

# Sztochasztikus modellek

Elméleti jegyzet

BARCZY MÁTYÁS

Szegedi Tudományegyetem  
Bolyai Intézet  
HUN-REN–SZTE Analízis és Alkalmazásai Kutatócsoport  
E-mail: [barczy@math.u-szeged.hu](mailto:barczy@math.u-szeged.hu)

Utolsó frissítés dátuma: 2025. november 3.

## Előszó

Ez az elméleti jegyzet a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete által meghirdetett Sztochasztikus modellek című tárgyhoz készült, melyet a diákok egy egyféléves valószínűség-számítás kurzus teljesítése után vehetnek fel. A jegyzet "Diszkrét idejű Markov-láncok" című 2. fejezete Benke János (Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet, Sztochasztika Tanszék) Sztochasztikus modellek című, 2022./23. tanév I. félévében tartott előadásához készített elméleti összefoglalója alapján készült, annak jelentősen kiegészített és javított változata, melynek elkészítésében Benke János nem vett részt, azt nem ellenőrizte.

Akármilyen észrevételt szívesen veszek a *barczy@math.u-szeged.hu* email címemre.

# Tartalomjegyzék

|                                                                                        |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Bevezető</b>                                                                     | <b>4</b>  |
| 1.1. Sztochasztikus folyamatok . . . . .                                               | 4         |
| <b>2. Diszkrét idejű Markov-láncok</b>                                                 | <b>6</b>  |
| 2.1. Egylépéses átmenetvalószínűségek, egzisztencia . . . . .                          | 6         |
| 2.2. Többlépéses átmenetvalószínűségek . . . . .                                       | 12        |
| 2.3. Átmenetgráf, kommunikációs osztályok . . . . .                                    | 14        |
| 2.4. Az állapotok típusai . . . . .                                                    | 18        |
| 2.5. Periodicitás . . . . .                                                            | 27        |
| 2.6. Elnyelési valószínűségek, elérési idők . . . . .                                  | 31        |
| 2.7. Invariáns eloszlás . . . . .                                                      | 42        |
| 2.8. Generátorfüggvények . . . . .                                                     | 54        |
| 2.9. Galton-Watson-folyamat . . . . .                                                  | 62        |
| <b>3. Felújítási folyamatok és a Poisson-folyamat</b>                                  | <b>71</b> |
| 3.1. Exponenciális eloszlás, Gamma eloszlás . . . . .                                  | 71        |
| 3.2. Számláló és felújítási folyamatok . . . . .                                       | 76        |
| 3.3. Poisson-folyamat . . . . .                                                        | 78        |
| <b>4. Folytonos idejű Markov-láncok</b>                                                | <b>93</b> |
| 4.1. Átmenetvalószínűségi függvények, Kolmogorov-féle differenciálegyenletek . . . . . | 93        |
| 4.2. Állapotváltozások dinamikája . . . . .                                            | 106       |
| 4.3. Invariáns eloszlás, ergodikusság . . . . .                                        | 113       |
| 4.4. Születési-kihalási folyamatok . . . . .                                           | 120       |

# 1. Bevezető

Jelölések:  $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ . Ha  $\Omega$  egy nemüres halmaz és  $A$  egy részhalmaza  $\Omega$ -nak, akkor ezt  $A \subset \Omega$  módon fogjuk jelölni (ahol  $\subset$  nem feltétlenül szigorú tartalmazást jelöl, azaz  $A \subset \Omega$  esetén  $A = \Omega$  is lehetséges). Egy  $x \in \mathbb{R}^n$  vektor esetén az  $x$  Euklideszi normáját  $\|x\|$  jelöli. Ha  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  és  $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  véletlen változók, akkor  $\xi \sim \eta$  azt jelöli, hogy  $\xi$  és  $\eta$  eloszlásai megegyeznek.

## 1.1. Sztochasztikus folyamatok

**1.1.1. Definíció.** Legyen  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mező,  $T$  tetszőleges nemüres (index)halmaz, és minden  $t \in T$  esetén legyen  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  egy véletlen változó. Ekkor ezek  $\mathbb{X} = \{X_t : t \in T\}$  halmazát (összességét) sztochasztikus folyamatnak nevezzük. Azt mondjuk, hogy  $T$  a folyamat paramétertere, az  $X_t$ ,  $t \in T$ , véletlen változók által felvehető értékek  $I$  halmazát pedig a folyamat állapotterének (fázisterének) nevezzük.

Esetenként az  $X_t$  jelölés helyett az  $X(t)$  jelölést is használni fogjuk. Egy sztochasztikus folyamatot lehet tekinteni természetes módon egyetlen  $\mathbb{X} : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  leképezésnek is:  $\mathbb{X}(t, \omega) := X_t(\omega)$ ,  $t \in T$ ,  $\omega \in \Omega$ . A rögzített  $\omega \in \Omega$  esetén adódó  $\mathbb{X}(\cdot, \omega) : T \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt (azaz a  $T \ni t \mapsto X_t(\omega)$  függvényt) a folyamat egy trajektóriájának (realizációjának, mintafüggvényének) nevezzük.

**1.1.2. Példa.** Legyenek  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , teljesen független, azonos eloszlású, valós értékű valószínűségi változók egy sorozata, hogy  $X_1$  standard normális eloszlású. Ekkor  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  egy sztochasztikus folyamat  $T = \mathbb{N}$  paraméterterrel és  $I = \mathbb{R}$  fázistérrel. A trajektóriák ebben az esetben valós számsorozatok.  $\square$

Természetes módon lehet definiálni olyan sztochasztikus folyamatokat is, melyek fázis-tere egy mérhető tér.

Ebben a jegyzetben csak olyan sztochasztikus folyamatokkal foglalkozunk, ahol  $T \subset \mathbb{R}$  (például  $T = [0, \infty)$  vagy  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ ). Ezáltal adódik egy természetes rendezés a  $T$  halmazon, amit nevezhetünk időnek, míg a  $t \in T$  értéket nevezhetjük időparaméternek. Ez alapján kialakíthatunk egy a sztochasztikus folyamatokra vonatkozó nyelvezetet.

Legyen  $t \in T$  és  $i \in I$  tetszőleges, ekkor azt mondjuk, hogy az  $\mathbb{X}$  folyamat a  $t$  időpontban az  $i$  állapotban van, ha  $X_t = i$ . Az  $\{X_s : s \in T, s < t\}$  halmazt az  $\mathbb{X}$  folyamat múltjának, az  $X_t$  véletlen változót az  $\mathbb{X}$  folyamat jelenének, míg az  $\{X_s : s \in T, s > t\}$  halmazt az  $\mathbb{X}$  folyamat jövőjének nevezzük.

Ezen kurzus során kizárólag csak azzal esettel foglalkozunk, amikor az állapotter megszámlálható számosságú, vagyis véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok állapotot tekintünk. Ekkor nevezhetjük az  $\mathbb{X}$  folyamatot diszkrét állapotterű sztochasztikus folyamatnak.

Az idő tekintetében is kezdetben a diszkrét esetet tekintjük majd, amikor is  $T = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Ekkor azt mondjuk, hogy az  $\mathbb{X}$  folyamat diszkrét idejű sztochasztikus folyamat, az időparaméter szokásos jelölése pedig  $n$ .

Egy  $\{X_t : t \in T\}$  sztochasztikus folyamat viselkedéséről (ahol  $T \subset \mathbb{R}$ ) nyilván sok információt tartalmaznak a folyamat véges dimenziós eloszlásai: az

$$\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) : k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \in T, t_1 < \dots < t_k\}$$

valószínűségi vektorváltozók eloszlásai. (Az  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  valószínűségi vektorváltozó eloszlása egy valószínűségi mérték az  $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$  mérhető téren.) Ezeket a véges dimenziós eloszlásokat az

$$\{F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_k}} : k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k \in T, t_1 < \dots < t_k\}$$

eloszlásfüggvény-sereggel lehet megadni. A véges dimenziós eloszlássereg ismeretében még nem lehet eldönteni milyen tulajdonságokkal bírnak a folyamat trajektóriái.

**1.1.3. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $\{X_t : t \in T\}$  és  $\{Y_t : t \in T\}$  sztochasztikus folyamatok

- *tágabb értelemben ekvivalensek, ha megegyeznek a véges dimenziós eloszlásaik;*
- *ekvivalensek, ha  $P(X_t = Y_t) = 1$  teljesül tetszőleges  $t \in T$  esetén.*

*Az ekvivalens folyamatokat egymás modifikációinak nevezzük.*

**1.1.4. Megjegyzés.** Ha az  $\{X_t : t \in T\}$  és  $\{Y_t : t \in T\}$  sztochasztikus folyamatok ekvivalensek, akkor tágabb értelemben is ekvivalensek. Ugyanis,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T$ ,  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  és  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  esetén

$$\begin{aligned} F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_n} < x_n) \\ &= P(X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_n} < x_n, X_{t_1} = Y_{t_1}, \dots, X_{t_n} = Y_{t_n}) \\ &= P(Y_{t_1} < x_1, \dots, Y_{t_n} < x_n) = F_{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk azt, hogy  $P(A) = P(A \cap B)$ ,  $\forall A, B \in \mathcal{A}$ ,  $P(B) = 1$  esetén, mely abból következik, hogy  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$  és  $P(A \cap \overline{B}) \leq P(\overline{B}) = 0$ .  $\square$

Ellenőrizhető, hogy az 1.1.3. Definícióban megadott relációk ekvivalencia-relációk a sztochasztikus folyamatok halmazán.

## 2. Diszkrét idejű Markov-láncok

### 2.1. Egylépéses átmenetvalószínűségek, egzisztencia

Ahhoz, hogy a sztochasztikus folyamatokat modellezési feladatokra tudjuk használni, meg kell értenünk a folyamat dinamikáját, a különböző időpontbeli véletlen változók közötti függőségi viszonyokat. Ehhez bevezetjük a sztochasztikus folyamatok egy nagy osztályát, a Markov-láncokat.

**2.1.1. Definíció.** Egy  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  diszkrét idejű diszkrét állapotterű sztochasztikus folyamatot Markov-láncnak nevezzük, ha rendelkezik az ún. Markov-tulajdonsággal, azaz ha tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  és tetszőleges  $i_0, i_1, \dots, i_n, i_{n+1} \in I$  állapotok esetén

$$(2.1.1) \quad P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n),$$

abban az esetben, amikor ezen feltételes valószínűségek értelmesek, azaz ha

$$P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0.$$

A Markov-tulajdonságot memória nélküli tulajdonságnak is nevezzük.

**2.1.2. Megjegyzés.** (i) Vegyük észre, hogy ha  $P(X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) > 0$ , úgy  $P(X_n = i_n) > 0$  is teljesül.

(ii) A Markov- (memória nélküli) tulajdonság egy lehetséges megfogalmazása, hogy a folyamat jövője a (jövőhöz képesti) múlttól csupán a jelenen keresztül függ. Heurisztikusan, a folyamat jelenében lévő információ elegendő ahhoz, hogy megmondjuk a folyamat jövőjét (abban az értelemben, hogy az egyes kimenetek milyen valószínűséggel következnek be). Kicsit másként, a (2.1.1) Markov-tulajdonság azt fejezi ki, hogy a folyamat jövője ( $\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$ ) csak a jelenen ( $\{X_n = i_n\}$ ) keresztül függ a (jövőhöz képesti) múlttól ( $\{X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\}$ ).

(iii) A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy a tekintett feltételes valószínűségeknél a feltételben szereplő események valószínűsége pozitív.  $\square$

**2.1.3. Definíció.** Egy  $\mathbb{X}$  Markov-lánc (egylépéses) átmenetvalószínűségei alatt a

$$p_{i,j}(n) := P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad i, j \in I$$

valószínűségeket értjük. Ha ezen átmenetvalószínűségek nem függenek  $n$  értékétől, azaz

$$p_{i,j}(n) = p_{i,j}(0) =: p_{i,j}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i, j \in I,$$

akkor azt mondjuk, hogy a Markov-lánc (idő)homogén. Homogén Markov-lánc (egylépéses) átmenetmátrixa alatt a

$$\mathbb{P} := (p_{i,j})_{i,j \in I}$$

mátrixot értjük.

Az alábbiakban egy egyszerű konstrukciót mutatunk, mely homogén Markov-láncot ad meg.

**2.1.4. Tétel.** Legyenek  $\xi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , független, azonos eloszlású véletlen változók. Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  egy megszámlálható halmaz, és  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow I$  egy mérhető leképezés (a  $2^I \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$

és  $2^I$  szigma-algebrákra vonatkozólag). Legyen  $X_0$  egy olyan véletlen változó, melynek értékkészlete  $I$ -beli és tegyük fel, hogy  $X_0$  független a  $\xi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , véletlen változóktól. Legyen

$$X_{n+1} := f(X_n, \xi_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ekkor  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  egy diszkrét idejű homogén Markov-lánc, melynek fázistere  $I$  és egylépéses átmenetvalószínűségei:

$$p_{i,j} = P(f(i, \xi_1) = j), \quad i, j \in I.$$

**Bizonyítás.** A rekurzív definíció miatt tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  esetén létezik olyan  $g_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow I$  mérhető függvény, melyre

$$X_n = g_n(X_0, \xi_1, \dots, \xi_n),$$

és így  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i, j \in I$ ,  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in I$  esetén

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= P(f(i, \xi_{n+1}) = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= P(f(i, \xi_{n+1}) = j \mid g_n(X_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = i, g_{n-1}(X_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, \\ &\quad \dots, g_1(X_0, \xi_1) = i_1, X_0 = i_0) \\ &= P(f(i, \xi_{n+1}) = j) = P(f(i, \xi_1) = j), \end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti lépésben azt használtuk fel, hogy a  $g_n(X_0, \xi_1, \dots, \xi_n), \dots, g_1(X_0, \xi_1), X_0$  véletlen változók mérhetőek a  $\sigma(X_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$  szigma-algebrára nézve, és emiatt függetlenek az  $\{f(i, \xi_{n+1}) = j\}$  eseménytől, az utolsó lépésben pedig azt használtuk fel, hogy  $\xi_{n+1}$  és  $\xi_1$  eloszlásai megegyeznek.

Hasonlóan belátható, hogy

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(f(i, \xi_{n+1}) = j) = P(f(i, \xi_1) = j).$$

Így  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  diszkrét idejű Markov-lánc, mely homogén is, hiszen a  $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(f(i, \xi_1) = j)$  átmenetvalószínűségek nem függenek  $n$ -től.

A fentiekből a  $p_{i,j}$ -re vonatkozó formula is adódik.  $\square$

A továbbiakban mindig feltesszük, hogy a Markov-lánc amivel dolgozunk homogén.

**2.1.5. Definíció.** Legyen  $I$  egy megszámlálható halmaz. Azt mondjuk, hogy az  $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$  mátrix sztochasztikus mátrix, ha az alábbi két feltétel teljesül:

- (i)  $a_{i,j} \geq 0$  tetszőleges  $i, j \in I$  esetén,
- (ii)  $\sum_{j \in I} a_{i,j} = 1$  tetszőleges  $i \in I$  esetén.

Gondolhatunk sztochasztikus mátrixokra úgy mint olyan mátrixokra, melyeknek minden sora eloszlást alkot.

**2.1.6. Állítás.** (i) Egy Markov-lánc átmenetmátrixa mindig sztochasztikus mátrix.

(ii) Legyen  $I$  egy megszámlálható halmaz,  $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$  és  $B = (b_{i,j})_{i,j \in I}$  sztochasztikus mátrixok. Ekkor  $AB$  is sztochasztikus mátrix.

**Bizonyítás.** (i): Tetszőleges  $i, j \in I$  esetén  $p_{i,j} \geq 0$ , hiszen  $p_{i,j}$  egy feltételes valószínűség. Tetszőleges  $i \in I$  esetén, a teljes valószínűség tétele alapján

$$\sum_{j \in I} p_{i,j} = \sum_{j \in I} P(X_1 = j \mid X_0 = i) = \sum_{j \in I} \frac{P(X_1 = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)}$$

$$= \frac{1}{P(X_0 = i)} \sum_{j \in I} P(X_1 = j, X_0 = i) = \frac{P(X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = 1,$$

ahol az utolsó előtti egyenlőség abból következik, hogy a valószínűség  $\sigma$ -additivitása,  $\{X_1 = j, X_0 = i\} \cap \{X_1 = \tilde{j}, X_0 = i\} = \emptyset$ ,  $j \neq \tilde{j}$ ,  $j, \tilde{j} \in I$ , és  $\bigcup_{j \in I} \{X_1 = j, X_0 = i\} = \{X_0 = i\}$  alapján

$$\sum_{j \in I} P(X_1 = j, X_0 = i) = P\left(\bigcup_{j \in I} \{X_1 = j, X_0 = i\}\right) = P(X_0 = i).$$

(ii): Tetszőleges  $i, j \in I$  esetén  $(AB)_{i,j} \geq 0$ , hiszen  $A$  és  $B$  nemnegatív elemű mátrixok. Tetszőleges  $i \in I$  esetén

$$\sum_{j \in I} (AB)_{i,j} = \sum_{j \in I} \left( \sum_{k \in I} a_{i,k} b_{k,j} \right) = \sum_{k \in I} \left( a_{i,k} \left( \sum_{j \in I} b_{k,j} \right) \right) = \sum_{k \in I} (a_{i,k} \cdot 1) = 1.$$

□

**2.1.7. Definíció.** Legyen  $\mathbb{X}$  egy Markov-lánc  $I$  állapottérrel,  $\alpha$  pedig egy valószínűség-eloszlás az  $I$  halmazon. Azt mondjuk, hogy  $\alpha$  az  $\mathbb{X}$  folyamat kezdeti eloszlása, ha

$$P(X_0 = i) = \alpha_i, \quad \forall i \in I.$$

Az  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$  jelölés alatt azt értjük, hogy  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  Markov-lánc  $\alpha$  kezdeti eloszlással és  $\mathbb{P}$  átmenetmátrixszal.

**2.1.8. Tétel. (Markov-láncok egzisztenciátétele)** Legyen adott egy  $I$  megszámlálható halmazon egy  $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$  diszkrét valószínűség-eloszlás és egy  $\mathbb{P} = (p_{i,j})_{i,j \in I}$  sztochasztikus mátrix. Ekkor létezik olyan  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mező, ezen olyan  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  homogén Markov-lánc, melynek  $\alpha$  a kezdeti eloszlása és  $\mathbb{P}$  az egylépéses átmenetmátrixa.

**2.1.9. Példa.** (i): Szimmetrikus egydimenziós véletlen bolyongás a számegyenesen. Tekintsük a következő sztochasztikus folyamatot: a folyamat 0-ból indul ki, és minden lépésben feldobok egy szabályos pénzérmét, ha a dobás eredménye fej, akkor növelem a folyamat értékét 1-gyel, ha írás, akkor csökkentem 1-gyel. Az így kapott sztochasztikus folyamatot szimmetrikus véletlen bolyongásnak nevezzük, mely egy homogén Markov-lánc  $\mathbb{Z}$  fázistérrel,  $\delta_0$  kezdeti eloszlással és

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } j = i \pm 1, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z},$$

egylépéses átmenetvalószínűségekkel. Az előbbieken  $\delta_0$  a 0-ban degenerált kezdeti eloszlást jelöli, azaz  $\delta_0(\{0\}) = 1$  és  $\delta_0(\{j\}) = 0$ ,  $j \neq 0$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

(ii): Egydimenziós véletlen bolyongás a számegyenesen. Legyen  $p \in (0, 1)$ , és legyenek  $Z_1, Z_2, \dots$  független azonos eloszlású véletlen változók, melyek közös eloszlása:

$$P(Z_1 = 1) = p, \quad P(Z_1 = -1) = 1 - p.$$

Továbbá, legyen  $X_0 := 0$  és

$$X_n := Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor az  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  sztochasztikus folyamatot egydimenziós véletlen bolyongásnak hívjuk. Ekkor  $\mathbb{X}$  Markov-lánc  $I = \mathbb{Z}$  állapottérrel, hiszen

$$X_{n+1} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n + Z_{n+1} = X_n + Z_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

és így

$$p_{i,j} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} p, & \text{ha } j = i + 1, \\ 1 - p, & \text{ha } j = i - 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Tehát  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$ , ahol  $\alpha = \delta_0$  és  $\mathbb{P} = (p_{i,j})_{i,j \in I}$ .

(iii): Legyen  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  egy szimmetrikus véletlen bolyongás a számegyenesen, és legyen

$$M_n := \max_{i \in \{0,1,\dots,n\}} \{X_i\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Belátjuk, hogy  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  nem Markov-lánc.

Először egy olyan gondolatmenetet mutatunk, melyből (csak) az következik, hogy ha  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  Markov-lánc lenne, akkor nem lehetne időhomogén. Tetszőleges páros  $n \geq 2$  esetén

$$\begin{aligned} P(M_{n+1} = 3 \mid M_n = 2, M_{n-1} = 1) &= \frac{P(M_{n+1} = 3, M_n = 2, M_{n-1} = 1)}{P(M_n = 2, M_{n-1} = 1)} \\ &= \frac{P(Z_{n+1} = 1, Z_n = 1, X_{n-1} = 1, M_{n-1} = 1)}{P(Z_n = 1, X_{n-1} = 1, M_{n-1} = 1)} \\ &= \frac{P(Z_{n+1} = 1) P(Z_n = 1) P(X_{n-1} = 1, M_{n-1} = 1)}{P(Z_n = 1) P(X_{n-1} = 1, M_{n-1} = 1)} \\ &= P(Z_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A fenti formula azért csak páros  $n \geq 2$  esetén teljesül, mert csak ebben az esetben lesz a feltételben szereplő esemény valószínűsége pozitív, hiszen  $\{M_n = 2, M_{n-1} = 1\} = \{Z_n = 1, X_{n-1} = 1, M_{n-1} = 1\}$ , és  $X_{n-1} = 1$  akkor és csak akkor teljesülhet, ha  $n - 1$  páratlan, azaz  $n$  páros.

Hasonlóan, tetszőleges páratlan  $n \geq 3$  esetén

$$\begin{aligned} P(M_{n+1} = 3 \mid M_n = 2, M_{n-1} = 2, M_{n-2} = 1) &= 0 \\ &= \frac{P(M_{n+1} = 3, M_n = 2, M_{n-1} = 2, M_{n-2} = 1)}{P(M_n = 2, M_{n-1} = 2, M_{n-2} = 1)} \\ &= \frac{P(M_{n+1} = 3, X_n = 1, X_{n-1} = 2, X_{n-2} = 1, M_{n-2} = 1)}{P(X_n = 1, X_{n-1} = 2, X_{n-2} = 1, M_{n-2} = 1)} \\ &= \frac{P(\emptyset)}{P(X_n = 1, X_{n-1} = 2, X_{n-2} = 1, M_{n-2} = 1)} = 0. \end{aligned}$$

A fenti formula azért csak páratlan  $n \geq 3$  esetén teljesül, mert csak ebben az esetben lesz a feltételben szereplő esemény valószínűsége pozitív, hiszen  $\{M_n = 2, M_{n-1} = 2, M_{n-2} = 1\} = \{X_n = 1, X_{n-1} = 2, X_{n-2} = 1, M_{n-2} = 1\}$ , és  $X_{n-1} = 2$  akkor és csak akkor teljesülhet, ha  $n - 1$  páros, azaz  $n$  páratlan.

Ha  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  Markov-lánc lenne, akkor a fentiek alapján

$$P(M_3 = 2 \mid M_2 = 2) = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad P(M_4 = 3 \mid M_3 = 2) = 0$$

teljesülne, mely alapján  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  nem lehetne időhomogén.

A következőkben egy olyan gondolatmenetet mutatunk, melyből következik, hogy  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  nem lehet Markov-lánc. Az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(M_4 = 2 \mid M_3 = 1, M_2 = 0) &= \frac{P(M_4 = 2, M_3 = 1, M_2 = 0)}{P(M_3 = 1, M_2 = 0)} \\ &= \frac{P(Z_4 = +1, X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = -1)}{P(X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = -1)} \\ &= \frac{P(Z_4 = +1) P(X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = -1)}{P(X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = -1)} \\ &= P(Z_4 = +1) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} P(M_4 = 2 \mid M_3 = 1, M_2 = 1) &= \frac{P(M_4 = 2, M_3 = 1, M_2 = 1)}{P(M_3 = 1, M_2 = 1)} \\ &= \frac{P(Z_4 = 1, X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 1)}{P(M_3 = 1, M_2 = 1)} \\ &= \frac{P(Z_4 = 1) P(X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 1)}{P(M_3 = 1, M_2 = 1)} \\ &= \frac{P(X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 1)}{2 P(M_3 = 1, M_2 = 1)} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőség abból következik, hogy

$$\{X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 1\} \cup \{X_3 = -1, X_2 = 0, X_1 = 1\} = \{M_3 = 1, M_2 = 1\},$$

és a bal oldalon levő unióban szereplő mindkét (diszjunkt) esemény valószínűsége  $(1/2)^3$ . Ha  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  Markov-lánc lenne, akkor

$$P(M_4 = 2 \mid M_3 = 1, M_2 = 0) = P(M_4 = 2 \mid M_3 = 1, M_2 = 1)$$

teljesülne, mely azonban nem teljesül, mert  $1/2 \neq 1/4$ . Így  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  nem Markov-lánc.

