xi) = \sup \{ \mathbb{E}(\eta) : \eta \text{ egyszerű véletlen változó, hogy } 0 \leq \eta \leq \xi \}.$$

Várható érték

Véletlen változó felbontása pozitív és negatív részre

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó, akkor $\xi^+ := \max\{\xi, 0\}$ (ξ pozitív része) és $\xi^- := -\min\{\xi, 0\}$ (ξ negatív része) is nemnegatív valószínűségi változók, és $\xi = \xi^+ - \xi^-$, $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$.

Véletlen változó várható értéke

Azt mondjuk, hogy a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változónak **létezik várható értéke (integrálja)**, ha az $\mathbb{E}(\xi^+)$ és $\mathbb{E}(\xi^-)$ várható értékek közül legalább az egyik véges, és ekkor

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) := \mathbb{E}(\xi^+) - \mathbb{E}(\xi^-).$$

Azt mondjuk, hogy ξ -nek **véges a várható értéke (integrálható)**, ha az $\mathbb{E}(\xi^+)$ és $\mathbb{E}(\xi^-)$ várható értékek végesek.

Ha egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változónak létezik a várható értéke, akkor $\mathbb{E}(\xi) \in [-\infty, \infty]$.

Várható érték

Legyenek $\xi, \eta, (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ véletlen változók az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ val. mezőn.

Várható érték tulajdonságai

- 1 ξ akkor és csak akkor integrálható, ha $|\xi|$ integrálható.
- 2 Ha $\exists \mathbb{E}(\xi)$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\exists \mathbb{E}(c\xi)$, és $\mathbb{E}(c\xi) = c \mathbb{E}(\xi)$.
- 3 Ha $\exists \mathbb{E}(\xi) > -\infty$ és $\xi \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\exists \mathbb{E}(\eta)$ és $\mathbb{E}(\xi) \leq \mathbb{E}(\eta)$.
Ha $\exists \mathbb{E}(\eta) < \infty$ és $\xi \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\exists \mathbb{E}(\xi)$ és $\mathbb{E}(\xi) \leq \mathbb{E}(\eta)$.
- 4 Ha $\exists \mathbb{E}(\xi)$, akkor $|\mathbb{E}(\xi)| \leq \mathbb{E}(|\xi|)$.
- 5 Ha $\exists \mathbb{E}(\xi)$, akkor $\forall A \in \mathcal{A}$ esetén $\exists \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A)$; ha ξ integrálható, akkor $\forall A \in \mathcal{A}$ esetén $\xi \mathbb{1}_A$ is integrálható.
- 6 Ha $\exists \mathbb{E}(\xi), \mathbb{E}(\eta)$ és az $\mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$ kifejezés értelmes (azaz nem $\infty - \infty$ vagy $-\infty + \infty$ alakú), akkor $\exists \mathbb{E}(\xi + \eta)$ és $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$.
- 7 Ha $\xi = 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\mathbb{E}(\xi) = 0$.
- 8 Ha $\exists \mathbb{E}(\xi)$ és $\xi = \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\exists \mathbb{E}(\eta)$, és $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta)$.
- 9 Ha $\xi \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.b. és $\mathbb{E}(\xi) = 0$, akkor $\xi = 0$ $\mathbb{P}$ -m.b.

Várható érték tulajdonságai

- 10 Monoton konvergencia-tétel:** Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n \geq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., $\mathbb{E}(\eta) > -\infty$, és $\xi_n \uparrow \xi$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\mathbb{E}(\xi_n) \uparrow \mathbb{E}(\xi)$ ha $n \rightarrow \infty$.
- 11** Ha $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemnegatívak, akkor $\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_n)$.
- 12 Fatou-lemma:**
- (a) Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n \geq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b. és $\mathbb{E}(\eta) > -\infty$, akkor $\mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n)$.
 - (b) Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b. és $\mathbb{E}(\eta) < \infty$, akkor $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) \leq \mathbb{E}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n)$.
 - (c) Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\xi_n| \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b. és $\mathbb{E}(\eta) < \infty$, akkor
$$\mathbb{E} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi_n) \leq \mathbb{E} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n \right).$$

Várható érték

Várható érték tulajdonságai

- 13 Dominált (majoráns) konvergencia-tétel:** Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\xi_n| \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., $\mathbb{E}(\eta) < \infty$, és $\xi_n \rightarrow \xi$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}(\xi)$ és $\mathbb{E}(|\xi_n - \xi|) \rightarrow 0$ ha $n \rightarrow \infty$.
- 14 Általánosított dominált (majoráns) konvergencia-tétel:**
- (a) Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\xi_n| \leq \eta_n$ $\mathbb{P}$ -m.b., $\mathbb{E}(\eta_n) < \infty$, $\xi_n \rightarrow \xi$ $\mathbb{P}$ -m.b., $\eta_n \rightarrow \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., és $\mathbb{E}(\eta_n) \rightarrow \mathbb{E}(\eta)$, ha $n \rightarrow \infty$, ahol $\mathbb{E}(\eta) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$ és $\mathbb{E}(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}(\xi)$, ha $n \rightarrow \infty$.
 - (b) Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\xi_n| \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.b., $\mathbb{E}(\eta) < \infty$, és ξ_n sztochasztikusan konvergál ξ -hez, ha $n \rightarrow \infty$, akkor $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}(\xi)$ és $\mathbb{E}(|\xi_n - \xi|) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.
- 15 Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség:** Ha $\mathbb{E}(\xi^2), \mathbb{E}(\eta^2) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(|\xi\eta|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\xi^2)\mathbb{E}(\eta^2)}$.
- 16 Jensen–egyenlőtlenség:**
- (a) Ha $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $I \subset \mathbb{R}$ olyan nyílt (nem feltétlenül korlátos) intervallum, hogy $\mathbb{P}(\xi \in I) = 1$, és $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, akkor $\mathbb{E}(\xi) \in I$ és $g(\mathbb{E}(\xi)) \leq \mathbb{E}(g(\xi))$. Továbbá, ha $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan konvex, akkor $g(\mathbb{E}(\xi)) = \mathbb{E}(g(\xi))$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbb{P}(\xi = \mathbb{E}(\xi)) = 1$.

Várható érték tulajdonságai

- 16 (b) Legyen $C \subset \mathbb{R}$ egy nemüres intervallum, $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ egy konvex függvény és $\xi : \Omega \rightarrow C$ egy véletlen változó, melyre $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$. Ekkor $\mathbb{E}(\xi) \in C$, az $\mathbb{E}(g(\xi))$ várható érték létezik és $\mathbb{E}(g(\xi)) \in (-\infty, +\infty]$, továbbá $g(\mathbb{E}(\xi)) \leq \mathbb{E}(g(\xi))$.
- 17 **Ljapunov-egyenlőtlenség:** Ha $0 < s < t$, akkor $(\mathbb{E}(|\xi|^s))^{1/s} \leq (\mathbb{E}(|\xi|^t))^{1/t}$.
- 18 **Hölder-egyenlőtlenség:** Legyenek $p, q \in (1, \infty)$ olyanok, hogy $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Ha $\mathbb{E}(|\xi|^p) < \infty$ és $\mathbb{E}(|\eta|^q) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(|\xi\eta|) \leq (\mathbb{E}(|\xi|^p))^{1/p} (\mathbb{E}(|\eta|^q))^{1/q}$.
- 19 **Minkowski-egyenlőtlenség:** Ha $p \in [1, \infty)$, $\mathbb{E}(|\xi|^p) < \infty$ és $\mathbb{E}(|\eta|^p) < \infty$, akkor $(\mathbb{E}|\xi + \eta|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}(|\xi|^p))^{1/p} + (\mathbb{E}(|\eta|^p))^{1/p}$.

Várható érték

Várható érték tulajdonságai

20 Markov-egyenlőtlenség: Ha $\xi \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor
 $\mathbb{P}(\xi \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(\xi)}{c}$ bármilyen $c > 0$ esetén.

21 Csebisev-egyenlőtlenség: Ha $\mathbb{E}(\xi^2) < \infty$, akkor
 $\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq c) \leq \frac{\text{Var}(\xi)}{c^2}$ minden $c > 0$ esetén.

22 Ha $\mathbb{E}(\xi)$ létezik, akkor

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\xi \geq x) dx - \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}(\xi < x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F_{\xi}(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F_{\xi}(x) dx.$$

Ha $\xi \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\xi \geq x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F_{\xi}(x)) dx.$$

Speciálisan, ha $\mathbb{P}(\xi \in \mathbb{Z}_+) = 1$, akkor

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi \geq n).$$

23 Ha $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\eta|) < \infty$ és ξ, η függetlenek, akkor
 $\mathbb{E}(|\xi\eta|) < \infty$ és $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)$. Ha ξ és η nemnegatívak és függetlenek, akkor $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)$.

Várható érték tulajdonságai

- 24 **Young-tétel:** Legyenek $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ξ , η és ζ véletlen változók. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(|\xi_n|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\eta_n|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\zeta_n|) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\zeta|) < \infty$,

$$\mathbb{P}(\xi_n \leq \eta_n \leq \zeta_n) = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

és

$$\xi_n \xrightarrow{\text{m.b.}} \xi \quad \mathbb{P}\text{-m.b.}, \quad \eta_n \xrightarrow{\text{m.b.}} \eta \quad \mathbb{P}\text{-m.b.}, \quad \zeta_n \xrightarrow{\text{m.b.}} \zeta \quad \mathbb{P}\text{-m.b.}$$

Tegyük fel továbbá, hogy

$$\mathbb{E}(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}(\xi) \quad \text{és} \quad \mathbb{E}(\zeta_n) \rightarrow \mathbb{E}(\zeta).$$

Ekkor $\mathbb{E}(|\eta|) < \infty$ és $\mathbb{E}(\eta_n) \rightarrow \mathbb{E}(\eta)$.

Transzformáció-tétel

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor és $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, akkor

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{\Omega} g(\xi(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mathbb{P}_{\xi}(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dF_{\xi}(x)$$

abban az értelemben, hogy az integrálok ugyanakkor léteznek, és ha léteznek, egyenlőek.

Nemnegatív véletlen változó függvényének várható értéke

Legyen ξ egy nemnegatív véletlen változó F_ξ eloszlásfüggvénnyel, legyen továbbá $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ egy monoton és abszolút folytonos függvény (azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy ha $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_k < b_k$ és $\sum_{j=1}^k (b_j - a_j) < \delta$, akkor $\sum_{j=1}^k |g(b_j) - g(a_j)| < \varepsilon$). Ekkor

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = g(0) + \int_0^\infty g'(x)(1 - F_\xi(x)) dx,$$

melyet úgy értünk, hogy ha a kifejezés valamelyik oldala véges, akkor másik oldal is véges, és a két oldal egyenlő.

Nemnegatív véletlen változó momentuma és momentumgeneráló függvénye

Legyen ξ egy nemnegatív véletlen változó F_ξ eloszlásfüggvénnyel.

(i) Tetszőleges $\alpha > 0$ esetén

$$\mathbb{E}(\xi^\alpha) = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} (1 - F_\xi(x)) dx.$$

Továbbá, ha $\mathbb{E}(\xi^\alpha) < \infty$ valamely $\alpha > 0$ esetén (azaz, ha ξ -nek az $\alpha > 0$ rendű momentuma véges), akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha-1} \mathbb{P}(\xi \geq x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha-1} (1 - F_\xi(x)) = 0.$$

Speciálisan, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor ξ n -edrendű momentuma végességének egy szükséges feltétele, hogy a $\mathbb{P}(\xi \geq x)$, $x \geq 0$, farokvalószínűségek legalább x^{n-1} (polinomiális) rendben csengjenek le a végtelenben.

(ii) Tetszőleges $r \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{E}(e^{r\xi}) = 1 + r \int_0^\infty e^{rx}(1 - F_\xi(x)) dx.$$

Továbbá, ha $\mathbb{E}(e^{r\xi}) < \infty$ valamely $r \in \mathbb{R}$ esetén (azaz, ha ξ momentumgeneráló függvénye létezik valamely $r \in \mathbb{R}$ pontban), akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{rx} \mathbb{P}(\xi \geq x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{rx}(1 - F_\xi(x)) = 0.$$

Speciálisan, ha $r > 0$, akkor annak, hogy ξ momentumgeneráló függvény létezzen az r pontban egy szükséges feltétele az, hogy ξ farokvalószínűségei legalább e^{rx} (exponenciális) rendben csengjenek le a végtelenben.

Várható érték

Abszolút folytonosság

Legyen $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér. Azt mondjuk, hogy a $\mu : \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty]$ halmazfüggvény **abszolút folytonos** a $\nu : \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty]$ halmazfüggvényre nézve, ha minden $B \in \mathcal{X}$, $\nu(B) = 0$ esetén $\mu(B) = 0$. Jelölése: $\mu \ll \nu$.

Sűrűségképlet

Legyen $(X, \mathcal{X})$ mérhetőségi tér, $\nu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ mérték, $g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemnegatív mérhető függvény. Ekkor a $\mu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$,

$$\mu(B) := \int_B g(x) \nu(dx), \quad B \in \mathcal{X},$$

halmazfüggvény mérték, amely pontosan akkor véges, ha g integrálható. Továbbá, $\mu \ll \nu$, és tetszőleges $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény esetén

$$\int_X h(x) \mu(dx) = \int_X h(x) g(x) \nu(dx)$$

abban az értelemben, hogy a két oldal ugyanakkor létezik, és ha léteznek, egyenlőek.

Radon–Nikodym tétel

Legyen $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér és $\nu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ egy σ -véges mérték. A $\mu : \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty]$ előjeles mérték akkor és csak akkor abszolút folytonos a ν mértékre nézve, ha létezik olyan $g : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ mérhető függvény, hogy tetszőleges $B \in \mathcal{X}$ esetén

$$\mu(B) = \int_B g(x) \nu(dx).$$

A g függvény ν -m.m. egyértelműen meg van határozva, azaz ha egy $h : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ mérhető függvényre is teljesül

$$\mu(B) = \int_B h(x) \nu(dx)$$

minden $B \in \mathcal{X}$ esetén, akkor $\nu(\{x \in X : g(x) \neq h(x)\}) = 0$.

A Radon–Nikodym tételben létező (ν -m.m. egyértelműen meghatározott) g függvényt a μ mértéknek a ν mértékre vonatkozó Radon–Nikodym deriváltjának nevezzük, melynek jelölése $\frac{d\mu}{d\nu}$.

Abszolút folytonos (eloszlású) véletlen változó

Legyen $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér, és $\nu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ σ -véges mérték. Azt mondjuk, hogy a $\xi : \Omega \rightarrow X$ véletlen változó **abszolút folytonos eloszlású a ν mértékre nézve**, ha $\mathbb{P}_\xi \ll \nu$. Azt mondjuk, hogy a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen változó **abszolút folytonos eloszlású**, ha abszolút folytonos eloszlású a d -dimenziós λ_d Lebesgue-mértékre (pontosabban λ_d -nek $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -re való leszűkítésére) nézve, és ekkor az $f_\xi := \frac{d\mathbb{P}_\xi}{d\lambda_d}$ Radon–Nikodym deriváltját ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Abszolút folytonos véletlen változó

Az $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha az F_ξ eloszlásfüggvény abszolút folytonos, azaz $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$ úgy, hogy ha $k \in \mathbb{N}$, $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_k < b_k$ és $\sum_{j=1}^k (b_j - a_j) < \delta$, akkor $\sum_{j=1}^k (F_\xi(b_j) - F_\xi(a_j)) < \varepsilon$.

Várható érték

Sűrűségfüggvény jellemzése

Egy $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye valamely d -dimenziós véletlen változónak, ha (Borel) mérhető, Lebesgue-majdnem mindenütt nemnegatív és $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = 1$.

Sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény kapcsolata

Ha az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor abszolút folytonos, akkor $f_X(x) = \partial_1 \dots \partial_d F_X(x)$ λ_d -m.m. $x \in \mathbb{R}^d$.

Abszolút folytonos véletlen vektor függvényének várható értéke

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ abszolút folytonos véletlen vektor és $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, akkor

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f_{\xi}(x) dx$$

abban az értelemben, hogy a két oldal ugyanakkor létezik, és ha léteznek, egyenlőek. (Ez az állítás a Transzformáció-tétel és a Sűrűség-tétel következménye.)

Abszolút folytonos véletlen változó kölcsönösen egyértelmű transzformációja

Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ abszolút folytonos véletlen változó, f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, melyre $\mathbb{P}(\xi \in D) = 1$. Legyen továbbá $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, mely kölcsönösen egyértelmű D -n, és deriváltja seholsem nulla. (Analízisből ismert, hogy ekkor $g(D) \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, és a $h : g(D) \rightarrow D$ inverzfüggvény folytonosan differenciálható, nemnulla deriválttal.)

Ekkor a $g(\xi)$ véletlen változó is abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye

$$f_{g(\xi)}(y) = \begin{cases} f_\xi(h(y)) |h'(y)| = \frac{f_\xi(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}, & \text{ha } y \in g(D), \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Függetlenség és abszolút folytonosság

Legyen $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ abszolút folytonos véletlen vektor. Ekkor ξ és η akkor és csak akkor függetlenek, ha együttes sűrűségfüggvényük $f_{\xi, \eta}$ a marginális sűrűségfüggvények f_ξ és f_η szorzata:

$$f_{\xi, \eta}(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y), \quad \lambda_1\text{-m.m. } x, y \in \mathbb{R}.$$

Függetlenség és abszolút folytonosság

Legyenek ξ és η független abszolút folytonos eloszlású véletlen változók. Ekkor (ξ, η) is abszolút folytonos eloszlású és sűrűségfüggvénye:

$$f_{\xi, \eta}(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y), \quad \lambda_1\text{-m.m. } x, y \in \mathbb{R}.$$

Független, abszolút folytonos eloszlású véletlen változók összege, szorzata, hányadosa

Legyenek ξ és η független, abszolút folytonos eloszlású véletlen változók f_ξ , illetve f_η sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

(i) a $\xi + \eta$ véletlen változó is abszolút folytonos eloszlású, és

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(z-y) f_\eta(y) dy, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R}.$$

Ezt a formulát **konvolúciós formulának** is hívják.