(iv): Jelölje  $X_0$  egy javító műhelyben levő gépek számát a 0-adik napon, ahol  $X_0$  egy nemnegatív egészértékű véletlen változó. Feltételezzük, hogy tetszőleges  $n \in \mathbb{Z}_+$  esetén az  $n$ -edik napon  $\xi_{n+1}$  darab gép megy tönkre, melyek az  $(n+1)$ -edik napon a javító műhelybe kerülnek, ahol  $\xi_{n+1}$  egy nemnegatív egészértékű véletlen változó. A javító műhelyben minden nap egy gépet tudnak megjavítani, mely másnapra készül el. Tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $X_n$ -nel jelölve a javító műhelyben levő gépek számát az  $n$ -edik napon, kapjuk, hogy

$$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + \xi_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ha  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  független, azonos eloszlásúak és függetlenek  $X_0$ -tól, akkor a 2.1.4. Tételt használva az  $f(x, y) := (x - 1)^+ + y$ ,  $x \in I := \mathbb{Z}_+$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , választással, kapjuk, hogy  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  egy homogén Markov-lánc és az egy lépéses átmenetvalószínűségek

$$p_{i,j} = P(f(i, \xi_1) = j) = P((i - 1)^+ + \xi_1 = j) = P(\xi_1 = j - (i - 1)^+).$$

Mivel  $P(\xi_1 \in \mathbb{Z}_+) = 1$ , a  $P(\xi_1 = k) =: a_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , jelöléssel kapjuk, hogy

$$\mathbb{P} = (p_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}_+} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

□

**2.1.10. Tétel. (Multiplikációs formula)** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$ . Ekkor

$$P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \alpha_{i_0} p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{n-1}, i_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall i_0, i_1, \dots, i_n \in I.$$

**Bizonyítás.** A láncszabály és a Markov-tulajdonság alapján

$$\begin{aligned} & P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) \\ &= P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) P(X_2 = i_2 | X_1 = i_1, X_0 = i_0) \dots \\ &\quad \times P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) P(X_2 = i_2 | X_1 = i_1) \dots P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= \alpha_{i_0} p_{i_0, i_1} p_{i_1, i_2} \dots p_{i_{n-1}, i_n}. \end{aligned}$$

□

A következő állítás azt mondja ki, hogy tetszőleges rögzített időpontban megfigyelve egy Markov-lánc értékét, majd onnan "újraindítva" a Markov-láncot, ismét egy Markov-láncot kapunk (a memória nélküliség miatt).

**2.1.11. Állítás.** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$ ,  $m \in \mathbb{N}$  és  $i \in I$  tetszőleges. Vezessük be az

$$\mathbb{Y} := \{Y_n := X_{n+m} : n \in \mathbb{Z}_+\}$$

sztochasztikus folyamatot. Ekkor az  $\{X_m = i\}$  eseményre feltételesen

(i)  $\mathbb{Y} \sim \text{Markov}(\delta_i, \mathbb{P})$ , ahol  $\delta_i$  az  $i$ -ben degenerált kezdeti eloszlás, azaz  $\delta_i(\{i\}) := 1$  és  $\delta_i(\{j\}) := 0$ , ha  $j \neq i$ ,  $j \in I$ .

(ii) az  $\mathbb{Y}$  folyamat független az  $X_0, X_1, \dots, X_{m-1}$  véletlen változóktól.

A 2.1.11. Állítás érvényben marad bizonyos véletlen időpontok, úgynevezett megállási idők esetén is. Mi csak a megállási idők leggyakoribb fajtájával az első elérési időkkel foglalkozunk.

**2.1.12. Definíció.** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$  és  $A \subset I$  állapotok egy tetszőleges halmaza. Ekkor az  $A$  halmaz első elérési ideje alatt a

$$\tau_A := \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : X_n \in A\}$$

(általános értelemben vett) véletlen változót értjük, ahol  $\min \emptyset := +\infty$ .

A 2.1.12. Definícióban a  $\min \emptyset := +\infty$  "természetes" definíció abban az értelemben, hogy egy nemnegatív egész számokból álló halmaz minimuma a legnagyobb olyan nemnegatív egész szám, melyre igaz az, hogy a halmaznak nincs nála kisebb eleme. Nyilván teljesül, hogy tetszőleges  $n \in \mathbb{Z}_+$  esetén az  $\emptyset$  egyetlen eleme sem kisebb, mint  $n$ . Mivel  $\mathbb{Z}_+$  felülről nem korlátos, ezért "természetes" a  $\min \emptyset := +\infty$  definíció.

**2.1.13. Állítás. (Erős Markov-tulajdonság)** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$  és  $A \subset I$  tetszőleges. Vezessük be az  $\mathbb{Y} := \{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  (kiterjesztett valós értékű) sztochasztikus folyamatot, ahol

$$Y_n := \begin{cases} X_{n+\tau_A} & \text{ha } \tau_A < \infty, \\ +\infty & \text{ha } \tau_A = \infty, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor tetszőleges  $i \in I$  esetén, az  $\{X_{\tau_A} = i, \tau_A < \infty\}$  eseményre feltételeesen

(i)  $\mathbb{Y} \sim \text{Markov}(\delta_i, \mathbb{P})$ , ahol  $\delta_i$  az  $i$ -ben degenerált kezdeti eloszlás,

(ii) az  $\mathbb{Y}$  folyamat független az  $X_0, X_1, \dots, X_{\tau_A-1}$  véletlen változóktól.

Az előzőekben említettük, hogy az erős Markov-tulajdonság érvényben marad a 2.1.12. Definícióban definiált  $\tau_A$ -nál általánosabb megállítási időpontok esetén is, az erős Markov-tulajdonság ezen általánosabb alakjából látható (lenne), hogy az erős Markov-tulajdonság maga után vonja a Markov-tulajdonságot.

## 2.2. Többlépéses átmenetvalószínűségek

**2.2.1. Definíció.** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$  és  $n \in \mathbb{N}$  tetszőleges. Ekkor az  $\mathbb{X}$  Markov-lánc  $n$ -lépéses átmenetvalószínűségei alatt a

$$p_{i,j}^{(n)} := P(X_n = j \mid X_0 = i), \quad i, j \in I$$

valószínűségeket értjük. Az  $\mathbb{X}$  Markov-lánc  $n$ -lépéses átmenetmátrixa alatt a

$$\mathbb{P}^{(n)} := (p_{i,j}^{(n)})_{i,j \in I}$$

mátrixot értjük.

Az  $n$ -lépéses átmenetvalószínűségek ismeretében megadhatjuk a Markov-lánc  $n$  időpontbeli eloszlását.

**2.2.2. Következmény.** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$  és  $n \in \mathbb{N}$  tetszőleges. Ekkor

$$(P(X_n = j))_{j \in I} = \alpha \mathbb{P}^{(n)},$$

ahol  $(P(X_n = j))_{j \in I}$ -t és  $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ -t sorvektorként értjük. Azaz tetszőleges  $j \in I$  esetén

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in I} \alpha_i p_{i,j}^{(n)}.$$

**Bizonyítás.** A teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy minden  $n \in \mathbb{N}$  és  $j \in I$  esetén

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in I} P(X_n = j \mid X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_{i \in I} p_{i,j}^{(n)} \alpha_i = \sum_{i \in I} \alpha_i p_{i,j}^{(n)}.$$

□

A többlépéses átmenetvalószínűségek kiszámolhatóak az alacsonyabb lépéses átmenetvalószínűségek segítségével. Erről szól az alábbi fontos eredmény.

**2.2.3. Tétel. (Chapman-Kolmogorov egyenletek)** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$ . Tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i, j \in I$  esetén  $P(X_{m+n} = j \mid X_m = i)$  értéke független  $m \in \mathbb{Z}_+$ -tól. Továbbá, tetszőleges  $m, n \in \mathbb{Z}_+$  esetén

$$\mathbb{P}^{(n+m)} = \mathbb{P}^{(n)}\mathbb{P}^{(m)},$$

azaz tetszőleges  $i, j \in I$  esetén

$$p_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k \in I} p_{i,k}^{(n)} p_{k,j}^{(m)}.$$

**Bizonyítás.** Az első állítást  $n$  szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Nyilván  $n = 1$  esetén igaz, hogy  $P(X_{m+1} = j \mid X_m = i)$  értéke független  $m \in \mathbb{Z}_+$ -tól, hiszen a szóbanforgó Markov-lánc homogén. Ha teljesül  $q \in \{1, \dots, n\}$  esetén, hogy  $P(X_{m+q} = j \mid X_m = i)$  értéke független  $m \in \mathbb{Z}_+$ -tól, ahol  $n \in \mathbb{N}$ , akkor a valószínűség  $\sigma$ -additivitása alapján

$$\begin{aligned} P(X_{m+n+1} = j \mid X_m = i) &= \sum_{k \in I} P(X_{m+n+1} = j, X_{m+n} = k \mid X_m = i) \\ &= \sum_{k \in I} \frac{P(X_{m+n+1} = j, X_{m+n} = k, X_m = i)}{P(X_{m+n} = k, X_m = i)} \cdot \frac{P(X_{m+n} = k, X_m = i)}{P(X_m = i)} \\ &= \sum_{k \in I} P(X_{m+n+1} = j \mid X_{m+n} = k, X_m = i) P(X_{m+n} = k \mid X_m = i) \\ &= \sum_{k \in I} P(X_{m+n+1} = j \mid X_{m+n} = k) P(X_{m+n} = k \mid X_m = i), \end{aligned}$$

ahol az indukciós feltevés alapján ( $q = 1$ , illetve  $q = n$  választásokkal)  $P(X_{m+n+1} = j \mid X_{m+n} = k) = p_{k,j}$  és  $P(X_{m+n} = k \mid X_m = i) = p_{i,k}^{(n)}$ . Így

$$P(X_{m+n+1} = j \mid X_m = i) = \sum_{k \in I} p_{k,j} p_{i,k}^{(n)} = \sum_{k \in I} p_{i,k}^{(n)} p_{k,j}$$

független  $m \in \mathbb{Z}_+$ -tól, és az  $m = 0$  választással adódik, hogy

$$p_{i,j}^{(n+1)} = P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in I} p_{i,k}^{(n)} p_{k,j}.$$

Ez azt jelenti, hogy  $\mathbb{P}^{(n+1)} = \mathbb{P}^{(n)}\mathbb{P}$ . Mivel  $\mathbb{P}^{(1)} = \mathbb{P}$ , így ebből következik  $\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n$ , ezért  $\mathbb{P}^{(n+m)} = \mathbb{P}^{n+m} = \mathbb{P}^n \mathbb{P}^m = \mathbb{P}^{(n)} \mathbb{P}^{(m)}$ , ami éppen a második állítás.  $\square$

**2.2.4. Következmény.** A Chapman-Kolmogorov egyenletek következtében az  $n$ -lépéses átmenetmátrix megegyezik az egy lépéses átmenetmátrix  $n$ -edik hatványával, azaz

$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Bizonyítás.** A 2.2.3. Tétel bizonyításában már láttuk.  $\square$

**2.2.5. Következmény. (Többlépéses multiplikációs formula)** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$ . Ekkor tetszőleges  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 < n_1 < \dots < n_k \in \mathbb{N}$  és  $i_0, i_1, \dots, i_k \in I$  esetén

$$P(X_{n_k} = i_k, X_{n_{k-1}} = i_{k-1}, \dots, X_{n_1} = i_1, X_0 = i_0) = \alpha_{i_0} p_{i_0, i_1}^{(n_1)} p_{i_1, i_2}^{(n_2 - n_1)} \dots p_{i_{k-1}, i_k}^{(n_k - n_{k-1})}.$$

**Bizonyítás.** A lánc-szabály és a Markov-tulajdonság alapján

$$\begin{aligned}
& P(X_{n_k} = i_k, X_{n_{k-1}} = i_{k-1}, \dots, X_{n_1} = i_1, X_0 = i_0) \\
&= P(X_0 = i_0, X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_{k-1}} = i_{k-1}, X_{n_k} = i_k) \\
&= P(X_0 = i_0) P(X_{n_1} = i_1 | X_0 = i_0) P(X_{n_2} = i_2 | X_{n_1} = i_1, X_0 = i_0) \cdots \\
&\quad \times P(X_{n_k} = i_k | X_{n_{k-1}} = i_{k-1}, \dots, X_{n_1} = i_1, X_0 = i_0) \\
&= P(X_0 = i_0) P(X_{n_1} = i_1 | X_0 = i_0) P(X_{n_2} = i_2 | X_{n_1} = i_1) \cdots P(X_{n_k} = i_k | X_{n_{k-1}} = i_{k-1}) \\
&= \alpha_{i_0} p_{i_0, i_1}^{(n_1)} p_{i_1, i_2}^{(n_2 - n_1)} \cdots p_{i_{k-1}, i_k}^{(n_k - n_{k-1})}.
\end{aligned}$$

□

A többlépéses multiplikációs formulából speciális esetként következik a 2.1.10. Tételben tárgyalt (egylépéses) multiplikációs formula.

## 2.3. Átmenetgráf, kommunikációs osztályok

A 2.2 Alfejezet alapján látszik, hogy milyen kulcsfontosságú az átmenetmátrix szerepe a Markov-láncok témakörében. Célunk az átmenetmátrixban található adatok egy másfajta megközelítése, az ún. átmenetgráf segítségével. Ebben az alfejezetben csak az átmenetmátrixszal foglalkozunk, a kezdeti eloszlást figyelmen kívül hagyjuk.

**2.3.1. Definíció.** Legyen  $\mathbb{P}$  egy diszkrét idejű Markov-lánc átmenetmátrixa. Ekkor a  $\mathbb{P}$  mátrixhoz tartozó átmenetgráfon azt a  $G$  súlyozott, irányított gráfot értjük, amire

- (i)  $V_G = I$ , azaz a csúcsok halmaza a kapcsolatos Markov-lánc állapottere,
- (ii)  $(i, j) \in E_G$  akkor és csak akkor, ha  $p_{i,j} > 0$ , azaz az  $i$  csúcsból a  $j$  csúcsba akkor és csak akkor húzunk be élt, ha pozitív valószínűséggel léphetünk  $i$ -ből  $j$ -be egy lépésben,
- (iii)  $c_G((i, j)) = p_{i,j}, \forall (i, j) \in E_G$ , tehát az élek súlya a hozzájuk tartozó egylépéses átmenetvalószínűség.

Lényegében egy Markov-lánc elképzelhető úgy, mintha a kezdeti eloszlás szerint választanánk egy csúcsot az átmenetgráfon, majd mindig a csúcsból kimenő élek által meghatározott valószínűségek szerint ugrunk a következő csúcsba (állapotba).

**2.3.2. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a  $j$  állapot elérhető az  $i$  állapotból, ha

$$P(\text{a lánc valaha eljut } j\text{-be} \mid i\text{-ből indult}) = P(\exists n \in \mathbb{Z}_+ : X_n = j \mid X_0 = i) > 0.$$

Jelölése:  $i \rightarrow j$ .

Vezessük be tetszőleges  $i, j \in I$  állapotok esetén a

$$p_{i,j}^{(0)} := \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

jelölést. Felhívjuk a figyelmet, hogy a 2.2.1. Definícióban a  $p_{i,j}^{(n)}$  jelölést  $n \in \mathbb{N}$  esetén vezettük be.

Emlékeztető gráfelméletből: séta alatt egy olyan  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$  sorozatot értünk, ahol  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}, v_\ell$  a csúcsok,  $e_1, e_2, \dots, e_\ell$  az élek, és  $e_i$  két végpontja  $v_{i-1}$  és  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ . Út alatt egy olyan sétát értünk, melynek a csúcssorozatában nincs ismétlődés.

**2.3.3. Állítás.** Az alábbi állítások ekvivalensek:

- (i)  $i \rightarrow j$ ,
- (ii)  $\exists n \in \mathbb{Z}_+ : p_{i,j}^{(n)} > 0$ ,
- (iii) vagy  $i = j$ , vagy  $p_{i,j} > 0$ , vagy  $\exists n \geq 2, n \in \mathbb{N}$  és  $\exists i_1, \dots, i_{n-1} \in I$ :  
 $p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},j} > 0$ ,
- (iv) vagy  $i = j$ , vagy az átmenetgráfban létezik  $i$ -ből  $j$ -be vezető irányított út.

**Bizonyítás.** (i) $\iff$ (ii): Tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  esetén, a valószínűség  $\sigma$ -szubadditivitása miatt

$$(2.3.1) \quad \begin{aligned} p_{i,j}^{(n)} &= P(X_n = j \mid X_0 = i) \leq P(\exists m \in \mathbb{Z}_+ : X_m = j \mid X_0 = i) \\ &= P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} \{X_m = j\} \mid X_0 = i\right) \leq \sum_{m=0}^{\infty} p_{i,j}^{(m)}, \end{aligned}$$

ahol az első egyenlőtlenség abból következik, hogy  $\{X_n = j\} \subset \{\exists m \in \mathbb{Z}_+ : X_m = j\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . A (2.3.1) összefüggés  $n = 0$  esetén is teljesül, ugyanis, ha  $i \neq j$ , akkor  $p_{i,j}^{(0)} = 0$ , ha pedig  $i = j$ , akkor  $p_{i,j}^{(0)} = 1$  és  $P(\exists m \in \mathbb{Z}_+ : X_m = i \mid X_0 = i) = P(\Omega \mid X_0 = i) = 1$ .

Ha (i) teljesül, akkor  $P(\exists m \in \mathbb{Z}_+ : X_m = j \mid X_0 = i) > 0$ , és így (2.3.1) alapján  $\sum_{m=0}^{\infty} p_{i,j}^{(m)} > 0$ , melyből következik, hogy létezik olyan  $m \in \mathbb{Z}_+$ , hogy  $p_{i,j}^{(m)} > 0$ . Ha (ii) teljesül, akkor (2.3.1) alapján  $P(\exists m \in \mathbb{Z}_+ : X_m = j \mid X_0 = i) > 0$ , azaz  $i \rightarrow j$ .

(ii) $\implies$ (iii): A Chapman-Kolmogorov egyenletek (2.2.3. Tétel) alapján  $\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , és így

$$(2.3.2) \quad p_{i,j}^{(n)} = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in I} p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},j}, \quad n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

Valóban, a jobb oldal nem más, mint

$$\sum_{i_2, \dots, i_{n-1} \in I} \left[ \left( \sum_{i_1 \in I} p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} \right) \cdot p_{i_2,i_3} \cdots p_{i_{n-1},j} \right] = \sum_{i_2, \dots, i_{n-1} \in I} \left[ p_{i,i_2}^{(2)} \cdot p_{i_2,i_3} \cdots p_{i_{n-1},j} \right],$$

és rekurzívan haladva visszafelé adódik (2.3.2).

Ha (ii) igaz és  $n = 0$ , akkor  $i = j$ . Ha (ii) igaz és  $n = 1$ , akkor  $p_{i,j} > 0$ . Ha (ii) igaz és  $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , akkor a (2.3.2) egyenlőség jobb oldalán levő összeg valamelyik tagja pozitív.

(iii) $\implies$ (iv): Ha  $i = j$ , akkor az implikáció nyilvánvaló. Ha  $i \neq j$  és  $p_{i,j} > 0$ , akkor  $i$ -ből  $j$ -be egyhosszúságú út vezet. Ha  $i \neq j$  és  $p_{i,j} = 0$ , akkor (iii) alapján létezik olyan  $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  és léteznek olyan  $i_1, \dots, i_{n-1}$  állapotok, melyek egy irányított utat adnak meg.

(iv) $\implies$ (ii): Ha  $i = j$ , akkor  $p_{i,j}^{(0)} = 1 > 0$ . Ha  $i \neq j$ , akkor tekintsünk egy  $i \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \cdots \rightarrow i_{n-1} \rightarrow j$  irányított utat  $i$ -ből  $j$ -be, ahol  $n \in \mathbb{N}$  ( $n = 1$  esetén az  $i \rightarrow j$  utat értjük). Ekkor

$$p_{i,j}^{(n)} \geq p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},j} > 0,$$

ahol az első egyenlőtlenség (2.3.2)-ből adódik, a második pedig az átmenetgráf definíciója miatt.  $\square$

**2.3.4. Definíció.** Az  $i$  és  $j$  állapot kommunikációs viszonyban áll egymással, ha kölcsönösen elérhetőek egymásból, azaz  $i \rightarrow j$  és  $j \rightarrow i$ . Jelölése:  $i \leftrightarrow j$ .

Az  $i$  állapot elnyelő, ha belőle csak önmaga érhető el.

Megjegyezzük, hogy egy olyan állapotot, mely semmelyik állapotból sem érhető el (beleértve önmagát is) nevezhetjük pillanatnyi, tiszavirág életű (angolul: ephemeral) állapotnak. Például, ha egy átmenetmátrix első oszlopa azonosan nulla, akkor az első oszlopnak megfelelő állapot pillanatnyi állapot, mely csak az adott Markov-lánc kezdeti eloszlásában játszik szerepet.

**2.3.5. Tétel.** *A kommunikációs viszony ekvivalenciareláció az állapotok halmazán.*

**Bizonyítás.** reflexivitás:  $i \leftrightarrow i$  teljesül, mert  $p_{i,i}^{(0)} = 1 > 0$  és alkalmazhatjuk a 2.3.3. Állítást.

szimmetria: ha  $i \leftrightarrow j$ , akkor  $i \rightarrow j$  és  $j \rightarrow i$ , amiből adódik, hogy  $j \leftrightarrow i$ .

transzitivitás: tegyük fel, hogy  $i \leftrightarrow k$  és  $k \leftrightarrow j$ . Ekkor  $i \rightarrow k$  és  $k \rightarrow j$ , és így a 2.3.3. Állítás alapján léteznek olyan  $m, n \in \mathbb{Z}_+$ , hogy  $p_{i,k}^{(m)} > 0$  és  $p_{k,j}^{(n)} > 0$ . A Chapman-Kolmogorov egyenletek (2.2.3. Tétel) alapján

$$p_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{\ell \in I} p_{i,\ell}^{(m)} p_{\ell,j}^{(n)} \geq p_{i,k}^{(m)} p_{k,j}^{(n)} > 0,$$

azaz  $p_{i,j}^{(n+m)} > 0$ . Így a 2.3.3. Állítás alapján  $i \rightarrow j$ . A szereposztás felcserélésével kapjuk azt is, hogy  $j \rightarrow i$ , és így  $i \leftrightarrow j$ .  $\square$

**2.3.6. Definíció.** *A kommunikációs viszony mint ekvivalenciareláció által egyértelműen meghatározott ekvivalenciaosztályokat kommunikációs osztályoknak nevezzük. Tehát egy kommunikációs osztályba azon állapotok tartoznak, melyek egymással kommunikációs viszonyban állnak.*

**2.3.7. Következmény.** *Egy Markov-lánc kommunikációs osztályai meghatározhatóak az átmenetgráf segítségével is, mivel ezek pontosan az átmenetgráf erősen összefüggő komponensei.*

Emlékeztető gráfelméletből: egy gráf összefüggő, ha a csúcsok halmazán adott (alább definiált)  $\sim$  relációnak egyetlen ekvivalencia osztálya van, ahol  $u$  és  $v$  csúcsok esetén  $u \sim v$ , ha a létezik a gráfban  $u$ -ból  $v$ -be vezető út. Egy gráf erősen összefüggő (vagy irányított értelemben összefüggő), ha bármely két  $u, v$  csúcsa esetén létezik  $u$ -ból  $v$ -be vezető irányított út.

**2.3.8. Definíció.** *Ha egy Markov-láncnak csak egy kommunikációs osztálya van, azaz minden állapot kommunikál minden állapottal, irreducibilisnek nevezzük. A lánc reducibilis, ha egynél több kommunikációs osztálya van.*

Felhívjuk a figyelmet, hogy a kommunikációs osztályok nem függenek a lánc kezdeti eloszlásától, csupán az átmenetmátrixtól. Így beszélhetünk az átmenetmátrix által meghatározott osztályokról, illetve mondhatunk olyat, hogy egy sztochasztikus mátrix reducibilis vagy irreducibilis. Megjegyezzük továbbá, hogy egy Markov-lánc úgy is lehet irreducibilis, hogy átmenetmátrixában vannak 0 elemek.

**2.3.9. Példa.** Tekintsük a 2.1.9. Példa (iv) részében megadott  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  Markov-láncot, melynek fázistere  $I = \mathbb{Z}_+$  és átmenetmátrixa:

$$\mathbb{P} = (p_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}_+} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix},$$

ahol  $P(\xi_1 = k) = a_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , egy valószínűségeloszlás. Megmutatjuk, hogy  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  akkor és csak akkor irreducibilis, ha

$$P(\xi_1 = 0) = a_0 > 0 \quad \text{és} \quad P(\xi_1 \geq 2) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k > 0.$$

Tegyük fel először, hogy  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  irreducibilis. Ekkor  $0 \rightarrow 0$ . Ha  $a_0 = 0$  teljesülne, akkor 0-ból egy lépésben az  $1, 2, 3, \dots$  állapotok valamelyikébe juthatunk el, onnan viszont a  $\mathbb{P}$  átmenetmátrix alapján csak az  $\{1, 2, 3, \dots\}$  halmaz érhető el, a 0 állapot nem. Ezért nem teljesülne, hogy  $0 \rightarrow 0$ , mely ellentmondás, és így  $a_0 > 0$ . Továbbá, ha  $\sum_{k=2}^{\infty} a_k = 0$  teljesülne, akkor  $a_k = 0$ ,  $k \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , és így a  $\mathbb{P}$  átmenetmátrix az alábbi alakot ölti

$$\mathbb{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Mivel a lánc irreducibilis, teljesülnie kell, hogy  $0 \rightarrow 2$ , azonban a 0 állapotból csak a  $\{0, 1\}$  halmaz érhető el, így ellentmondásra jutottunk, tehát  $\sum_{k=2}^{\infty} a_k > 0$ .

Tegyük most fel, hogy  $a_0 > 0$  és  $\sum_{k=2}^{\infty} a_k > 0$ . Mivel  $a_0 > 0$ , kapjuk, hogy  $0 \rightarrow 0$ . Mivel  $\sum_{k=2}^{\infty} a_k > 0$ , létezik olyan  $k_0 \in \{2, 3, \dots\}$ , hogy  $a_{k_0} > 0$ , és így  $0 \rightarrow k_0$ . Mivel  $a_0 > 0$ , a  $\mathbb{P}$  átmenetmátrix alapján

$$k_0 \rightarrow k_0 - 1 \rightarrow k_0 - 2 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0.$$

Így

$$0 \leftrightarrow k_0, \quad 0 \leftrightarrow k_0 - 1, \quad \dots \quad 0 \leftrightarrow 1,$$

melyből következik, hogy  $\{0, 1, \dots, k_0 - 1\}$  egy osztályt alkot. Továbbá, tetszőleges  $i \in \mathbb{N}$  esetén tekintsük  $\mathbb{P}$ -nek azt a sorát, melynek az elején  $i - 1$  darab 0 van. Mivel  $a_{k_0} > 0$ , adódik, hogy  $i \rightarrow i + k_0 - 1$ , ahol  $i + k_0 - 1 \geq i + 1 > i$ . Továbbá, mivel  $a_0 > 0$ , kapjuk azt is, hogy tetszőleges  $j > i$  esetén

$$j \rightarrow j - 1 \rightarrow j - 2 \rightarrow \dots \rightarrow i, \quad \text{és így} \quad j \rightarrow i.$$

A fentiek alapján, az  $i \rightarrow i + k_0 - 1$  összefüggést  $i = 1$  választással alkalmazva kapjuk, hogy  $1 \rightarrow k_0$ , ahol  $k_0 \geq 2 > 1$ , és ezért  $k_0 \rightarrow k_0 - 1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1$ , amiből adódik,

hogy  $1 \leftrightarrow k_0$ . Így  $k_0$  az 1-et tartalmazó osztályban van, és ezért  $0, 1, \dots, k_0 - 1, k_0$  egy osztályban vannak, ahol  $k_0 \geq 2$  miatt  $\{0, 1, 2\} \subset \{0, 1, \dots, k_0\}$ .

Az  $i \rightarrow i + k_0 - 1$  összefüggést  $i = 2$  választással alkalmazva kapjuk, hogy  $2 \rightarrow k_0 + 1$ , ahol  $k_0 + 1 \geq 3 > 2$ , és ezért  $k_0 + 1 \rightarrow k_0 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1$ , amiből adódik, hogy  $2 \leftrightarrow k_0 + 1$ . Így  $k_0 + 1$  a 2-t tartalmazó osztályban van, és ezért, figyelembe véve, hogy  $0, 1, \dots, k_0 - 1, k_0$  egy osztályban vannak, adódik, hogy  $0, 1, \dots, k_0 - 1, k_0, k_0 + 1$  egy osztályban vannak, ahol  $k_0 \geq 2$  miatt  $\{0, 1, 2, 3\} \subset \{0, 1, \dots, k_0, k_0 + 1\}$ .

Ezt az eljárást rekurzívan folytatva kaphatjuk, hogy a  $0, 1, 2, \dots$  állapotok egy osztályban vannak, azaz a Markov-láncnak csak egy kommunikációs osztálya van, azaz a Markov-lánc irreducibilis.  $\square$

**2.3.10. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az állapotoknak valamely tulajdonsága osztálytulajdonság, ha minden osztály esetén teljesül, hogy az osztályon belül vagy minden állapot rendelkezik vele, vagy egyik sem.

## 2.4. Az állapotok típusai

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy egy adott  $i \in I$  állapotba hányszor tér vissza a Markov-lánc. Emiatt tegyük fel, hogy  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\delta_i, \mathbb{P})$ , amikor is  $P(X_0 = i) = 1$ .

**2.4.1. Definíció.** Legyen  $i \in I$  rögzített és  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\delta_i, \mathbb{P})$ . Vezessük be az alábbi mennyiségeket. Az  $i$  állapotba történő visszatérések száma:

$$V_i := |\{n \in \mathbb{N} : X_n = i\}| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=i\}} \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}.$$

Az  $i$  állapot  $r$ -edik visszatérési ideje:

$$T_{i,r} := \begin{cases} \min\{n > T_{i,r-1} : X_n = i\}, & \text{ha } T_{i,r-1} < \infty, \\ \infty, & \text{ha } T_{i,r-1} = \infty, \end{cases} \quad r = 1, 2, \dots, \quad T_{i,0} := 0,$$

ahol  $\min \emptyset := \infty$ . Az  $r$ -edik kirándulás hossza:

$$S_{i,r} := \begin{cases} T_{i,r} - T_{i,r-1}, & \text{ha } T_{i,r-1} < \infty, \\ 0, & \text{ha } T_{i,r-1} = \infty, \end{cases} \quad r = 1, 2, \dots$$

Legyen  $T_i := T_{i,1} = S_{i,1}$  az  $i$  állapotba való első visszatérési idő ( $T_{i,0} = 0$  miatt  $S_{i,1}$  definíciójában a felső ág alkalmazandó), melynek várható értéke  $\mu_i := E(T_i)$  és  $f_i := P(T_i < \infty)$  az  $i$  állapotba való visszatérés valószínűsége.

Vegyük észre, hogy  $S_{i,1} \geq 1$ , és így  $\mu_i \in [1, \infty]$ . Mivel most az  $i$  állapotból indulunk, így az  $i$ -ben tett összes látogatások száma  $V_i + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=i\}}$ , mely nagyobb vagy egyenlő, mint 1, és ezért  $E(V_i + 1) \in [1, \infty]$ . Felhívjuk a figyelmet, hogy a 2.4.1. Definícióban  $S_{i,r}$  definíciójánál azt nem definiáltuk, hogy  $\infty - \infty$  0-val lenne egyenlő.

**2.4.2. Állítás.** Legyen  $i \in I$  rögzített és  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\delta_i, \mathbb{P})$ . Ekkor tetszőleges  $r \in \mathbb{N}$  esetén teljesülnek az alábbiak:

- (i) A  $\{T_{i,r} < \infty\}$  eseményre feltételesen  $S_{i,r+1}$  független az  $S_{i,1}, \dots, S_{i,r}$  véletlen változótól, továbbá  $S_{i,r+1}$ -nek a  $\{T_{i,r} < \infty\}$ -re vonatkozó feltételes eloszlása megegyezik  $T_i = S_{i,1}$  feltétel nélküli eloszlásával.

(ii) Ha  $P(V_i = \infty) = 1$  (azaz 1 valószínűséggel a folyamat végtelen sokszor visszatér a kiindulási  $i$  állapotba), akkor  $S_{i,1}, S_{i,2}, \dots$  (feltétel nélkül) függetlenek és azonos eloszlásúak.

**2.4.3. Tétel.** Legyen  $i \in I$  rögzített és  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\delta_i, \mathbb{P})$ . Ha  $f_i < 1$ , akkor az  $i$  állapotban tett látogatások  $V_i + 1$  száma geometriai eloszlást követ  $1 - f_i$  paraméterrel, azaz  $P(V_i + 1 = r) = f_i^{r-1}(1 - f_i)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ; míg ha  $f_i = 1$ , akkor  $P(V_i = \infty) = 1$ . Továbbá mindkét esetben

$$E(V_i + 1) = \frac{1}{1 - f_i} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)},$$

ahol az  $f_i = 1$  esetben  $\frac{1}{1-f_i} = \frac{1}{0} := \infty$ .

**Bizonyítás.** A 2.4.2. Állítás (i) része alapján tetszőleges  $r \in \mathbb{N}$  esetén

$$(2.4.1) \quad P(S_{i,r} < \infty | T_{i,r-1} < \infty) = P(S_{i,1} < \infty) = P(T_i < \infty) = f_i.$$

A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a (2.4.1) összefüggés az  $r = 1$  esetben nem következik a 2.4.2. Állításból, azonban ekkor triviálisan igaz, hiszen  $T_{i,0} = 0$ .

Ha  $f_i = 0$ , akkor  $T_{i,1} = T_i = \infty$  P-m.m., és így a 2.4.1. Definíció miatt  $T_{i,2} = T_{i,3} = \dots = \infty$  P-m.m., melyből következik, hogy  $V_i = 0$  P-m.m. Így

$$\begin{aligned} P(V_i + 1 = 1) &= 1 = 0^{1-1}(1 - 0), \\ P(V_i + 1 = r) &= 0 = 0^{r-1}(1 - 0), \quad r \geq 2, \quad r \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

és így  $E(V_i + 1) = 1 = \frac{1}{1-0}$ . Mivel  $T_i = \infty$  P-m.m. esetén  $p_{i,i}^{(n)} = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , és  $p_{i,i}^{(0)} = 1$ , kapjuk, hogy  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = 1$ . Összefoglalva, az  $f_i = 0$  esetben teljesül a bizonyítandó állítás.

Ha  $f_i > 0$ , akkor, a lánc-szabály alapján, tetszőleges  $r \in \mathbb{N}$  esetén

$$\begin{aligned} (2.4.2) \quad P(V_i \geq r) &= P(T_{i,1} < \infty, \dots, T_{i,r} < \infty) \\ &= P(T_{i,1} < \infty) P(T_{i,2} < \infty | T_{i,1} < \infty) P(T_{i,3} < \infty | T_{i,1} < \infty, T_{i,2} < \infty) \\ &\quad \dots P(T_{i,r} < \infty | T_{i,1} < \infty, \dots, T_{i,r-1} < \infty). \end{aligned}$$

A következőkben felhasználjuk, hogy

- $\{T_{i,j} < \infty\} \subset \{T_{i,1} < \infty, \dots, T_{i,j} < \infty\}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , amiből az is következik, hogy  $\{T_{i,1} < \infty, \dots, T_{i,j} < \infty\} = \{T_{i,j} < \infty\}$ ,
- ha valamely  $j \in \mathbb{N}$  esetén  $T_{i,j-1} < \infty$ , akkor a 2.4.1. Definíció alapján  $T_{i,j} < \infty$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $S_{i,j} < \infty$ .

Így  $T_{i,0} = 0 < \infty$ , (2.4.2) és (2.4.1) alapján

$$\begin{aligned} P(V_i \geq r) &= P(S_{i,1} < \infty) P(S_{i,2} < \infty | T_{i,1} < \infty) P(S_{i,3} < \infty | T_{i,2} < \infty) \\ &\quad \dots P(S_{i,r} < \infty | T_{i,r-1} < \infty) \\ &= (P(S_{i,1} < \infty))^r = f_i^r, \quad r \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Továbbá,  $P(V_i \geq 0) = 1 = f_i^0$ . Így tetszőleges  $r \in \mathbb{N}$  esetén

$$\begin{aligned} (2.4.3) \quad P(V_i + 1 = r) &= P(V_i + 1 \geq r) - P(V_i + 1 \geq r + 1) = P(V_i \geq r - 1) - P(V_i \geq r) \\ &= f_i^{r-1} - f_i^r = f_i^{r-1}(1 - f_i). \end{aligned}$$

Ezért, ha  $f_i \in (0, 1)$ , akkor (2.4.3) alapján kapjuk, hogy  $V_i + 1$  geometriai eloszlású  $1 - f_i$  paraméterrel, és így  $E(V_i + 1) = \frac{1}{1-f_i}$ .

Ha  $f_i = 1$ , akkor (2.4.3) alapján  $P(V_i + 1 = r) = 0$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , és így, felhasználva azt is, hogy  $V_i + 1 \geq 1$ , adódik, hogy  $P(V_i + 1 = \infty) = 1$ , és ezért

$$E(V_i + 1) = \infty = \frac{1}{0} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{1-f_i}.$$

Végezetül, felhasználva, hogy  $P(X_0 = i) = 1$ , és azt, hogy  $V_i + 1$  az  $i$  állapotban tett látogatások száma, azaz  $V_i + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=i\}}$ , kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E(V_i + 1) &= E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=i\}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} E(\mathbf{1}_{\{X_n=i\}}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)}. \end{aligned}$$

□

A 2.4.3. Tétel következményeként bevezethetjük az alábbi típusokat (lásd 2.4.4. Definíció), melyekre teljesül, hogy minden állapot beleesik valamelyik típusba és pontosan egy típusba (lásd a 2.4.4. Definíció utáni indoklást is).

**2.4.4. Definíció. (Az állapotok típusai)** Legyen  $i \in I$  rögzített és  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\delta_i, \mathbb{P})$ . Az  $i$  állapot tranziens (átmeneti), ha  $P(V_i < \infty) = 1$ , illetve rekurrens (visszatérő), ha  $P(V_i = \infty) = 1$ . Az  $i$  állapot null-rekurrens, ha rekurrens és  $\mu_i = \infty$ , illetve pozitív rekurrens (ergodikus), ha rekurrens és  $\mu_i < \infty$  (ahol emlékeztetünk rá, hogy  $\mu_i$  az  $i$  állapotba való első visszatérési idő várható értéke). Ezen tulajdonságokat nevezzük úgy, hogy az állapotok típusai.

A 2.4.3. Tétel miatt, ha  $f_i < 1$ , akkor  $P(V_i < \infty) = 1$ ; ha  $f_i = 1$ , akkor  $P(V_i = \infty) = 1$ . Valóban, ha  $f_i < 1$ , akkor

$$\begin{aligned} P(V_i < \infty) &= P(V_i + 1 < \infty) = P\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} \{V_i + 1 = r\}\right) = \sum_{r=1}^{\infty} P(V_i + 1 = r) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} f_i^{r-1}(1 - f_i) = (1 - f_i) \sum_{r=1}^{\infty} f_i^{r-1} = (1 - f_i) \cdot \frac{1}{1 - f_i} = 1. \end{aligned}$$

Így a  $\{V_i < \infty\}$  és  $\{V_i = \infty\}$  események nem következhetnek be egyaránt pozitív valószínűséggel, és ezért minden állapot beleesik valamelyik típusba és pontosan egy típusba.

**2.4.5. Tétel. (A típusok karakterizációs tétele)** Legyen  $i \in I$  tetszőleges állapot.

(i) Az  $i$  állapot pontosan akkor tranziens, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} < \infty.$$

Ebben az esetben az  $i$  állapotba való első visszatérési idő várható értéke  $\mu_i = \infty$ , és tetszőleges  $j \in I$  esetén  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{j,i}^{(n)} < \infty$ , melyből az is következik, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{j,i}^{(n)} = 0$ .

(ii) Az  $i$  állapot pontosan akkor null-rekurrens, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,i}^{(n)} = 0,$$

Ekkor  $\mu_i = \infty$ , és tetszőleges  $j \in I$  esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{j,i}^{(n)} = 0$ .

(iii) Az  $i$  állapot pontosan akkor pozitív rekurrens, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty \quad \text{és} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} p_{i,i}^{(n)} > 0,$$

Ekkor  $\mu_i \in [1, \infty)$ .

A 2.4.5. Tételt nem bizonyítjuk. Megjegyezzük továbbá, hogy a 2.4.3. és 2.4.5. Tételből következik, hogy

$$i \text{ tranziens} \quad \Longleftrightarrow \quad V_i < \infty \text{ m.b.} \quad \Longleftrightarrow \quad f_i < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} < \infty,$$

és

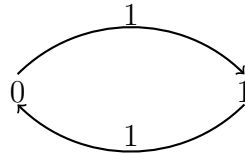
$$i \text{ rekurrens} \quad \Longleftrightarrow \quad V_i = \infty \text{ m.b.} \quad \Longleftrightarrow \quad f_i = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty,$$

ahol  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)}$  nem más, mint  $E(V_i + 1)$ , azaz az  $i$  állapotban tett látogatások  $V_i + 1$  számának a várható értéke.

**2.4.6. Példa.** Legyen  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  egy Markov-lánc, melynek fázistere  $\{0, 1\}$  és átmenet-mátrixa

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor az átmenetgráf:



és így tetszőleges  $i \in \{0, 1\}$  esetén

$$p_{i,i}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 0 & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ezért tetszőleges  $i \in \{0, 1\}$  esetén a  $(p_{i,i}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_+}$  sorozat nem konvergens és

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} p_{i,i}^{(n)} = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} p_{i,i}^{(n)} = 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty, \quad i \in \{0, 1\}.$$

A típusok karakterizációs tétele (2.4.5. Tétel) alapján mindkét típus, 0 és 1, pozitív rekurrens.

A következőkben ezt direkt módon, a 2.4.1. Definíciót felhasználva is levezetjük. Az átmenetmátrix alapján

$$V_0 = |\{n \in \mathbb{N} : X_n = 0\}| = \infty, \quad V_1 = |\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}| = \infty,$$

melyből következik, hogy a 0 és 1 állapotok rekurrens. Továbbá,

$$T_0 = T_{0,1} = \min\{n > 0 : X_n = 0\} = 2, \quad T_1 = T_{1,1} = \min\{n > 0 : X_n = 1\} = 2.$$

Így

$$\mu_0 = E(T_0) = 2 < \infty, \quad \mu_1 = E(T_1) = 2 < \infty,$$

melyből következik, hogy 0 és 1 pozitív rekurrens.  $\square$

**2.4.7. Tétel. (Szolidaritási tétel a típusra)** *A típus osztálytulajdonság, azaz adott kommunikációs osztályban lévő állapotok típusa azonos.*

**Bizonyítás.** Legyenek  $i$  és  $j$  azonos osztályba eső, különböző állapotok. Ekkor létezik olyan  $m \in \mathbb{N}$  és  $n \in \mathbb{N}$ , hogy  $p_{i,j}^{(m)} > 0$  és  $p_{j,i}^{(n)} > 0$ , ahol  $m$  és  $n$  azért legalább 1, mert  $i \neq j$ . Továbbá, a Chapman-Kolmogorov egyenletek (2.2.3. Tétel) alapján  $\mathbb{P}^{(m)}\mathbb{P}^{(r)}\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^{(m+r+n)}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ , melyből a (2.3.2) formulát is használva következik, hogy

$$(2.4.4) \quad 0 \leq p_{i,j}^{(m)} p_{j,j}^{(r)} p_{j,i}^{(n)} \leq p_{i,i}^{(m+r+n)}, \quad r \in \mathbb{Z}_+.$$

Tegyük fel, hogy  $i$  tranziens. Ekkor összegezve a (2.4.4) egyenlőtlenséget  $r \in \mathbb{Z}_+$ -ra, kapjuk, hogy

$$p_{i,j}^{(m)} \left( \sum_{r=0}^{\infty} p_{j,j}^{(r)} \right) p_{j,i}^{(n)} \leq \sum_{r=0}^{\infty} p_{i,i}^{(m+r+n)} < \infty,$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk a 2.4.5. Tétel (i) részét. Mivel  $p_{i,j}^{(m)} > 0$  és  $p_{j,i}^{(n)} > 0$ , kapjuk, hogy  $\sum_{r=0}^{\infty} p_{j,j}^{(r)} < \infty$ . Újra használva a 2.4.5. Tétel (i) részét, kapjuk, hogy  $j$  tranziens.

Tegyük fel, hogy  $i$  null-rekurrens. Ekkor a 2.4.5. Tétel (ii) része alapján  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} p_{i,i}^{(\ell)} = 0$ , így

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p_{i,i}^{(m+r+n)} = 0.$$

Ezért (2.4.4) és a rendőrelv alapján

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(m)} p_{j,j}^{(r)} p_{j,i}^{(n)} = 0.$$

Így, felhasználva, hogy  $p_{i,j}^{(m)} > 0$  és  $p_{j,i}^{(n)} > 0$ , kapjuk, hogy  $\lim_{r \rightarrow \infty} p_{j,j}^{(r)} = 0$ . Továbbá, az is teljesül, hogy  $\sum_{\ell=0}^{\infty} p_{j,j}^{(\ell)} = \infty$ , mert ha  $\sum_{\ell=0}^{\infty} p_{j,j}^{(\ell)} < \infty$  teljesülne, akkor a 2.4.5. Tétel (i) része alapján  $j$  tranziens lenne, de ekkor a már bebizonyítottak miatt az  $i$  állapot is tranziens lenne, mely ellentmondás. Mivel  $\sum_{\ell=0}^{\infty} p_{j,j}^{(\ell)} = \infty$  és  $\lim_{r \rightarrow \infty} p_{j,j}^{(r)} = 0$ , a 2.4.5. Tétel alapján kapjuk, hogy  $j$  null-rekurrens.

A fentiekből következik az is, hogy ha egy osztályban nincs tranziens vagy null-rekurrens állapot, akkor csak pozitív rekurrens állapotok lehetnek benne.  $\square$

A Szolidaritási tétel (2.4.7. Tétel) értelmében beszélhetünk kommunikációs osztályok típusáról, és nem kell egy Markov-lánc minden egyes állapotáról külön-külön eldöntenünk, hogy melyik típusba esik, hanem elég minden osztályból egy matematikailag könnyen kezelhető reprezentánst megvizsgálni. A továbbiakban néhány könnyen ellenőrizhető feltételt adunk az osztályok típusának eldöntésére.

**2.4.8. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy  $C \subset I$  kommunikációs osztály zárt, ha  $\forall i \in C$  és  $\forall j \in I \setminus C$  esetén  $p_{i,j} = 0$  (azaz az osztályt nem lehet elhagyni). Ha egy kommunikációs osztály nem zárt, akkor azt mondjuk, hogy nyílt.

Tehát pontosan azon kommunikációs osztályok lesznek zártak, amelyek esetében az átmenetgráfban nincs kivezető irányított él a kommunikációs osztályból. Amennyiben van kifelé irányított él, akkor nyílt kommunikációs osztályról van szó. Egy irreducibilis Markov-lánc egyetlen kommunikációs osztálya (a teljes állapottér) zárt, hiszen  $p_{i,j} = 0$  tetszőleges  $i \in I$  és  $j \in I \setminus I = \emptyset$  esetén triviális módon teljesül.

**2.4.9. Állítás.** (i) Tetszőleges nyílt kommunikációs osztály tranzienst.

(ii) Minden rekurrens kommunikációs osztály zárt.

(iii) Egy véges kommunikációs osztály (azaz mely véges sok állapotot tartalmaz) pontosan akkor pozitív rekurrens, ha zárt.

**Bizonyítás.** (i): Legyen  $C$  egy nyílt osztály. Ekkor létezik olyan  $i \in C$  és  $j \in I \setminus C$ , hogy  $p_{i,j} > 0$ . Ekkor  $j$ -ből nem érhető el  $i$ , ugyanis, ha elérhető lenne, akkor  $i \leftrightarrow j$  teljesülne, és akkor  $i$  és  $j$  azonos osztályba esnének, mely most ki van zárva. Ezért

$$\begin{aligned} 1 - f_i &= 1 - P(T_i < \infty \mid X_0 = i) = P(T_i = \infty \mid X_0 = i) \\ &= P(\text{a lánc sohasem tér vissza } i\text{-be} \mid X_0 = i) \geq p_{i,j} > 0. \end{aligned}$$

Így  $f_i < 1$ , és ezért  $i$  tranzienst (a 2.4.5. Tétel utáni megjegyzés alapján).

(ii): A (ii) részbeli állítás az (i) részbeli állítás negáltja.

(iii): Mivel már beláttuk, hogy egy rekurrens osztály zárt, elég belátni, hogy egy véges zárt osztály pozitív rekurrens. Legyen  $C$  egy véges zárt osztály, és  $i \in C$  rögzített. Ekkor

$$\begin{aligned} (2.4.5) \quad \sum_{j \in C} p_{i,j}^{(n)} &= \sum_{j \in C} P(X_n = j \mid X_0 = i) = P\left(\bigcup_{j \in C} \{X_n = j\} \mid X_0 = i\right) \\ &= P(X_n \in C \mid X_0 = i) = 1, \end{aligned}$$

ahol a második egyenlőségénél a valószínűség szigma-additivitását, az utolsó egyenlőségénél pedig a  $C$  osztály zártágát használtuk fel.

Tegyük fel indirekt módon, hogy  $C$  tranzienst vagy null-rekurrens. A típusok karakterizációs tétele alapján (2.4.5. Tétel (i) és (ii) részei) tetszőleges  $j \in C$  állapot esetén  $p_{i,j}^{(n)} \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow \infty$ . Valóban,  $j$  tranzienst vagy null-rekurrens (mert  $C$ -ben van), így a 2.4.5. Tétel (i) és (ii) részeit alkalmazva  $i$  és  $j$  szerepcserével, adódik a dolog.

Végezetül,  $n \rightarrow \infty$  határátmenetet véve a (2.4.5) egyenlőségben, kapjuk, hogy

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in C} p_{i,j}^{(n)} = \sum_{j \in C} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)} = \sum_{j \in C} 0 = 0,$$

mely ellentmondás, ahol a második egyenlőségénél felhasználtuk, hogy  $C$  véges osztály. Így, mivel a típus osztálytulajdonság, kapjuk, hogy  $C$  pozitív rekurrens osztály.  $\square$

A 2.4.9. Állítás alapján, amennyiben az állapottér véges, minden állapot típusa eldönthető a kommunikációs osztályok zártágának/nyíltságának vizsgálatával, és ekkor csak pozitív rekurrens és tranzienst típusok lehetségesek: a zárt osztálybeliek a pozitív rekurrens, a nyílt osztálybeliek a tranzienst.