(ii) a $\xi\eta$ véletlen változó is abszolút folytonos eloszlású, és

$$f_{\xi\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta\left(\frac{z}{x}\right) \frac{dx}{|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi\left(\frac{z}{y}\right) f_\eta(y) \frac{dy}{|y|}, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R},$$

(iii) a $\frac{\xi}{\eta}$ véletlen változó is abszolút folytonos eloszlású, és

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = \frac{1}{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta\left(\frac{x}{z}\right) |x| dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(z y) f_\eta(y) |y| dy, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R}.$$

Együttesen abszolút folytonos eloszlású véletlen változók összege, szorzata, hányadosa

Ha ξ és η együttesen abszolút folytonos eloszlású véletlen változók $f_{\xi,\eta}$ együttes sűrűségfüggvénnyel, akkor

(i) a $\xi + \eta$ véletlen változó is abszolút folytonos eloszlású, és

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(z-y, y) dy, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R}.$$

(ii) a $\xi\eta$ véletlen változó is abszolút folytonos eloszlású, és

$$f_{\xi\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{dx}{|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}\left(\frac{z}{y}, y\right) \frac{dy}{|y|}, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R},$$

(iii) a $\frac{\xi}{\eta}$ véletlen változó is abszolút folytonos eloszlású, és

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = \frac{1}{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}\left(x, \frac{x}{z}\right) |x| dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(zy, y) |y| dy, \quad \lambda_1\text{-m.m. } z \in \mathbb{R}.$$

Várható érték

Mérték koncentrálódása részhalmazba

Legyen $(X, \mathcal{X})$ mérhetőségi tér, $\mu : \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty]$ előjeles mérték. Azt mondjuk, hogy a μ előjeles mérték **egy $B \in \mathcal{X}$ halmazba koncentrálódik**, ha $\mu(X \setminus B) = 0$.

Diszkrét eloszlás tartója

Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy **diszkrét** véletlen vektor (azaz $\xi(\Omega)$ megszámlálható halmaz). Azt mondjuk, hogy ξ egy $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ halmazba koncentrálódik, ha $\mathbb{P}_\xi$ a B halmazba koncentrálódik, ezzel ekvivalens módon $\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi \in B) = 1$. Az ilyen tulajdonságú halmazok metszetét (azaz a legszűkebb ilyen halmazt) a $\mathbb{P}_\xi$ mérték **tartójának** nevezzük. Jelölése: $\text{supp}(\xi)$.

Ekkor

$$\text{supp}(\xi) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \mathbb{P}_\xi(\{x\}) > 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \mathbb{P}(\xi = x) > 0 \right\},$$

melynek elemeit a $\mathbb{P}_\xi$ mérték **atomjainak** nevezzük.

Diszkrét véletlen vektor eloszlása és eloszlásfüggvénye

A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ diszkrét véletlen vektor eloszlása:

$$\mathbb{P}_\xi = \sum_{x \in \text{supp}(\xi)} \mathbb{P}(\xi = x) \delta_x,$$

ahol $x \in \mathbb{R}^d$ esetén δ_x az x pontba koncentrálódó Dirac-mértéket jelöli, azaz $\delta_x(A) = 1$, ha $x \in A$, és $\delta_x(A) = 0$, ha $x \notin A$, és eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \sum_{\{y \in \text{supp}(\xi) : y < x\}} \mathbb{P}(\xi = y), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Diszkrét véletlen vektor függvényének várható értéke

Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ diszkrét véletlen vektor és $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény. A $g(\xi)$ véletlen változó akkor és csak akkor integrálható, ha

$$\mathbb{E}(|g(\xi)|) = \sum_{x \in \text{supp}(\xi)} |g(x)| \mathbb{P}(\xi = x) < \infty,$$

és ekkor

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \sum_{x \in \text{supp}(\xi)} g(x) \mathbb{P}(\xi = x).$$

(Ez az állítás a Transzformáció-tétel speciális esete.)

Szingularitás

Legyen $(X, \mathcal{X})$ mérhetőségi tér. Azt mondjuk, hogy a $\mu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ és $\nu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ mértékek **szingulárisak egymásra (nézve)**, ha léteznek olyan diszjunkt $A, B \in \mathcal{X}$ halmazok, hogy μ az A halmazba, ν pedig a B halmazba koncentrálódik. Jelölése: $\mu \perp \nu$.

Szinguláris (eloszlású) véletlen vektor

Azt mondjuk, hogy a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor **szinguláris**, ha $\mathbb{P}_\xi \perp \lambda_d$, ahol λ_d a d -dimenziós Lebesgue-mértéket jelöli, ekvivalens módon $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ úgy, hogy $\lambda_d(B) = 0$ és $\mathbb{P}(\xi \in B) = 1$.

A diszkrét véletlen vektorok nyilván szingulárisak.

Szinguláris véletlen változó

A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó akkor és csak akkor szinguláris, ha $F'_\xi(x) = 0$ λ_1 -m.m. $x \in \mathbb{R}$.

Lebesgue-féle felbontási tétel

Legyen $(X, \mathcal{X})$ egy mérhető tér, μ és ν σ -véges mértékek $\mathcal{X}$ -en. Ekkor létezik olyan $f : X \rightarrow [0, \infty]$ mérhető függvény és olyan ν_s mérték $\mathcal{X}$ -en, hogy $\mu \perp \nu_s$ és

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu + \nu_s(A), \quad A \in \mathcal{X}.$$

Az f függvény μ -majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott, azaz ha $g : X \rightarrow [0, \infty]$ egy olyan mérhető függvény, melyre $\nu(A) = \int_A g \, d\mu + \nu_s(A)$, $A \in \mathcal{X}$, akkor

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

A fenti felbontást ν -nek a μ -re vonatkozó **Lebesgue-féle felbontásának** nevezzük.

Várható érték

Eloszlásfüggvények felbontási tétele

Tetszőleges $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eloszlásfüggvény egyértelműen felbontható

$$F = p_1 F_d + p_2 F_{af} + p_3 F_{fs}$$

alakban, ahol $p_1, p_2, p_3 \geq 0$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, F_d egy diszkrét véletlen változó, F_{af} egy abszolút folytonos véletlen változó, F_{fs} pedig egy szinguláris v. v. eloszlásfüggvénye, hogy F_{fs} folytonos is.

Momentumok

Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó.

- Legyen $\alpha \in \mathbb{R}_+$. A ξ **α -adik abszolút momentuma**: $\mathbb{E}(|\xi|^\alpha)$.
- Ha $k \in \mathbb{N}$, és ξ k -adik abszolút momentuma véges, akkor ξ **k -adik momentuma**: $\mathbb{E}(\xi^k) \in \mathbb{R}$,
 ξ **k -adik centrális momentuma**: $\mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^k) \in \mathbb{R}$.
- Ha ξ második (abszolút) momentuma véges, akkor ξ második centrális momentumát ξ **varianciájának (szórásnégyzetének)** nevezzük. Jelölése: $\text{Var}(\xi) := D^2(\xi) := \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2]$.

Várható érték

Véletlen vektor várható érték vektora

Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Ha $\mathbb{E}(|\xi_1|) < \infty, \dots, \mathbb{E}(|\xi_d|) < \infty$, akkor ξ **várható érték vektora**

$$\mathbb{E}(\xi) := (\mathbb{E}(\xi_1), \dots, \mathbb{E}(\xi_d))^T \in \mathbb{R}^d.$$

Jensen-egyenlőtlenség többdimenzióban

Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, melyre $\mathbb{E}(\|\xi\|) < \infty$. Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy Borel-mérhető, konvex halmaz, melyre $\mathbb{P}(\xi \in K) = 1$.

- ❶ Ekkor $\mathbb{E}(\xi) \in K$.
- ❷ Ha $K = \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ konvex és $\mathbb{E}(|g(\xi)|) < \infty$, akkor $g(\mathbb{E}(\xi)) \leq \mathbb{E}(g(\xi))$.
- ❸ Tetszőleges $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, konvex függvény esetén $\mathbb{E}(g(\xi)) \in (-\infty, \infty]$ és $g(\mathbb{E}(\xi)) \leq \mathbb{E}(g(\xi))$.
- ❹ Ha ξ diszkrét is, akkor tetszőleges $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény esetén $\mathbb{E}(g(\xi)) \in (-\infty, \infty]$ és $g(\mathbb{E}(\xi)) \leq \mathbb{E}(g(\xi))$.

Várható érték

Véletlen vektor kovarianciamátrixa (szórásmátrixa)

Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Ha $\mathbb{E}(\|\xi\|^2) < \infty$, azaz $\mathbb{E}(\xi_1^2) < \infty, \dots, \mathbb{E}(\xi_d^2) < \infty$, akkor ξ **kovarianciamátrixa**

$$\text{Cov}(\xi) := \mathbb{E} \left[(\xi - \mathbb{E}(\xi))(\xi - \mathbb{E}(\xi))^{\top} \right] \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

melynek elemei $\mathbb{E}[(\xi_i - \mathbb{E}(\xi_i))(\xi_j - \mathbb{E}(\xi_j))] =: \text{Cov}(\xi_i, \xi_j)$.

Kovarianciamátrix tulajdonságai

Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, $\mathbb{E}(\|\xi\|^2) < \infty$.

- $\text{Cov}(\xi)$ szimmetrikus: $\text{Cov}(\xi)^{\top} = \text{Cov}(\xi)$.
- $\text{Cov}(\xi)$ pozitív szemidefinit, azaz $\forall x \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$x^{\top} \text{Cov}(\xi) x = \langle \text{Cov}(\xi) x, x \rangle = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \text{Cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j \geq 0.$$

- Ha $A \in \mathbb{R}^{r \times d}$ és $b \in \mathbb{R}^r$, akkor $\mathbb{E}(A\xi + b) = A\mathbb{E}(\xi) + b$ és $\text{Cov}(A\xi + b) = A\text{Cov}(\xi)A^{\top}$.

Komplex értékű véletlen változó várható értéke

Azt mondjuk, hogy egy komplex értékű $\xi = \operatorname{Re} \xi + i \operatorname{Im} \xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ véletlen változónak **véges a várható értéke (integrálható)**, ha az $\mathbb{E}(\operatorname{Re} \xi)$ és $\mathbb{E}(\operatorname{Im} \xi)$ várható értékek végesek, és ekkor $\mathbb{E}(\xi) := \mathbb{E}(\operatorname{Re} \xi) + i \mathbb{E}(\operatorname{Im} \xi)$.

Komplex értékű véletlen változó várható értéke

Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ komplex értékű véletlen változó.

- ξ várható értéke akkor és csak akkor véges, ha $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$.
- Ha $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, akkor $|\mathbb{E}(\xi)| \leq \mathbb{E}(|\xi|)$.

Komplex értékű véletlen változók függetlensége

Legyen $\Gamma \neq \emptyset$ egy (index)halmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\xi_\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ valószínűségi változó. Ekkor a $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók akkor és csak akkor **függetlenek**, ha a $\{(\operatorname{Re} \xi_\gamma, \operatorname{Im} \xi_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ valószínűségi változók függetlenek.

Komplex értékű véletlen változók függetlensége

Ha $\xi_1, \dots, \xi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ független valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}(|\xi_i|) < \infty$, $i = 1 \dots, n$, akkor $\mathbb{E}(|\xi_1 \cdots \xi_n|) < \infty$ és

$$\mathbb{E}(\xi_1 \cdots \xi_n) = \mathbb{E}(\xi_1) \cdots \mathbb{E}(\xi_n).$$

Karakterisztikus függvény

Karakterisztikus függvény

Az $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor **karakterisztikus függvénye** $\varphi_X: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} F_X(dx) = \mathbb{E}(\cos(\langle t, X \rangle)) + i \mathbb{E}(\sin(\langle t, X \rangle)),$$

ahol $t \in \mathbb{R}^d$.

Ha X diszkrét véletlen vektor $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ értékészlettel és $\{p_k, k \in \mathbb{N}\}$ eloszlással, akkor

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\langle t, x_k \rangle} p_k, \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

illetve, ha X abszolút folytonos eloszlású f_X sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} f_X(x) dx, \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Karakterisztikus függvény tulajdonságai

- 1 $|\varphi_X| \leq 1$, és $\varphi_X(0) = 1$.
- 2 φ_X egyenletesen folytonos.
- 3 Tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$, azaz φ_X Hermite szimmetrikus.
- 4 **Bochner-tétel:** A $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ függvény akkor és csak akkor karakterisztikus függvénye valamely véletlen vektornak, ha $\varphi(0) = 1$, folytonos és **pozitív szemidefinit**, azaz tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d$ esetén a $(\varphi(t_j - t_\ell))_{j,\ell=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pozitív szemidefinit, azaz tetszőleges $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ esetén

$$\sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \varphi(t_j - t_\ell) z_j \overline{z_\ell} \geq 0.$$

Karakterisztikus függvény

Karakterisztikus függvény tulajdonságai

- 5 Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{r \times d}$, $b \in \mathbb{R}^r$ és $t \in \mathbb{R}^r$ esetén

$$\varphi_{AX+b}(t) = e^{i\langle t, b \rangle} \varphi_X(A^\top t).$$

- 6 **Egyértelműségi tétel:** $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ akkor és csak akkor, ha $\varphi_X = \varphi_Y$.

- 7 $X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_1}, \dots, X_\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_\ell}$ akkor és csak akkor függetlenek, ha tetszőleges $t_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}^{d_\ell}$ esetén

$$\varphi_{X_1, \dots, X_\ell}(t_1, \dots, t_\ell) = \prod_{j=1}^{\ell} \varphi_{X_j}(t_j).$$

- 8 Ha $X_1, \dots, X_\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ függetlenek, akkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\varphi_{X_1 + \dots + X_\ell}(t) = \prod_{j=1}^{\ell} \varphi_{X_j}(t).$$

Karakterisztikus függvény

Karakterisztikus függvény tulajdonságai

- 9 Ha $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor és $\mathbb{E}(\|X\|^n) < \infty$ valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor φ_X n -szer folytonosan differenciálható, és tetszőleges $r_1, \dots, r_d$, $r_1 + \dots + r_d \leq n$ nemnegatív egészek esetén

$$\partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d} \varphi_X(t) = i^{r_1 + \dots + r_d} \mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d} e^{i\langle t, X \rangle}), \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

$$\mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d}) = \frac{\partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d} \varphi_X(0)}{i^{r_1 + \dots + r_d}},$$

továbbá,

$$\varphi_X(t) = \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_d \leq n, \\ r_1, \dots, r_d \in \mathbb{Z}_+}} \frac{i^{r_1 + \dots + r_d} t_1^{r_1} \dots t_d^{r_d}}{r_1! \dots r_d!} \mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d}) + R_n(t), \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

ahol $R_n(t) = O(\|t\|^n)$, $t \in \mathbb{R}^d$, és $R_n(t) = o(\|t\|^n)$ ha $t \rightarrow 0$, mégpedig $|R_n(t)| \leq 3 \frac{\|t\|^n}{n!} \mathbb{E}(\|X\|^n)$, és $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R_n(t)}{\|t\|^n} = 0$.

Karakterisztikus függvény

Karakterisztikus függvény tulajdonságai

- 10 Ha $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó és $\varphi_X^{(2n)}(0)$ létezik és véges valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén, azaz $\varphi_X^{(2n)}(0) \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{E}(X^{2n}) < \infty$.
- 11 Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(\|X\|^n) < \infty$, és

$$R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mathbb{E}(\|X\|^n)/n!}} \in (0, \infty],$$

akkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$, $\|t\| < R$ esetén

$$\varphi_X(t) = \sum_{r_1=0}^{\infty} \dots \sum_{r_d=0}^{\infty} \frac{i^{r_1+\dots+r_d} \mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d})}{r_1! \dots r_d!} t_1^{r_1} \dots t_d^{r_d}.$$

- 12 **Inverziós formula:** Ha $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R}^d)$, azaz $\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_X(t)| dt < \infty$, akkor X eloszlása abszolút folytonos, és a sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t, x \rangle} \varphi_X(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Ekkor f_X korlátos és folytonos.

Karakterisztikus függvény

Karakterisztikus függvény tulajdonságai

13 Legyen $d = 1$. Ekkor $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, akkor és csak akkor, ha X szimmetrikus, azaz $X \stackrel{D}{=} -X$.

Pólya-tétel

Ha $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ egy olyan függvény, hogy folytonos, páros, $\varphi(0) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$, és $\varphi|_{[0, \infty)}$ konvex, akkor φ karakterisztikus függvénye valamely $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változónak.

A Pólya-tétel segítségével könnyű példát mutatni olyan karakterisztikus függvényekre, melyek megegyeznek egy véges intervallumon, anélkül, hogy a hozzájuk egyértelműen tartozó eloszlásfüggvények azonosak lennének.

Standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye

Ha $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, akkor $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$.

Véletlen vektorok eloszlásbeli konvergenciája

Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektorok. Azt mondjuk, hogy **az $(X_n)_{n \geq 1}$ sorozat eloszlásban konvergál X -hez**, ha $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ az F_X minden x folytonossági pontjában. Jelölése: $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

Folytonossági tétel (Paul Lévy)

Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$ véletlen vektorok.

- 1 Ha létezik olyan $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, hogy $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{t \in \mathbb{R}^d : \|t\| \leq \delta\}} |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)| = 0, \quad \forall \delta > 0.$$

Speciálisan, tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$, ha $n \rightarrow \infty$.

- 2 Ha tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) =: \varphi(t)$, és φ folytonos a $0 \in \mathbb{R}^d$ pontban, akkor létezik olyan $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, hogy $\varphi_X = \varphi$, és $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$.

Folytonossági tétel, Paul Lévy

Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektorok. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:

- 1 $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$, ha $n \rightarrow \infty$ tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén,
- 2 $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$.

Karakterisztikus függvény

Generátorfüggvény

Ha az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor koordinátái nemnegatív egész értékeket vesznek fel, azaz X a $\mathbb{Z}_+^d$ halmazba koncentrálódik, vagyis $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}_+^d) = 1$, akkor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ **generátorfüggvénye** a

$$\begin{aligned} G_X(z) &:= G_{X_1, \dots, X_d}(z_1, \dots, z_d) := \mathbb{E}(z^X) := \mathbb{E}(z_1^{X_1} \cdots z_d^{X_d}) \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_d=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_d = k_d) z_1^{k_1} \cdots z_d^{k_d} \end{aligned}$$

d -változós komplex hatványsor összegfüggvénye (ahol létezik).