**2.4.10. Állítás.** Egy Markov-lánc egy véges nyílt osztályt véges sok lépésben 1 valószínűséggel elhagy.

**Bizonyítás.** Legyen  $C$  egy véges nyílt osztály, és  $i_0 \in C$ . Tegyük fel indirekt módon, hogy

$$P(X_n \in C \text{ végtelen sok } n \in \mathbb{N} \text{ esetén} \mid X_0 = i_0) > 0.$$

Mivel  $C$  véges, így ha  $\omega \in \Omega$  olyan, hogy  $X_n(\omega) \in C$  végtelen sok  $n \in \mathbb{N}$  esetén, akkor létezik olyan  $i_\omega \in C$ , hogy  $X_n(\omega) = i_\omega$  végtelen sok  $n \in \mathbb{N}$  esetén. Ezért

$$\left\{ X_n \in C \text{ végtelen sok } n \in \mathbb{N} \text{ esetén} \right\} \subseteq \bigcup_{i \in C} \left\{ X_n = i \text{ végtelen sok } n \in \mathbb{N} \text{ esetén} \right\}.$$

Így a valószínűség szubadditivitása miatt

$$\begin{aligned} 0 &< P(X_n \in C \text{ végtelen sok } n \in \mathbb{N} \text{ esetén} \mid X_0 = i_0) \\ &\leq \sum_{i \in C} P(X_n = i \text{ végtelen sok } n \in \mathbb{N} \text{ esetén} \mid X_0 = i_0) \\ (2.4.6) \quad &= \sum_{i \in C} P(V_i = \infty \mid X_0 = i_0), \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben  $V_i$  definícióját használtuk fel. A 2.4.9. Állítás (i) része alapján egy nyílt osztály tranziens, így  $C$  minden állapota tranziens. Ezért  $P(V_{i_0} = \infty \mid X_0 = i_0) = 0$  (a 2.4.4. Definíció alapján). Továbbá, ha  $i \in C \setminus \{i_0\}$ , akkor felhasználva, hogy  $\{V_i = \infty\} \subseteq \{\tau_{\{i\}} < \infty\} \cap \{X_{\tau_{\{i\}}} = i\}$  (ahol  $\tau_{\{i\}}$  az  $\{i\}$  halmaz, azaz az  $i$  állapot, első elérési ideje, lásd 2.1.12. Definíció), a 2.1.13. Állítás (erős Markov-tulajdonság) (i) része alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned} P(V_i = \infty \mid X_0 = i_0) &\leq P(V_i = \infty, \tau_{\{i\}} < \infty, X_{\tau_{\{i\}}} = i \mid X_0 = i_0) \\ &= P(V_i = \infty \mid \tau_{\{i\}} < \infty, X_{\tau_{\{i\}}} = i, X_0 = i_0) P(\tau_{\{i\}} < \infty, X_{\tau_{\{i\}}} = i \mid X_0 = i_0) \\ &= P(V_i = \infty \mid X_0 = i) P(\tau_{\{i\}} < \infty, X_{\tau_{\{i\}}} = i \mid X_0 = i_0) \\ &= 0 \cdot P(\tau_{\{i\}} < \infty, X_{\tau_{\{i\}}} = i \mid X_0 = i_0) = 0, \end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti lépésben használtuk, hogy  $P(V_i = \infty \mid X_0 = i) = 0$  hiszen  $i$  tranziens állapot. Ezért  $i \in C \setminus \{i_0\}$  esetén is  $P(V_i = \infty \mid X_0 = i_0) = 0$ . Mindezek miatt  $\sum_{i \in C} P(V_i = \infty \mid X_0 = i_0) = 0$ , mely viszont ellentmond (2.4.6)-nek.  $\square$

Ha nem véges az állapottér, akkor a 2.4.9. Állítás (i) és (ii) részei nem megfordíthatóak, tehát nem igaz az, hogy minden zárt osztály rekurrens, és az, hogy minden tranziens osztály nyitott. Például, a következő 2.4.11. Példában szereplő egydimenziós véletlen bolyongás irreducibilis Markov-lánc, amiből adódik, hogy az egyetlen kommunikációs osztálya (a teljes állapottér) zárt. A (következő) 2.4.11. Példa alapján azt is kapjuk, hogy a nem szimmetrikus egydimenziós véletlen bolyongás tranziens. Így a nonszimmetrikus, egydimenziós véletlen bolyongás egyetlen kommunikációs osztálya zárt, de nem rekurrens.

**2.4.11. Példa. (Véletlen bolyongás a számegyenesen)** Tekintsük a véletlen bolyongás egydimenziós esetét (lásd a 2.1.9. Példa (ii) részét), tehát induljunk ki a 0-ból és minden lépésben – a korábbi döntésektől függetlenül – lépünk át valamelyik szomszédos

egész számba. Formálisan, legyen  $I = \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = \delta_0$ , és valamely  $p \in (0, 1)$  valószínűséggel tekintsük a  $\mathbb{P} = (p_{i,j})_{i,j \in I}$  átmenetvalószínűségi mátrixot, ahol

$$p_{i,j} = \begin{cases} p, & \text{ha } j = i + 1, \\ 1 - p, & \text{ha } j = i - 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\delta_0, \mathbb{P})$ .

Az egydimenziós véletlen bolyongás irreducibilis, így a szolidaritási tétel (2.4.7. Tétel) miatt minden állapot típusa azonos. A következőkben megmutatjuk, hogy a szimmetrikus esetben, azaz amikor  $p = \frac{1}{2}$ , az állapotok null-rekurrenssek, valamint a nem szimmetrikus esetben, azaz amikor  $p \neq \frac{1}{2}$ , az állapotok tranziensek.

A levezetésben fontos szerepet játszanak a következők:

- Stirling-formula:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

ahol  $a_n \sim b_n$ , ha  $n \rightarrow \infty$  ( $a_n > 0, b_n > 0, n \in \mathbb{N}$ ) azt jelenti, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$ . Pontosan a következő igaz

$$n! = n^n \sqrt{2\pi n} \exp \left\{ -n + \frac{\theta_n}{12n} \right\},$$

ahol  $0 < \theta_n < 1$ .

- Ha  $a_n \sim b_n$  és  $c_n \sim d_n$  ( $a_n > 0, b_n > 0, c_n > 0, d_n > 0, n \in \mathbb{N}$ ), akkor  $a_n c_n \sim b_n d_n$  és  $a_n/c_n \sim b_n/d_n$ .
- Ha  $a_n \sim b_n$  ( $a_n > 0, b_n > 0, n \in \mathbb{N}$ ) és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , ahol  $a \in \mathbb{R}$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .
- Ha  $a_n \sim b_n$  ( $a_n > 0, b_n > 0, n \in \mathbb{N}$ ), akkor

$$(2.4.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty,$$

azaz a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  és  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  pozitív tagú sorok ekvikonvergenssek.

Mivel a Markov-lánc irreducibilis, és a típus osztálytulajdonság, vagy minden állapot tranziens (átmeneti) vagy minden állapot (rekurrens) visszatérő. Az alábbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy a 0 állapot rekurrens-e vagy sem. A típusok karakterizációs tétele (visszatérősségi kritérium, lásd 2.4.5. Tétel) alapján

$$(2.4.8) \quad \begin{aligned} 0 \text{ rekurrens} & \iff \sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)} = \infty, \\ 0 \text{ tranziens} & \iff \sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)} < \infty. \end{aligned}$$

Ha  $n$  páratlan, akkor  $p_{0,0}^{(n)} = 0$ , mert 0-ból kiindulva csak páros számú lépésben érhetünk vissza 0-ba. Így

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(2n)}.$$

Ha a lánc 0-ból indulva  $2n$  lépés alatt tér vissza 0-ba, akkor  $n$  lépést kell tennie jobbra, illetve  $n$  lépést balra. Összesen  $\binom{2n}{n}$  darab fenti tulajdonságú  $2n$ -hosszúságú út létezik. Mivel tetszőleges, egy a fenti tulajdonságú út valószínűsége  $p^n(1-p)^n$ , kapjuk, hogy

$$p_{0,0}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Mivel  $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$ , a Stirling-formula alapján,

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n2\pi}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n2\pi}} = \frac{(2n)^{2n+1/2}}{n^{2n+1} \sqrt{2\pi}} = \frac{2^{2n+1/2}}{\sqrt{2n\pi}} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}},$$

és így

$$p_{0,0}^{(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n.$$

A (2.4.7) összefüggés és (2.4.8) alapján,

$$\begin{aligned} 0 \text{ rekurrens} &\iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n = \infty, \\ 0 \text{ tranziens} &\iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n < \infty. \end{aligned}$$

Ha  $p = \frac{1}{2}$ , akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty,$$

így ez esetben 0 rekurrens állapot. Továbbá, mivel  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{0,0}^{(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$  és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{0,0}^{(2n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = 0,$$

kapjuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{0,0}^{(n)} = 0$ , és így a típusok karakterizációs tétele alapján azt is kapjuk, hogy a 0 állapot null-rekurrens.

Ha  $p \neq \frac{1}{2}$ , akkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} (4p(1-p))^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n} = 4p(1-p) \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 4p(1-p) < 1,$$

hiszen  $4p(1-p) \leq 1$  és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha  $p = \frac{1}{2}$  (mely következik például a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből). Így a d'Alembert-féle hányados kritérium alapján

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n < \infty,$$

és ezért 0 tranziens. □

Tekinthetjük a véletlen bolyongást nem csak a számegyenesen, hanem magasabb dimenziókban is.

**2.4.12. Definíció.** Legyen  $d \in \mathbb{N}$  tetszőleges, és tekintsük az  $\mathbb{X}(d)$   $d$ -dimenziós szimmetrikus véletlen bolyongást, azaz legyenek a lánc állapotai a  $d$ -dimenziós rács pontjai, indítsuk ki az origóból, és minden lépésben léptessük a láncot valamelyik szomszédos állapotba diszkrét egyenletes eloszlás szerint, minden korábbi lépéstől függetlenül, azaz

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & \text{ha } \|i - j\| = 1, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z}^d.$$

Világos, hogy a  $d$ -dimenziós szimmetrikus véletlen bolyongás egy irreducibilis Markov-lánc. Az állapotok típusát az alábbi tétel mondja ki.

**2.4.13. Tétel. (Pólya-tétel, 1921)** A  $d$ -dimenziós szimmetrikus véletlen bolyongás null-rekurrens, ha  $d = 1, 2$ , és tranziens, ha  $d \geq 3$ .

**Bizonyítás (vázlat).** A  $d = 1$  esetben a 2.4.11. Példában már megmutattuk az állítást. Legyen a továbbiakban  $d \geq 2$ , és  $\{X_n(d) : n \in \mathbb{Z}_+\}$  a  $d$ -dimenziós szimmetrikus véletlen bolyongás. Mivel a Markov-lánc irreducibilis, és a típus osztálytulajdonság (lásd, a 2.4.7. Tételt), elég a  $0 \in \mathbb{Z}^d$  állapot típusát megvizsgálni. Vezessük be a

$$p_{0,0}^{(n)}(d) := P(X_n(d) = 0 \mid X_0(d) = 0), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

jelölést. A két- és a háromdimenziós esetben az egydimenziós esethez hasonlóan kombinatorikus úton felírhatóak a  $p_{0,0}^{(n)}(d)$  átmenetvalószínűségek. Ezután, szintén az egydimenziós eset mintájára, a Stirling-formula alkalmazásával kapunk egy olyan  $a_n(d)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sorozatot, melyre  $a_n(d) \sim p_{0,0}^{(n)}(d)$ , és  $d = 2$  esetén a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(2)$  sor divergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(2) = 0$ , míg  $d = 3$  esetén  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(3) < \infty$ . Emiatt a  $d = 2$  esetben a Markov-lánc null-rekurrens, a  $d = 3$  esetben pedig tranziens. Továbbá, tetszőleges  $d \geq 3$  esetén, belátható, hogy

$$p_{0,0}^{(n)}(d) \leq p_{0,0}^{(n)}(3), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

amiből következik, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)}(d) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)}(3) < \infty,$$

azaz  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)}(d) < \infty$ , ha  $d \geq 3$ . Így a típusok karakterizációs tétele (visszatérőségi kritérium, lásd 2.4.5. Tétel) alapján  $d \geq 3$  esetben a Markov-lánc tranziens.  $\square$

## 2.5. Periodicitás

Az állapotok egy másik leíró tulajdonsága a periódus.

**2.5.1. Definíció.** Az  $i$  állapot periódusa alatt az alábbi mennyiséget értjük:

$$d_i := \text{lko}\{n \in \mathbb{N} : p_{i,i}^{(n)} > 0\},$$

azzal a konvencióval, hogy  $\text{lko}\{\emptyset\} := \infty$ . Ha  $d_i = 1$ , akkor azt mondjuk, hogy az  $i$  állapot aperiodikus; ha  $d_i > 1$ , akkor azt, hogy periodikus.

**2.5.2. Megjegyzés.** Megmutatjuk, hogy valamely  $i \in I$  állapot esetén akkor és csak akkor teljesül, hogy  $d_i = \infty$  (azaz akkor és csak akkor teljesül, hogy  $p_{i,i}^{(n)} = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ), ha  $i$  egyedül alkot egy osztályt, melyet a lánc egy lépéssel végleg elhagy (a 2.3.4. Definíció utáni megjegyzés szerint  $i$  pillanatnyi, tisztavirág életű állapot). Ha  $p_{i,i}^{(n)} = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

akkor az  $i$  osztályában nincs tőle különböző  $j$  állapot, hiszen ha lenne úgy  $i \leftrightarrow j$  miatt létezne olyan  $n_0 > 0$ , hogy  $p_{i,i}^{(n_0)} > 0$  (lásd, 2.3.3. Állítás), ami ellentmondás. Mivel  $p_{i,i}^{(1)} = 0$ , a lánc egy lépéssel elhagyja az  $\{i\}$  osztályt, és végleg elhagyja, ugyanis ellenkező esetben létezne olyan  $i$ -től különböző  $j$  állapot, hogy  $i \rightarrow j$  és  $j \rightarrow i$ , de ekkor  $i \leftrightarrow j$  teljesülne, mely megint csak ellentmondás, mert ekkor  $i$  és  $j$  egy osztályban lenne. A megfordítás triviális. Az alábbiakban mutatunk egy példát is. Legyen  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  egy Markov-lánc, melynek fázistere  $I = \{1, 2, 3\}$  és átmenetmátrixa:

$$\mathbb{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Ekkor az osztályok  $\{1\}$  és  $\{2, 3\}$ , és az  $\{1\}$  osztályt egy lépésben elhagyja a Markov-lánc (azaz 1 pillanatnyi, tisztavirág életű állapot), továbbá,  $d_1 = \infty$  és  $d_2 = d_3 = 1$ .  $\square$

**2.5.3. Tétel. (Szolidaritási tétel a periódusra)** *A periodicitás osztálytulajdonság, azaz adott kommunikációs osztályban lévő állapotok periódusa azonos.*

**Bizonyítás.** Legyenek  $i, j \in I$  állapotok, hogy  $i \leftrightarrow j$ . Ekkor léteznek  $m \geq 0, n \geq 0$  úgy, hogy  $p_{i,j}^{(m)} > 0, p_{j,i}^{(n)} > 0$ .

1. Eset ( $d_i \in [1, \infty)$ ): Tegyük fel, hogy létezik olyan  $n_i > 0$ , hogy  $p_{i,i}^{(n_i)} > 0$ . Be kell látni, hogy az  $i$ -vel egy osztályban levő  $j$  állapot periódusa megegyezik az  $i$  állapot periódusával, azaz  $d_i = d_j$ . Legyen  $s > 0$  tetszőleges olyan pozitív egész szám, melyre  $p_{i,i}^{(s)} > 0$  (a feltételezésünk miatt ilyen  $s$  létezik, választható  $s$ -nek például  $n_i$ ). Ekkor a Kolmogorov-Chapman egyenletek alapján  $p_{i,i}^{(2s)} \geq p_{i,i}^{(s)} p_{i,i}^{(s)} > 0$  is teljesül. Másrészt, újra a Kolmogorov-Chapman egyenletek alapján

$$p_{j,j}^{(n+s+m)} \geq p_{j,i}^{(n)} p_{i,i}^{(s)} p_{i,j}^{(m)} > 0,$$

és így  $p_{j,j}^{(n+s+m)} > 0$ . Hasonlóan  $p_{j,j}^{(n+2s+m)} > 0$  is igaz. Ezekből  $d_j \mid n + s + m$  és  $d_j \mid n + 2s + m$ , amiből  $d_j \mid (n + 2s + m) - (n + s + m) = s$ . Így  $d_j$  osztója az összes olyan  $s > 0$ -nak, melyre  $p_{i,i}^{(s)} > 0$ , amiből következik, hogy  $d_j$  osztója az ilyen  $s$ -ek legnagyobb közös osztójának, azaz  $d_j \mid d_i$  (hiszen két szám legnagyobb közös osztója a két szám azon közös osztója, mely minden közös osztónak többszöröse). Másrészt  $i$  és  $j$  szerepének felcserélésével  $d_i \mid d_j$ . Tehát  $d_i = d_j$ .

2. Eset ( $d_i = \infty$ ): Tegyük fel, hogy nem létezik olyan  $n \in \mathbb{N}$ , hogy  $p_{i,i}^{(n)} > 0$ , azaz tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $p_{i,i}^{(n)} = 0$ , azaz  $i$  periódusa  $\infty$ . Ekkor, mivel  $i \leftrightarrow j$ , a 2.5.2. Megjegyzés alapján, kapjuk, hogy  $i = j$ . Így formálisan  $j$  periódusa is  $\infty$ . Azaz az, hogy a „végtelen”-periódusság osztálytulajdonság lényegében semmitmondó állítás.  $\square$

**2.5.4. Megjegyzés.** Felhívjuk a figyelmet, hogy abból, hogy egy Markov-lánc egylépéses átmenetmátrixa

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{P}_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbb{P}_2 & 0 & \cdots \\ & & & \ddots & \mathbb{P}_{d-1} \\ \mathbb{P}_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

alakú, ahol  $d \geq 2$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , és  $\mathbb{P}_0, \dots, \mathbb{P}_{d-1}$  alkalmas sztochasztikus mátrixok, még nem következik, hogy a Markov-lánc periódusa  $d$ . Valóban, például, ha az  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  állapottérhez tartozó átmenetmátrix

$$\mathbb{P} := \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

úgy a Markov-lánc irreducibilis és az  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  állapottér (osztály) aperiódikus, ugyanis  $d_1 = \text{lko}\{n \in \mathbb{N} : p_{1,1}^{(n)} > 0\}$ , ahol  $\{2, 3\} \subset \{n \in \mathbb{N} : p_{1,1}^{(n)} > 0\}$  (hiszen  $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1$  és  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 1$ ), és így  $d_1 = 1$ . A szóbanforgó Markov-lánc aperiódikus (azaz a periódusa 1 és nem 3).  $\square$

Megjegyezzük, hogy ha az  $i \in I$  állapot pozitív rekurrens és aperiódikus, akkor belátható, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,i}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}$ , ahol  $\mu_i \in [1, \infty)$  az első visszatérési idő várható értéke.

**2.5.5. Tétel.** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$  egy irreducibilis,  $d$ -periódikus Markov-lánc, ahol  $d \in (1, \infty)$ . Ekkor az állapottér felbontható

$$I = C_0 \cup \dots \cup C_{d-1}$$

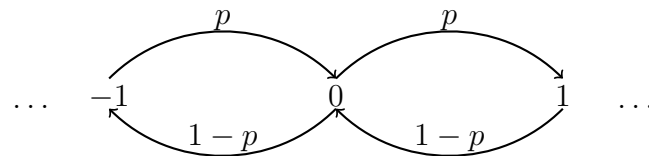
alakban úgy, hogy  $C_0, C_1, \dots, C_{d-1}$  páronként diszjunktak, és a  $C_d := C_0$  jelölés mellett

$$P(X_{n+1} \in C_{k+1} \mid X_n \in C_k) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall k \in \{0, \dots, d-1\}.$$

Továbbá az  $\mathbb{Y} := \{Y_n := X_{nd} : n \in \mathbb{Z}_+\}$  sztochasztikus folyamatra teljesül, hogy  $\mathbb{Y} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P}^d)$  és  $\mathbb{Y}$  kommunikációs osztályai pontosan a  $C_0, \dots, C_{d-1}$  halmazok, melyek aperiódikusak és zártak a reducibilis  $\mathbb{Y}$  Markov-láncban.

Megjegyezzük, hogy a 2.5.5. Tételben a  $d = \infty$  eset kizárására valójában nem lenne szükség, mert egy irreducibilis Markov-lánc egyetlen osztályának a periódusa nem lehet  $\infty$ .

**2.5.6. Példa.** Tekintsük az  $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  egydimenziós véletlen bolyongást (2.1.9. Példa (ii) része):



ahol  $p \in (0, 1)$ , melynek átmenetmátrixa

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

azaz  $\mathbb{P}$  főátlójában 0-k, a főátló feletti mellékátlóban  $p$ -k, a főátló alatti mellékátlóban pedig  $(1-p)$ -k állnak.

Ekkor  $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  irreducibilis, periódusa 2 és

$$I = \mathbb{Z} = C_0 \cup C_1,$$

ahol  $C_0$  a páros,  $C_1$  a páratlan számokat tartalmazza. Továbbá, az  $\mathbb{Y} = \{Y_n = X_{2n} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ , Markov-lánc egy lépéses átmenetmátrixa:

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 2p(1-p) & 0 & p^2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 2p(1-p) & 0 & p^2 & 0 & \cdots \\ \cdots & (1-p)^2 & 0 & 2p(1-p) & 0 & p^2 & \cdots \\ \cdots & 0 & (1-p)^2 & 0 & 2p(1-p) & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & (1-p)^2 & 0 & 2p(1-p) & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

azaz  $\mathbb{P}^2$  főátlójában  $2p(1-p)$ -k, a főátló feletti második mellékátlóban  $p^2$ -ek, a főátló alatti második mellékátlóban pedig  $(1-p)^2$ -ek állnak. Valóban,

$$\begin{aligned} P(Y_1 = 0 | Y_0 = 0) &= P(X_2 = 0 | X_0 = 0) \\ &= P(X_2 = 0, X_1 = 1 | X_0 = 0) + P(X_2 = 0, X_1 = -1 | X_0 = 0) \\ &= P(X_2 = 0 | X_1 = 1) P(X_1 = 1 | X_0 = 0) + P(X_2 = 0 | X_1 = -1) P(X_1 = -1 | X_0 = 0) \\ &= (1-p)p + p(1-p) = 2p(1-p), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} P(Y_1 = 2 | Y_0 = 0) &= P(X_2 = 2 | X_0 = 0) = P(X_2 = 2, X_1 = 1 | X_0 = 0) \\ &= P(X_2 = 2 | X_1 = 1) P(X_1 = 1 | X_0 = 0) = p^2, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} P(Y_1 = -2 | Y_0 = 0) &= P(X_2 = -2 | X_0 = 0) = P(X_2 = -2, X_1 = -1 | X_0 = 0) \\ &= P(X_2 = -2 | X_1 = -1) P(X_1 = -1 | X_0 = 0) = (1-p)^2. \end{aligned}$$

A  $\mathbb{P}^2$  átmenetmátrix további elemei hasonlóan kezelhetők. Továbbá, a  $C_0$  osztály periódusa az  $\mathbb{Y}$  láncban

$$\text{lko}\{n \in \mathbb{N} : P(Y_n = 0 | Y_0 = 0) > 0\}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} P(Y_n = 0 | Y_0 = 0) &= P(X_{2n} = 0 | X_0 = 0), \quad n \in \mathbb{N}, \\ P(X_2 = 0 | X_0 = 0) &= p^2 > 0, \\ P(X_4 = 0 | X_0 = 0) &\geq P(X_4 = 0, X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 1 | X_0 = 0) = p^2(1-p)^2 > 0, \end{aligned}$$

adódik, hogy  $\{1, 2\} \subset \{n \in \mathbb{N} : P(Y_n = 0 | Y_0 = 0) > 0\}$ , és így

$$\text{lko}\{n \in \mathbb{N} : P(Y_n = 0 | Y_0 = 0) > 0\} = 1,$$

azaz a  $C_0$  osztály aperiodikus az  $\mathbb{Y}$  láncban. □

## 2.6. Elnyelési valószínűségek, elérési idők

Ebben a részben azt vizsgáljuk, hogy állapotok egy adott halmazát milyen valószínűséggel éri el a lánc, illetve várhatóan hány lépés kell az eléréshez.

**2.6.1. Definíció.** Legyen adott állapotoknak egy  $A$  halmaza, és legyen  $\tau_A$  az  $A$  halmaz első elérési ideje, azaz  $\tau_A = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : X_n \in A\}$ , ahol  $\min \emptyset := +\infty$  (lásd 2.1.12. Definíció). Ekkor a

$$p_i^A := P(\tau_A < \infty | X_0 = i) = P(\text{valaha elérjük } A\text{-t} | i\text{-ből indulunk}), \quad i \in I,$$

valószínűségeket az  $A$  halmaz elérési valószínűségeinek nevezzük. Ha  $A$  egy zárt halmaz, akkor a  $p_i^A$ ,  $i \in I$ , valószínűségeket az  $A$  halmaz elnyelési valószínűségeinek is nevezhetjük. Továbbá, a

$$h_i^A := E(\tau_A | X_0 = i) = E(\text{hány lépésben érjük el először } A\text{-t} | i\text{-ből indulunk}), \quad i \in I,$$

várható értékeket az  $A$  halmaz várható elérési idejeinek nevezzük. Ha  $A$  egy zárt halmaz, akkor a  $h_i^A$ ,  $i \in I$ , várható értékeket az  $A$  halmaz várható elnyelési idejeinek is nevezhetjük.

Felhívjuk a figyelmet, hogy  $\tau_A$  egy  $[0, \infty]$ -beli értékű véletlen változó, így előfordulhat, hogy  $h_i^A = \infty$ . Ha például  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  egy Markov-lánc, melynek fázistere  $I = \{1, 2, 3\}$ , átmenetmátrixa:

$$\mathbb{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{matrix},$$

$A = \{1\}$  és  $i = 2$ , akkor  $p_2^A = 0$  és  $h_2^A = \infty$ .

**2.6.2. Tétel.** Legyen  $A$  állapotok egy halmaza. A  $p_i^A$ ,  $i \in I$ , elérési valószínűségek a minimális, nemnegatív megoldásai az alábbi egyenletrendszernek:

$$(2.6.1) \quad p_i^A = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in A, \\ \sum_{j \in I} p_{i,j} p_j^A, & \text{ha } i \notin A. \end{cases}$$

Továbbá, a  $h_i^A$ ,  $i \in I$ , várható elérési idők a minimális, nemnegatív megoldásai az alábbi egyenletrendszernek

$$(2.6.2) \quad h_i^A = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \in A, \\ 1 + \sum_{j \in I} p_{i,j} h_j^A = 1 + \sum_{j \in I \setminus A} p_{i,j} h_j^A, & \text{ha } i \notin A. \end{cases}$$

**Bizonyítás.** Először megmutatjuk, hogy a  $p_i^A$ ,  $i \in I$ , elérési valószínűségek valóban megoldásai (2.6.1)-nek, a  $h_i^A$ ,  $i \in I$ , várható elérési idők pedig (2.6.2)-nek.