Ez a hatványsor abszolút konvergens a

$$\{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| \leq 1, \dots, |z_d| \leq 1\}$$

halmazon, és X karakterisztikus függvénye a

$$\varphi_X(t) = \varphi_X(t_1, \dots, t_d) = G_X(e^{it_1}, \dots, e^{it_d}), \quad t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$$

periodikus függvény.

Generátorfüggvény tulajdonságai

- 1 $G_X(1, \dots, 1) = 1$.
- 2 G_X analitikus a $\{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| < 1, \dots, |z_d| < 1\}$ halmazon.
- 3 Tetszőleges $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_d = k_d) = \frac{\partial_1^{k_1} \dots \partial_d^{k_d} G_X(0, \dots, 0)}{k_1! \dots k_d!}.$$

- 4 Egyértelműségi tétel generátorfüggvényekre:
 $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y \iff \forall x \in [-1, 1]^d$ esetén $G_X(x) = G_Y(x)$.
- 5 Ha X és Y függetlenek, akkor $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$ a $\{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| \leq 1, \dots, |z_d| \leq 1\}$ halmazon.

Generátorfüggvény tulajdonságai

6 Tetszőleges $r_1, \dots, r_d \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\mathbb{E}(X_1^{r_1} \cdots X_d^{r_d}) < \infty \iff \partial_1^{r_1} \cdots \partial_d^{r_d} G_X(1-, \dots, 1-) < \infty,$$

és

$$\begin{aligned} & \partial_1^{r_1} \cdots \partial_d^{r_d} G_X(1-, \dots, 1-) \\ &= \mathbb{E}(X_1(X_1 - 1) \cdots (X_1 - r_1 + 1) \cdots X_d(X_d - 1) \cdots (X_d - r_d + 1)). \end{aligned}$$

Folytonossági tétel generátorfüggvényekre

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, olyan véletlen vektorok, hogy $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}_+^d) = 1$ és $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{Z}_+^d) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$.
- $\mathbb{P}(X_n = k) \rightarrow \mathbb{P}(X = k)$, ha $n \rightarrow \infty$ minden $k \in \mathbb{Z}_+^d$ esetén.
- $G_{X_n}(x) \rightarrow G_X(x)$, ha $n \rightarrow \infty$ minden $x \in [-1, 1]^d$ esetén.

Laplace-transzformált

Ha az $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor koordinátái nemnegatív értékeket vesznek fel, azaz X az $\mathbb{R}_+^d$ halmazba koncentrálódik, vagyis $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}_+^d) = 1$, akkor X

Laplace-transzformáltja $\psi_X : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\psi_X(s) &:= \psi_{X_1, \dots, X_d}(s_1, \dots, s_d) := \mathbb{E}(e^{-\langle s, X \rangle}) \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-s_1 x_1 - \dots - s_d x_d} dF_{X_1, \dots, X_d}(x_1, \dots, x_d),\end{aligned}$$

ahol $s \in \mathbb{R}_+^d$.

Ha $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}_+^d) = 1$, akkor

$$\begin{aligned}\psi_X(s_1, \dots, s_d) &= G_X(e^{-s_1}, \dots, e^{-s_d}), \quad (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{R}_+^d, \\ G_X(x_1, \dots, x_d) &= \psi_X(-\log x_1, \dots, -\log x_d), \quad (x_1, \dots, x_d) \in (0, 1)^d.\end{aligned}$$

Karakterisztikus függvény

Laplace-transzformált tulajdonságai

❶ $0 \leq \psi_X \leq 1$, és $\psi_X(0) = 1$.

❷ ψ_X analitikus a $(0, \infty)^d$ halmazon.

❸ Egyértelműségi tétel Laplace-transzformáltakra:

$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ akkor és csak akkor, ha $\psi_X = \psi_Y$.

❹ Ha X és Y függetlenek, akkor $\psi_{X+Y} = \psi_X \psi_Y$.

❺ Tetszőleges $r_1, \dots, r_d \in \mathbb{Z}_+$ esetén

$$\mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d}) < \infty \iff \partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d} \psi_X(0+, \dots, 0+) < \infty,$$

és $\partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d} \psi_X(0+, \dots, 0+) = (-1)^{r_1 + \dots + r_d} \mathbb{E}(X_1^{r_1} \dots X_d^{r_d})$.

Folytonossági tétel Laplace-transzformáltakra

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$ olyan véletlen vektorok, hogy $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}_+^d) = 1$ és $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{R}_+^d) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

• $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha $n \rightarrow \infty$,

• $\psi_{X_n}(s) \rightarrow \psi_X(s)$, ha $n \rightarrow \infty$ minden $s \in \mathbb{R}_+^d$ esetén.

Nevezetes eloszlások

p paraméterű Bernoulli-eloszlás

Legyen $p \in [0, 1]$. Azt mondjuk, hogy az X diszkrét véletlen változó **p paraméterű Bernoulli-eloszlású**, ha lehetséges értékei: 0 és 1, és eloszlása

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Ha $A \in \mathcal{A}$ esemény, akkor az $\mathbb{1}_A := \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0 & \text{ha } A \text{ nem következik be} \end{cases}$ véletlen változó Bernoulli-eloszlású $\mathbb{P}(A)$ paraméterrel.

Generátorfüggvény

$$G_X(z) = 1 - p + pz = 1 + p(z - 1), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Laplace-transzformált

$$\psi_X(s) = 1 - p + pe^{-s} = 1 - p(1 - e^{-s}), \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

Karakterisztikus függvény

$$\varphi_X(t) = 1 - p + pe^{it} = 1 + p(e^{it} - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(n, p) paraméterű binomiális eloszlás

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $p \in [0, 1]$. Azt mondjuk, hogy az X diszkrét véletlen változó **(n, p) paraméterű binomiális eloszlású**, ha lehetséges értékei: $0, 1, \dots, n$, és eloszlása

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Ha egy $A \in \mathcal{A}$ eseménnyel kapcsolatban n független kísérletet végzünk és

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ bekövetkezik az } i\text{-edik alkalommal,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

akkor az $X = X_1 + \dots + X_n$ véletlen változó $(n, \mathbb{P}(A))$ paraméterű binomiális eloszlású, és $X_1, \dots, X_n$ független, $\mathbb{P}(A)$ paraméterű Bernoulli-eloszlásúak.

Nevezetes eloszlások

Legyen X (n, p) paraméterű binomiális eloszlású véletlen változó, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $p \in [0, 1]$.

Generátorfüggvény

$$G_X(z) = (1 - p + pz)^n = (1 + p(z - 1))^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Laplace-transzformált

$$\psi_X(s) = (1 - p + pe^{-s})^n = (1 - p(1 - e^{-s}))^n, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

Karakterisztikus függvény

$$\varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n = (1 + p(e^{it} - 1))^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$(n, M, N - M)$ paraméterű hipergeometrikus eloszlás

Legyenek $n, N, M \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $M \leq N$. Azt mondjuk, hogy az X diszkrét véletlen változó **$(n, M, N - M)$ paraméterű hipergeometrikus eloszlású**, ha olyan egész k értékeket vehet fel, melyekre teljesül $0 \leq k \leq n$, $k \leq M$ és $n - k \leq N - M$, és eloszlása

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ha egy dobozban M piros és $N - M$ fekete golyó van, és visszatevés nélkül húzunk ki n golyót, és X jelöli a kihúzott piros golyók számát, akkor az X véletlen változó $(n, M, N - M)$ paraméterű hipergeometrikus eloszlású.

Nevezetes eloszlások

p paraméterű r -edrendű negatív binomiális eloszlás

Legyen $r \in \mathbb{N}$ és $p \in (0, 1]$. Azt mondjuk, hogy az X diszkrét véletlen változó **p paraméterű r -edrendű negatív binomiális eloszlású**, ha lehetséges értékei: $0, 1, \dots$, és eloszlása

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \quad k \in \{0, 1, \dots\}.$$

A p paraméterű elsőrendű negatív binomiális eloszlást **p paraméterű geometriai eloszlásnak** is hívják.

Ha egy $A \in \mathcal{A}$ eseménnyel kapcsolatban független kísérleteket végzünk és az A r -edik bekövetkezéséhez szükséges kísérletek száma $r + X$, akkor az X véletlen változó $\mathbb{P}(A)$ paraméterű r -edrendű negatív binomiális eloszlású.

Geometriai eloszlások konvolúciója

Ha az $X_1, \dots, X_r$ véletlen változók függetlenek és p paraméterű elsőrendű negatív binomiális eloszlásúak, akkor az $X_1 + \dots + X_r$ véletlen változó p paraméterű r -edrendű negatív binomiális eloszlású.

Nevezetes eloszlások

Legyen X p paraméterű r -edrendű negatív binomiális eloszlású véletlen változó, ahol $r \in \mathbb{N}$ és $p \in (0, 1]$.

Generátorfüggvény

$$G_X(z) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)z} \right)^r, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| < \frac{1}{1-p},$$

ahol $p = 1$ esetén $\frac{1}{1-p} := \infty$.

Karakterisztikus függvény

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)e^{it}} \right)^r, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Geometriai eloszlás örökifjú tulajdonsága

Ha az X véletlen változó p paraméterű geometriai eloszlású, akkor

$$\mathbb{P}(X \geq k + \ell \mid X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq \ell), \quad k, \ell \in \{0, 1, \dots\}.$$

Nevezetes eloszlások

λ paraméterű Poisson-eloszlás

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Azt mondjuk, hogy az X diszkrét véletlen változó **λ paraméterű Poisson eloszlású**, ha lehetséges értékei: $0, 1, \dots$, és eloszlása

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \{0, 1, \dots\}.$$

Generátorfüggvény

$$G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Karakterisztikus függvény

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Binomiális eloszlás közelítése Poisson eloszlással

Ha X_n , $n \in \mathbb{N}$, binomiális eloszlású véletlen változók (n, p_n) paraméterrel, és $np_n \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$ ha $n \rightarrow \infty$, akkor $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ ha $n \rightarrow \infty$, ahol az X véletlen változó λ paraméterű Poisson-eloszlású.

Nevezetes eloszlások

Egyenletes eloszlás a $\{0, 1, \dots, N-1\}$ halmazon

Azt mondjuk, hogy az X diszkrét véletlen változó **egyenletes eloszlású az $\{0, 1, \dots, N-1\}$ halmazon**, ha

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{N}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Generátorfüggvény

$$G_X(z) = \frac{1}{N}(1 + z + \dots + z^{N-1}) = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{z^N - 1}{z - 1} & \text{ha } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \\ 1 & \text{ha } z = 1. \end{cases}$$

Karakterisztikus függvény

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{N}(1 + e^{it} + \dots + e^{it(N-1)}) = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{e^{itN} - 1}{e^{it} - 1} & \text{ha } e^{it} \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \\ 1 & \text{ha } e^{it} = 1, \end{cases}$$

ahol $t \in \mathbb{R}$.

Nevezetes eloszlások

Egyenletes eloszlás az (a, b) intervallumon

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a < b$. Azt mondjuk, hogy az X abszolút folytonos véletlen változó **egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon**, ha sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b), \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Karakterisztikus függvény

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Folytonos egyenletes eloszlás közelítése

Ha X_n , $n \in \mathbb{N}$, egyenletes eloszlású véletlen változók a $\{0, 1, \dots, n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, halmazokon, akkor $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ ha $n \rightarrow \infty$, ahol az X véletlen változó egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon.

Nevezetes eloszlások

λ paraméterű exponenciális eloszlás

Legyen $\lambda > 0$. Azt mondjuk, hogy az X abszolút folytonos véletlen változó λ **paraméterű exponenciális eloszlású**, ha sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága

Ha az X véletlen változó λ paraméterű exponenciális eloszlású, akkor

$$\mathbb{P}(X \geq t + h \mid X \geq t) = \mathbb{P}(X \geq h), \quad t, h \geq 0.$$

Laplace-transzformált

$$\psi_X(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda}, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

Karakterisztikus függvény

$$\varphi_X(t) = \left(1 - i \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nevezetes eloszlások

(m, σ^2) paraméterű normális eloszlás

Legyen $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$. Azt mondjuk, hogy az X abszolút folytonos véletlen változó **(m, σ^2) paraméterű normális eloszlású**, ha sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Karakterisztikus függvény

$$\varphi_X(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

de Moivre CLT, binomiális eloszlás közelítése normális eloszlással

Ha X_n , $n \in \mathbb{N}$, binomiális eloszlású véletlen változók (n, p) paraméterrel, ahol $p \in (0, 1)$, akkor $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ ha $n \rightarrow \infty$, ahol az X véletlen változó $(0, 1)$ paraméterű normális eloszlású.

Többdimenziós normális eloszlás

- Azt mondjuk, hogy az $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor **standard normális eloszlású**, ha $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$, ahol $Y_1, \dots, Y_d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ független, standard normális eloszlású véletlen változók.
- Azt mondjuk, hogy az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor **normális eloszlású**, ha X eloszlása megegyezik $AY + m$ eloszlásával, ahol $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ standard normális eloszlású, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ és $m \in \mathbb{R}^d$.

Többdimenziós normális eloszlás

Karakterisztikus függvény, sűrűségfüggvény

- Egy $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor akkor és csak akkor normális eloszlású, ha karakterisztikus függvénye

$$\varphi_X(t) = \exp \left\{ i \langle m, t \rangle - \frac{1}{2} \langle Dt, t \rangle \right\}, \quad t \in \mathbb{R}^d$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}^d$, és $D \in \mathbb{R}^{d \times d}$ szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix, azaz $D^\top = D$, valamint tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén $\langle Dt, t \rangle \geq 0$. Továbbá $m = \mathbb{E}(X)$, $D = \text{Cov}(X)$.

- Ha D invertálható, akkor X abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(D)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle D^{-1}(x - m), x - m \rangle \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Azt mondjuk, hogy az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor **normális eloszlású** (m, D) **paraméterekkel**, ha X karakterisztikus függvénye a fenti tételben adott alakú. Jelölése: $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(m, D)$.

Többdimenziós normális eloszlás lineáris transzformáltja

Ha $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(m, D)$ d -dimenziós normális eloszlású véletlen vektor, és $a \in \mathbb{R}^\ell$, $B \in \mathbb{R}^{\ell \times d}$, akkor $a + BX \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(a + Bm, BDB^\top)$ ℓ -dimenziós normális eloszlású véletlen vektor.

Többdimenziós normális eloszlás karakterizálása

Egy $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor akkor és csak akkor normális eloszlású, ha minden $c \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén a $c^\top X$ véletlen változó normális eloszlású.

Többdimenziós normális eloszlás

Többdimenziós normális eloszlás koordinátáinak függetlensége

Legyen $(X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_\ell)$ $k + \ell$ -dimenziós normális eloszlású véletlen vektor, és tegyük fel, hogy bármely $i \in \{1, \dots, k\}$ és $j \in \{1, \dots, \ell\}$ esetén $\text{Cov}(X_i, Y_j) = 0$. Ekkor a $(X_1, \dots, X_k)$ és $(Y_1, \dots, Y_\ell)$ véletlen vektorok függetlenek.

Lineáris kombinációk függetlensége

Legyenek $X_1, \dots, X_d$ független, standard normális eloszlású véletlen változók. Az $a_1 X_1 + \dots + a_d X_d$ és $b_1 X_1 + \dots + b_d X_d$ lineáris kombinációk akkor és csak akkor függetlenek, ha az $(a_1, \dots, a_d)$ és $(b_1, \dots, b_d)$ vektorok merőlegesek egymásra.

Véletlen vektorok konvergenciája

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok. Azt mondjuk, hogy az $X_1, X_2, \dots$ **sorozat X -hez konvergál**

- **majdnem biztosan** (jelölése $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ vagy $X_n \rightarrow X$ $\mathbb{P}$ -m.b.), ha
$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right) = 1;$$
- **sztochasztikusan** (jelölése $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$), ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\|X_n - X\| \geq \varepsilon) = 0;$$

- **eloszlásban** (jelölése $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$), ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

minden olyan $x \in \mathbb{R}^d$ pontban, ahol F_X folytonos;

- **r -edik momentumban**, ahol $r > 0$ (jelölése $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$ vagy $X_n \xrightarrow{L_r} X$), ha

$$\mathbb{E}(\|X\|^r) < \infty, \mathbb{E}(\|X_n\|^r) < \infty, n \in \mathbb{N}, \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|X_n - X\|^r) = 0.$$

Konvergenciafajták kapcsolata

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok.

- Ha $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, vagy valamely $r > 0$ esetén $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$, akkor $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.
- Ha $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$ valamely $r > 0$ esetén, akkor tetszőleges $s \in (0, r)$ esetén $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_s} X$.

Sztocasztikus konvergencia határértékének egyértelműsége

Ha $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok úgy, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, és $X_n = Y_n$ $\mathbb{P}$ -m.b. minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $X = Y$ $\mathbb{P}$ -m.b. Speciálisan, ha $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, $Y_n \xrightarrow{\text{m.b.}} Y$ és $X_n = Y_n$ $\mathbb{P}$ -m.b. minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $X = Y$ $\mathbb{P}$ -m.b.

Sztochasztikus konvergencia egy ekvivalens átfogalmazása

Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok. Az X_n , $n \in \mathbb{N}$, sorozat akkor és csak akkor konvergál sztochasztikusan valamilyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektorhoz, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{m \in \mathbb{N} : m > n\}} \mathbb{P}(\|X_m - X_n\| > \varepsilon) = 0.$$

Sztochasztikusan 0-hoz tartó monoton csökkenő sorozat

Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen változók. Ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, amint $n \rightarrow \infty$, és $\mathbb{P}(0 \leq X_{n+1} \leq X_n) = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$, amint $n \rightarrow \infty$.

Majdnem biztos és sztochasztikus konvergencia

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok.

- Az alábbi állítások ekvivalensek:

(a) $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, amint $n \rightarrow \infty$,

(b) $\sup_{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}} \|X_k - X\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, amint $n \rightarrow \infty$, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{esetén} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}} \|X_k - X\| > \varepsilon \right) = 0,$$

(c) $\sup_{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}} \|X_k - X\| \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$, amint $n \rightarrow \infty$.

Véletlen vektorok konvergenciája

- Az alábbi állítások ekvivalensek:

(a) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majdnem biztosan konvergál valamely d -dimenziós véletlen vektorhoz,

(b) $\sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X_n\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, amint $n \rightarrow \infty$, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X_n\| > \varepsilon \right) = 0,$$

(c) $\sup_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}} \|X_k - X_n\| \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$, amint $n \rightarrow \infty$.

• $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|X_k - X\| \geq \varepsilon) < \infty \implies X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$.

• $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, amint $n \rightarrow \infty \iff$ pozitív egészek bármely $n_1 < n_2 < \dots$ sorozatának van olyan $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ részsorozata, hogy $X_{n_{k_i}} \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, amint $i \rightarrow \infty$. Speciálisan, ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, amint $n \rightarrow \infty$, akkor létezik olyan $n_1 < n_2 < \dots$ részsorozat, hogy $X_{n_\ell} \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, amint $\ell \rightarrow \infty$ (Riesz-féle kiválasztási tétel).

Véletlen vektorok konvergenciája

Véletlen vektorok folytonos függvényének konvergenciája

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, és $Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok és $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^r$ folytonos függvény.

- Ha $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ és $Y_n \xrightarrow{\text{m.b.}} Y$, akkor $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{\text{m.b.}} g(X, Y)$.
- Ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ és $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, akkor $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X, Y)$.

Konvergencia és műveletek kapcsolata

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, és $Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok.

- Ha $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ és $Y_n \xrightarrow{\text{m.b.}} Y$, akkor $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X + Y$ és $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{\text{m.b.}} \langle X, Y \rangle$.
- Ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ és $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, akkor $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$ és $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X, Y \rangle$.
- Ha $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$ és $Y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} Y$ valamely $r > 0$ esetén, akkor $X_n + Y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X + Y$.

Véletlen vektorok konvergenciája

Véletlen vektorok egyenletes integrálhatósága

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres halmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $X_\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Azt mondjuk, hogy az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok **egyenletesen integrálhatók**, ha

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K\}}) = 0.$$

Ha $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres **véges** halmaz, akkor az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletes integrálhatósága azzal ekvivalens, hogy $\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\|) < \infty$.

Speciálisan, ha X_n , $n \in \mathbb{N}$, azonos eloszlású integrálható véletlen vektorok sorozata, akkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálható.

Végtelen számosságú Γ halmaz esetén a következő tétel szolgáltat szükséges és elégséges feltételt.

Egyenletes integrálhatóság

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres halmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $X_\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok akkor és csak akkor egyenletesen integrálhatók, ha

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\|) < \infty$$

és

$$\lim_{\mathbb{P}(A) \rightarrow 0} \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_A) = 0,$$

amit úgy értünk, hogy $\forall \varepsilon > 0$ létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\mathbb{E}(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_A) < \varepsilon$ minden $\gamma \in \Gamma$ és minden olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, melyre $\mathbb{P}(A) < \delta$.

Véletlen vektorok konvergenciája

Egyenletes integrálhatóság

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres halmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $X_\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Y_\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektorok.

- Ha létezik olyan $r > 1$, hogy $\sup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}(\|X_\gamma\|^r) < \infty$, akkor az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletesen integrálhatók.
- Ha az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ és $\{Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletesen integrálhatók, akkor az $\{X_\gamma + Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok is egyenletesen integrálhatók.
- Ha az $\{Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletesen integrálhatók és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $\|X_\gamma\| \leq \|Y_\gamma\|$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok is egyenletesen integrálhatók.

Momentum konvergenciatétel (Vitali)

Legyenek $X, X_1, X_2, \dots$ d -dimenziós véletlen vektorok, és $r > 0$.

Az $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$ konvergencia azzal ekvivalens, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ és az $\{\|X_n\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók egyenletesen integrálhatók.

Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája

Legyenek μ_n , $n \in \mathbb{N}$, és μ valószínűségi mértékek az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhetőségi téren.

Azt mondjuk, hogy a μ_n , $n \in \mathbb{N}$, sorozat **gyengén konvergál** μ -höz (jelölése: $\mu_n \Rightarrow \mu$), ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ minden olyan $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén, melyre $\mu(\partial A) = 0$, ahol $\partial A = A^- \setminus A^\circ$ az A halmaz határát jelöli.

Véletlen vektorok konvergenciája

Portmanteau tétel

Legyenek μ_n , $n \in \mathbb{N}$, és μ valószínűségi mértékek az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhetőségi téren. A következő állítások ekvivalensek:

- 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu_n(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu(dy)$ minden $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény esetén.
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu_n(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mu(dy)$ minden $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, egyenletesen folytonos függvény esetén.
- 3 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$ minden $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ zárt halmaz esetén.
- 4 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$ minden $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ nyitott halmaz esetén.
- 5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ minden $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén, melyre $\mu(\partial A) = 0$.

A "portmanteau" szó eredetileg nagy utazó táskát jelentett. A nyelvészetben ma szóösszerántást jelent: két különböző jelentésű eredeti szó összevonásával teljesen új jelentésű szó jön létre (például: cső + orr -> csőr vagy Hungarian + English -> Hunglish).

Eloszlásbeli és gyenge konvergencia kapcsolata

Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektorok. A következő állítások ekvivalensek:

- ❶ $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.
- ❷ $\mathbb{P}_{X_n} \Rightarrow \mathbb{P}_X$.
- ❸ $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X))$ minden $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény esetén.
- ❹ $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X))$ minden $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, egyenletesen folytonos függvény esetén.
- ❺ $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$ minden $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ zárt halmazra.
- ❻ $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in G)$ minden $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ nyitott halmazra.
- ❼ $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A)$ minden olyan $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ Borel-halmaz esetén, melyre $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$.

Véletlen vektorok konvergenciája

Egy $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ mérhető függvény esetén jelölje D_h a h szakadási (nem folytonossági) pontjaiból álló halmazt, azaz

$$D_h := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{létezik olyan } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ } \mathbb{R}^d\text{-beli sorozat, hogy } x_n \rightarrow x, \right. \\ \left. \text{de } h(x_n) \not\rightarrow h(x) \right\}.$$

Mértékelméletből ismert, hogy $D_h \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Leképezési tétel

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok, és $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ mérhető függvény.

Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ és $\mathbb{P}(X \in D_h) = 0$, akkor $h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X)$.

Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ és h folytonos, akkor $D_h = \emptyset$, és $h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X)$, mely esetben a leképezési tételt folytonos leképezések tételének is szokás hívni.

Cramér–Szluckij lemma

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, és $Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok.

Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ és $X_n - Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, akkor $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

Együttes eloszlásbeli konvergencia

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok, és $c \in \mathbb{R}^d$. Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ és $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$, akkor $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, c)$.

Véletlen vektorok konvergenciája

Véletlen vektorok konvergenciája

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $Z_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok, és $a \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}$.

- Ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, akkor $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.
- **(Cramér–Slutsky)** Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b$ és $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$, akkor $Y_n X_n + Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} bX + a$. Speciálisan, ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, és $a, a_n \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, $b, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, hogy $a_n \rightarrow a$ és $b_n \rightarrow b$, akkor $b_n X_n + a_n \xrightarrow{\mathcal{D}} bX + a$.
- $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ akkor és csak akkor, ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} a$.

Leképezési tétel (sztochasztikus konvergenciára)

Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok, $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ mérhető függvény, és $x \in \mathbb{R}^d$. Ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} x$ és $x \notin D_h$, akkor $h(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(x)$.

Folytonos leképezési tétel (sztochasztikus konvergenciára)

Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektorok, és $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ folytonos függvény. Ha $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, akkor $h(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(X)$.

Leképezési tétel (várható értékre)

Legyenek $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, véletlen vektorok és $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és mérhető függvény, melyre $\mathbb{P}(X \in D_h) = 0$. Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, akkor $\mathbb{E}(h(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(h(X))$.

Véletlen vektorok konvergenciája

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, valószínűségi változók.
Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, akkor $\mathbb{E}(|X|) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n|)$.

Eloszlásbeli konvergencia és az egyenletes integrálhatóság, I

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, valószínűségi változók.
Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ és $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálható, akkor
 $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ és $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$.

Eloszlásbeli konvergencia és az egyenletes integrálhatóság, II

Legyenek $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, valószínűségi változók.
Ha $X_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $X \geq 0$, $\mathbb{E}(X_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X) < \infty$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$
és $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$, akkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálható.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező.

Feltételes relatív gyakoriság

Ha n független kísérletet végzünk, akkor egy $A \in \mathcal{A}$ esemény **feltételes relatív gyakorisága azon feltétel mellett, hogy a $B \in \mathcal{A}$ esemény bekövetkezett**

$$r_n(A | B) := \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(B)},$$

ahol $k_n(A \cap B)$, ill. $k_n(B)$ az $A \cap B$, ill. B esemény gyakoriságát, $r_n(A \cap B)$, ill. $r_n(B)$ pedig a relatív gyakoriságukat jelöli.

Feltételes valószínűség

Legyen $B \in \mathcal{A}$ egy esemény, melyre $\mathbb{P}(B) > 0$. Az $A \in \mathcal{A}$ esemény **feltételes valószínűsége a $B \in \mathcal{A}$ feltétel mellett** (azaz, ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett)

$$\mathbb{P}(A | B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Feltételes valószínűség

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, és $B \in \mathcal{A}$, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$. Ekkor a $Q_B : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, $Q_B(A) := \mathbb{P}(A|B)$, $A \in \mathcal{A}$, halmazfüggvény valószínűségi mérték az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető téren, azaz $(\Omega, \mathcal{A}, Q_B)$ valószínűségi mező.

Feltételes valószínűség

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, és $B \in \mathcal{A}$, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$. Legyen továbbá $\mathcal{A}_B := \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$. Ekkor $\mathcal{A}_B$ σ -algebra és a $Q_B : \mathcal{A}_B \rightarrow [0, 1]$, $Q_B(A) := \mathbb{P}(A|B)$, $A \in \mathcal{A}_B$, halmazfüggvény valószínűségi mérték a $(B, \mathcal{A}_B)$ mérhető téren, azaz $(B, \mathcal{A}_B, Q_B)$ valószínűségi mező.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Diszkrét véletlen változó feltételes eloszlása, feltételes várható értéke, feltételes varianciája

Legyen B egy pozitív valószínűségű esemény. Ha X diszkrét véletlen változó $\mathbb{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots$, eloszlással, akkor X -nek a B -re vonatkozó **feltételes eloszlása**

$$\mathbb{P}(X = x_k | B) = Q_B(X = x_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

feltételes várható értéke

$$\mathbb{E}(X|B) := \sum_k x_k \cdot \mathbb{P}(X = x_k | B) = \sum_k x_k \cdot Q_B(X = x_k),$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergencia, azaz

$\sum_k |x_k| \cdot \mathbb{P}(X = x_k | B) < \infty$, **feltételes varianciája** pedig

$$\begin{aligned} \text{Var}(X|B) &:= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|B))^2 | B] = \mathbb{E}(X^2 | B) - [\mathbb{E}(X|B)]^2 \\ &= \sum_k x_k^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_k | B) - \left(\sum_k x_k \cdot \mathbb{P}(X = x_k | B) \right)^2, \end{aligned}$$

amennyiben a $\sum_k x_k^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_k | B)$ sor konvergencia.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

- Ha X diszkrét véletlen változó, akkor a $\mathbb{P}(X = x_k | B)$, $k \in \mathbb{N}$, számok eloszlást alkotnak, hiszen nemnegatívak, és összegük 1:

$$\begin{aligned}\sum_k \mathbb{P}(X = x_k | B) &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_k \mathbb{P}(\{X = x_k\} \cap B) \\&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}\left(\bigcup_k (\{X = x_k\} \cap B)\right) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_k \{X = x_k\}\right) \cap B\right) \\&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}(\Omega \cap B) = 1.\end{aligned}$$

- Speciálisan, ha B egy olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) = 1$ (pl.: $B = \Omega$ esetén), akkor X -nek a B -re vonatkozó feltételes eloszlása, várható értéke, ill. varianciája megegyezik X eloszlásával, várható értékével, ill. varianciájával.
- Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor tetszőleges pozitív valószínűségű B esemény esetén $\mathbb{E}(|X| | B) < \infty$.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Mi a két szabályos dobókockával dobott számok eltérésének feltételes eloszlása azon feltétel mellett, hogy a dobott számok összege ℓ ?

Jelölje a dobott számokat X és Y . Nyilván $\ell \in \{2, 3, \dots, 12\}$ és

$$\mathbb{P}(X + Y = \ell) = \begin{cases} \frac{\ell-1}{36} & \text{ha } 2 \leq \ell \leq 7, \\ \frac{13-\ell}{36} & \text{ha } 7 \leq \ell \leq 12. \end{cases}$$

Továbbá $|X - Y|$ lehetséges értékei $0, 1, 2, 3, 4, 5$, és $\ell \in \{2, \dots, 6\}$ esetén a szóbanforgó feltételes eloszlás valószínűségei:

$$\mathbb{P}(|X - Y| = 0 \mid X + Y = 2) = 1, \quad \mathbb{P}(|X - Y| = 1 \mid X + Y = 3) = 1,$$

$$\mathbb{P}(|X - Y| = 0 \mid X + Y = 4) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(|X - Y| = 2 \mid X + Y = 4) = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{P}(|X - Y| = 1 \mid X + Y = 5) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(|X - Y| = 3 \mid X + Y = 5) = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(|X - Y| = 0 \mid X + Y = 6) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(|X - Y| = 2 \mid X + Y = 6) = \frac{2}{5},$$

$$\mathbb{P}(|X - Y| = 4 \mid X + Y = 6) = \frac{2}{5}.$$

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

A fenti feltételes valószínűségek $\ell = 6$ esetén az alábbi módon határozhatóak meg. Mivel

$$\begin{aligned}\{X + Y = 6\} &= \{X = 1, Y = 5\} \cup \{X = 2, Y = 4\} \\ &\quad \cup \{X = 3, Y = 3\} \cup \{X = 4, Y = 2\} \cup \{X = 5, Y = 1\},\end{aligned}$$

az $\{X + Y = 6\}$ esemény bekövetkezése esetén $|X - Y|$ lehetséges értékei 0, 2, 4, és

$$\begin{aligned}\{|X - Y| = 0\} &= \{X = 3, Y = 3\}, \\ \{|X - Y| = 2\} &= \{X = 2, Y = 4\} \cup \{X = 4, Y = 2\}, \\ \{|X - Y| = 4\} &= \{X = 1, Y = 5\} \cup \{X = 5, Y = 1\}.\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X - Y| = 0 \mid X + Y = 6) &= \frac{\mathbb{P}(|X - Y| = 0, X + Y = 6)}{\mathbb{P}(X + Y = 6)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}, \\ \mathbb{P}(|X - Y| = 2 \mid X + Y = 6) &= \frac{\mathbb{P}(|X - Y| = 2, X + Y = 6)}{\mathbb{P}(X + Y = 6)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}, \\ \mathbb{P}(|X - Y| = 4 \mid X + Y = 6) &= \frac{\mathbb{P}(|X - Y| = 4, X + Y = 6)}{\mathbb{P}(X + Y = 6)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Abszolút folytonos véletlen változó feltételes eloszlása, feltételes várható értéke

Egy tetszőleges valós értékű X véletlen változónak a B pozitív valószínűségű eseményre vonatkozó **feltételes eloszlásfüggvénye**

$$F_{X|B} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1],$$

$$F_{X|B}(x) := \mathbb{P}(X < x | B) = Q_B(X < x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ha létezik egy olyan Borel-mérhető $f_{X|B} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$F_{X|B}(x) = \int_{-\infty}^x f_{X|B}(u) du$$

teljesül tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor az $f_{X|B}$ függvényt X -nek a B -re vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Az $F_{X|B}$ feltételes eloszlásfüggvény nem más, mint X -nek a Q_B valószínűségi mérték melletti eloszlásfüggvénye. Az $f_{X|B}$ feltételes sűrűségfüggvény amennyiben létezik Borel-mérhető, Lebesgue-majdnem mindenütt nemnegatív és $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|B}(u) du = 1$, és így (szokásos) sűrűségfüggvény.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Abszolút folytonos véletlen változó feltételes várható értéke és varianciája

Ha létezik az $f_{X|B}$ feltételes sűrűségfüggvény, akkor X -nek a B -re vonatkozó **feltételes várható értéke**

$$\mathbb{E}(X|B) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x) dx$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_{X|B}(x) dx < \infty$; **feltételes varianciája** pedig

$$\begin{aligned}\text{Var}(X|B) &:= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|B))^2|B] = \mathbb{E}(X^2|B) - [\mathbb{E}(X|B)]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{X|B}(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x) dx \right)^2,\end{aligned}$$

amennyiben $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{X|B}(x) dx < \infty$.

Ha létezik az $f_{X|B}$ feltételes sűrűségfüggvény és $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor tetszőleges pozitív valószínűségű B esemény esetén $\mathbb{E}(|X| | B) < \infty$.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Példa: Legyen X standard normális eloszlású, és $B := \{X \geq 0\}$.
Ekkor $\mathbb{P}(B) = 1/2$, és

$$F_{X|B}(x) = \frac{\mathbb{P}(0 \leq X < x)}{\mathbb{P}(X \geq 0)} = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 2\mathbb{P}(0 \leq X < x) & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Ha $x > 0$, akkor tehát

$$F_{X|B}(x) = 2(\Phi(x) - \Phi(0)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du.$$

Így X -nek a B -re vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X|B}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Ezért X -nek a B -re vonatkozó feltételes várható értéke:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|B) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x) dx = \int_0^{\infty} x \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-e^{-x^2/2} \right]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\end{aligned}$$

Továbbá, ha $Y := |X|$, akkor

$$\begin{aligned}F_Y(x) &= \mathbb{P}(|X| < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ \mathbb{P}(-x < X < x) & \text{ha } x > 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 2\mathbb{P}(0 \leq X < x) & \text{ha } x > 0, \end{cases} = F_{X|B}(x), \quad x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

azaz X -nek a B -re vett feltételes eloszlása megegyezik $|X|$ eloszlásával.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Abszolút folytonos véletlen változóra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvény, feltételes várható érték

Legyen (X, Y) abszolút folytonos véletlen vektor $f_{X,Y}$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor **X feltételes sűrűségfüggvénye az $Y = y$ feltételre nézve (ahol $y \in \mathbb{R}$):**

$$f_{X|Y}(x|y) := \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{ha } f_Y(y) \neq 0, \\ h(x) & \text{ha } f_Y(y) = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$$

ahol f_Y az Y sűrűségfüggvénye, és h tetszőleges sűrűségfüggvény.