Ha  $i \in A$  és  $X_0 = i$ , akkor  $\tau_A = 0$  P-m.m., és így  $p_i^A = 1$  és  $h_i^A = 0$ , azaz ekkor teljesülnek a szóbanforgó egyenletek.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy  $i \notin A$  és  $X_0 = i$ . Ekkor  $\tau_A \geq 1$  P-m.m. Tetszőleges  $S \in \mathcal{A}$  esemény,  $Y$  nemnegatív véletlen változó és  $j \in I$  állapot esetén legyenek

$$P_j(S) := P(S | X_0 = j) \quad \text{és} \quad E_j(Y) := E(Y | X_0 = j).$$

Ekkor tetszőleges  $j \in I$  esetén

$$\begin{aligned} P_i(\tau_A < \infty \mid X_1 = j) &= \frac{P_i(\tau_A < \infty, X_1 = j)}{P_i(X_1 = j)} = \frac{P(\tau_A < \infty, X_1 = j \mid X_0 = i)}{P(X_1 = j \mid X_0 = i)} \\ &= \frac{P(\tau_A < \infty, X_1 = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \cdot \frac{P(X_0 = i)}{P(X_1 = j, X_0 = i)} \\ &= P(\tau_A < \infty \mid X_1 = j, X_0 = i). \end{aligned}$$

Tekintsük az  $\{X'_n := X_{n+1} : n \in \mathbb{Z}_+\}$  Markov-láncot, melynek állapottere  $I$ , átmenetvalószínűségi mátrixa pedig  $\mathbb{P}$ . Ha  $\tau'_A$  jelöli az  $A$  halmaz első elérési idejét az  $\{X'_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  Markov-lánc által, akkor

- $\tau'_A + 1 = \tau_A$  (hiszen  $i \notin A$  és  $X_0 = i$ ), és így  $\tau_A < \infty$  akkor és csak akkor, ha  $\tau'_A < \infty$ ,
- $\{\tau'_A < \infty\} \in \sigma(X_1, X_2, \dots)$ ,
- $\tau'_A$ -nek az  $\{X'_0 = j\}$  feltételre vonatkozó feltételes eloszlása megegyezik  $\tau_A$ -nak az  $\{X_0 = j\}$  feltételre vonatkozó feltételes eloszlásával.

Így, a Markov-tulajdonságot is felhasználva, kapjuk, hogy

$$P_i(\tau_A < \infty \mid X_1 = j) = P(\tau'_A < \infty \mid X'_0 = j) = p_j^A, \quad j \in I.$$

Ezért a  $(P_i$  valószínűségi mértékre vonatkozó) teljes valószínűség tétele alapján

$$\begin{aligned} p_i^A &= P(\tau_A < \infty \mid X_0 = i) = P_i(\tau_A < \infty) = \sum_{j \in I} P_i(\tau_A < \infty \mid X_1 = j) P_i(X_1 = j) \\ &= \sum_{j \in I} P_i(\tau_A < \infty \mid X_1 = j) P(X_1 = j \mid X_0 = i) = \sum_{j \in I} p_j^A p_{i,j}, \end{aligned}$$

és így  $i \notin A$  esetén is teljesülnek a (2.6.1) egyenletek.

Hasonlóan, tetszőleges  $j \in I$  esetén

$$\begin{aligned} E_i(\tau_A \mid X_1 = j) &= \frac{E_i(\tau_A \mathbb{1}_{\{X_1=j\}})}{P_i(X_1 = j)} = \frac{E(\tau_A \mathbb{1}_{\{X_1=j\}} \mid X_0 = i)}{P(X_1 = j \mid X_0 = i)} \\ &= \frac{E(\tau_A \mathbb{1}_{\{X_1=j\}} \mathbb{1}_{\{X_0=i\}})}{P(X_0 = i)} \cdot \frac{P(X_0 = i)}{P(X_1 = j, X_0 = i)} \\ &= E(\tau_A \mid X_1 = j, X_0 = i) = E(\tau'_A + 1 \mid X'_0 = j) = 1 + h_j^A. \end{aligned}$$

Ezért a  $(P_i$  valószínűségi mértékre vonatkozó) teljes várható érték tétele alapján

$$\begin{aligned} h_i^A &= E(\tau_A \mid X_0 = i) = E_i(\tau_A) = \sum_{j \in I} E_i(\tau_A \mid X_1 = j) P_i(X_1 = j) \\ &= \sum_{j \in I} (1 + h_j^A) p_{i,j} = \sum_{j \in I} p_{i,j} + \sum_{j \in I} h_j^A p_{i,j} = 1 + \sum_{j \in I} h_j^A p_{i,j}, \end{aligned}$$

és így  $i \notin A$  esetén is teljesülnek a (2.6.2) egyenletek.

A következőkben belátjuk a  $p_i^A$ ,  $i \in I$ , elérési valószínűségekre vonatkozó minimalitási feltételt, mely azt jelenti, hogy ha  $(x_i)_{i \in I}$  egy másik nemnegatív megoldása a (2.6.1) egyenleteknek, akkor  $x_i \geq p_i^A$ ,  $i \in I$ . Legyen  $(x_i)_{i \in I}$  egy nemnegatív megoldása a (2.6.1) egyenleteknek.

Ha  $i \in A$ , akkor  $x_i = 1$  és mivel ekkor  $p_i^A = 1$ , kapjuk, hogy  $x_i = p_i^A = 1$ .

Ha  $i \notin A$ , akkor

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j \in I} p_{i,j} x_j = \sum_{j \in A} p_{i,j} \cdot 1 + \sum_{j \in I \setminus A} p_{i,j} x_j = \sum_{j \in A} p_{i,j} + \sum_{j \in I \setminus A} p_{i,j} \left( \sum_{k \in A} p_{j,k} + \sum_{k \in I \setminus A} p_{j,k} x_k \right) \\ &= P_i(X_1 \in A) + \sum_{j \in I \setminus A} \sum_{k \in A} p_{i,j} p_{j,k} + \sum_{j \in I \setminus A} \sum_{k \in I \setminus A} p_{i,j} p_{j,k} x_k, \end{aligned}$$

ahol a második lépésben azt használtuk, hogy  $x_i = 1$ ,  $i \in A$ , a negyedik lépésben pedig azt, hogy a  $P_i$  valószínűségi mérték  $\sigma$ -additív. Továbbá, tetszőleges  $j \in I \setminus A$  és  $k \in A$  esetén, a homogenitás és a Markov-tulajdonság miatt

$$\begin{aligned} p_{i,j} p_{j,k} &= P(X_1 = j \mid X_0 = i) P(X_1 = k \mid X_0 = j) \\ &= P(X_1 = j \mid X_0 = i) P(X_2 = k \mid X_1 = j) \\ &= \frac{P(X_1 = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \cdot P(X_2 = k \mid X_1 = j, X_0 = i) \\ &= \frac{P(X_1 = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \cdot \frac{P(X_2 = k, X_1 = j, X_0 = i)}{P(X_1 = j, X_0 = i)} \\ &= P(X_2 = k, X_1 = j \mid X_0 = i) = P_i(X_2 = k, X_1 = j). \end{aligned}$$

Így újra használva a  $P_i$  valószínűségi mérték  $\sigma$ -additivitását, kapjuk, hogy

$$x_i = P_i(X_1 \in A) + P_i(X_1 \in I \setminus A, X_2 \in A) + \sum_{j \in I \setminus A} \sum_{k \in I \setminus A} p_{i,j} p_{j,k} x_k, \quad i \notin A.$$

A fenti módszert iteratíván folytatva, adódik, hogy tetszőleges  $i \notin A$  esetén

$$\begin{aligned} x_i &= P_i(X_1 \in A) + P_i(X_1 \in I \setminus A, X_2 \in A) + \dots \\ &\quad + P_i(X_1 \in I \setminus A, \dots, X_{n-1} \in I \setminus A, X_n \in A) \\ &\quad + \sum_{j_1 \in I \setminus A} \dots \sum_{j_n \in I \setminus A} p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \dots p_{j_{n-1},j_n} x_{j_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Így

$$x_i = P_i(\tau_A \leq n) + \sum_{j_1 \in I \setminus A} \dots \sum_{j_n \in I \setminus A} p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \dots p_{j_{n-1},j_n} x_{j_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ahol a jobb oldalon szereplő második tag nemnegatív, hiszen  $x_{j_n}$  nemnegatív. Ezért  $x_i \geq P_i(\tau_A \leq n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , amiből következik, hogy

$$x_i \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} P_i(\tau_A \leq n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_i(\tau_A \leq n) = P_i(\tau_A < \infty) = p_i^A,$$

ahol a második lépésben azt használtuk fel, hogy a  $P_i(\tau_A \leq n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sorozat monoton növekvő, a harmadik lépésben a  $P_i$  valószínűségi mérték folytonosságát és azt, hogy  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_A \leq n\} = \{\tau_A < \infty\}$ , az utolsó lépésben pedig  $p_i^A$  definícióját. Így  $i \notin A$  esetén  $x_i \geq p_i^A$ .

A következőkben belátjuk a  $h_i^A$ ,  $i \in I$ , várható elérési időkre vontakozó minimalitási feltételt, mely azt jelenti, hogy ha  $(x_i)_{i \in I}$  egy másik nemnegatív megoldása a (2.6.2)

egyenleteknek, akkor  $x_i \geq h_i^A$ ,  $i \in I$ . Legyen  $(x_i)_{i \in I}$  egy nemnegatív megoldása a (2.6.2) egyenleteknek.

Ha  $i \in A$ , akkor  $x_i = 0$  és mivel ekkor  $h_i^A = 0$ , kapjuk, hogy  $x_i = h_i^A = 0$ .

Ha  $i \notin A$ , akkor

$$\begin{aligned} x_i &= 1 + \sum_{j \in I} p_{i,j} x_j = 1 + \sum_{j \in A} p_{i,j} \cdot 0 + \sum_{j \in I \setminus A} p_{i,j} x_j = 1 + \sum_{j \in I \setminus A} p_{i,j} x_j \\ &= 1 + \sum_{j \in I \setminus A} p_{i,j} \left( 1 + \sum_{k \in I \setminus A} p_{j,k} x_k \right) \\ &= 1 + \sum_{j \in I \setminus A} p_{i,j} + \sum_{j \in I \setminus A} \sum_{k \in I \setminus A} p_{i,j} p_{j,k} x_k \\ &= 1 + P_i(X_1 \in I \setminus A) + \sum_{j \in I \setminus A} \sum_{k \in I \setminus A} p_{i,j} p_{j,k} x_k. \end{aligned}$$

A fenti módszert iteratíván folytatva, adódik, hogy tetszőleges  $i \notin A$  esetén

$$\begin{aligned} x_i &= 1 + P_i(X_1 \in I \setminus A) + P_i(X_1 \in I \setminus A, X_2 \in I \setminus A) + \cdots \\ &\quad + P_i(X_1 \in I \setminus A, \dots, X_{n-1} \in I \setminus A) \\ &\quad + \sum_{j_1 \in I \setminus A} \cdots \sum_{j_n \in I \setminus A} p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \cdots p_{j_{n-1},j_n} x_{j_n} \\ &= P_i(\tau_A \geq 1) + P_i(\tau_A \geq 2) + P_i(\tau_A \geq 3) + \cdots + P_i(\tau_A \geq n) \\ &\quad + \sum_{j_1 \in I \setminus A} \cdots \sum_{j_n \in I \setminus A} p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \cdots p_{j_{n-1},j_n} x_{j_n} \end{aligned}$$

tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  esetén, ahol jobb oldalon szereplő utolsó tag nemnegatív. Így tetszőleges  $i \notin A$  esetén

$$x_i \geq P_i(\tau_A \geq 1) + P_i(\tau_A \geq 2) + P_i(\tau_A \geq 3) + \cdots + P_i(\tau_A \geq n), \quad n \in \mathbb{N},$$

amiből következik, hogy

$$x_i \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P_i(\tau_A \geq k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P_i(\tau_A \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} P_i(\tau_A \geq k) = E_i(\tau_A) = h_i^A,$$

ahol az utolsó előtti lépésben azt használtuk fel, hogy tetszőleges nemnegatív egészértékű véletlen változó esetén  $E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k)$ . Így  $i \notin A$  esetén  $x_i \geq h_i^A$ .  $\square$

**2.6.3. Megjegyzés.** (i): Nyilvánvaló, hogy ha  $i \in A$  és  $X_0 = i$ , akkor  $\tau_A = 0$  P-m.m., és így  $p_i^A = 1$  és  $h_i^A = 0$ . Speciálisan, ha  $A = \{i\}$ , akkor  $p_i^{\{i\}} = 1$ , melyből láthatjuk, hogy a  $p_i^{\{i\}}$  elérési valószínűség nem feltétlenül azonos az  $i$  állapotba való visszatérés  $f_i = P(T_i < \infty)$  valószínűségével. Ennek (egyszerű) magyarázata a definíciókban rejlik:  $\tau_{\{i\}} = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : X_n = i\}$  és  $T_i = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = i\}$ .

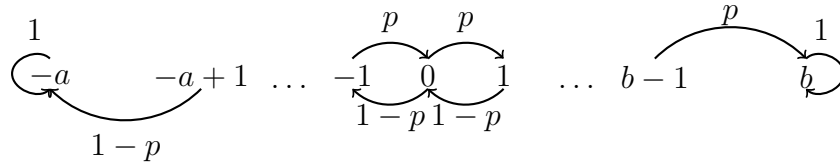
(ii): Ha például  $I = \{1, 2, 3\}$  és  $A = \{1\}$ , akkor a (2.6.1) az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} p_1^A &= 1, \\ p_2^A &= p_{2,1} + p_{2,2} p_2^A + p_{2,3} p_3^A, \\ p_3^A &= p_{3,1} + p_{3,2} p_2^A + p_{3,3} p_3^A, \end{aligned}$$

és az utolsó két egyenletből álló rendszer egy inhomogén lineáris egyenletrendszer a  $p_2^A$  és  $p_3^A$  ismeretlenekre.  $\square$

**2.6.4. Példa. (A játékos csődje probléma véges állapottéren)** Tegyük fel, hogy egy játékot játszunk valakivel. Tegyük, fel, hogy  $a$  a kezdőtőkénk, és ellenfelünknek  $b$  egységyi pénze van, ahol  $a$  és  $b$  pozitív egész számok. Minden körben  $p \in (0, 1)$  valószínűséggel nyerünk, illetve  $1 - p$  valószínűséggel veszítünk. Ha nyerünk egy adott körben, akkor pénzünk egy egységgel növekszik, az ellenfelünk pénze pedig egy egységgel csökken; ha pedig veszítünk, akkor fordítva, azaz pénzünk egy egységgel csökken, az ellenfelünk pénze pedig egy egységgel növekszik. Mennyi a csőd valószínűsége, azaz annak a valószínűsége, hogy minden pénzünket elveszítjük?

Tetszőleges  $n \in \mathbb{Z}_+$  esetén legyen  $X_n$  az  $n$ -edik körbeli pénzünk mennyiségéből levonva  $a$ -t. Ekkor  $X_0 = 0$  kezdeti állapottal  $\mathbb{X} = \{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  egy véletlen bolyongás  $I = \{-a, -a + 1, \dots, b - 1, b\}$  állapottérrel és az alábbi átmenetgráffal:



Látható, hogy  $-a$  és  $b$  elnyelő állapotok, melyeket elnyelő falaknak is hívunk.

A kérdésre pedig a válasz megegyezik a  $p_0^{\{-a\}}$  elnyelési valószínűséggel. Megmutatjuk, hogy a csőd valószínűsége

$$P(\text{csőd}) = p_0^{\{-a\}} = \begin{cases} \frac{b}{a+b}, & \text{ha } p = \frac{1}{2}, \\ \frac{r^a - r^{a+b}}{1 - r^{a+b}} = \frac{1 - \frac{1}{r^b}}{1 - \frac{1}{r^{a+b}}}, & \text{ha } p \neq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

ahol  $r := \frac{1-p}{p}$ . Vezessük be a

$$p_i := p_i^{\{-a\}}, \quad i \in \{-a, -a + 1, \dots, 0, \dots, b - 1, b\}$$

jelöléseket. Célunk  $p_0^{\{-a\}}$  meghatározása, mely annak a valószínűsége, hogy  $a$  kezdőtőke mellett minden pénzünket elveszítjük, azaz ellenfelünk nyer. A 2.6.2. Tétel alapján  $p_i$ ,  $i \in \{-a, -a + 1, \dots, 0, \dots, b - 1, b\}$ , az alábbi egyenletrendszer minimális nemnegatív megoldása:

$$\begin{aligned} p_{-a} &= 1, \\ p_i &= \sum_{j \in \{-a, \dots, b\}} p_{i,j} p_j = \begin{cases} p \cdot p_{i+1} + (1-p) \cdot p_{i-1} & \text{ha } i \in \{-a + 1, \dots, 0, \dots, b - 1\}, \\ p_{b,b} \cdot p_b = p_b & \text{ha } i = b. \end{cases} \end{aligned}$$

Az  $i = b$  esetén adódó  $p_b = p_b$  egyenlet azonosság, így nem tudjuk a továbbiakban használni. Azonban adható egy másik peremfeltétel:

$$p_b = p_b^{\{-a\}} = P(\tau_{\{-a\}} < \infty \mid X_0 = b) = P(\emptyset \mid X_0 = b) = 0,$$

ahol az utolsó előtti egyenlőség abból következik, hogy  $X_0 = b$  esetén  $X_n = b$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , P-m.m. (hiszen  $p_{b,b} = 1$ ), és így  $\tau_{\{-a\}} = \infty$  P-m.m. Tehát

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = -a, \\ 0 & \text{ha } i = b, \\ (1-p) \cdot p_{i-1} + p \cdot p_{i+1} & \text{ha } i \in \{-a + 1, \dots, 0, \dots, b - 1\}. \end{cases}$$

Tekintsük először a szimmetrikus esetet, azaz a  $p = \frac{1}{2}$  esetet, amikor is

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = -a, \\ 0 & \text{ha } i = b, \\ \frac{1}{2}p_{i-1} + \frac{1}{2}p_{i+1} & \text{ha } i \in \{-a+1, \dots, 0, \dots, b-1\}. \end{cases}$$

Ez egy homogén másodrendű differenciaegyenlet:

$$p_{i+1} = 2p_i - p_{i-1}, \quad i \in \{-a+1, \dots, 0, \dots, b-1\},$$

a  $p_{-a} = 1$  és  $p_b = 0$  peremfeltételekkel. Ezen differenciaegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad \text{azaz} \quad (\lambda - 1)^2 = 0,$$

melynek két egybeeső megoldása  $\lambda_{1,2} = 1$ . Így a szóbanforgó differenciaegyenlet általános megoldása:

$$p_i = c \cdot 1^i + d \cdot i \cdot 1^i = c + d \cdot i, \quad i \in \{-a, \dots, 0, \dots, b\},$$

ahol  $c, d \in \mathbb{Z}$  tetszőleges konstansok. A két peremfeltétel alapján

$$1 = p_{-a} = c + d(-a) \quad \text{és} \quad 0 = p_b = c + db,$$

és így  $c = -db$ , amiből adódik, hogy  $d = -1/(a+b)$  és ezért  $c = a/(a+b)$ . Így

$$p_i = \frac{b}{a+b} - \frac{1}{a+b} \cdot i, \quad i \in \{-a, \dots, 0, \dots, b\}.$$

Mivel egyetlen nemnegatív megoldás adódott, ez egyben a minimális nemnegatív megoldás is. Speciálisan, az  $i = 0$  választással adódik, hogy

$$p_0 = \frac{b}{a+b}.$$

A szerepek felcserélésével (mivel most a szimmetrikus esetet tárgyaljuk), kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy az ellenfelünk, akinek  $b$  kezdőtőkéje van, minden pénzét elveszíti (azaz mi nyerünk):

$$\frac{a}{b+a}.$$

Mivel  $\frac{b}{a+b} + \frac{a}{b+a} = 1$ , kapjuk, hogy 0 annak a valószínűsége, hogy a játék nem ér véget véges sok lépésben. Ez nem meglepő, mert az  $\{-a+1, \dots, 0, \dots, b-1\}$  állapotok egy véges nyílt osztályt alkotnak, melyet a véletlen bolyongás véges sok lépésben 1 valószínűséggel elhagy (lásd, 2.4.10. Állítás).

Tekintsük most a nem szimmetrikus esetet, azaz a  $p \neq \frac{1}{2}$  esetet, amikor is

$$p_i = (1-p) \cdot p_{i-1} + p \cdot p_{i+1}, \quad i \in \{-a+1, \dots, 0, \dots, b-1\},$$

mely egy homogén másodrendű differenciaegyenlet a  $p_{-a} = 1$  és  $p_b = 0$  peremfeltételekkel. Ezen differenciaegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda = (1-p) + p\lambda^2, \quad \text{azaz} \quad p\lambda^2 - \lambda + 1 - p = 0,$$

melynek két megoldása

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p + 4p^2}}{2p} = \frac{1 \pm \sqrt{(2p-1)^2}}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p},$$

azaz  $\lambda_1 = 1$  és  $\lambda_2 = \frac{1-p}{p}$ . Mivel  $p \neq \frac{1}{2}$ , kapjuk, hogy  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Így a szóbanforgó differenciaegyenlet általános megoldása:

$$(2.6.3) \quad p_i = c \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^i + d \cdot 1^i = c \left(\frac{1-p}{p}\right)^i + d, \quad i \in \{-a, \dots, 0, \dots, b\},$$

ahol  $c, d \in \mathbb{Z}$  tetszőleges konstansok. A két peremfeltétel alapján

$$1 = p_{-a} = c \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-a} + d \quad \text{és} \quad 0 = p_b = c \left(\frac{1-p}{p}\right)^b + d.$$

Az első egyenletből kivonva a második egyenletet, kapjuk, hogy

$$1 = c \left( \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-a} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^b \right),$$

melyből

$$c = \frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{-a} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^b} = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}},$$

és így

$$d = -\left(\frac{1-p}{p}\right)^b c = -\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}.$$

Ezért (2.6.3) alapján

$$p_i = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}} \left(\frac{1-p}{p}\right)^i - \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}, \quad i \in \{-a, \dots, 0, \dots, b\}.$$

Speciálisan, az  $i = 0$  választással adódik, hogy

$$p_0 = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^a - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}} = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^b}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^a - \left(\frac{1-p}{p}\right)^b} = \frac{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{-b}}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^a - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{-b}}.$$

Természetes kérdés az is, hogy várhatóan meddig fog tartani a játék, azaz a  $h_0^{\{-a,b\}}$  várható elnyelési idő meghatározása. Megmutatjuk, hogy

$$E(\text{játék hossza}) = h_0^{\{-a,b\}} = \begin{cases} ab, & \text{ha } p = \frac{1}{2}, \\ \frac{a}{1-2p} - \frac{a+b}{1-2p} \frac{1-r^a}{1-r^{a+b}}, & \text{ha } p \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Alkalmazzuk a 2.6.2. Tétel második részét az  $A := \{-a, b\}$  választással és vezessük be a

$$h_i := h_i^A, \quad i \in \{-a, -a+1, \dots, 0, \dots, b-1, b\}$$

jelöléseket. Célunk  $h_0$  meghatározása. A 2.6.2. Tétel alapján  $h_i, i \in \{-a, -a+1, \dots, 0, \dots, b-1, b\}$ , az alábbi egyenletrendszer minimális nemnegatív megoldása:

$$h_{-a} = 0,$$

$$h_b = 0,$$

$$h_i = 1 + \sum_{j \in \{-a, \dots, b\} \setminus \{-a, b\}} p_{i,j} h_j = 1 + (1-p)h_{i-1} + ph_{i+1}, \quad \text{ha } i \in \{-a+1, \dots, 0, \dots, b-1\}.$$

Ez egy inhomogén másodrendű differenciaegyenlet, melynek általános megoldása előáll a kapcsolatos homogén differenciaegyenlet általános megoldása és az inhomogén differenciaegyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként. Az alábbiakban csak a szimmetrikus esettel foglalkozunk, azaz a  $p = \frac{1}{2}$  esetet tekintjük, amikor is

$$\begin{aligned} h_{-a} &= 0, \\ h_b &= 0, \\ h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1} &= -2, \quad \text{ha } i \in \{-a+1, \dots, 0, \dots, b-1\}. \end{aligned}$$

A kapcsolatos homogén másodrendű differenciaegyenlet:  $h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1} = 0$ , melynek általános megoldása a korábbiak alapján  $h_i = c + d \cdot i$  alakú. Keressük az inhomogén differenciaegyenlet egy partikuláris megoldását  $e \cdot i^2$  alakban:

$$e(i+1)^2 - 2ei^2 + e(i-1)^2 = -2, \quad i \in \{-a, \dots, 0, \dots, b\},$$

mely nem más, mint az  $e = -1$  egyenlet. Így a szóbanforgó inhomogén másodrendű differenciaegyenlet általános megoldása

$$c + d \cdot i - i^2, \quad i \in \{-a, \dots, 0, \dots, b\}.$$

A peremfeltételek alapján

$$0 = h_{-a} = c + d(-a) - (-a)^2 = c - da - a^2,$$

és

$$0 = h_b = c + db - b^2.$$

Az első egyenletből kivonva a másodikat kapjuk, hogy

$$0 = d(b+a) - b^2 + a^2,$$

azaz

$$d = \frac{b^2 - a^2}{b + a} = b - a,$$

melyből következik, hogy

$$c = da + a^2 = a(d + a) = ab.$$

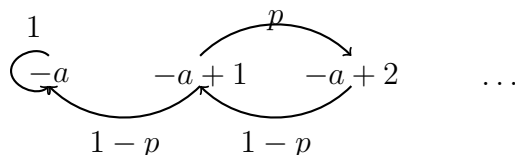
Tehát

$$h_i = ab + (b-a)i - i^2, \quad i \in \{-a, \dots, 0, \dots, b\}.$$

Speciálisan, az  $i = 0$  választással adódik, hogy  $h_0 = ab$ . □

**2.6.5. Példa. (A játékos csődje probléma végtelen állapottéren)** Tekintsük a 2.6.4. Példában szereplő játékos csődje problémát abban az esetben, ha nekünk  $a$  forintunk van, az ellenfelünknek viszont végtelen sok forintja van, ahol  $a$  egy pozitív egész szám. Mennyi a csőd valószínűsége?