X feltételes eloszlásfüggvénye az $Y = y$ feltételre nézve:

$$\mathbb{P}(X < x | Y = y) := \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(u|y) du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

X feltételes várható értéke az $Y = y$ feltételre nézve:

$$\mathbb{E}(X | Y = y) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y) dx,$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló integrál abszolút konvergens.

6. Feltételes várható érték

Megjegyzés. Legyen (X, Y) abszolút folytonos véletlen vektor $f_{X,Y}$ sűrűségfüggvénnyel. Legyen $y \in \mathbb{R}$ és tekintsük X feltételes sűrűségfüggvényét az $Y = y$ feltételre nézve: $\mathbb{R} \ni x \mapsto f_{X|Y}(x|y)$.

Ekkor a valós számok $\mathbb{R}$ halmazát felruházva a Borel-halmazok $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σ -algebrájával, a

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto \int_B f_{X|Y}(u|y) du$$

halmazfüggvény valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -en.

Továbbá, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezen valószínűségi mérték szerint a $(-\infty, x)$ halmaz (esemény) valószínűsége éppen $\mathbb{P}(X < x | Y = y)$, az (x, ∞) halmaz (esemény) valószínűsége pedig

$$\int_x^\infty f_{X|Y}(u|y) du = 1 - \mathbb{P}(X < x | Y = y).$$

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Abszolút folytonos véletlen változóra vonatkozó feltételes variancia, regressziós görbe

X feltételes varianciája az $Y = y$ feltételre nézve:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X|Y = y) &:= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|Y = y))^2 | Y = y] \\ &= \mathbb{E}(X^2 | Y = y) - [\mathbb{E}(X | Y = y)]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{X|Y}(x|y) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y) dx \right)^2,\end{aligned}$$

feltéve, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{X|Y}(x|y) dx < \infty$.

X regressziós görbéje az Y feltételre nézve:

az $\mathbb{R} \ni y \mapsto \mathbb{E}(X|Y = y)$ függvény.

Ez minimalizálja az $\mathbb{E}[(X - f(Y))^2]$ mennyiséget, azaz ha $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ és $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan Borel-mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}[f(Y)^2] < \infty$, akkor

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|Y))^2] \leq \mathbb{E}[(X - f(Y))^2].$$

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Teljes várható érték tétel teljes eseményrendszerre vonatkozóan diszkrét esetben

Ha a $B_1, B_2, \dots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, X egy diszkrét véletlen változó és $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k \mathbb{E}(X | B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k).$$

Bizonyítás. Legyen X diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel. Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_k \mathbb{E}(X | B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k) &= \sum_k \sum_j x_j \mathbb{P}(X = x_j | B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k) \\ &= \sum_k \sum_j x_j \mathbb{P}(\{X = x_j\} \cap B_k) = \sum_j x_j \sum_k \mathbb{P}(\{X = x_j\} \cap B_k) \\ &= \sum_j x_j \mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{E}(X), \end{aligned}$$

ahol az $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ feltételt a szummák felcserélésénél használtuk.

6. Feltételes várható érték

Diszkrét véletlen változó teljes eseményrendszerre vonatkozó feltételes várható értéke

Legyen X egy diszkrét véletlen változó, hogy $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, és legyen $\mathcal{G}$ egy $B_1, B_2, \dots$, pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer. Ekkor **X -nek a $\mathcal{G}$ -re vonatkozó feltételes várható értékén** az

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) := \sum_k \mathbb{E}(X | B_k) \mathbb{1}_{B_k}$$

diszkrét véletlen változót értjük.

Az $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ véletlen változó a B_k eseményen az $\mathbb{E}(X | B_k)$ értéket veszi fel.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Példa:

Szabályos dobókockával addig dobunk, míg az első 6-os megjelenik.

Legyen $X :=$ az ehhez szükséges dobások száma.

Ekkor X geometriai eloszlású $\frac{1}{6}$ -paraméterrel, így $\mathbb{E}(X) = 6$.

Az alábbiakban a teljes várható érték tétele alapján is meghatározzuk $\mathbb{E}(X)$ -t.

Ekkor $B_k := \{\text{az első dobás } k\}$, $k = 1, \dots, 6$, pozitív $(1/6)$ valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer.

Mivel $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, a teljes várható érték tétele alapján

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{E}(X | B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)$$

Megmutatjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X | B_k) = \begin{cases} 1 + \mathbb{E}(X) & \text{ha } 1 \leq k \leq 5, \\ 1 & \text{ha } k = 6. \end{cases}$$

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Nyilván, $\mathbb{P}(X = 1 \mid B_6) = 1$ és így $\mathbb{E}(X \mid B_6) = 1 \cdot 1 = 1$.

Ha $1 \leq k \leq 5$, akkor

$$\mathbb{E}(X \mid B_k) = \mathbb{E}(1 + X - 1 \mid B_k) = 1 + \mathbb{E}(X - 1 \mid B_k) = 1 + \mathbb{E}(X),$$

ahol az utolsó lépés abból következik, hogy $X - 1$ -nek a B_k -ra ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) vonatkozó feltételes eloszlása megegyezik X eloszlásával, ugyanis $X - 1$ értékkészlete $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{P}(X - 1 = 0 \mid B_k) = 0$ és

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X - 1 = n \mid B_k) &= \frac{\mathbb{P}(X - 1 = n, B_k)}{\mathbb{P}(B_k)} = \frac{\mathbb{P}(X = n + 1, B_k)}{\mathbb{P}(B_k)} \\&= \frac{\mathbb{P}(\{\text{az első dobás } k\} \cap \{\text{a } 2., \dots, n. \text{ dobás nem } 6\text{-os}\} \cap \{\text{az } (n + 1). \text{ dobás } 6\text{-os}\})}{\mathbb{P}(B_k)} \\&= \frac{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \mathbb{P}(X = n), \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ezért

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}(1 + 5(1 + \mathbb{E}(X))),$$

amiből $\mathbb{E}(X) = 6$.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Az $\mathbb{E}(X | B_k)$, $1 \leq k \leq 5$, feltételes várható értékeket (is) számolhatjuk direktben (definíció alapján).

Ha $1 \leq k \leq 5$, akkor $\mathbb{P}(X = 1 | B_k) = 0$ és

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X = n | B_k) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{\text{az első dobás } k\} \cap \{\text{a } 2., \dots, (n-1). \text{ dobás nem } 6\text{-os}\} \cap \{\text{az } n. \text{ dobás } 6\text{-os}\})}{\mathbb{P}(B_k)} \\ &= \frac{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} \\ &= \frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Így $k = 1, \dots, 5$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X | B_k) &= \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{5^{n-2}}{6^{n-1}} = \frac{1}{5} \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{5} \sum_{n=2}^{\infty} (x^n)' \Big|_{x=5/6} \\ &= \frac{1}{5} \left(\sum_{n=2}^{\infty} x^n \right)' \Big|_{x=5/6} = \frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' \Big|_{x=5/6} \\ &= \frac{1}{5} \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} \Big|_{x=5/6} = 7.\end{aligned}$$

Ezért $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}(1 + 5 \cdot 7) = 6$.

Továbbá, X -nek a $\mathcal{G} := \{B_1, \dots, B_6\}$ pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszerre vonatkozó feltételes várható értéke az

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = 7(\mathbb{1}_{B_1} + \dots + \mathbb{1}_{B_5}) + 1 \cdot \mathbb{1}_{B_6} = 7 \cdot \mathbb{1}_{\Omega \setminus B_6} + 1 \cdot \mathbb{1}_{B_6}$$

diszkrét véletlen változó. Azaz

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{G})(\omega) = \begin{cases} 7 & \text{ha } \omega \notin B_6, \\ 1 & \text{ha } \omega \in B_6. \end{cases}$$

Teljes valószínűség- és teljes várható érték együttesen abszolút folytonos esetben

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ egy abszolút folytonos véletlen vektor $f_{X,Y}$ sűrűségfüggvénnyel. Jelölje f_Y az Y sűrűségfüggvényét.

1 Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X < x \mid Y = y) f_Y(y) dy.$$

2 Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X \mid Y = y) f_Y(y) dy.$$

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Példa: Válasszunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot a $(0, 1)$ intervallumon, jelölje ezt Y . Tekintsük a $(0, Y)$ véletlen intervallumot és legyen X egyenletes eloszlású ezen az intervallumon. Határozzuk meg X várható értékét!

A feltételek alapján Y egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon, és tetszőleges $y \in (0, 1)$ esetén X -nek az $Y = y$ feltételre vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{ha } x \in (0, y), \\ 0 & \text{ha } x \notin (0, y), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}.$$

A teljes várható érték tétele alapján

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X | Y = y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X | Y = y) dy,$$

ahol

$$\mathbb{E}(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y) dx = \int_0^y x \cdot \frac{1}{y} dx = \frac{y}{2}.$$

Ezért

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}.$$

Várható érték egy további tulajdonsága

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra.

- 1 Ha $\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan $\mathcal{F}$ -mérhető valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(|\zeta|) < \infty$ és minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{E}(\zeta \mathbb{1}_A) \geq 0$, akkor $\zeta \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.m.
- 2 Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan $\mathcal{F}$ -mérhető valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\eta|) < \infty$, és minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A)$, akkor $\xi \leq \eta$ $\mathbb{P}$ -m.m.
- 3 Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan $\mathcal{F}$ -mérhető valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, $\mathbb{E}(|\eta|) < \infty$, és minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A)$, akkor $\xi = \eta$ $\mathbb{P}$ -m.m.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

σ -algebrára vonatkozó feltételes várható érték

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra, és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan véletlen változó, melyre $\mathbb{E}(|X|) < \infty$.

Azt mondjuk, hogy egy $X_{\mathcal{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó az X **feltételes várható értéke az $\mathcal{F}$ feltételre nézve**, ha

- 1 $X_{\mathcal{F}}$ $\mathcal{F}$ -mérhető (azaz $\sigma(X_{\mathcal{F}}) \subset \mathcal{F}$) és $\mathbb{E}(|X_{\mathcal{F}}|) < \infty$,
- 2 minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{E}(X_{\mathcal{F}} \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A)$.

σ -algebrára vonatkozó feltételes várható érték

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra, és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan véletlen változó, melyre $\mathbb{E}(|X|) < \infty$.

Ekkor létezik $X_{\mathcal{F}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ feltételes várható érték, mely $\mathbb{P}$ -m.b. egyértelműen meghatározott.

Jelölés: $\mathbb{E}(X | \mathcal{F})$ jelöli ennek az $X_{\mathcal{F}}$ véletlen változónak a $\mathbb{P}$ szerinti ekvivalencia-osztályát és annak tetszőleges reprezentánsát is.

Feltételes várható érték tulajdonságai

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra.

- 1 Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$ és $X \leq Y$, akkor $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y | \mathcal{F})$.
- 2 Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor $|\mathbb{E}(X | \mathcal{F})| \leq \mathbb{E}(|X| | \mathcal{F})$.
- 3 Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = X$.
- 4 Ha X $\mathcal{F}$ -mérhető és $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) = X$.
- 5 Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{F})] = \mathbb{E}(X)$.
- 6 Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ és X független $\mathcal{F}$ -től, akkor $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$.
- 7 **Toronyszabály:** ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ és $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ rész- σ -algebra, akkor $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) | \mathcal{F}] = \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$.
- 8 Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ és $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $\mathbb{E}(aX + bY | \mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y | \mathcal{F})$.
- 9 Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$ és Y $\mathcal{F}$ -mérhető, akkor $\mathbb{E}(XY | \mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(X | \mathcal{F})$.

Feltételes várható érték tulajdonságai

- 10 Ha $X_1, X_2, \dots$ $\mathbb{P}$ -integrálhatók, $X_n \uparrow X$ $\mathbb{P}$ -m.b. és X is $\mathbb{P}$ -integrálható, továbbá létezik olyan Y valószínűségi változó, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $X_n \geq Y$ $\mathbb{P}$ -m.b. és $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) \uparrow \mathbb{E}(X | \mathcal{F})$ $\mathbb{P}$ -m.b.
- 11 Ha $X_1, X_2, \dots$ $\mathbb{P}$ -integrálhatók, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $X_n \geq Y$ $\mathbb{P}$ -m.b., ahol Y egy olyan valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$, és $\mathbb{E}\left(\left|\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n\right|\right) < \infty$, akkor $\mathbb{E}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n | \mathcal{F}\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F})$.
- 12 Ha $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, és létezik olyan Y $\mathbb{P}$ -integrálható véletlen változó, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|X_n| \leq Y$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathbb{E}(X | \mathcal{F})$, és $\mathbb{E}(|X_n - X| | \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$.
- 13 Ha $X_1, X_2, \dots$ $\mathbb{P}$ -integrálhatók, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $X_n \geq 0$ $\mathbb{P}$ -m.b., és $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ is $\mathbb{P}$ -integrálható, akkor $\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n | \mathcal{F}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F})$.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Feltételes Jensen-egyenlőtlenség többdimenzióban

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra, és $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, melyre $\mathbb{E}(\|X\|) < \infty$.

- 1 Ha $K \subset \mathbb{R}^d$ nemüres, konvex, zárt és $X \in K$ $\mathbb{P}$ -m.b., akkor $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) := (\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}), \dots, \mathbb{E}(X_d | \mathcal{F})) \in K$ $\mathbb{P}$ -m.b.
- 2 Ha $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ konvex és $\mathbb{E}(|g(X)|) < \infty$, akkor $g(\mathbb{E}(X | \mathcal{F})) \leq \mathbb{E}(g(X) | \mathcal{F})$.

Feltételes valószínűség σ -algebrára nézve

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra. Egy $A \in \mathcal{A}$ eseménynek a **feltételes valószínűsége az $\mathcal{F}$ feltételre nézve** $\mathbb{P}(A | \mathcal{F}) := \mathbb{E}(1_A | \mathcal{F})$.

Feltételes várható érték véletlen vektorra nézve

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan véletlen változó, melyre $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, és $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Ekkor az X **feltételes várható értéke az Y -ra nézve** $\mathbb{E}(X | Y) := \mathbb{E}(X | \sigma(Y))$.

Feltételes várható érték véletlen vektorra nézve

Létezik olyan $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}(X | Y) = f(Y)$. Ez az a $\mathbb{P}_Y$ -m.b. egyértelműen meghatározott $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, melyre tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén teljesül, hogy

$$\int_B f(y) \mathbb{P}_Y(dy) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}),$$

ahol $\mathbb{P}_Y$ az Y eloszlását jelöli, azaz minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén $\mathbb{P}_Y(B) := \mathbb{P}(Y \in B)$.

Jelölés: $f(y) = \mathbb{E}(X | Y = y)$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Itt f nemmás, mint a $Q(B) := \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)})$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, véges, előjeles (azaz nem feltétlenül nemnegatív) mértéknek a $\mathbb{P}_Y$ -ra vonatkozó Radon-Nikodym deriváltja az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhető téren.

Monoton osztály

Azt mondjuk, hogy egy Ω egy nemüres halmaz részhalmazainak $\mathcal{C}$ rendszere monoton osztály, ha $A_n \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$, és $A_n \uparrow A$, amint $n \rightarrow \infty$ esetén $A \in \mathcal{C}$ fennáll.

Monoton osztály tétel

Legyen $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{H}$ az Ω részhalmazainak egy halmazalgebrája, $\mathcal{C}$ egy monoton osztálya, hogy $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}$. Ekkor $\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}$.

Véletlen vektorra vonatkozó feltételes várható érték tulajdonságai

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan véletlen változó, melyre $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, és $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor.

- 1 Ha $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}(|Xg(Y)|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(Xg(Y) | Y = y) = g(y) \mathbb{E}(X | Y = y)$ $\mathbb{P}_Y$ -m.m. $y \in \mathbb{R}^d$.
- 2 Ha X és Y függetlenek, és $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}(|g(X, Y)|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(g(X, Y) | Y = y) = \mathbb{E}(g(X, y) | Y = y) = \mathbb{E}(g(X, y))$ $\mathbb{P}_Y$ -m.m. $y \in \mathbb{R}^d$, és $\mathbb{E}(g(X, Y) | Y) = \mathbb{E}(g(X, y))|_{y=Y}$.
- 3 Ha $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}(|g(X, Y)|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(g(X, Y) | Y) = \mathbb{E}(g(X, y) | Y)|_{y=Y}$.

Feltételes valószínűség véletlen vektorra nézve

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Egy $A \in \mathcal{A}$ eseménynek a **feltételes valószínűsége az Y -ra nézve**

$$\mathbb{P}(A | Y) := \mathbb{P}(A | \sigma(Y)) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \sigma(Y)).$$

A korábbiak alapján létezik olyan $\mathbb{P}_Y$ -m.b. egyértelműen meghatározott $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, hogy $\mathbb{P}(A | Y) = f(Y)$. Ezen f függvény $\mathbb{P}_Y$ -szerinti ekvivalencia osztályát és ennek egy tetszőleges reprezentációját is $\mathbb{R}^d \ni y \mapsto \mathbb{P}(A | Y = y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | Y = y)$ jelöli.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Feltételes sűrűségfüggvény tulajdonságai

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ abszolút folytonos véletlen vektor. Jelölje (X, Y) sűrűségfüggvényét $f_{X,Y}$. Definiáljuk az $f_{X|Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ függvényt a következő módon:

$$f_{X|Y}(x|y) := \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{ha } f_Y(y) \neq 0, \\ h(x) & \text{ha } f_Y(y) = 0, \end{cases}$$

ahol f_Y az Y sűrűségfüggvénye, és $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ tetszőleges sűrűségfüggvény. Ekkor érvényesek a következő állítások:

- 1 Bármely $y \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R} \ni x \mapsto f_{X|Y}(x|y)$ függvény sűrűségfüggvény.
- 2 Bármely $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén $\mathbb{P}(X \in A | Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y) dx$.
- 3 Ha $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, melyre $\mathbb{E}(|g(X)|) < \infty$, akkor $\mathbb{E}(g(X) | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y) dx$.