A probléma modellezhető az alábbi Markov-lánccal



ami egy véletlen bolyongás egyoldali elnyelő fallal.

A  $-a$  elnyelő állapot egyedül alkot egy pozitív rekurrens osztályt,  $\{-a+1, -a+2, \dots\}$  a másik osztály, mely nyílt, ugyanis el lehet hagyni, és így a 2.4.9. Állítás (i) része alapján tranziens.

A feladat a  $p_0^{\{-a\}}$  elnyelési valószínűség meghatározása. Két megoldást is mutatunk.

Az első, lehetséges megoldás, hogy a véges állapottér esetén meghatározott csődvalószínűséget vizsgáljuk, amint az ellenfelünk vagyona  $b \in \mathbb{N}$  végtelenbe tart. Ezen módszer helyessége a következőképpen indokolható. Mivel

$$\begin{aligned} & \{0 \text{ kezdőtőkével csődbe megyünk}\} \\ &= \bigcup_{b=1}^{\infty} \{0 \text{ kezdőtőkével csődbe megyünk, és ellenfelünknek összesen } b \text{ vagyona van}\}, \end{aligned}$$

és  $b < \tilde{b}$ ,  $b, \tilde{b} \in \mathbb{N}$ , esetén

$$\begin{aligned} & \{0 \text{ kezdőtőkével csődbe megyünk, és ellenfelünknek összesen } b \text{ vagyona van}\} \\ & \subset \{0 \text{ kezdőtőkével csődbe megyünk, és ellenfelünknek összesen } \tilde{b} \text{ vagyona van}\}, \end{aligned}$$

a valószínűség folytonossága és a 2.6.4. Példa alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & p_0^{\{-a\}} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} P(\{0 \text{ kezdőtőkével csődbe megyünk, és ellenfelünknek összesen } b \text{ vagyona van}\}) \\ &= \begin{cases} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{a+b} & \text{ha } p = \frac{1}{2}, \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{r^a - r^{a+b}}{1 - r^{a+b}} & \text{ha } p \neq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ha  $p = \frac{1}{2}$ , akkor a csőd valószínűsége abban az esetben, amikor ellenfelünk vagyona  $b \in \mathbb{N}$ :

$$P(\text{csőd}) = \frac{b}{a+b},$$

és így

$$\frac{b}{a+b} = 1 - \frac{a}{a+b} \uparrow 1 \quad \text{ha } b \uparrow \infty.$$

Ha pedig  $p \neq \frac{1}{2}$ , akkor a csőd valószínűsége abban az esetben, amikor ellenfelünk vagyona  $b \in \mathbb{N}$ :

$$P(\text{csőd}) = \frac{r^a - r^{a+b}}{1 - r^{a+b}},$$

ahol  $r = \frac{1-p}{p}$ . Így, ha  $p < \frac{1}{2}$ , akkor  $r > 1$ , tehát

$$\frac{r^a - r^{a+b}}{1 - r^{a+b}} = 1 - \frac{r^a - 1}{r^{a+b} - 1} \uparrow 1 \quad \text{ha } b \uparrow \infty.$$

Továbbá, ha  $p > \frac{1}{2}$ , akkor  $r < 1$ , tehát

$$\frac{r^a - r^{a+b}}{1 - r^{a+b}} = 1 - \frac{1 - r^a}{1 - r^{a+b}} \rightarrow 1 - (1 - r^a) = r^a = \left(\frac{1-p}{p}\right)^a \quad \text{ha } b \uparrow \infty.$$

Mivel a  $\{-a\}$  elnyelő állapotot kivéve minden állapot tranziens, így a  $p > \frac{1}{2}$  esetben  $r^a$  valószínűséggel csődbe megyünk és  $1 - r^a$  valószínűséggel pedig a vagyonunk korlátlanul felgyarapszik (végtelen lesz).

Az alábbiakban a játék várható hosszát határozzuk meg. Ha  $p = \frac{1}{2}$  és ellenfelünknek  $b \in \mathbb{N}$  vagyona van, akkor a játék várható hossza  $ab$ , mely  $\infty$ -hez tart, ha  $b \rightarrow \infty$  (persze ezen gondolatmenet helyességét is indokolni kellene). Ha  $p \neq \frac{1}{2}$  és ellenfelünknek  $b \in \mathbb{N}$  vagyona van, akkor a játék várható hossza:

$$\frac{a}{1-2p} - \frac{a+b}{1-2p} \frac{1-r^a}{1-r^{a+b}},$$

melynek  $b \rightarrow \infty$  esetén a határértéke

$$\begin{cases} \frac{a}{1-2p} - \frac{1-r^a}{1-2p} \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{1-r^{a+b}} + \frac{b}{1-r^{a+b}} \right) = \frac{a}{1-2p} & \text{ha } p < \frac{1}{2}, \\ \frac{a}{1-2p} - \frac{1-r^a}{1-2p} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{a+b}{1-r^{a+b}} = \infty & \text{ha } p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A csődvalószínűségeket meghatározhatjuk az elnyelési valószínűségekről szóló 2.6.2. Tétel felhasználásával, direktben is. A  $p_i^{\{-a\}}$  elnyelési valószínűségek a minimális, nemnegatív megoldásai az alábbi egyenletrendszernek:

$$p_i := p_i^{\{-a\}} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = -a, \\ p p_{i+1} + (1-p)p_{i-1}, & \text{ha } i \in \{-a+1, -a+2, \dots\}. \end{cases}$$

Ha  $p = \frac{1}{2}$ , akkor

$$p_{i+1} = 2p_i - p_{i-1}, \quad i \in \{-a+1, -a+2, \dots\}.$$

Ezen differenciaegyenlet karakterisztikus polinomja  $\lambda^2 = 2\lambda - 1$ , azaz  $(\lambda - 1)^2 = 0$ , melynek két egybeeső gyöke 1. Így az általános megoldás előáll

$$p_i = c_0 i + c_1, \quad i \in \{-a, -a+1, -a+2, \dots\},$$

alakban, ahol  $c_0, c_1 \in \mathbb{Z}$  konstansok. Mivel  $p_i \in [0, 1]$ , kapjuk, hogy  $c_0 = 0$ . Továbbá  $p_{-a} = 1$ , így  $c_1 = 1$ , tehát  $p_i = 1$  minden  $i \in \{-a, -a+1, -a+2, \dots\}$  esetén.

Ha  $p \neq \frac{1}{2}$ , akkor a differenciaegyenlet karakterisztikus polinomja  $p\lambda^2 - \lambda + 1 - p = 0$ , melynek gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p},$$

azaz 1 és  $(1-p)/p$ . Így az általános megoldás előáll

$$p_i = c_0 \left( \frac{1-p}{p} \right)^i + c_1, \quad i \in \{-a, -a+1, -a+2, \dots\},$$

alakban, ahol  $c_0, c_1 \in \mathbb{Z}$  konstansok.

Ha  $p < \frac{1}{2}$ , akkor  $\frac{1-p}{p} > 1$  és így, felhasználva, hogy  $p_i \in [0, 1]$ , kapjuk, hogy  $c_0 = 0$ . Továbbá  $p_{-a} = 1$ , így  $c_1 = 1$ , tehát  $p_i = 1$  minden  $i \in \{-a, -a+1, -a+2, \dots\}$  esetén.

Ha  $p > \frac{1}{2}$ , akkor  $\frac{1-p}{p} < 1$ . Mivel  $p_{-a} = 1$ , kapjuk, hogy

$$1 = p_{-a} = c_0 \left( \frac{1-p}{p} \right)^{-a} + c_1,$$

amiből

$$c_0 = (1 - c_1) \left( \frac{1-p}{p} \right)^a.$$

Ezt visszahelyettesítve adódik, hogy

$$\begin{aligned} p_i &= (1 - c_1) \left( \frac{1-p}{p} \right)^a \left( \frac{1-p}{p} \right)^i + c_1 \\ &= \left( \frac{1-p}{p} \right)^{a+i} + c_1 \left( 1 - \left( \frac{1-p}{p} \right)^{a+i} \right), \quad i \in \{-a, -a+1, -a+2, \dots\}, \end{aligned}$$

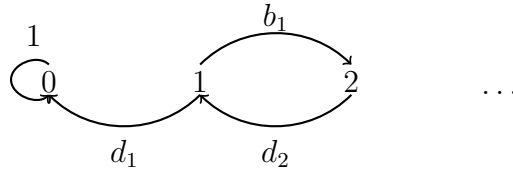
ami pedig pontosan akkor lesz minimális, ha  $c_1 = 0$ , tehát

$$p_i = \left( \frac{1-p}{p} \right)^{a+i}, \quad i \in \{-a, -a+1, -a+2, \dots\}.$$

Speciálisan,  $p_0 = \left( \frac{1-p}{p} \right)^a$ , mely megegyezik azzal, amit korábban kaptunk.  $\square$

**2.6.6. Példa. (Diszkrét idejű születési-halálozási folyamatok)** A véletlen bolyongásokat általánosíthatjuk úgy, hogy az átmenetvalószínűségek függjenek az adott állapottól. Ekkor továbbra is modellezhetünk Markov-láncokkal.

Legyenek a  $b_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , és  $d_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , valószínűségek adottak, melyekre igaz, hogy tetszőleges  $i \in \mathbb{N}$  esetén  $0 < b_i = 1 - d_i < 1$ . Ekkor a  $\{0, 1, 2, \dots\}$  állapottérrel és az alábbi átmenetgráffal rendelkező Markov-láncot *diszkrét idejű születési-halálozási folyamatnak* nevezzük:



Ezzel a folyamattal modellezhetjük például egy populáció méretét, ahol

$$b_i = P(\text{születik egy egyed mielőtt meghalna egy másik} \mid \text{a populáció mérete } i),$$

ahol  $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Felhívjuk a figyelmet, hogy ebben a láncban a lépések közötti idők nem egyenlők. A későbbiekben kitérünk arra, hogy hogyan lehet ekvidisztáns lépésközű folyamattal modellezni.

Természetes kérdés, hogy mennyi a kihalás valószínűsége, ha  $i$  egyedből indulunk, azaz  $p_i^{\{0\}} = ?$

A 2.6.2. Tétel alapján  $p_i^{\{0\}}$  elnyelési valószínűségek a minimális, nemnegatív megoldásai az alábbi egyenletrendszernek.

$$p_i := p_i^{\{-a\}} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = 0, \\ b_i p_{i+1} + d_i p_{i-1}, & \text{ha } i \in \{1, 2, \dots\}. \end{cases}$$

Legyen  $u_i := p_{i-1} - p_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots\}$ . Ekkor

$$\begin{aligned} b_i u_{i+1} &= b_i (p_i - p_{i+1}) = b_i p_i - b_i p_{i+1} = b_i p_i - (p_i - d_i p_{i-1}) = (b_i - 1) p_i + d_i p_{i-1} \\ &= -d_i p_i + d_i p_{i-1} = d_i u_i, \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ezért

$$u_{i+1} = \frac{d_i}{b_i} u_i = \frac{d_i d_{i-1} \dots d_1}{b_i b_{i-1} \dots b_1} u_1, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Mivel  $u_1 + \dots + u_i = p_0 - p_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , és  $p_0 = 1$ , így

$$p_i = p_0 - (u_1 + \dots + u_i) = 1 - A(\gamma_0 + \dots + \gamma_{i-1}), \quad i \in \mathbb{N},$$

ahol  $A := u_1$  és  $\gamma_i := \frac{d_i d_{i-1} \dots d_1}{b_i b_{i-1} \dots b_1}$ , ha  $i = 1, 2, \dots$ , és  $\gamma_0 := 1$ .

Ha  $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = \infty$ , akkor, mivel  $p_i \in [0, 1]$ , kapjuk, hogy  $A = 0$ , tehát  $p_i = 1$  minden  $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$  esetén.

Ha viszont  $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i < \infty$ , akkor, ellenőrizzük, hogy a minimális nemnegatív megoldást akkor kapjuk, ha

$$A = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i}.$$

Valóban,  $p_i \geq 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , akkor és csak akkor teljesül, ha

$$A \leq \frac{1}{\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j}, \quad i \in \mathbb{N},$$

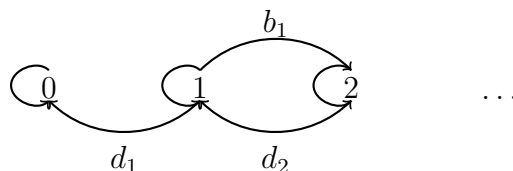
melyből következik, hogy

$$A \leq \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i},$$

és  $p_i$  annál kisebb, minél nagyobb  $A$ . Tehát a kihalás valószínűsége ebben az esetben

$$p_i = 1 - \frac{\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j} = \frac{\sum_{j=i}^{\infty} \gamma_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j}.$$

Abban az esetben ha ekvidisztáns lépésközü folyamattal szeretnénk modellezni, akkor tekintsük az alábbi általános diszkrét idejű születési-halálozási-folyamatot:



Tehát ebben a modellben  $X_n$  jelöli a populáció méretét az  $n$ -edik időegységben, ahol az időegység kellően kicsi, ahhoz, hogy ezen rövid idő alatt legfeljebb csak egy esemény következhesen be.  $\square$

## 2.7. Invariáns eloszlás

Ebben a fejezetben ismét a Markov-láncok aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk.

**2.7.1. Definíció. (Invariáns eloszlás)** Legyen  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  egy Markov-lánc. Ekkor egy  $\pi = (\pi_i)_{i \in I}$  valószínűségeloszlást az  $\mathbb{X}$  Markov-lánc invariáns (stacionárius) eloszlásának nevezzük, ha  $X_0 \sim \pi$  esetén  $X_1 \sim \pi$ .

Felhívjuk a figyelmet, hogy az invariáns eloszlás nem függ a Markov-lánc kezdeti eloszlásától, tehát ez is a Markov-lánc egy olyan jellemzője, melyet a  $\mathbb{P}$  átmenetmátrix határoz meg. Ilyen módon tehát beszélhetünk egy sztochasztikus mátrix invariáns eloszlásairól.

**2.7.2. Tétel.** Legyen  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  egy Markov-lánc  $\mathbb{P}$  átmenetmátrixszal,  $\pi = (\pi_i)_{i \in I}$  pedig egy valószínűségeloszlás  $I$ -n. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

- (i)  $\pi$  invariáns eloszlás.
- (ii)  $X_0 \sim \pi$  esetén  $X_n \sim \pi$  tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  esetén. (Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a  $\pi$  eloszlásból indítva a láncot az egydimenziós eloszlások eltolásinvariánsak.)
- (iii) A  $\pi$  valószínűségeloszlás (mint sorvektor) a  $\mathbb{P}$  átmenetmátrix  $\lambda = 1$  sajátértékéhez tartozó baloldali sajátvektora, azaz

$$\pi = \pi \mathbb{P}.$$

**Bizonyítás.** (i)  $\implies$  (iii): Ha  $X_0 \sim \pi$ , akkor a 2.2.2. Következmény szerint  $X_1 \sim \pi \mathbb{P}$ . Mivel  $\pi$  invariáns eloszlás, kapjuk, hogy  $X_1 \sim \pi$ . Így  $\pi$  és  $\pi \mathbb{P}$  is  $X_1$  eloszlása, amiből következik, hogy  $\pi = \pi \mathbb{P}$ , azaz teljesül (iii), hiszen egy véletlen változó eloszlása egyértelműen meghatározott.

(iii)  $\implies$  (ii): Ha  $\pi$  a  $\mathbb{P}$  mátrix 1 sajátértékéhez tartozó bal oldali sajátvektora és  $X_0 \sim \pi$ , akkor a 2.2.2. Következmény alapján tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  esetén

$$X_n \sim \pi \mathbb{P}^n = (\pi \mathbb{P}) \mathbb{P}^{n-1} = \pi \mathbb{P}^{n-1} = \dots = \pi \mathbb{P} = \pi.$$

(ii)  $\implies$  (i): Az  $n = 1$  választással adódik. □

Az invariáns eloszlásra gondolhatunk úgy, mint egyfajta egyensúlyi helyzetre, hiszen a 2.7.2. Tétel (ii) pontja miatt, ha ebből az eloszlásból indítjuk a Markov-láncot, akkor abban is marad. A (iii) pont következményeként pedig adódik egy módszer az invariáns eloszlások kiszámítására.

A 2.7.2. Tétel (i) és (iii) részeinek ekvivalenciája alapján megfogalmazhatjuk az alábbi következményt.

**2.7.3. Következmény.** Egy  $\pi = (\pi_i)_{i \in I}$  vektor pontosan akkor invariáns eloszlás, ha

- $\pi_i \geq 0$ ,  $i \in I$ ,
- $\sum_{i \in I} \pi_i = 1$ ,
- $\pi = \pi \mathbb{P}$ , azaz  $\pi_j = \sum_{i \in I} p_{i,j} \pi_i$  minden  $j \in I$  esetén.

**2.7.4. Definíció.** Komplex valószínűségi változók  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sorozatát **erősen stacionáriusnak** nevezzük, ha a véges dimenziós eloszlásai eltolásinvariánsak, azaz ha tetszőleges  $k, m \in \mathbb{N}$  és  $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{Z}$  esetén  $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k})$  és  $(\xi_{t_1+m}, \xi_{t_2+m}, \dots, \xi_{t_k+m})$  eloszlása megegyezik.

Az erősen stacionárius Markov-láncokat egyszerűen stacionáriusnak szokás nevezni. Megmutatjuk meg, hogy a Markov-láncok erős stacionaritása ekvivalens azzal, hogy az egydimenziós eloszlások nem függenek az időponttól (eltolásinvariánsak).

**2.7.5. Állítás.** Egy  $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  (homogén) Markov-lánc akkor és csak akkor erősen stacionárius, ha tetszőleges  $i \in I$  és  $n \geq 1$  esetén  $P(X_n = i) = P(X_0 = i)$ , azaz, ha  $X_n \sim X_0$  tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  esetén.

**Bizonyítás.** A 2.7.4. Definíció szerint egy erősen stacionárius sorozat véges dimenziós eloszlásai eltolásinvariánsak, így speciálisan  $X_n$  és  $X_0$  eloszlása is megegyezik.

Megfordítva, egy (homogén) Markov-lánc esetén, a 2.2.5. Következmény alapján, tetszőleges  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq n_0 < n_1 < \dots < n_k$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}_+$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , és  $i_0, \dots, i_k \in I$  esetén

$$\begin{aligned} P(X_{n_0} = i_0, \dots, X_{n_k} = i_k) &= P(X_{n_0} = i_0) p_{i_0, i_1}^{(n_1 - n_0)} p_{i_1, i_2}^{(n_2 - n_1)} \dots p_{i_{k-1}, i_k}^{(n_k - n_{k-1})} \\ &= P(X_{n_0+m} = i_0) p_{i_0, i_1}^{(n_1+m-(n_0+m))} p_{i_1, i_2}^{(n_2+m-(n_1+m))} \dots p_{i_{k-1}, i_k}^{(n_k+m-(n_{k-1}+m))} \\ &= P(X_{n_0+m} = i_0, \dots, X_{n_k+m} = i_k) \end{aligned}$$

ahol a második lépésben azt használtuk, hogy a feltétel miatt  $P(X_{n_0} = i_0) = P(X_{n_0+m} = i_0)$ . Így  $(X_{n_0}, \dots, X_{n_k})$  és  $(X_{n_0+m}, \dots, X_{n_k+m})$  eloszlásai megegyeznek.  $\square$

A 2.7.5. Állítás és a 2.7.2. Tétel (i) és (ii) részeinek ekvivalenciája alapján, egy (homogén) Markov-lánc akkor és csak akkor erősen stacionárius, ha a lánc kezdeti eloszlása a lánc egy stacionárius eloszlása.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy a tranziens és null-rekurrens állapotok nem számítanak az invariáns eloszlás szempontjából.

**2.7.6. Állítás.** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$  egy Markov-lánc. Ha  $i \in I$  tranziens vagy null-rekurrens, akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i) = 0$ .

**Bizonyítás.** Legyen  $i \in I$  egy tranziens vagy null-rekurrens állapot. A típusok karakterizációs tétele (2.4.5. Tétel) szerint  $p_{j,i}^{(n)} \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow \infty$  tetszőleges  $j \in I$  esetén. Továbbá, a 2.2.2. Következmény szerint  $X_n \sim \alpha \mathbb{P}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , és ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in I} \alpha_j p_{j,i}^{(n)} = \sum_{j \in I} (\alpha_j \lim_{n \rightarrow \infty} p_{j,i}^{(n)}) = \sum_{j \in I} (\alpha_j \cdot 0) = 0,$$

ahol a második lépésben a dominált konvergencia tételt használtuk az  $(I, 2^I, \alpha)$  valószínűségi mezőn ( $\alpha$  valóban valószínűségi mérték  $I$ -n, mert  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i \in I$ , és  $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$ ). Megjegyezzük, hogy ha  $|I| < \infty$ , akkor nincs szükség az előzőekben a dominált konvergencia tétel használatára.  $\square$

**2.7.7. Következmény.** Ha egy Markov-láncnak létezik  $\pi$  stacionárius eloszlása és  $i \in I$  tranziens vagy null-rekurrens állapot, akkor  $\pi_i = 0$ . Azaz, ha egy Markov-láncnak létezik stacionárius eloszlása, akkor a tranziens és null-rekurrens állapotok ezen eloszlás szerinti valószínűsége 0.

**Bizonyítás.** Legyen  $\pi$  a Markov-lánc egy stacionárius eloszlása és  $i \in I$  egy tranziens vagy null-rekurrens állapot. Ekkor a 2.7.2. Tétel szerint, ha  $X_0 \sim \pi$ , akkor  $X_n \sim \pi$  tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  esetén, azaz  $\pi_j = P(X_n = j)$ ,  $j \in I$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Így, ha  $X_0 \sim \pi$ , akkor, a 2.7.6. Állítást is használva, kapjuk, hogy

$$\pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i) = 0.$$

$\square$

A 2.7.7. Következmény alapján, ha egy Markov-láncnak létezik stacionárius eloszlása, akkor létezik pozitív rekurrens osztály az állapotterében.

A pozitív rekurrens eset részletesebb tárgylásához szükség van egy új fogalomra, ami az eloszlás általánosítása.

**2.7.8. Definíció. (Invariáns mérték)** Egy  $\pi = (\pi_i)_{i \in I}$  vektort mértéknek nevezzük az  $I$  halmazon, ha komponensei nemnegatív valós számok. Állapotok egy  $J \subset I$  halmazának mértéke

$$\pi(J) := \sum_{i \in J} \pi_i.$$

A mérték véges, ha  $\pi(I) < \infty$ . A  $\pi$  mérték az  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$  lánc invariáns mértéke, ha  $\pi = 0$ , vagy a  $\mathbb{P}$  mátrixnak a  $\lambda = 1$  sajátértékhez tartozó baloldali sajátvektora, ami azzal ekvivalens, hogy

$$\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{i,j}, \quad j \in I.$$

**2.7.9. Tétel. (A rekurrens állapotok jellemzése)** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\delta_k, \mathbb{P})$  egy irreducibilis és rekurrens Markov-lánc, ahol  $k \in I$  egy tetszőleges rögzített (rekurrens) állapot. Legyen  $\gamma^{(k)} := (\gamma_i^{(k)})_{i \in I}$ , ahol

$$\gamma_i^{(k)} := \mathbb{E} \left( \sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbb{1}_{\{X_n=i\}} \right) \in [0, \infty], \quad i \in I,$$

a  $k$  állapotba való első visszatérésig (azt nem beleértve) az  $i$  állapotban tett látogatások számának várható értéke. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

- (i)  $\gamma^{(k)}$  a lánc egy invariáns mértéke, továbbá  $\gamma_k^{(k)} = 1$  és  $\gamma^{(k)}(I) = \mu_k (= \mathbb{E}(T_k))$ .
- (ii) A lánc invariáns mértékei pontosan a  $c\gamma^{(k)} = (c\gamma_i^{(k)})_{i \in I}$ ,  $c \geq 0$ , alakban előálló mértékek.
- (iii) Ha a lánc pozitív rekurrens, akkor minden invariáns mérték véges, míg ha a lánc null-rekurrens, akkor  $\pi = 0$  az egyetlen véges invariáns mérték.

**Bizonyítás.** (i): Felhasználva a láncszabályt és azt, hogy  $\{n \leq T_k\} = \Omega \setminus \{T_k \leq n-1\} \in \sigma(X_1, \dots, X_{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = j, X_{n-1} = i, n \leq T_k) &= \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i, n \leq T_k) \mathbb{P}(X_{n-1} = i, n \leq T_k) \\ (2.7.1) \quad &= \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) \mathbb{P}(X_{n-1} = i, n \leq T_k) \\ &= p_{i,j} \mathbb{P}(X_{n-1} = i, n \leq T_k) \end{aligned}$$

tetszőleges  $i, j \in I$  és  $n \in \mathbb{N}$  esetén. Mivel  $k$  rekurrens, a definíció folytán  $T_k < \infty$  P-m.m. és  $X_{T_k} = k$  P-m.m. Mivel a kezdeti eloszlás  $\delta_k$ , kapjuk, hogy  $X_0 = k$  P-m.m.

Ha  $j = k$ , akkor a 0. időpontban  $k$ -t vesz fel a Markov-lánc, az  $1, \dots, (T_k - 1)$ . időpontokban nem  $k$ -t, a  $(T_k)$ . időpontban pedig  $k$ -t, és így

$$\sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbb{1}_{\{X_n=k\}} = 1 \quad \text{P-m.m.,}$$

melyből adódik, hogy  $\gamma_k^{(k)} = 1$ . Mivel  $\sum_{n=1}^{T_k} \mathbb{1}_{\{X_n=k\}} = 1$  P-m.m. is teljesül, kapjuk, hogy

$$\gamma_k^{(k)} = 1 = \mathbb{E} \left( \sum_{n=1}^{T_k} \mathbb{1}_{\{X_n=k\}} = 1 \right)$$

is fennáll.