A 2. és 3.-beli állítás $\mathbb{P}_Y$ -m.m. $y \in \mathbb{R}$ esetén igaz.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Feltételes sűrűségfüggvény

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ abszolút folytonos valószínűségi változó. A fentiekben definiált $f_{X|Y}$ függvényt az X -nek Y -ra vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Teljes valószínűség tételének és teljes várható érték tételének általános alakja

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy véletlen változó.

❶ Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eseményre teljesül

$$\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A | Y = y) \mathbb{P}_Y(dy).$$

❷ Ha $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan véletlen változó, melyre $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X | Y = y) \mathbb{P}_Y(dy).$$

Bayes tételének folytonos alakja

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ abszolút folytonos véletlen vektor. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel-halmaz esetén teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(X \in A \mid Y = y) = \frac{\int_A f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx} \quad \mathbb{P}_Y\text{-m.m. } y \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Négyzetes középben vett legjobb $\mathcal{F}$ -mérhető becslés

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra, és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ négyzetesen $\mathbb{P}$ -integrálható valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy egy $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó az X **négyzetes középben vett legjobb $\mathcal{F}$ -mérhető becslése**, ha

- 1 Y $\mathcal{F}$ -mérhető, négyzetesen $\mathbb{P}$ -integrálható,
- 2 tetszőleges $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ -mérhető négyzetesen $\mathbb{P}$ -integrálható valószínűségi változó esetén $\mathbb{E}((X - Y)^2) \leq \mathbb{E}((X - Z)^2)$.

Tulajdonképpen az $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vektorhoz keresünk olyan $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vektort, melyre bármely $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ esetén teljesül $\|X - Y\|_{L^2} \leq \|X - Z\|_{L^2}$; ez nyilván X merőleges vetülete az $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zárt, lineáris altérre.

Négyzetes középben vett legjobb $\mathcal{F}$ -mérhető becslés

Létezik X -nek négyzetes középben vett legjobb $\mathcal{F}$ -mérhető becslése, mégpedig $\mathbb{E}(X | \mathcal{F})$ (mely négyzetesen integrálható).

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Négyzetes középben vett legjobb lineáris becslés

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $X, Y_1, \dots, Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ négyzetesen $\mathbb{P}$ -integrálható véletlen változók. Azt mondjuk, hogy egy $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változó az X **négyzetes középben vett legjobb lineáris becslése az $Y_1, \dots, Y_n$ alapján**, ha

- 1 Y benne van az $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Hilbert-térnek abban a $L^2(Y_1, \dots, Y_n)$ zárt, lineáris alterében, melyet az $Y_1, \dots, Y_n$ lineáris kombinációi alkotnak,
- 2 tetszőleges $Z \in L^2(Y_1, \dots, Y_n)$ esetén $\mathbb{E}((X - Y)^2) \leq \mathbb{E}((X - Z)^2)$.

Tulajdonképpen az $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vektorhoz keresünk olyan $Y \in L^2(Y_1, \dots, Y_n)$ vektort, melyre bármely $Z \in L^2(Y_1, \dots, Y_n)$ esetén teljesül $\|X - Y\|_{L^2} \leq \|X - Z\|_{L^2}$; ez nyilván X merőleges vetülete az $L^2(Y_1, \dots, Y_n)$ zárt, lineáris altérre. Mivel $L^2(Y_1, \dots, Y_n)$ része $L^2(\Omega, \sigma(Y_1, \dots, Y_n), \mathbb{P})$ -nek, az $Y_1, \dots, Y_n$ alapján vett legjobb lineáris becslés általában „rosszabb”, mint a legjobb $\sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ -mérhető becslés, mely $f(Y_1, \dots, Y_n)$ alakú valamely $\mathbb{P}_{Y_1, \dots, Y_n}$ -m.m. egyértelműen meghatározott $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvényvel.

Négyzetes középben vett legjobb lineáris becslés

Legyen $(X, Y_1, \dots, Y_n)$ egy $n + 1$ -dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_1) = \dots = \mathbb{E}(Y_n) = 0$. Ekkor X négyzetes középben vett legjobb lineáris becslése az $Y_1, \dots, Y_n$ alapján megegyezik a legjobb $\sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ -mérhető becsléssel, így szintén $\mathbb{E}(X | Y_1, \dots, Y_n)$.

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Példa: Legyen (X, Y) normális eloszlású véletlen vektor, hogy $D^2(Y) > 0$. Ekkor

$$\mathbb{E}(X | Y = y) = \mathbb{E}(X) + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{D^2(Y)}(y - \mathbb{E}(Y)),$$

azaz a regressziós görbe egy egyenes.

Továbbá, ha (X, Y) kovariancia mátrixa invertálható, azaz $D^2(X)D^2(Y) - (\text{Cov}(X, Y))^2 > 0$, akkor X feltételes eloszlása az $Y = y$ feltételre vonatkozóan normális eloszlás, mégpedig

$$\mathcal{N}\left(\mathbb{E}(X | Y = y), D^2(X) - \frac{(\text{Cov}(X, Y))^2}{D^2(Y)}\right).$$

Tehát

$$D^2(X | Y = y) = D^2(X) - \frac{(\text{Cov}(X, Y))^2}{D^2(Y)},$$

ami nem függ y -től.

Véletlen változó σ -algebrára vonatkozó reguláris feltételes eloszlása

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy véletlen változó. Egy $\nu : \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ leképezést az **X véletlen változó $\mathcal{F}$ σ -algebrára vonatkozó reguláris feltételes eloszlásának** nevezünk, ha

- (i) tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén, a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto \nu(\omega, B)$ leképezés valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -en,
- (ii) tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén, az $\Omega \ni \omega \mapsto \nu(\omega, B)$ leképezés a $\mathbb{P}(X \in B | \mathcal{F})$ feltételes valószínűség egy reprezentánsa, azaz

$$\nu(\omega, B) = \mathbb{P}(X \in B | \mathcal{F})(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega \text{ esetén.}$$

Véletlen változó σ -algebrára vonatkozó reguláris feltételes eloszlásfüggvénye

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy véletlen változó. Egy $F : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ leképezést az **X véletlen változó $\mathcal{F}$ σ -algebrára vonatkozó reguláris feltételes eloszlásfüggvényének** nevezünk, ha

- (i) tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén, az $\mathbb{R} \ni x \mapsto F(\omega, x)$ leképezés eloszlásfüggvény,
- (ii) tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén, az $\Omega \ni \omega \mapsto F(\omega, x)$ leképezés a $\mathbb{P}(X < x \mid \mathcal{F})$ feltételes valószínűség egy reprezentánsa, azaz

$$F(\omega, x) = \mathbb{P}(X < x \mid \mathcal{F})(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega \text{ esetén.}$$

Reguláris feltételes eloszlás és eloszlásfüggvény létezése

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy véletlen változó. Ekkor X -nek létezik az $\mathcal{F}$ σ -algebrára vonatkozóan reguláris feltételes eloszlása és reguláris feltételes eloszlásfüggvénye is.

Megjegyzés. Belátható az is, hogy ha X egy teljes szeparábilis metrikus térbeli értékű véletlen változó, akkor X -nek létezik reguláris feltételes eloszlása egy $\mathcal{F}$ rész σ -algebrára vonatkozóan.

Speciálisan, ha X egy $\mathbb{R}^n$ -beli értékű véletlen vektor, akkor X -nek létezik reguláris feltételes eloszlása egy $\mathcal{F}$ rész σ -algebrára vonatkozóan.

Példa.

Legyen

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező,
- $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy véletlen változó,
- $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ egy olyan teljes eseményrendszer, melyre $\mathbb{P}(A_n) > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén,
- $\mathcal{F} := \sigma(\{A_n, n \in \mathbb{N}\})$.

Ekkor az $\mathcal{F}$ σ -algebra éppen az $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ eseményekből képezett összes megszámlálható unióból áll:

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{\ell \in F} A_{\ell} : F \subset \mathbb{N}, F \text{ megszámlálható} \right\},$$

ahol $\bigcup_{\ell \in \emptyset} A_{\ell} := \emptyset$, és tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén

$$\mathbb{P}(X \in B | \mathcal{F})(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \in B | A_n) \mathbb{1}_{A_n}(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega.$$

Legyen $\nu : \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$,

$$\nu(\omega, B) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \in B \mid \mathcal{A}_n) \mathbb{1}_{A_n}(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ekkor tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén egyértelműen létezik olyan $n_\omega \in \mathbb{N}$, hogy $\omega \in A_{n_\omega}$, és így $\nu(\omega, B) = \mathbb{P}(X \in B \mid \mathcal{A}_{n_\omega})$, ahol a jobb oldal, és így a bal oldal is, mint $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ függvénye valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -en.

Így ν az X véletlen változónak egy reguláris feltételes eloszlása az $\mathcal{F}$ rész σ -algebrára vonatkozóan.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy véletlen változó. Jelölje $\nu : \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ az X -nek egy reguláris feltételes eloszlását az $\mathcal{F}$ σ -algebrára vonatkozóan. Legyen továbbá $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan mérhető függvény, melyre $\mathbb{E}(|f(X)|) < \infty$. Ekkor

$$\mathbb{E}(f(X) | \mathcal{F})(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \nu(\omega, dx) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega.$$

Véletlen változó reguláris feltételes eloszlása véletlen változóra vonatkozóan

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változók.

Egy $\mu : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ leképezést az **X véletlen változó Y véletlen változóra vonatkozó reguláris feltételes eloszlásának nevezünk**, ha

- (i) tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén, a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto \mu(Y(\omega), B)$ leképezés valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -en,
- (ii) tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén, az $\Omega \ni \omega \mapsto \mu(Y(\omega), B)$ leképezés a $\mathbb{P}(X \in B \mid Y)$ feltételes valószínűség egy reprezentánsa, azaz

$$\mu(Y(\omega), B) = \mathbb{P}(X \in B \mid Y)(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-m.m. } \omega \in \Omega \text{ esetén.}$$

Véletlen változó reguláris feltételes eloszlásának létezése véletlen változóra vonatkozóan

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ egy rész σ -algebra és $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változók. Ekkor az X véletlen változónak létezik az Y véletlen változóra vonatkozó reguláris feltételes eloszlása.

Reguláris feltételes eloszlás

Példa.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ abszolút folytonos véletlen vektor. Jelölje (X, Y) sűrűségfüggvényét $f_{X,Y}$, illetve X -nek az Y -ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényét $f_{X|Y}$, azaz $f_{X|Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{ha } f_Y(y) \neq 0, \\ h(x) & \text{ha } f_Y(y) = 0, \end{cases}$$

ahol f_Y az Y sűrűségfüggvénye, és $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ egy tetszőleges sűrűségfüggvény.

Legyen $\mu : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$,

$$\mu(y, B) := \int_B f_{X|Y}(x|y) \, dx, \quad y \in \mathbb{R}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ekkor μ az X véletlen változó egy reguláris feltételes eloszlása az Y véletlen változóra nézve.

Nagy számok gyenge törvényei

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ véletlen változók, és jelölje

$$S_n := X_1 + \dots + X_n, \quad \bar{X}_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

Számtani közép L_2 -konvergenciája

Ha $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és $\mathbb{E}(X_k X_\ell) = 0$ ha $k \neq \ell$, akkor minden $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(\bar{X}_n^2) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \sup_{\ell \geq 1} \mathbb{E}(X_\ell^2).$$

Speciálisan, ha $\sup_{\ell \geq 1} \mathbb{E}(X_\ell^2) < \infty$, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$, és így $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Nagy számok gyenge törvényei

Csebisev tétele

Ha $X_1, X_2, \dots$ páronként korrelálatlanok, melyekre $\sup_{\ell \geq 1} \text{Var}(X_\ell) < \infty$
és $\mathbb{E}(X_n) = m$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $m \in \mathbb{R}$, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} m$,
és így $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m$.

Markov tétele

Ha $X_1, X_2, \dots$ páronként korrelálatlanok, melyekre $\sup_{\ell \geq 1} \text{Var}(X_\ell) < \infty$
és $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\bar{X}_n) =: m \in \mathbb{R}$, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} m$, és így $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m$.

Hincsin tétele (1929)

Ha $X_1, X_2, \dots$ páronként független, azonos eloszlású véletlen
változók és $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$.

Számtani közép L_1 -konvergenciája

Ha $X_1, X_2, \dots$ egyenletesen integrálható, (teljesen) független véletlen változók, akkor

$$\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0, \quad \text{és így} \quad \bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Speciálisan, ha $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók és $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \mathbb{E}(X_1)$, és így $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$.

Nagy számok erős törvényei

Számtani közép L_4 - és $\mathbb{P}$ -m.m-i konvergenciája

Ha $X_1, X_2, \dots$ független véletlen változók és $\mathbb{E}(X_n) = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor minden $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(\bar{X}_n^4)}{\varepsilon^4} \leq \frac{3}{n^2 \varepsilon^4} \sup_{\ell \geq 1} \mathbb{E}(X_\ell^4).$$

Speciálisan, ha $\sup_{\ell \geq 1} \mathbb{E}(X_\ell^4) < \infty$, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_4} 0$ és $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$.

Egy erős törvény második momentum feltétel mellett

Ha $X_1, X_2, \dots$ páronként független, azonos eloszlású véletlen változók és $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathbb{E}(X_1)$.

Kolmogorov-egyenlőtlenség

Ha $X_1, \dots, X_n$ független véletlen változók és $\mathbb{E}(X_k^2) < \infty$ minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k - \mathbb{E}(S_k)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

Kolmogorov egy sor tétele

Ha $X_1, X_2, \dots$ független véletlen változók és $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n) < \infty$, akkor

$$\mathbb{P} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \mathbb{E}(X_n)) \text{ konvergens} \right) = 1.$$

Kolmogorov két sor tétele

Ha $X_1, X_2, \dots$ független véletlen változók, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n)$ konvergens

és $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n) < \infty$, akkor

$$\mathbb{P} \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergens} \right) = 1.$$

Kolmogorov három sor tétele

Ha $X_1, X_2, \dots$ független véletlen változók, hogy létezik olyan $c > 0$, hogy

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^{(c)})$ konvergens,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n^{(c)}) < \infty$,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq c) < \infty$,

ahol

$$X_n^{(c)} := X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| < c\}} = \begin{cases} X_n, & \text{ha } |X_n| < c, \\ 0, & \text{ha } |X_n| \geq c, \end{cases}$$

akkor

$$\mathbb{P} \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergens} \right) = 1.$$

Kronecker-lemma

Legyen $b_1, b_2, \dots$ pozitív számokból álló sorozat, melyre $b_n \uparrow \infty$, és jelölje $n \in \mathbb{N}$ esetén $\beta_n := b_n - b_{n-1}$, ahol $b_0 := 0$.

- 1 Ha $s_1, s_2, \dots$ valós számsorozat és $s_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$, akkor $\frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell s_\ell \rightarrow s$. Speciálisan, egy konvergens sorozat esetén a számtani közepekből álló sorozat ugyanoda konvergál.
- 2 Ha $x_1, x_2, \dots$ valós számsorozat és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b_n}$ konvergens, akkor $\frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n x_\ell \rightarrow 0$.
- 3 **(Diszkrét L'Hôspital szabály)** Tegyük fel, hogy $\beta_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, és legyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy olyan valós sorozat, hogy $\frac{x_n}{\beta_n} \rightarrow c \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n x_\ell = \frac{\sum_{\ell=1}^n x_\ell}{\sum_{\ell=1}^n \beta_\ell} \rightarrow c.$$

Azért hívják diszkrét L'Hôspital szabálynak, mert az $\frac{x_n}{\beta_n} \rightarrow c \in \mathbb{R}$ feltétel írható

$$\frac{\Delta \left(\sum_{\ell=1}^n x_\ell \right)}{\Delta \left(\sum_{\ell=1}^n \beta_\ell \right)} \rightarrow c \in \mathbb{R}$$

alakban is, ahol $\Delta x_n := x_n - x_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, az $x_0 := 0$ jelöléssel.

Nagy számok erős törvényei

Kolmogorov tétele (1929)

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független véletlen változók. Legyen $b_1, b_2, \dots$ pozitív számokból álló sorozat, hogy $b_n \uparrow \infty$. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{b_n^2} < \infty$, akkor

$$\frac{1}{b_n} \sum_{\ell=1}^n (X_{\ell} - \mathbb{E}(X_{\ell})) \xrightarrow{\text{m.b.}} 0.$$

Speciálisan, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} < \infty$, akkor $\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n) \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$.

Kolmogorov tétele (1933)

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók.

- 1 Ha $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$, akkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathbb{E}(X_1)$.
- 2 Ha $\mathbb{P}((\bar{X}_n)_{n \geq 1} \text{ konvergens}) > 0$, akkor $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$.

Etemadi (1981)

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ páronként független, azonos eloszlású véletlen változók, hogy $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$. Ekkor $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathbb{E}(X_1)$.

Chandra és Goswami (1992)

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ páronként független véletlen változók, hogy

$$\int_0^\infty \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| > t) dt < \infty.$$

Ekkor $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$.

Centrális határeloszlás-tételek

Elfajult véletlen változó

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező. Azt mondjuk, hogy az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ véletlen vektor **elfajult (degenerált)**, ha létezik olyan $x_0 \in \mathbb{R}^d$, hogy $\mathbb{P}(X = x_0) = 1$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független (valós értékű) véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, hogy $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$. Jelölje $n \in \mathbb{N}$ és $j = 1, \dots, k_n$ esetén

- $\sigma_{n,j} := \sqrt{\text{Var}(X_{n,j})}$,
- $S_n := X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$,
- $D_n := \sqrt{\text{Var}(S_n)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n,j}^2} > 0$,
- $\hat{S}_n := (S_n - \mathbb{E}(S_n))/D_n$. Nyilván $\mathbb{E}(\hat{S}_n) = 0$ és $\text{Var}(\hat{S}_n) = 1$.
- $r_n := \frac{1}{D_n} \max_{1 \leq j \leq k_n} \sigma_{n,j}$,
- $L_n(\varepsilon) := \frac{1}{D_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E} \left[(X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j}))^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})| \geq \varepsilon D_n\}} \right]$, $\varepsilon > 0$.

Legyen $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Lindeberg-tétel

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, és $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$. Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ háromszor folytonosan differenciálható függvény.

❶ Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$\left| \mathbb{E}[g(\hat{S}_n)] - \mathbb{E}[g(Y)] \right| \leq \left(\frac{\varepsilon}{6} + \frac{r_n}{2} \right) \|g'''\|_\infty + L_n(\varepsilon) \|g''\|_\infty,$$

ahol $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esetén $\|h\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$.

❷ Ha $\|g''\|_\infty < \infty$, $\|g'''\|_\infty < \infty$, és teljesül az úgynevezett **Lindeberg-feltétel**: tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\varepsilon) = 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(\hat{S}_n)] = \mathbb{E}[g(Y)]$.

Lindeberg centrális határeloszlás-tétele szériasorozatokra

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, és $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$. Ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\varepsilon) = 0$, és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{1 + x^2} < \infty,$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(\hat{S}_n)] = \mathbb{E}[g(Y)].$$

Speciálisan, $\hat{S}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$.

Centrális határeloszlás-tételek

Lindeberg centrális határeloszlás-tétele szériasorozatokra

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, és $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$. Ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\varepsilon) = 0$, és $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, olyan folytonos függvények, hogy

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|g_n(x)|}{1 + x^2} < \infty,$$

és g_n kompakt halmazokon egyenletesen konvergál valamely $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvényhez, amint $n \rightarrow \infty$ (azaz bármilyen $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz esetén $g_n|_K$ egyenletesen konvergál $g|_K$ -hoz, amint $n \rightarrow \infty$, azaz bármilyen $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |g_n(x) - g(x)| = 0$), akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g_n(\hat{S}_n)] = \mathbb{E}[g(Y)].$$

Speciálisan, $\hat{S}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$.

Centrális határeloszlás-tételek

Ljapunov centrális határeloszlás-tétele szériasorozatokra

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak. Ha valamely $\delta > 0$ esetén $\mathbb{E}(|X_{n,j}|^{2+\delta}) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, k_n$, és

$$\frac{1}{D_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E} \left[|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})|^{2+\delta} \right] \rightarrow 0, \quad \text{amint } n \rightarrow \infty,$$

akkor $\hat{S}_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{D_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$. (Itt $D_n = \sqrt{\text{Var}(S_n)}$, $n \in \mathbb{N}$.)

Lévy centrális határeloszlás-tétele: független, azonos eloszlású eset

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, és jelölje $S_n := X_1 + \dots + X_n$.

Ha $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ és $\text{Var}(X_1) > 0$, akkor $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var } S_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$.

Továbbá,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var } S_n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \rightarrow 0, \quad \text{amint } n \rightarrow \infty.$$

Centrális határeloszlás-tételek

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, és $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$. Ha teljesül a Lindeberg-feltétel, azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén $L_n(\varepsilon) \rightarrow 0$, akkor teljesül az ún. **egyenletesen aszimptotikusan elhanyagolhatósági feltétel**, azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0.$$

Az egyenletesen aszimptotikusan elhanyagolhatósági feltételt infinitezimalitási feltételnek is szokás hívni.

Feller tétele (1935)

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$, és jelölje $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$. Ha $\hat{S}_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$ és teljesül az egyenletesen aszimptotikusan elhanyagolhatósági feltétel, akkor teljesül a Lindeberg-feltétel.

Következmény

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, $\mathbb{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$, és jelölje $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$.

- (i) Ha teljesül a Lindeberg-feltétel, akkor $r_n = \frac{1}{D_n} \max_{1 \leq j \leq k_n} \sigma_{n,j} \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Ha $r_n = \frac{1}{D_n} \max_{1 \leq j \leq k_n} \sigma_{n,j} \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$, akkor teljesül az egyenletesen aszimptotikusan elhanyagolhatósági feltétel.
- (iii) Ha fennáll az egyenletesen aszimptotikusan elhanyagolhatósági feltétel, akkor $\hat{S}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$, amint $n \rightarrow \infty$ akkor és csak akkor áll fenn, ha teljesül a Lindeberg-feltétel.

Lindeberg többdimenziós centrális határeloszlás-tétele szériasorozatra

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független d -dimenziós véletlen vektorok, és $\mathbb{E}(\|X_{n,j}\|^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$.
Ha

- 1 $\sum_{j=1}^{k_n} \text{Var}(X_{n,j}) \rightarrow \Sigma$, ha $n \rightarrow \infty$, ahol $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertálható,
- 2 minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E} \left[\|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})\|^2 \mathbb{1}_{\{\|X_{n,j} - \mathbb{E}(X_{n,j})\| \geq \varepsilon\}} \right] \rightarrow 0,$$

akkor $S_n - \mathbb{E}(S_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$, ahol $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ a $0 \in \mathbb{R}^d$ várható érték vektorú és $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ kovariancia mátrixú d -dimenziós normális eloszlást jelöli.

Többdimenziós centrális határeloszlás-tétel: FAE eset

Legyenek X_n , $n \in \mathbb{N}$, független, azonos eloszlású d -dimenziós véletlen változók, és jelölje $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, a részletösszegeket. Ha $\mathbb{E}(\|X_1\|^2) < \infty$ és $\text{Var}(X_1) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertálható, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - \mathbb{E}(S_n)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \text{Var}(X_1)), \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

ahol $\mathcal{N}(0, \text{Var}(X_1))$ a $0 \in \mathbb{R}^d$ várható érték vektorú és $\text{Var}(X_1)$ kovariancia mátrixú d -dimenziós normális eloszlást jelöli.

Poisson konvergenciatétel

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyekre $\mathbb{P}(X_{n,j} = 1) = p_{n,j} = 1 - \mathbb{P}(X_{n,j} = 0)$, $j = 1, \dots, k_n$,

és jelölje $S_n := X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$. Ha $\sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+$ és

$\max_{1 \leq j \leq k_n} p_{n,j} \rightarrow 0$, akkor $S_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Poisson}(\lambda)$.

Segédlemma szorzatok különbségének becslésére

Ha $m \in \mathbb{N}$ és $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in [-1, 1]$, akkor

$$\left| \prod_{j=1}^m a_j - \prod_{j=1}^m b_j \right| \leq \sum_{j=1}^m |a_j - b_j|.$$

Sztochasztikus folyamatok

Sztochasztikus folyamat

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, T tetszőleges nemüres halmaz, és minden $t \in T$ esetén $\xi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ezek $\{\xi_t : t \in T\}$ seregét **sztochasztikus folyamatnak** nevezzük. Azt mondjuk, hogy T a folyamat **paraméterhalmaza** (vagy indexhalmaza), $\mathbb{R}$ pedig a **fázistere** (vagy állapottere).

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamat a $t \in T$ paraméterben az $x \in \mathbb{R}$ állapotban van, ha a realizált $\omega \in \Omega$ kimenetel mellett $\xi_t(\omega) = x$. A folyamat értékének jelölésére használni fogjuk a $\xi(t)(\omega)$, illetve $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$ jelöléseket is (ugyanis a folyamatot lehet tekinteni természetes módon egyetlen $\xi : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ leképezésnek is: $\xi(t, \omega) := \xi_t(\omega)$).

Trajektória (realizáció, mintafüggvény)

Rögzített $\omega \in \Omega$ esetén a $T \ni t \mapsto \xi_t(\omega) \in \mathbb{R}$ függvényt a folyamat egy **trajektóriájának** (realizációjának, mintafüggvényének) nevezzük.

Diszkrét- és folytonos idejű folyamatok

Legyen $T \subset \mathbb{R}_+$ és $\{\xi_t : t \in T\}$ egy valós értékű sztochasztikus folyamat. Azt mondjuk, hogy a folyamat diszkrét idejű, ha T megszámlálható halmaz. Ekkor általában $T = \mathbb{Z}_+$, tehát a folyamat véletlen változóknak egy sorozata. A folyamat folytonos idejű, ha T a nemnegatív félegyenes egy véges vagy végtelen részintervalluma. Ekkor például $T = \mathbb{R}_+$ vagy $T = [0, 1]$.

Véges dimenziós eloszlások

Legyen $T \subset \mathbb{R}$. Egy $\{\xi_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamat végesdimenziós eloszlásai alatt a

$$\{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k}) : k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \in T\}$$

valószínűségi vektorváltozók eloszlásait értjük.

Modifikáció, megkülönböztethetlenség

Legyen T egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t : t \in T\}$ és $\{\eta_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamatok

- 1 **tágabb értelemben ekvivalensek**, ha megegyeznek a véges dimenziós eloszlásaik.
- 2 **ekvivalensek**, ha ugyanazon valószínűségi mezőn értelmezettek és $\mathbb{P}(\xi_t = \eta_t) = 1$ teljesül tetszőleges $t \in T$ esetén. Az ekvivalens folyamatokat egymás **modifikációinak** is nevezzük.
- 3 **megkülönböztethetlenség**, ha ugyanazon valószínűségi mezőn értelmezettek és $\mathbb{P}(\xi_t = \eta_t, \forall t \in T) = 1$.

Sztochasztikus folyamatok

- 1 Ha a $\{\xi_t : t \in T\}$ és $\{\eta_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamatok ekvivalensek (azaz egymás modifikációi), akkor tágabb értelemben is ekvivalensek (azaz megegyeznek a véges dimenziós eloszlásaik).
- 2 Ha a $\{\xi_t : t \in T\}$ és $\{\eta_t : t \in T\}$ sztochasztikus folyamatok megkülönböztethetetlenek, akkor ekvivalensek is (azaz egymás modifikációi).

Független, stacionárius növekményűség

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t : t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamat **független növekményű**, ha $\mathbb{P}(\xi_0 = 0) = 1$, és tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és tetszőleges $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ időpontok esetén a $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$ növekmények (teljesen) függetlenek.

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t : t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamat **független, stacionárius növekményű**, ha független növekményű, és a növekmények eloszlása időeltolással szemben invariáns, azaz tetszőleges $t, h \geq 0$ időpontok esetén $\xi_{t+h} - \xi_t$ eloszlása nem függ t -től (következésképpen megegyezik ξ_h eloszlásával).

Eloszlásfüggvények konvolúciója

Legyenek X és Y független (valós értékű) valószínűségi változók F és G eloszlásfüggvényekkel. Jelölje $X + Y$ eloszlásfüggvényét H , melyet az F és a G **eloszlásfüggvények konvolúciójának** nevezünk, és $F * G$ módon jelölünk. Ekkor

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z - y) \, dG(y), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Független növekményű folyamatok véges dimenziós eloszlásainak megadása

Egy $\{\xi_t : t \geq 0\}$ független növekményű sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásait egyértelműen meghatározzák a $\xi_t - \xi_s$, $0 \leq s < t$, növekmények eloszlásai.

Független, stacionárius növekményű folyamatok véges dimenziós eloszlásainak megadása

Egy $\{\xi_t : t \geq 0\}$ független, stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásait egyértelműen meghatározzák a ξ_t , $t \geq 0$, véletlen változók eloszlásai (azaz az egydimenziós eloszlások).

Továbbá, az $\{F_{\xi_t} : t \geq 0\}$ eloszlásfüggvényekből álló családra teljesül, hogy $F_{\xi_{s+t}} = F_{\xi_s} * F_{\xi_t}$ tetszőleges $s, t \geq 0$ esetén (ahol $*$ eloszlásfüggvények konvolúcióját jelöli).

Eloszlásfüggvények egyparaméteres konvolúciós félcsoportja

Azt mondjuk, hogy (egydimenziós) eloszlásfüggvényeknek egy $\{F_t : t \geq 0\}$ családja **egyparaméteres konvolúciós félcsoportot** alkot, ha $F_{s+t} = F_s * F_t$ tetszőleges $s, t \geq 0$ esetén, és $F_0 = \mathbb{1}_{(0,\infty)}$.

Sztochasztikus folyamatok

Várható érték- és kovariancia függvény

Legyen $T \neq \emptyset$ és $\{\xi_t : t \in T\}$ valós értékű sztochasztikus folyamat, hogy $\mathbb{E}(|\xi_t|) < \infty$, $t \in T$. Ekkor az $m : T \rightarrow \mathbb{R}$, $m(t) := \mathbb{E}(\xi_t)$, $t \in T$, függvényt a folyamat várható érték függvényének hívjuk. Továbbá, ha $\mathbb{E}(\xi_t^2) < \infty$, $t \in T$, akkor a $K : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$,

$$K(s, t) := \text{Cov}(\xi_s, \xi_t), \quad (s, t) \in T \times T,$$

függvényt a folyamat kovariancia függvényének hívjuk.

Legyen $T \neq \emptyset$ és $\{\xi_t : t \in T\}$ egy olyan valós értékű sztochasztikus folyamat, hogy $\mathbb{E}(\xi_t^2) < \infty$, $t \in T$. Ekkor

- ❶ $K(s, t) = K(t, s)$, $s, t \in T$ (azaz K szimmetrikus),
- ❷ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, \dots, t_k \in T$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ esetén

$$\sum_{i,j=1}^k \lambda_i \overline{\lambda_j} K(t_i, t_j) \geq 0.$$

Speciálisan, tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és $t_1, \dots, t_k \in T$ esetén a $(K(t_j, t_l))_{j,l=1,\dots,k}$ mátrix pozitív szemidefinit.

Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciátétele

Legyen $\xi := \{\xi_t : t \in T\}$ egy valós értékű sztochasztikus folyamat, ahol T egy nemüres indexhalmaz.

Legyen $\mathbb{R}^T := \{x \mid x : T \rightarrow \mathbb{R}\}$.

A ξ sztochasztikus folyamat úgy is felfogható, mint egy olyan függvény, mely az Ω eseménytéren van értelmezve, és az $\mathbb{R}^T$ térben veszi fel értékeit, nevezetesen

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T, \quad \Omega \ni \omega \mapsto \xi(\omega),$$

ahol $\xi(\omega) : T \rightarrow \mathbb{R}$, $T \ni t \mapsto \xi(\omega)(t) := \xi_t(\omega)$.

Kényelmes lenne, ha ξ az $\mathbb{R}^T$ tér véletlen eleme lenne, tehát ha a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T$ függvény mérhető lenne valamilyen alkalmasan definiált mérhetőségi struktúrára vonatkozóan.

Megadunk az $\mathbb{R}^T$ téren egy $\sigma(\mathcal{C})$ módon jelölt σ -algebrát, az ún. cylinderhalmazok (hengerhalmazok) által generált σ -algebrát.

Ehhez először bevezetjük az ún. (végesdimenziós) projekciókat.

Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciátétele

Projekciók (vetítések)

Legyen T egy nemüres indexhalmaz, $n \in \mathbb{N}$ és $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset T$.
A $p_S : \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R}^S$,

$$(p_S(x))(s_i) := x(s_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^T,$$

leképezést az $\mathbb{R}^S$ -re való **projekciónak vagy vetítésnek** nevezzük.
(A fentiekben definiált $p_S(x)$ függvényt röviden $(x_{s_1}, \dots, x_{s_n})$ módon is írhatjuk, ahol x_{s_i} az x függvénynek az s_i pontban felvett $x(s_i)$ helyettesítési értékét jelöli rövidített módon, ahol $i = 1, \dots, n$.)

Mérhető terek szorzata

Legyenek $(X_1, \mathcal{A}_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2)$ mérhető terek. A

$$\mathcal{T} := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

halmaz elemeit mérhető tégláknak hívjuk, az $(X_1 \times X_2, \sigma(\mathcal{T}))$ mérhető teret pedig az $(X_1, \mathcal{A}_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2)$ mérhető terek szorzatának nevezzük. A $\sigma(\mathcal{T})$ σ -algebrát $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ (vagy $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$) módon szokás jelölni

Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciátétele

Mérhető terek szorzata, cylinderhalmazok

Az előző definíció értelemszerűen kiterjeszthető véges sok $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, \dots, n$, mérhető tér szorzatára is.

Ha $(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in T}$ végtelen sok mérhető tér, ahol T egy tetszőleges (nem feltétlenül véges) indexhalmaz, akkor szorzatukon azt az $(X, \sigma(\mathcal{C}))$ mérhető teret értjük, melyre $X := \prod_{\alpha \in T} X_\alpha$ és $\sigma(\mathcal{C})$ az ún. cylinderhalmazok (hengerhalmazok) által generált σ -algebra.

A **cylinderhalmazok** olyan $C \subset X$ halmazok, melyekhez létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, ha $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, és $B \in \prod_{k=1}^n \mathcal{A}_{\alpha_k} := \mathcal{A}_{\alpha_1} \times \dots \times \mathcal{A}_{\alpha_n}$, hogy

$$C = \{x \in X : (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \in B\}.$$

Az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ indexeket a C tartópontjainak (koordinátáinak), a B halmazt pedig a C egy tartóhalmazának (alapjának) mondjuk. A cylinderhalmazok összességét $\mathcal{C}$ -vel jelöljük.

Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciátétele

Példa cylinderhalmazra

Legyen $T := \{1, 2, 3\}$ és $X_i := \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Ekkor tetszőleges $r > 0$ esetén $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$ cylinderhalmaz, ugyanis

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in B\},$$

ahol B az (x_1, x_2) sík origó középpontú r -sugarú körlapja (a határt is beleértve).

Ez a cylinderhalmaz nemmás, mint az x_3 -tengelyre forgásszimmetrikus, r -sugarú henger.

Ez a cylinderhalmaz megadható az alábbi alakban is

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \in B \times \mathbb{R}\},$$

így láthatjuk, hogy a cylinderhalmazok megadása nem egyértelmű.

Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciátétele

A cylinderhalmazok $\mathcal{C}$ -vel jelölt összessége halmazalgebra.