Ha  $j \neq k$ , akkor a 0. időpontban  $k$ -t vesz fel a Markov-lánc, az  $1, \dots, (T_k - 1)$ . időpontokban nem  $k$ -t, a  $(T_k)$ . időpontban pedig  $k$ -t, mely nem  $j$ , és így

$$\sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbb{1}_{\{X_n=k\}} = \sum_{n=0}^{T_k} \mathbb{1}_{\{X_n=k\}} \quad \text{P-m.m.}$$

Így, felhasználva (2.7.1)-et és azt, hogy  $P$   $\sigma$ -additív, mind a  $j = k$ , mind a  $j \neq k$  esetben, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \gamma_j^{(k)} &= E \left( \sum_{n=1}^{T_k} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}} \right) = E \left( \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}} \mathbb{1}_{\{n \leq T_k\}} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} E \left( \mathbb{1}_{\{X_n=j\} \cap \{n \leq T_k\}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = j, n \leq T_k) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i \in I} P(X_n = j, X_{n-1} = i, n \leq T_k) = \sum_{i \in I} \left( p_{i,j} \sum_{n=1}^{\infty} P(X_{n-1} = i, n \leq T_k) \right) \\
 &= \sum_{i \in I} \left( p_{i,j} E \left( \sum_{n=1}^{T_k} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=i\}} \right) \right) = \sum_{i \in I} p_{i,j} E \left( \sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbb{1}_{\{X_n=i\}} \right) \\
 &= \sum_{i \in I} p_{i,j} \gamma_i^{(k)} = \sum_{i \in I} \gamma_i^{(k)} p_{i,j}, \quad j \in I.
 \end{aligned}$$

Ezért  $\gamma^{(k)}$  egy invariáns mérték. Azt már beláttuk, hogy  $\gamma_k^{(k)} = 1$ .

Továbbá,

$$\begin{aligned}
 \gamma^{(k)}(I) &= \sum_{i \in I} \gamma_i^{(k)} = \sum_{i \in I} E \left( \sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbb{1}_{\{X_n=i\}} \right) = E \left( \sum_{n=0}^{T_k-1} \sum_{i \in I} \mathbb{1}_{\{X_n=i\}} \right) \\
 &= E \left( \sum_{n=0}^{T_k-1} 1 \right) = E(T_k) = \mu_k.
 \end{aligned}$$

A (ii) és (iii) részeket nem bizonyítjuk.  $\square$

**2.7.10. Példa. (Véletlen bolyongás)** Az egydimenziós szimmetrikus véletlen bolyongás esetén belátható, hogy az invariáns mértékek  $\pi = (c)_i \in I$  alakúak,  $c \geq 0$ , azaz a nemnegatív, konstans vektorok. Mivel az állapottér végtelen, így nem létezik invariáns eloszlás.  $\square$

Természetes kérdés, hogy mikor létezik az invariáns eloszlás, illetve ha létezik, akkor mely esetekben egyértelmű. Erről szólnak a következő eredmények.

**2.7.11. Tétel.** *Egy irreducibilis Markov-láncnak akkor és csak akkor létezik  $\pi$  invariáns eloszlása, ha a lánc pozitív rekurrens. Ekkor az invariáns eloszlás egyértelmű, és  $\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$ ,  $i \in I$ , ahol  $\mu_i = E(T_i)$  az  $i$  állapotba való első visszatérési idő,  $T_i$ , várható értéke.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy a Markov-lánc irreducibilis és létezik invariáns eloszlása. Ekkor a lánc egyetlen osztálya nem lehet tranziens vagy null-rekurrens, mert a 2.7.7. Következmény szerint ekkor  $\pi_i = 0$ ,  $i \in I$ , teljesülne, mely viszont ellentmondás, mert ekkor  $\sum_{i \in I} \pi_i = 0$  állna fenn, noha  $\sum_{i \in I} \pi_i = 1$ . A típusok karakterizációs tételét (2.4.5. Tétel) is felhasználva, kapjuk, hogy az egyetlen osztály pozitív rekurrens.

Tegyük fel, hogy az egyetlen osztály pozitív rekurrens és legyen  $k \in I$  egy tetszőleges (pozitív rekurrens) állapot. Ekkor a 2.7.9. Tétel alapján, ha  $\delta_k$  a Markov-lánc kezdeti eloszlása, akkor az invariáns mértékek pontosan  $c\gamma^{(k)}$ ,  $c \geq 0$ , alakban állnak elő. Mivel  $(c\gamma^{(k)})(I) = c\gamma^{(k)}(I) = c\mu_k$  (ahol a második egyenlőségnél használtuk újra a 2.7.9. Tételt), kapjuk, hogy egy  $c\gamma^{(k)}$  invariáns mérték akkor és csak akkor invariáns eloszlás, ha  $1 = c\mu_k$ ,

azaz  $c = \frac{1}{\mu_k}$ , azaz akkor és csak akkor, ha  $\frac{1}{\mu_k}\gamma^{(k)}$  alakú. Mivel az egyetlen osztály pozitív rekurrens, kapjuk, hogy  $\mu_k > 0$ , és így  $\frac{1}{\mu_k}\gamma^{(k)}$  valóban valószínűségeloszlás. Ezért a Markov-láncnak egyetlen invariáns eloszlása létezik  $\frac{1}{\mu_k}\gamma^{(k)}$ , ahol a fentiekből az is adódik, hogy

$$\frac{1}{\mu_k}\gamma^{(k)} = \frac{1}{\mu_{\tilde{k}}}\gamma^{(\tilde{k})}, \quad k, \tilde{k} \in I,$$

azaz láthatjuk, hogy az invariáns eloszlás valóban nem függ a kezdeti eloszlástól. Felhasználva azt is, hogy a 2.7.9. Tétel alapján  $\gamma_k^{(k)} = 1$ , kapjuk, hogy az egyetlen invariáns eloszlás  $(\frac{1}{\mu_k})_{k \in I}$ .  $\square$

**2.7.12. Tétel.** (i) Egy Markov-láncnak pontosan akkor létezik invariáns eloszlása, ha létezik pozitív rekurrens osztálya.

(ii) Ha a láncnak pontosan egy pozitív rekurrens osztálya van (de lehetnek egyéb tranzienst vagy null-rekurrens osztályai), akkor az invariáns eloszlás egyértelmű, és előáll

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_i}, \quad i \in I,$$

alakban.

(iii) Ha több pozitív rekurrens osztálya van, akkor az invariáns eloszlás nem egyértelmű, és az invariáns eloszlások előállíthatóak az alábbi módon. Jelölje  $D_\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , a páronként különböző pozitív rekurrens osztályokat, ahol  $\Gamma$  egy megszámlálható (index) halmaz. Legyen továbbá  $D := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma$ . Ekkor az invariáns eloszlások előállíthatók az alábbi alakban:

$$\pi_i = \begin{cases} a_\gamma \pi_i^{(\gamma)} & \text{ha } i \in D_\gamma, \gamma \in \Gamma, \\ 0 & \text{ha } i \notin D, \end{cases}$$

ahol  $a_\gamma \geq 0$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = 1$  és  $\pi^{(\gamma)}$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , jelöli a  $D_\gamma$  pozitív rekurrens osztályon az egyértelműen létező invariáns eloszlást.

**2.7.13. Példa.** Legyen  $I := \{0, 1\}$ ,  $p, q \in [0, 1]$  és

$$\mathbb{P} := \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Legyen  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ . Ekkor  $\pi$  akkor és csak akkor stacionárius eloszlás (a fenti  $\mathbb{P}$  átmenet-mátrixra vonatkozóan), ha  $\pi_0 \geq 0$ ,  $\pi_1 \geq 0$ ,  $\pi_0 + \pi_1 = 1$ , és  $\pi = \pi \mathbb{P}$ , azaz

$$(\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1) \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Ez az egyenletrendszer az alábbi ölti:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (1-p)\pi_0 + q\pi_1, \\ \pi_1 &= p\pi_0 + (1-q)\pi_1, \end{aligned}$$

azaz  $p\pi_0 - q\pi_1 = 0$ .

Ha  $p = q = 0$ , akkor végtelen sok megoldás létezik:  $(\pi_0, \pi_1) = (t, 1-t)$ , ahol  $t \in [0, 1]$ .

Ha  $p = 0$  és  $q > 0$ , akkor

$$-q\pi_1 = 0 \implies \pi_1 = 0 \implies \pi_0 = 1 - \pi_1 = 1.$$

Ha  $p > 0$  és  $q = 0$ , akkor

$$p\pi_0 = 0 \implies \pi_0 = 0 \implies \pi_1 = 1 - \pi_0 = 1.$$

Ha  $p > 0$  és  $q > 0$ , akkor

$$\pi_1 = \frac{p}{q}\pi_0 \implies \pi_0 = 1 - \frac{p}{q}\pi_0 \implies \pi_0 = \frac{q}{p+q} \implies \pi_1 = \frac{p}{p+q}.$$

Az előző három esetet egyetlen esetben összefoglalva: ha  $p + q > 0$ , akkor

$$\pi_0 = \frac{q}{p+q}, \quad \pi_1 = \frac{p}{p+q}.$$

Tehát, ha  $(p, q) = (0, 0)$ , akkor végtelen sok stacionárius eloszlás van, ha  $(p, q) \neq (0, 0)$ , akkor pedig egyetlen stacionárius eloszlás van.

Ha  $(p, q) = (0, 0)$ , akkor

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

és a Markov-láncnak két zárt osztálya van  $\{0\}$  és  $\{1\}$ , melyek pozitív rekurrens, és a hozzájuk tartozó stacionárius eloszlás 1, illetve 1. A teljes állapotterhez tartozó tartozó stacionárius eloszlás ezek "konvex lineáris kombinációja", pontosabban, a 2.7.12. Tétel jelöléseit használva:  $|\Gamma| = 2$ ,  $D_0 = \{0\}$ ,  $D_1 = \{1\}$ ,  $D = D_0 \cup D_1$ , és

$$\pi_i = \begin{cases} t\pi_0^{(0)} = t & \text{ha } i = 0, \\ (1-t)\pi_1^{(1)} = 1-t & \text{ha } i = 1, \end{cases} \quad \text{ahol } t \in [0, 1].$$

Ha  $p = 0$  és  $q > 0$ , akkor

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

és a Markov-láncnak két osztálya van  $\{0\}$  és  $\{1\}$ , a  $\{0\}$  osztály zárt és pozitív rekurrens, az  $\{1\}$  osztály nyílt és tranzien (lásd 2.4.9. Állítás). Mivel egyetlen pozitív rekurrens osztály van, egyértelműen létezik stacionárius eloszlás  $(\pi_0, \pi_1) = (1, 0)$  (a 2.7.12. Tétel jelöléseit használva ekkor  $|\Gamma| = 1$  és  $D_0 = D$ ).

Ha  $p > 0$  és  $q = 0$ , akkor

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

és a Markov-láncnak két osztálya van  $\{0\}$  és  $\{1\}$ , a  $\{0\}$  osztály nyílt és tranzien, az  $\{1\}$  osztály zárt és pozitív rekurrens (lásd 2.4.9. Állítás). Mivel egyetlen pozitív rekurrens osztály van, egyértelműen létezik stacionárius eloszlás  $(\pi_0, \pi_1) = (0, 1)$  (a 2.7.12. Tétel jelöléseit használva ekkor  $|\Gamma| = 1$  és  $D_1 = D$ ).

Ha  $p > 0$  és  $q > 0$ , akkor a Markov-lánc irreducibilis, egyetlen osztálya van  $\{0, 1\}$ , mely pozitív rekurrens, így egyértelműen létezik stacionárius eloszlás (a 2.7.12. Tétel jelöléseit használva ekkor  $|\Gamma| = 1$ ). A Markov-lánc lehet periodikus is, például a  $p = 1$  esetben 2 a periódusa.  $\square$

**2.7.14. Tétel.** *Egy véges állapotterű, irreducibilis Markov-láncnak egyértelműen létezik stacionárius eloszlása, mely szerint minden állapot valószínűsége pozitív.*

**Első bizonyítás.** Legyen  $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  egy véges állapotterű, irreducibilis Markov-lánc  $I$  állapottérrel. Mivel egy irreducibilis Markov-lánc állapottere egyetlen zárt osztályt alkot, a 2.4.9. Állítás (iii) része alapján (itt használjuk, hogy az  $I$  állapottér véges) kapjuk, hogy minden állapot pozitív rekurrens. Ezért a 2.7.11. Tétel alapján  $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ -nek egyértelműen létezik  $(\pi_i)_{i \in I}$  stacionárius eloszlása, melyre  $\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$ ,  $i \in I$ , ahol  $\mu_i = E(T_i)$  és  $\mu_i < \infty$  (a 2.4.4. Definíció értelmében, hiszen minden állapot pozitív rekurrens).

**Második bizonyítás.** Mivel egy irreducibilis Markov-lánc egyetlen osztálya (az állapottér) zárt halmaz, felhasználva azt is, hogy véges sok állapot van, a 2.4.9. Állítás (iii) része alapján a Markov-lánc (egyetlen osztálya) pozitív rekurrens. Így a 2.7.12. Tétel (i) és (ii) részei alapján következik az állítás.

**Harmadik bizonyítás.** Rinaldo B. Schinazi bizonyítását közöljük (ArXiv 2506.13662).

Jelölje  $n$  az  $I$  állapottér elemeinek a számát. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy  $n \geq 2$ , és  $I = \{1, \dots, n\}$ . Jelölje  $I_{n \times n}$  az  $n \times n$ -es egységmatrixot. A bizonyítást négy lépésre osztjuk.

1. Lépés. Belátjuk, hogy egy  $w \in \mathbb{R}^n$  (oszlop)vektor esetén akkor és csak akkor teljesül, hogy  $(\mathbb{P} - I_{n \times n})w = 0$ , ha  $w$  koordinátái mind egyenlőek. Következésképpen, ekkor  $\mathbb{P} - I_{n \times n}$  magjának a dimenziója 1.

Tegyük fel, hogy  $w \in \mathbb{R}^n$  olyan, hogy  $(\mathbb{P} - I_{n \times n})w = 0$ . Mivel  $w$ -nek csak véges sok koordinátája van, létezik olyan  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ , hogy

$$\max_{j \in \{1, \dots, n\}} w_j = w_{i_0}.$$

Mivel a Markov-lánc irreducibilis, a 2.3.3. Állítás alapján, tetszőleges  $j \in \{1, \dots, n\}$  esetén létezik olyan  $k \in \mathbb{Z}_+$ , hogy  $(\mathbb{P}^k)_{i_0, j} > 0$ , azaz vagy  $i_0 = j$ , vagy  $p_{i_0, j} > 0$ , vagy  $\exists i_1, \dots, i_{k-1} \in \{1, \dots, n\}$ , hogy  $p_{i_0, i_1} p_{i_1, i_2} \dots p_{i_{k-1}, j} > 0$ . Indirekt módon tegyük fel, hogy  $w_{i_1} < w_{i_0}$ . Mivel  $\mathbb{P}w = w$  és  $p_{i_0, i_1} > 0$ , kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} w_{i_0} &= \sum_{\ell=1}^n p_{i_0, \ell} w_{\ell} = p_{i_0, i_1} w_{i_1} + \sum_{\ell \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1\}} p_{i_0, \ell} w_{\ell} \\ &< p_{i_0, i_1} w_{i_0} + \sum_{\ell \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1\}} p_{i_0, \ell} w_{\ell} \\ &\leq w_{i_0} \left( p_{i_0, i_1} + \sum_{\ell \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1\}} p_{i_0, \ell} \right) = w_{i_0}, \end{aligned}$$

mely ellentmondás. Így, felhasználva azt is, hogy  $w_{i_1} \leq w_{i_0}$ , kapjuk, hogy  $w_{i_1} = w_{i_0}$ . Hasonló módon, kicserélve  $i_0$ -t és  $i_1$ -et,  $i_1$ -re, illetve  $i_2$ -re, kapjuk, hogy  $w_{i_2} = w_{i_1}$ , és ezért  $w_{i_0} = w_{i_1} = w_{i_2}$ . Ismételve ezt az eljárást, adódik, hogy  $w_{i_0} = w_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , azaz  $w$  koordinátái egyenlőek.

Megfordítva, ha  $w \in \mathbb{R}^n$  koordinátái egyenlőek, akkor

$$(\mathbb{P}w)_i = \sum_{j=1}^n p_{i, j} w_j = w_1 \sum_{j=1}^n p_{i, j} = w_1, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

és így  $\mathbb{P}w = w$ , azaz  $(\mathbb{P} - I_{n \times n})w = 0$ .

2. Lépés. Belátjuk, hogy a

$$\{v \in \mathbb{R}^{1 \times n} : v\mathbb{P} = v\}$$

vektortér dimenziója 1.

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a  $\{v \in \mathbb{R}^{1 \times n} : v\mathbb{P} = v\}$  halmaz valóban vektortér. Az 1. Lépés és a dimenziótétel alapján, a  $\mathbb{P} - I_{n \times n}$  mátrix rangja  $n - 1$ . Így a  $(\mathbb{P} - I_{n \times n})^\top$  mátrix rangja is  $n - 1$ , melyből következik, újra csak a dimenziótételt használva, hogy a  $(\mathbb{P} - I_{n \times n})^\top$  mátrix magjának a dimenziója 1. Továbbá, egy  $v \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  (sor)vektor esetén  $v\mathbb{P} = v$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $\mathbb{P}^\top v^\top = v^\top$ , azaz, ha  $(\mathbb{P} - I_{n \times n})^\top v^\top = 0^\top$ . A fentiek alapján ez maga után vonja, hogy  $\{v \in \mathbb{R}^{1 \times n} : v\mathbb{P} = v\}$  dimenziója 1.

3. Lépés. Belátjuk, hogy egyértelműen létezik olyan  $\pi \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  (sor)vektor, hogy

- $\pi_i \geq 0$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,
- $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ ,
- $\pi\mathbb{P} = \pi$ .

Legyenek

$$u := \left(\frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$

és

$$v^{(k)} := \frac{1}{k} u \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}^j = \frac{1}{k} \left( u + u\mathbb{P} + \dots + u\mathbb{P}^{k-1} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Mivel  $\mathbb{P}$  sztochasztikus mátrix,  $\mathbb{P}^j$  is sztochasztikus mátrix tetszőleges  $j \in \mathbb{N}$  esetén (lásd 2.1.6. Állítás), és így az  $u\mathbb{P}^j$  sorvektor elemei nemnegatívak és

$$\sum_{\ell=1}^n (u\mathbb{P}^j)_\ell = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n u_k (\mathbb{P}^j)_{k,\ell} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n (\mathbb{P}^j)_{k,\ell} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (\mathbb{P}^j)_{k,\ell} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n 1 = 1,$$

azaz  $u\mathbb{P}^j$  koordinátáinak az összege 1. Így tetszőleges  $k \in \mathbb{N}$  esetén  $v^{(k)}$  koordinátái is nemnegatívak és koordinátáinak az összege 1, mely alapján teljesül az is, hogy

$$\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |v_i^{(k)}| \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Így  $v^{(k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , egy korlátos  $\mathbb{R}^n$ -beli sorozat. A Bolzano-Weierstrass tétel alapján létezik olyan  $v^{(k_j)}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , részsorozata a  $v^{(k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sorozatnak, mely konvergál valamely  $\pi \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  sorvektorhoz, melynek koordinátái nemnegatívak és összegük 1.

Továbbá, tetszőleges  $i \in \{1, \dots, n\}$  esetén

$$\begin{aligned} |(v^{(k)}\mathbb{P})_i - v_i^{(k)}| &= \left| \frac{1}{k} \left( u\mathbb{P} + u\mathbb{P}^2 + \dots + u\mathbb{P}^k \right)_i - \frac{1}{k} \left( u + u\mathbb{P} + \dots + u\mathbb{P}^{k-1} \right)_i \right| \\ &= \frac{1}{k} |(u\mathbb{P}^k)_i - u_i| \leq \frac{1}{k} ((u\mathbb{P}^k)_i + u_i) \leq \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Így

$$\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |(v^{(k)}\mathbb{P})_i - v_i^{(k)}| \leq \frac{2}{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

amiből adódik, hogy  $v^{(k)}\mathbb{P} - v^{(k)}$  konvergál a  $0 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  sorvektorhoz, amint  $k \rightarrow \infty$ . Így a  $v^{(k_j)}\mathbb{P} - v^{(k_j)}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , részsorozat is konvergál a  $0 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  sorvektorhoz. Ezért

$$v^{(k_j)}\mathbb{P} = v^{(k_j)}\mathbb{P} - v^{(k_j)} + v^{(k_j)} \rightarrow 0 + \pi = \pi, \quad \text{ha } j \rightarrow \infty.$$

Ugyanakkor, mivel  $v^{(k_j)} \rightarrow \pi$  amint  $j \rightarrow \infty$ , a mátrixszorzás folytonossága miatt  $v^{(k_j)}\mathbb{P} \rightarrow \pi\mathbb{P}$  amint  $j \rightarrow \infty$ . A határérték egyértelműsége alapján  $\pi\mathbb{P} = \mathbb{P}$ , és így  $\pi \in \{v \in \mathbb{R}^{1 \times n} : v\mathbb{P} = v\}$ . A 2. Lépés alapján a  $\{v \in \mathbb{R}^{1 \times n} : v\mathbb{P} = v\}$  altér dimenziója 1, így  $\pi$  az egyetlen valószínűségeloszlás ebben az altérben.

4. Lépés. Belátjuk, hogy a 3. Lépésben szereplő  $\pi \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  stacionárius eloszlás minden koordinátája pozitív. Mivel  $\pi\mathbb{P} = \pi$ , kapjuk, hogy

$$\pi\mathbb{P}^k = \pi\mathbb{P}^{k-1}\mathbb{P} = \pi\mathbb{P}^{k-1} = \dots = \pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik olyan  $i \in \{1, \dots, n\}$ , hogy  $\pi_i = 0$ . A 2.3.3. Állítás alapján tetszőleges  $j \in \{1, \dots, n\}$  esetén létezik olyan  $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ , hogy  $(\mathbb{P}^{k_0})_{j,i} > 0$ . Továbbá,

$$\pi_i = (\pi\mathbb{P}^{k_0})_i = \sum_{\ell=1}^n \pi_\ell (\mathbb{P}^{k_0})_{\ell,i} \geq \pi_j (\mathbb{P}^{k_0})_{j,i}.$$

Mivel  $\pi_i = 0$  és  $(\mathbb{P}^{k_0})_{j,i} > 0$ , kapjuk, hogy  $\pi_j = 0$ . Mivel  $j \in \{1, \dots, n\}$  tetszőleges, kapjuk, hogy  $\pi = 0 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  teljesül, mely ellentmondás a 3. Lépés szerint (hiszen  $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ ). Így  $\pi_i > 0$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .  $\square$

**2.7.15. Tétel. (Foster, 1953)** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$  egy irreducibilis (homogén) Markov-lánc. Tegyük fel, hogy létezik olyan  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény,  $F \subset I$  véges halmaz és  $\varepsilon > 0$ , hogy

- (i)  $\inf_{i \in I} h(i) > -\infty$ ,
- (ii)  $\sum_{k \in I} p_{i,k} h(k) < \infty$ ,  $i \in F$ ,
- (iii)  $\sum_{k \in I} p_{i,k} h(k) \leq h(i) - \varepsilon$ ,  $i \notin F$ ,

Ekkor  $\mathbb{X}$  egyetlen osztálya (a teljes állapottér) pozitív rekurrens.

**2.7.16. Következmény. (Pakes lemma)** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$  egy irreducibilis (homogén) Markov-lánc, melynek fázistere  $\mathbb{Z}_+$ . Tegyük fel, hogy

- $E(X_1 | X_0 = i) < \infty$ ,  $i \in \mathbb{Z}_+$ ,
- $\limsup_{i \rightarrow \infty} E(X_1 - X_0 | X_0 = i) < 0$ .

Ekkor  $\mathbb{X}$  egyetlen osztálya (a teljes állapottér) pozitív rekurrens.

Továbbá adódhat a kérdés, hogy az invariáns eloszlás mint egyensúlyi helyzet stabil-e, azaz tetszőleges kezdeti eloszlásból indítva a láncot, van-e valamilyen konvergencia ehhez az egyensúlyi helyzethez.

**2.7.17. Tétel. (Konvergencia az egyensúlyhoz)** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$  egy irreducibilis, aperiodikus és pozitív rekurrens Markov-lánc, továbbá legyen  $\pi$  a Markov-lánc egyértelmű invariáns eloszlása. Ekkor tetszőleges  $i, j \in I$  állapotok esetén

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)} = \pi_j$ ,
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j) = \pi_j$ ,
- (iii)  $E\left(\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_m=j\}}\right) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} P(X_m = j) \rightarrow \pi_j$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

**Bizonyítás.** Azt látjuk csak be, hogy a (ii) részből következik a (iii) rész. Ehhez elég azt megmutatni, hogy ha  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olyan valós számsorozat, hogy  $a_n \rightarrow a$ , amint  $n \rightarrow \infty$ , ahol  $a \in \mathbb{R}$ , akkor

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \rightarrow a \quad \text{amint } n \rightarrow \infty.$$

Mivel  $a_n \rightarrow a$ , amint  $n \rightarrow \infty$ , tetszőleges  $\varepsilon > 0$  esetén létezik olyan  $N_1 \in \mathbb{N}$ , hogy  $|a_n - a| < \varepsilon$ , ha  $n \geq N_1$ . Így tetszőleges  $n \geq N_1$  esetén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - a \right| &= \left| \frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{N_1-1} - a)}{n} + \frac{(a_{N_1} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|}{n} + \frac{|a_{N_1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}. \end{aligned}$$

Legyen  $N_2 \in \mathbb{N}$  olyan, hogy

$$\frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1-1} - a|}{n} < \varepsilon, \quad \text{ha } n \geq N_2.$$

Ekkor tetszőleges  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$  esetén teljesül, hogy

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - a \right| \leq \varepsilon + \frac{(n - (N_1 - 1))\varepsilon}{n} \leq 2\varepsilon.$$

□

**2.7.18. Megjegyzés.** (i) A 2.7.17. Tétel alapján mondhatjuk, hogy egy irreducibilis, aperiodikus és pozitív rekurrens Markov-lánc *stabil*, illetve hogy az invariáns eloszlás előáll mint az átmenetvalószínűségek *limeszvalószínűségei*. Továbbá ebben az esetben az invariáns eloszlás szerint egy állapot valószínűsége interpretálható úgy, mint annak a valószínűsége, hogy a lánc hosszútávú működés után épp az adott állapotban van. Másképpen fogalmazva, ez megadja azt a hosszútávú időarányt, amennyit a lánc eltölt az adott állapotban.