Szorozatmérhetőség

Egy $B \subset X$ halmaz pontosan akkor mérhető, azaz $B \in \sigma(\mathcal{C})$ pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $(\alpha_k)_{k=1}^\infty$ indexsorozat és

$\tilde{B} \in \prod_{k=1}^\infty \mathcal{A}_{\alpha_k}$, hogy $p_{(\alpha_k)_{k=1}^\infty}^{-1}(\tilde{B}) = B$, ahol

$p_{(\alpha_k)_{k=1}^\infty} : \prod_{\alpha \in T} X_\alpha \rightarrow \prod_{k=1}^\infty X_{\alpha_k}$, $p_{(\alpha_k)_{k=1}^\infty}(x) := (x_{\alpha_k})_{k=1}^\infty$, $x \in \prod_{\alpha \in T} X_\alpha$ (vagyis a B halmaz „csak megszámlálható sok koordinátától függ”).

Az előző állítás az $X_\alpha := \mathbb{R}$, $\alpha \in T$, esetben szemléletesen azt jelenti, hogy egy $B \subset \mathbb{R}^T$ halmaz pontosan akkor $\sigma(\mathcal{C})$ -mérhető, ha a B -hez tartozó függvények oly módon vannak definiálva, hogy megszámlálható sok pontban közös módon előírjuk az értéküket, a többi helyen pedig az értékek tetszőlegesek lehetnek.

Ezek után már van értelme azt kérdezni, hogy egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T$ függvény mérhető-e.

Sztochasztikus folyamat mérhetősége

Legyen $\xi := \{\xi_t : t \in T\}$ egy valós értékű sztochasztikus folyamat, ahol T egy nemüres indexhalmaz. Ekkor $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T$ mérhető az $(\Omega, \mathcal{A})$ és $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{C}))$ mérhetőségi terekre vonatkozóan.

Sztochasztikus folyamat eloszlása

Egy $\xi := \{\xi_t : t \in T\}$ (valós értékű) sztochasztikus folyamat (ahol T egy nemüres indexhalmaz) eloszlásán az $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{C}))$ téren definiált alábbi valószínűségi mértéket értjük:

$$\mathbb{P}_\xi(M) := \mathbb{P}(\xi \in M) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(M)), \quad M \in \sigma(\mathcal{C}).$$

Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciátétele

Sztochasztikus folyamat eloszlása és végesdimenziós eloszlásai közötti kapcsolat

Legyen $\xi := \{\xi_t : t \in T\}$ egy (valós értékű) sztochasztikus folyamat, ahol T egy nemüres indexhalmaz.

- (i) Ekkor ξ eloszlása egyértelműen meghatározza ξ végesdimenziós eloszlásait.
- (ii) Ha $\eta := \{\eta_t : t \in T\}$ egy olyan (valós értékű) sztochasztikus folyamat, melynek végesdimenziós eloszlásai megegyeznek ξ végesdimenziós eloszlásaival, akkor ξ és η eloszlása megegyezik, azaz $\mathbb{P}_\xi = \mathbb{P}_\eta$.

Tehát egy sztochasztikus folyamat végesdimenziós eloszlásai egyértelműen meghatározzák a folyamat eloszlását az $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{C}))$ téren.

A következőkben azt a korábbiakban felvetett kérdést vizsgáljuk meg, hogy mi egy olyan minimális feltétel, melyet egy valószínűségeloszlás családnak teljesítenie kell ahhoz, hogy a család elemei egy sztochasztikus folyamat végesdimenziós eloszlásai legyenek.

Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciátétele

Valószínűségi mértékek konzisztens családja

Legyen $T \neq \emptyset$ indexhalmaz. Legyen

$$T^* := \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in T^n : n \in \mathbb{N}, t_i \neq t_j, \text{ ha } i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\} \right\},$$

és minden $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$ esetén legyen adott egy $P_{t_1, \dots, t_n}$ valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mérhető téren.

A $\{P_{t_1, \dots, t_n} : (t_1, \dots, t_n) \in T^*, n \in \mathbb{N}\}$ családot **konzisztensnek** hívjuk, ha kielégíti az alábbi két feltételt:

- (a) **permutáció invariancia:** ha π az $(1, 2, \dots, n)$ egy permutációja, akkor tetszőleges $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, Borel-mérhető halmazok esetén a $P_{t_1, \dots, t_n}$ és $P_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}}$ valószínűségi mértékekre fennáll, hogy

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}}(A_{\pi(1)} \times A_{\pi(2)} \times \dots \times A_{\pi(n)}),$$

Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciátétele

(b) **kompatibilitási feltétel:** minden $n \in \mathbb{N}$, $(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) \in T^*$ és tetszőleges $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A) = P_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(A \times \mathbb{R}).$$

Az (a) feltétel szemléletesen azt jelenti, hogy egy téglatest mértéke nem függ a koordináták sorrendjétől.

A (b) feltétel a „hasábok térfogata egyenlő az alapterület szorozva a magassággal” elv általánosítása. Azért szokás kompatibilitási feltételnek hívni, mert különböző dimenziós Euklideszi tereken adott valószínűségi mértékek közötti kapcsolatról szól.

Példa valószínűségi mértékek konzisztens családjára

Legyen $T \neq \emptyset$, $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ egy sűrűségfüggvény, legyen továbbá tetszőleges $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$, és $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A) := \int_A f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciátétele

Legyen $T \neq \emptyset$ egy indexhalmaz. Legyen továbbá $\mathbb{P}$ egy valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{C}))$ szorzattéren, ahol $\sigma(\mathcal{C})$ a cylinderhalmazok által generált σ -algebrát jelöli. Minden $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$, esetén legyen

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A) := \mathbb{P} \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A \right\} \right), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Ekkor a $\{P_{t_1, \dots, t_n} : (t_1, \dots, t_n) \in T^*, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségi mértékekből álló család konzisztens.

Kolmogorov konzisztenciátétele

Legyen $T \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és minden $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$ esetén $P_{t_1, \dots, t_n}$ egy valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mérhető téren. Tegyük fel, hogy a $\{P_{t_1, \dots, t_n} : (t_1, \dots, t_n) \in T^*, n \in \mathbb{N}\}$ család konzisztens. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathcal{C}))$ mérhető téren (ahol $\sigma(\mathcal{C})$ a cylinderhalmazok által generált σ -algebra), amelyre minden $(t_1, \dots, t_n) \in T^*$, $n \in \mathbb{N}$ esetén $P_{t_1, \dots, t_n}(A) = \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\})$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciátétele

A Kolmogorov konzisztenciátétel bizonyításában fontos szerephez jut az alábbi mértékelméleti eredmény.

Mérték belülről regularitása

Legyen $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ az X részhalmazából álló halmazrendszer, $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ halmazfüggvény. Azt mondjuk, hogy μ egy $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ halmazrendszerre nézve **belülről reguláris**, ha minden $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \in \mathcal{K}\}$.

σ -kompakt család

Egy $X \neq \emptyset$ részhalmazából álló $\mathcal{K}$ családot **σ -kompaktnak** hívjuk, ha valahányszor egy $K_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$, sorozatra $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, mindannyiszor található olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\bigcap_{n=1}^N K_n = \emptyset$.

Legyen $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ az X részhalmazából álló halmazalgebra, $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ véges értékeket felvevő, végesen additív halmazfüggvény és $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ egy σ -kompakt család. Ha μ belülről reguláris a $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ rendszerre nézve, úgy μ σ -additív az $\mathcal{A}$ halmazalgebrán.

Kolmogorov konzisztencia- és egzisztenciátétele

Kolmogorov egzisztenciátétele

Legyen $T \subset [0, \infty)$ egy nemüres halmaz. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in T$, $t_1 < \dots < t_k$ esetén legyen $F_{t_1, t_2, \dots, t_k} : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$ egy k -dimenziós eloszlásfüggvény. Tegyük fel, hogy az

$$\{F_{t_1, t_2, \dots, t_k} : k \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_k \in T, t_1 < t_2 < \dots < t_k\}$$

család kompatibilis, azaz tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in T$, $\ell \in \{1, \dots, k\}$, és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq k$ egészek esetén

$$\lim_{x_j \rightarrow \infty, j \notin \{i_1, \dots, i_\ell\}} F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) = F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_\ell}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell}), \quad \forall x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell} \in \mathbb{R}.$$

Ekkor létezik olyan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és rajta olyan $\{\xi_t : t \in T\}$ valós értékű sztochasztikus folyamat, melyre tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in T$, $t_1 < \dots < t_k$ esetén $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k}$ eloszlásfüggvénye $F_{t_1, \dots, t_k}$.

Adott egyparaméteres konvolúciós félcsoporthoz tartozó független, stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat létezése

Legyen $\{F_t : t \geq 0\}$ eloszlásfüggvényeknek egy egyparaméteres konvolúciós félcsoportja. Ekkor létezik olyan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és rajta olyan $\{\xi_t : t \geq 0\}$ független, stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat, hogy $F_{\xi_t} = F_t$ tetszőleges $t \geq 0$ esetén. Ekkor a korábbiak alapján $\{\xi_t : t \geq 0\}$ végesdimenziós eloszlásait egyértelműen meghatározza az $\{F_t : t \geq 0\}$ család.

Diszkrét idejű martingálok

Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ jelölje azon események halmazát, melyekről az n időpontban már tudjuk, hogy bekövetkeztek-e, vagy sem. Ekkor $\mathcal{F}_n$ rész- σ -algebra, és $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$.

Filtráció (szűrés)

Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ rész- σ -algebra.

Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat **filtráció**, ha $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$.

Azt mondjuk, hogy véletlen változók $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata **adaptált** az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációhoz, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén X_n $\mathcal{F}_n$ -mérhető.

Véletlen változók tetszőleges $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata adaptált az $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$ **természetes filtrációhoz**, ahol $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

Diszkrét idejű martingálok

Martingál, szubmartingál, supermartingál

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ véletlen változók sorozata, mely adaptált valamely $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}$ filtrációhoz, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$.

Azt mondjuk, hogy az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat

- **martingál**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$;
- **szubmartingál**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq X_n$;
- **supermartingál**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n$.

Azt mondjuk, hogy a $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat martingál, szubmartingál vagy supermartingál, ha az $(X_n, \mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat az.

Ha az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat martingál, szubmartingál vagy supermartingál, akkor az $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat is az.

- martingál esetén $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(X_3) = \dots$;
- szubmartingál esetén $\mathbb{E}(X_1) \leq \mathbb{E}(X_2) \leq \mathbb{E}(X_3) \leq \dots$;
- supermartingál esetén $\mathbb{E}(X_1) \geq \mathbb{E}(X_2) \geq \mathbb{E}(X_3) \geq \dots$.

Diszkrét idejű martingálok

Példák:

- 1 Ha $Y_1, Y_2, \dots$ olyan független, integrálható véletlen változók, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(Y_k) = 0$, akkor az $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat martingál.
- 2 Ha $Y_1, Y_2, \dots$ olyan független, pozitív integrálható véletlen változók, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(Y_k) = 1$, akkor az $X_n = \prod_{k=1}^n Y_k$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat martingál.
- 3 Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}$ filtráció, Y olyan véletlen változó, hogy $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$, és legyen $X_n := \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat martingál.

Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingál, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}(X_k^2) < \infty$, akkor az $X_1, X_2 - X_1, X_3 - X_2, \dots$ véletlen változók páronként korrelálatlanok.

Diszkrét idejű martingálok

Minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén

- martingál esetén $\mathbb{E}(X_{n+k} | \mathcal{F}_n) = X_n$;
- szubmartingál esetén $\mathbb{E}(X_{n+k} | \mathcal{F}_n) \geq X_n$;
- szupermartingál esetén $\mathbb{E}(X_{n+k} | \mathcal{F}_n) \leq X_n$.

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ (nem feltétlenül korlátos) intervallum, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény, és $X_1, X_2, \dots$ olyan véletlen változók, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $X_k \in I$ m.b., és $\mathbb{E}(|g(X_k)|) < \infty$. Ekkor $(g(X_n), \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál, ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

- 1 $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál és g monoton növekvő;
- 2 $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingál.

Diszkrét idejű martingálok

Növekvő, illetve előrejelezhető sorozat

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ véletlen változók sorozata, mely adaptált valamely $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}$ filtrációhoz.

Azt mondjuk, hogy a $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat

- **növekvő**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Z_n \leq Z_{n+1}$ $\mathbb{P}$ -m.m.;
- **előrejelezhető (prediktálható)**, ha $Z_1 = 0$ $\mathbb{P}$ -m.m., és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén Z_{n+1} $\mathcal{F}_n$ -mérhető.

Doob–felbontás

Tetszőleges $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál esetén léteznek olyan $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ véletlen sorozatok, hogy

- 1 $X_n = Y_n + Z_n$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén,
- 2 $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ martingál,
- 3 $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ növekvő, előrejelezhető sorozat.

Ilyen tulajdonságokkal rendelkező $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok $\mathbb{P}$ -m.m. egyértelműen meghatározottak.

Diszkrét idejű martingálok

(Opcionális, választható) megállási időpont

Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}$ filtráció.

Azt mondjuk, hogy az $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ véletlen változó **megállási időpont** az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{\omega \in \Omega : \alpha(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Ha véletlen változók $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata adaptált egy $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve, akkor tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ halmazba való első megérkezési időpont:

$$\alpha_B(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \in B\}$$

(ahol $\inf \emptyset := \infty$) megállási időpont az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve.

$$\mathcal{F}_\alpha := \{A \in \mathcal{A} : \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén } A \cap \{\omega \in \Omega : \alpha(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

$\mathcal{F}_\alpha$: az α -ig bekövetkező események (vagyis azok az események, melyekről az α véletlen időpontban meg tudjuk állapítani, hogy már bekövetkeztek-e vagy sem) halmaza egy σ -algebra.

Diszkrét idejű martingálok

Ha véletlen változók $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata adaptált az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációhoz és α megállási időpont az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációra nézve, hogy $\mathbb{P}(\alpha < \infty) = 1$, akkor az $X_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$X_\alpha := \sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbb{1}_{\{\alpha=n\}}$$

leképezés mérhető, így véletlen változó, sőt $\mathcal{F}_\alpha$ -mérhető is, azaz $\sigma(X_\alpha) \subset \mathcal{F}_\alpha$.

Opcionális megállási tétel

Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(i) martingál, (ii) szubmartingál, (iii) szupermartingál,

és legyenek α és β olyan megállási időpontok az $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációhoz, hogy $\alpha \leq \beta$, $\mathbb{E}(|X_\alpha|) < \infty$, $\mathbb{P}(\beta < \infty) = 1$, $\mathbb{E}(|X_\beta|) < \infty$, és

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{\{\beta > n\}}) = 0,$$

mely utóbbi feltétel automatikusan teljesül, ha β korlátos. Ekkor $((X_\alpha, X_\beta), (\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta))$

(i) martingál, (ii) szubmartingál, (iii) szupermartingál,

és így, speciálisan:

$$(i) \mathbb{E}(X_\beta | \mathcal{F}_\alpha) = X_\alpha, \quad (ii) \mathbb{E}(X_\beta | \mathcal{F}_\alpha) \geq X_\alpha, \quad (iii) \mathbb{E}(X_\beta | \mathcal{F}_\alpha) \leq X_\alpha.$$

Diszkrét idejű martingálok

Wald-azonosságok

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, és $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$. Legyen τ olyan megállási időpont az $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$ filtrációhoz, hogy $\mathbb{E}(\tau) < \infty$. Ekkor

$$\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_\tau) = \mathbb{E}(\tau) \mathbb{E}(X_1).$$

Ha még $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ is teljesül, akkor

$$\mathbb{E} \left[\left((X_1 + \dots + X_\tau) - \tau \mathbb{E}(X_1) \right)^2 \right] = \mathbb{E}(\tau) \operatorname{Var}(X_1).$$

Doob maximál-egyenlőtlensége

Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$ és $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \left(X_n \mathbb{1}_{\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} X_k \geq \varepsilon \right\}} \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}(X_n^+).$$

Kolmogorov maximál-egyenlőtlensége

Ha $X_1, \dots, X_n$ független véletlen változók és $\mathbb{E}(X_k^2) < \infty$ minden $k = 1, 2, \dots, n$ esetén, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k - \mathbb{E}(S_k)| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^+).$$

Diszkrét idejű martingálok

Legyenek X és Y nemnegatív véletlen változók, hogy

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_{\{X \geq \varepsilon\}}), \quad \varepsilon > 0.$$

Ekkor tetszőleges $p > 1$ esetén

$$\mathbb{E}(X^p) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}(Y^p).$$

L^p maximál egyenlőtlenség

Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy nemnegatív szubmartingál és $p \in (1, \infty)$.
Ekkor

(i)

$$\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k^p \right) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}(X_n^p), \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii)

$$\mathbb{E} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n^p \right) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^p).$$

Diszkrét idejű martingálok

Felmetszések száma

Legyen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ véletlen változók sorozata, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és

$$\tau_0 := 0,$$

$$\tau_1 := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \leq a\},$$

$$\tau_2 := \inf\{n \in \mathbb{N} : n > \tau_1, X_n \geq b\},$$

$$\vdots$$

$$\tau_{2m-1} := \inf\{n \in \mathbb{N} : n > \tau_{2m-2}, X_n \leq a\},$$

$$\tau_{2m} := \inf\{n \in \mathbb{N} : n > \tau_{2m-1}, X_n \geq b\},$$

$$\vdots$$

ahol $\inf \emptyset := \infty$. Legyen $N \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az $X_1, \dots, X_N$ sorozat **felmetszései**nek száma az $[a, b]$ intervallumon

$$U_N^X(a, b) := \sup\{m \in \mathbb{Z}_+ : \tau_{2m} \leq N\}.$$

Doob felmetszési lemmája

Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szubmartingál, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és tetszőleges $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{E} \left[U_N^X(a, b) \right] \leq \frac{\mathbb{E}[(X_N - a)^+]}{b - a} \leq \frac{\mathbb{E}(X_N^+) + |a|}{b - a}.$$

Doob szubmartingál konvergencia-tétele

Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan szubmartingál, hogy $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$, akkor létezik olyan X_∞ véletlen változó, melyre

- $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X_\infty$, ha $n \rightarrow \infty$,
- $\mathbb{E}(|X_\infty|) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|).$