(ii) A 2.7.17. Tételben  $\pi_j = \frac{1}{\mu_j}$ ,  $j \in I$  (a 2.7.12. Tétel (ii) része alapján). Korábban láttunk példát arra vonatkozóan (lásd a 2.4.6. Példát), hogy egy periodikus Markov-lánc esetén a  $p_{j,j}^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sorozat nem konvergens, így a 2.7.17. Tételben az aperiodikusság egy nem elhagyható feltétel.

(iii) A 2.4.5. Tétel és a 2.7.6. Állítás alapján, kapjuk, hogy ha  $j \in I$  tranziens vagy null-rekurrens állapot,  $i \in I$  pedig egy tetszőleges állapot, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)} = 0 = \frac{1}{\mu_j} \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j) = 0 = \frac{1}{\mu_j},$$

ahol  $\mu_j = \infty$ .

(iv) A 2.7.17. Tételben az átmenetvalószínűségek határértékére a következő *heurisztikus* magyarázat adható. Ha  $j \in I$  tranziens, akkor, ha a lánc egyáltalán el is jut valaha a  $j$  állapotba, oda csak véges sokszor tér vissza egy valószínűséggel, tehát hosszútávon kicsi valószínűséggel tartózkodik  $j$ -ben. Ha  $j$  null-rekurrens, akkor a folyamat ugyan végtelen sokszor visszatér, de a visszatérések nagyon ritkán követik egymást (hiszen  $\mu_j = \infty$ ), és amiatt kicsi annak az esélye, hogy egy determinisztikus  $n$  időpontban a lánc éppen a  $j$  állapotban van. Más a helyzet a pozitív rekurrens esetben. Ha a lánc irreducibilis is, akkor belátható, hogy tetszőleges állapotból indulva 1 valószínűséggel véges sok lépésben eléri  $j$ -t, és ezután átlagosan  $\mu_j$  lépésenként újra és újra visszatér oda. Emiatt asszimptotikusan

$1/\mu_j$  valószínűséggel találjuk a láncot a  $j$  állapotban. Ez a gondolatmenet azt is sugallja, hogy megfelelő feltételek mellett a  $j$  állapotban töltött idő hosszútávú aránya szintén  $1/\mu_j$ . Ez utóbbival foglalkozik a következőkben szereplő, Markov-láncokra vonatkozó ergodikus tétel.  $\square$

**2.7.19. Tétel. (Ergodikus tétel Markov-láncokra)** Legyen  $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbb{P})$  és tetszőleges  $i \in I$  esetén legyen

$$V_i(n) := \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_m=i\}} = \text{az } i \text{ állapotban tett látogatások száma az } n-1 \text{ időponttal bezárólag.}$$

(i) Ha  $\mathbb{X}$  egy irreducibilis Markov-lánc, akkor tetszőleges  $i \in I$  esetén

$$\frac{V_i(n)}{n} \rightarrow \frac{1}{\mu_i}, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty, \quad \text{P-m.b.}$$

(ii) Ha  $\mathbb{X}$  egy irreducibilis és pozitív rekurrens Markov-lánc,  $\pi$  az egyértelmű invariáns eloszlása, akkor tetszőleges  $c : I \rightarrow \mathbb{R}$  (költség)függvény esetén, melyre  $\sum_{i \in I} |c(i)|\pi_i < \infty$ , teljesül, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} c(X_m) \rightarrow \sum_{i \in I} c(i)\pi_i, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty, \quad \text{P-m.b.}$$

Tehát az ergodikus tétel (2.7.19. Tétel) (ii) része értelmében a hosszútávú átlagos költség előáll mint a  $c$  költségfüggvény  $\pi$  invariáns eloszlás szerinti várható értéke, azaz  $\sum_{i \in I} c(i)\pi_i$ . A tételben az P-m.b. rövidítés a konvergencia típusára vonatkozik, azaz majdnem biztosan, azaz egy valószínűséggel teljesül.

**2.7.20. Példa. (Véletlen bolyongás egyoldali „félíg-visszaverő” fallal)** Tekintsük azt az  $\mathbb{X}$  Markov-láncot, melynek állapottere  $\mathbb{Z}_+$  és átmenetmátrixa:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & 1-p & 0 & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad p \in (0, 1).$$

Határozzuk meg az invariáns eloszlást abban az esetben, amikor létezik! A megoldás megtalálható a generátorfüggvényekről szóló résznél szereplő 2.8.10. Példában.  $\square$

**2.7.21. Példa. (Egy diszkrét idejű sorbanállási modell)** Tekintsük a következő modellt. Egy kiszolgáló egységhez igények érkeznek, melyeket ki kell szolgálni. A kiszolgáló egység egy időben csak egy igényvel tud foglalkozni, így az esetleges beérkező új igények sorba állnak. Modellizzük ezt a rendszert. Jelölje

$X_n :=$  a rendszer méretét (a rendszerben levő igények számát) az  $n$ -edik időegység végén,

$Y_n :=$  a beérkező új igények számát az  $n$ -edik időegységben,

$V_n :=$  a kiszolgáló kapacitását az  $n$ -edik időegységben, azaz,

hogy legfeljebb hány igényt tud kiszolgálni az  $n$ -edik időegységben,

ahol  $n \in \mathbb{Z}_+$ . A továbbiakban feltételezzük, hogy  $X_0, V_n, Y_n, n \in \mathbb{N}$ , független nemnegatív egészértékű véletlen változók,  $Y_n, n \in \mathbb{N}$ , azonos eloszlásúak, és  $V_n, n \in \mathbb{N}$ , azonos eloszlásúak. Ekkor  $\mathbb{X}$  Markov-lánc  $\mathbb{Z}_+$  állapotterrel, hiszen felírható az alábbi rekurzió segítségével:

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})^+ + Y_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

ahol  $a^+$  az  $a$  szám pozitív részét jelöli.

Az időegység megfelelően kicsi választásával elérhető, hogy az alábbi speciális esetre szorítkozzunk:

$$Y \sim \text{Bernoulli}(q), \quad V \sim \text{Bernoulli}(p), \quad p, q \in (0, 1),$$

ahol  $Y$ , illetve  $V$  az  $Y_n, n \in \mathbb{N}$ , illetve  $V_n, n \in \mathbb{N}$ , közös eloszlásával megegyező eloszlású véletlen változókat jelöl. Ekkor az  $\mathbb{X}$  Markov-lánc átmenetmátrixa a következő:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 & \dots \\ a & r & b & 0 & \dots \\ 0 & a & r & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{ahol} \quad a = (1-q)p, \quad b = (1-p)q, \quad r = 1 - a - b,$$

mely következik például egy, a 2.1.4. Tételhez hasonló eredményből az ottani  $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ , valós értékű véletlen változókat véletlen vektorokra cserélve. Határozzuk meg az invariáns eloszlást abban az esetben, amikor létezik! Mennyi lesz a hosszútávú átlagos rendszerméret? Az első feladatot,  $Y$ , illetve  $V$  eloszlásának más-más eloszlásokat választva, mint a fentiek, a generátorfüggvényekről szóló résznél szereplő 2.8.11. Példában megoldjuk.  $\square$

## 2.8. Generátorfüggvények

Ez a fejezet részben kitérő, viszont hasznosnak bizonyul a diszkrét idejű Markov-láncok egy speciális osztályának, a Galton-Watson-folyamat vizsgálatakor.

**2.8.1. Definíció. (Generátorfüggvény)** Ha egy  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  véletlen változó nemnegatív egész értékeket vesz fel, azaz  $X$  a  $\mathbb{Z}_+$  halmazba koncentrálódik, vagyis  $P(X \in \mathbb{Z}_+) = 1$ , akkor  $X$  generátorfüggvénye a

$$G_X(z) := E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X = k)$$

komplex hatványsor összegfüggvénye, mely azon  $z \in \mathbb{C}$  esetén értelmezett, amikor a szóbanforgó hatványsor konvergens. Ha  $\pi := (\pi_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  egy valószínűségeloszlás  $\mathbb{Z}_+$ -on, akkor  $\pi$  generátorfüggvényén egy olyan  $X$  véletlen változó generátorfüggvényét értjük, melynek értékkészlete  $\mathbb{Z}_+$  és eloszlása  $P(X = k) = \pi_k, k \in \mathbb{Z}_+$ .

A generátorfüggvény tulajdonságait foglalja össze a következő tétel, melynek (i) részében megadjuk  $\mathbb{C}$ -nek egy olyan részhalmazát, ahol a generátorfüggvény biztosan értelmezett.

**2.8.2. Tétel. (A generátorfüggvény tulajdonságai)** Jelölje  $G_X$  egy  $X$  nemnegatív egész értékeket felvevő véletlen változó generátorfüggvényét. Ekkor teljesülnek az alábbiak:

- (i) A 2.8.1. Definícióban szereplő hatványsor abszolút konvergens a  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  halmazon, speciálisan a  $[-1, 1]$  intervallumon.

(ii)  $G_X(1) = 1$ .

(iii)  $G_X$  monoton növekvő, folytonos és konvex a  $[0, 1]$  intervallumon.

(iv)  $G_X$  analitikus a  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  halmazon.

(v) tetszőleges  $r \in \mathbb{Z}_+$  esetén

$$P(X = r) = \frac{G_X^{(r)}(0)}{r!}.$$

(vi) Egyértelműségi tétel generátorfüggvényekre:  $X \sim Y \iff \forall x \in [-1, 1]$  esetén  $G_X(x) = G_Y(x)$ , azaz  $X$  és  $Y$  eloszlásai akkor és csak akkor egyeznek meg, ha a generátorfüggvényeik megegyeznek a  $[-1, 1]$  intervallumon.

(vii) Tetszőleges  $r \in \mathbb{N}$  esetén

$$E(X^r) < \infty \iff G_X^{(r)}(1-) < \infty,$$

továbbá fennáll, hogy

$$G_X^{(r)}(1-) = E(X(X-1)\cdots(X-r+1)).$$

Speciálisan,  $E(X) < \infty$  akkor és csak akkor, ha  $G_X'(1-) < \infty$ , és fennáll, hogy  $G_X'(1-) = E(X)$ .

**Bizonyítás.** (iii). Azt igazoljuk csak, hogy  $G_X$  folytonos  $[0, 1]$ -en. A  $G_X$ -et definiáló hatványsor egyenletesen konvergens a  $[0, 1]$  intervallumon, mely hatványsor folytonos függvényekből áll, így felhasználva, hogy folytonos függvények egyenletesen konvergens sorának határfüggvénye folytonos, adódik  $G_X$  folytonossága. Azért egyenletesen konvergens a  $G_X$ -et definiáló hatványsor a  $[0, 1]$  intervallumon, mert a Weierstrass-féle elegendő feltétel teljesül, ugyanis  $|t^k P(X = k)| \leq P(X = k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $t \in [0, 1]$ , és  $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = P(X \in \mathbb{Z}_+) = 1 < \infty$ .

(v). Felhasználva, hogy egy hatványsor a konvergenciatartományának belsejében differenciálható, és a deriválás és összegzés sorrendje felcserélhető, kapjuk, hogy

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k) = P(X = 0) + t P(X = 1) + t^2 P(X = 2) + \dots,$$

$$G_X'(t) = 0 + P(X = 1) + 2t P(X = 2) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} P(X = k),$$

$$G_X^{(r)}(t) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1) t^{k-r} P(X = k),$$

ahol  $t \in (-1, 1)$ . Így  $G_X^{(r)}(0) = r! P(X = r)$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ , melyből következik (v).

(vii). Csak  $r = 1$  esetén igazoljuk. Mivel

$$G_X'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} P(X = k), \quad t \in (-1, 1),$$

Abel tétele alapján kapjuk, hogy

$$G_X'(1-) = \lim_{t \uparrow 1} G_X'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) = E(X),$$

melyből következik az állítás. □

**2.8.3. Megjegyzés.** Abel tétele alapján, ha  $E(X) < \infty$ , akkor

$$\lim_{t \uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) = E(X),$$

továbbá, ha  $E(X(X-1)) < \infty$ , akkor

$$\lim_{t \uparrow 1} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) P(X = k) t^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) P(X = k) = E(X(X-1)).$$

Így, ha  $E(X) < \infty$ , akkor a  $[0, 1) \ni t \mapsto G'_X(t)$  függvény kiterjeszthető folytonosan  $[0, 1]$ -re a  $G'_X(1) := E(X)$  definícióval, illetve, ha  $E(X(X-1)) < \infty$ , akkor a  $[0, 1) \ni t \mapsto G''_X(t)$  függvény kiterjeszthető folytonosan  $[0, 1]$ -re a  $G''_X(1) := E(X(X-1))$  definícióval.  $\square$

**2.8.4. Állítás. (Összeg generátorfüggvénye)** Legyenek  $X$  és  $Y$  független nemnegatív egészértékű véletlen változók. Ekkor

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z), \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Legyen  $n \in \mathbb{N}$  és  $X_1, \dots, X_n$  független nemnegatív egészértékű véletlen változók. Ekkor

$$G_{X_1+\dots+X_n}(z) = G_{X_1}(z) \cdots G_{X_n}(z), \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Bizonyítás.** Tetszőleges  $|z| \leq 1$ ,  $z \in \mathbb{C}$  esetén

$$G_{X+Y}(z) = E(z^{X+Y}) = E(z^X z^Y) = E(z^X) E(z^Y) = G_X(z) G_Y(z),$$

ahol felhasználtuk, hogy  $X$  és  $Y$  függetlenségéből következik  $z^X$  és  $z^Y$  függetlensége. Az állítás második része teljes indukcióval következik.  $\square$

**2.8.5. Tétel. (Véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye)** Legyenek  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , független azonos eloszlású, nemnegatív egészértékű véletlen változók, legyen továbbá  $N$  egy nemnegatív egészértékű véletlen változó, mely független az  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , véletlen változóktól. Tekintsük az

$$S := X_1 + \cdots + X_N = \sum_{i=1}^N X_i$$

véletlen tagszámú összeget (mely egy nemnegatív egészértékű véletlen változó), ahol  $\sum_{i=1}^0 := 0$ . Ekkor

$$G_S(z) = G_N(G_{X_1}(z)), \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Bizonyítás.** A teljes várható érték tételét és a 2.8.4. Állítást felhasználva kapjuk, hogy tetszőleges  $|z| \leq 1$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , esetén

$$\begin{aligned} G_S(z) &= E(z^S) = E(z^{X_1+\dots+X_N}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(z^{X_1+\dots+X_N} \mid N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E(z^{X_1+\dots+X_n} \mid N = n) P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E(z^{X_1+\dots+X_n}) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{X_1+\dots+X_n}(z) P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (G_{X_1}(z))^n P(N = n) = G_N(G_{X_1}(z)). \end{aligned}$$

$\square$

**2.8.6. Következmény. (Wald-azonosság)** Legyenek  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , független, azonos eloszlású, nemnegatív egészértékű véletlen változók, legyen továbbá  $N$  egy nemnegatív egészértékű véletlen változó, mely független az  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , változóktól. Tegyük fel továbbá, hogy  $E(X_1) < \infty$  és  $E(N) < \infty$ . Ekkor

$$E(S) = E(N) E(X_1).$$

**Bizonyítás.** A 2.8.2. Tétel (vii) része és a 2.8.5. Tétel alapján, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E(S) &= \lim_{t \uparrow 1} G'_S(t) = \lim_{t \uparrow 1} (G_N \circ G_{X_1})'(t) = \lim_{t \uparrow 1} G'_N(G_{X_1}(t)) G'_{X_1}(t) \\ &= G'_N(1-) G'_{X_1}(1-) = E(N) E(X_1), \end{aligned}$$

ahol a harmadik lépésnél felhasználtuk, hogy  $G_N$  és  $G_{X_1}$  differenciálható  $[0, 1]$ -en (lásd, 2.8.2. Tétel (iv) része és 2.8.3. Megjegyzés) és azt, hogy  $G_{X_1}(t) \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, 1]$ , a negyedik lépésnél pedig azt, hogy  $G_{X_1}$  monoton növekvő, folytonos a  $[0, 1]$  intervallumon (lásd, 2.8.2. Tétel (ii) része) és  $G_{X_1}(1) = 1$ , és így  $G_{X_1}(t) \uparrow 1$ , amint  $t \uparrow 1$ .  $\square$

**2.8.7. Tétel. (Folytonossági tétel generátorfüggvényekre)** Legyenek  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  és  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , olyan véletlen változók, hogy  $P(X \in \mathbb{Z}_+) = 1$  és  $P(X_n \in \mathbb{Z}_+) = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i)  $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ , ha  $n \rightarrow \infty$ ,
- (ii)  $P(X_n = k) \rightarrow P(X = k)$ , ha  $n \rightarrow \infty$  minden  $k \in \mathbb{Z}_+$  esetén,
- (iii)  $G_{X_n}(t) \rightarrow G_X(t)$ , ha  $n \rightarrow \infty$  minden  $t \in [-1, 1]$  esetén.

**2.8.8. Megjegyzés.** Megjegyezzük, ha létezik olyan  $a \in (0, 1)$  és olyan  $G : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} G_{X_n}(t) = G(t)$ ,  $\forall t \in [-a, a]$ , akkor

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \quad t \in (-a, a),$$

ahol  $p_k := \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ . A nemnegatív  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  sorozatra azonban általában nem teljesül, hogy  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ , azaz nem biztos általában véve, hogy  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  valószínűségeloszlás. Az alábbiakban egy példát mutatunk, amikor  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  nem valószínűségeloszlás. Ha tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $X_n$  egy olyan valószínűségi változó, hogy  $P(X_n = 0) = P(X_n = n) = \frac{1}{2}$ , akkor  $G_{X_n}(t) = \frac{1+t^n}{2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , és  $\lim_{n \rightarrow \infty} G_{X_n}(t) = \frac{1}{2} =: G(t)$ , ha  $t \in (-1, 1)$ . Továbbá,

$$p_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } k = 0, \\ 0 & \text{ha } k \neq 0, \end{cases}$$

így  $G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k (= \frac{1}{2})$ ,  $t \in (-1, 1)$ , azonban  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \frac{1}{2} \neq 1$ .  $\square$

**2.8.9. Példa.** Lehetséges-e, és ha igen, akkor hogyan két dobókockát átcímkezni az 1,2,3,4,5,6,7,8 számjegyek felhasználásával, úgy, hogy a dobott számok összegének eloszlása ne változzon?

Jelölje  $X$  és  $Y$  a két eredeti kockadobás eredményét leíró véletlen változót. Ekkor

$$G_{X+Y}(t) = (G_X(t))^2 = \left( \frac{1}{6}(t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6) \right)^2, \quad t \in [-1, 1].$$

Célunk találni olyan  $\tilde{X}$  és  $\tilde{Y}$  véletlen változókat (az átcímkezés utáni kockadobásokat leíró véletlen változókat), melyre  $G_{\tilde{X}+\tilde{Y}} = G_{X+Y}$ . Ekkor a 2.8.2. Tétel (vi) része alapján  $\tilde{X} + \tilde{Y}$  és  $X + Y$  eloszlásai valóban megegyeznek. Vegyük észre, hogy

$$t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 = (1+t)(t + t^3 + t^5)$$

és

$$t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 = (1+t^3)(t + t^2 + t^3).$$

Ezért

$$\begin{aligned} (t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6)^2 &= \left[ (1+t)(t + t^3 + t^5) \right] \left[ (1+t^3)(t + t^2 + t^3) \right] \\ &= \left[ t + 2t^2 + 2t^3 + t^4 \right] \left[ t + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^8 \right], \end{aligned}$$

és így

$$G_{X+Y}(t) = \left( \frac{1}{6}t + \frac{2}{6}t^2 + \frac{2}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 \right) \left( \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{6}t^8 \right), \quad t \in [-1, 1].$$

Emiatt 1, 2, 2, 3, 3, 4 és 1, 3, 4, 5, 6, 8 jó átcímkezések.

Megjegyezzük, hogy az

$$\begin{aligned} (t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6)^2 &= \left[ (1+t)(t + t^3) \right] \left[ (t + t^3 + t^5)(t + t^2 + t^3) \right] \\ &= \left[ 1 + t^2 + t^3 + t^4 \right] \left[ t^2 + t^3 + 2t^4 + t^5 + 2t^6 + t^7 + t^8 \right], \end{aligned}$$

felbontáshoz nem tartozik jó címkezés, mert a szorzat első tényezője esetén az együtthatók összege 4 és nem 6.

Felhívjuk továbbá a figyelmet, hogy ha például nempozitív számjegyeket is megengedünk az átcímkezések során, akkor az alábbi triviális átcímkezések is léteznek: az egyik kocka minden oldalán szereplő számhoz hozzáadunk  $k$ -t, majd ezt a  $k$  értéket levonjuk a másik kocka minden oldaláról.  $\square$

Generátorfüggvények segítségével megoldhatjuk az invariáns eloszlás számításánál előforduló lineáris egyenletrendszereket.

**2.8.10. Példa. (A 2.7.20. Példa megoldása)** Az  $\mathbb{X}$  Markov-lánc irreducibilis, fázistere  $\mathbb{Z}_+$ . Tegyük fel először, hogy  $\mathbb{X}$ -nek létezik  $\pi$  invariáns eloszlása. Mivel a lánc irreducibilis, kapjuk, hogy  $\pi$  egyértelmű (lásd, a 2.7.11. Tételt). A  $\pi = \pi\mathbb{P}$  egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} (2.8.1) \quad \pi_0 &= (1-p)\pi_0 + (1-p)\pi_1, \\ \pi_i &= p\pi_{i-1} + (1-p)\pi_{i+1}, \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

A (2.8.1) egyenletrendszer második egyenletét szorozzuk be  $t^i$ -vel, és adjuk össze  $i = 1, 2, \dots$  esetén. Ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} t^i \pi_i &= \sum_{i=1}^{\infty} t^i (p\pi_{i-1} + (1-p)\pi_{i+1}) \\ &= p \sum_{i=1}^{\infty} t^i \pi_{i-1} + (1-p) \sum_{i=1}^{\infty} t^i \pi_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p \sum_{i=0}^{\infty} t^{i+1} \pi_i + (1-p) \sum_{i=2}^{\infty} t^{i-1} \pi_i \\
 &= pt \sum_{i=0}^{\infty} t^i \pi_i + \frac{1-p}{t} \sum_{i=2}^{\infty} t^i \pi_i, \quad t \in (0, 1],
 \end{aligned}$$

ahol a második lépésben azt, hogy a végtelen szummát két végtelen szumma összegére lehet bonatni az indokolja, hogy a legvégén kiderül, hogy mind a kettő  $G(t)$ -nek egy-egy függvény szerese, ahol  $G$  a  $\pi$  invariáns eloszlás generátorfüggvényét jelöli. Ekkor kapjuk, hogy

$$G(t) - \pi_0 = ptG(t) + \frac{1-p}{t} (G(t) - \pi_0 - t\pi_1), \quad t \in (0, 1],$$

melyből

$$\left(1 - pt - \frac{1-p}{t}\right) G(t) = \left(1 - \frac{1-p}{t}\right) \pi_0 - (1-p)\pi_1, \quad t \in (0, 1].$$

Felhasználva a (2.8.1) egyenletrendszer első egyenletét, miszerint  $\pi_1 = \pi_0 \frac{p}{1-p}$ , és átrendezve adódik, hogy

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \pi_0 \frac{1 - \frac{1-p}{t} - p}{1 - pt - \frac{1-p}{t}} = \pi_0 \frac{t - 1 + p - tp}{t - t^2p - 1 + p} = \pi_0 \frac{(t-1)(1-p)}{(t-1)(1-p(1+t))} \\
 &= \pi_0 \frac{1-p}{1-p-pt}, \quad t \in (0, 1),
 \end{aligned}$$

amit, ha  $p < \frac{1}{2}$  (amikor is  $\frac{p}{1-p} \in (0, 1)$ ) átalakíthatunk úgy, hogy

$$G(t) = \pi_0 \frac{1}{1 - \frac{p}{1-p}t} = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i t^i, \quad t \in (0, 1).$$

Felhasználva, hogy a 2.8.2. Tétel (v) része alapján  $\pi_i = \frac{G^{(i)}(0)}{i!}$ ,  $i \in \mathbb{Z}_+$ , kapjuk, hogy

$$\pi_i = \pi_0 \left(\frac{p}{1-p}\right)^i, \quad i \geq 0.$$

Ahhoz, hogy megadjuk az invariáns eloszlás végleges alakját, használjuk fel azt az információt, miszerint az invariáns eloszlás valószínűségeloszlás, így komponenseinek összege 1. Ezért

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \frac{1}{1 - \frac{p}{1-p}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \pi_0 = 1 - \frac{p}{1-p},$$

tehát

$$\pi_i = \left(1 - \frac{p}{1-p}\right) \left(\frac{p}{1-p}\right)^i, \quad i \geq 0.$$

Ha  $p \geq \frac{1}{2}$ , akkor  $\frac{p}{1-p} \geq 1$ , és így  $G(t) \geq \pi_0 \frac{1}{1-t}$ ,  $t \in (0, 1)$ , amiből következik, hogy  $G$  nem generátorfüggvény, hiszen  $\lim_{t \uparrow 1} G(t) = \infty$  (feltéve, hogy  $\pi_0 > 0$ ), noha egy generátorfüggvény az 1 pontban az 1 értéket veszi fel. Tehát, ha létezik  $\pi$  invariáns eloszlás, akkor  $p \in (0, \frac{1}{2})$ , és ekkor  $\pi$  a  $\{0, 1, 2, \dots\}$  halmazra koncentrált,  $1 - \frac{p}{1-p}$  paraméterű geometriai eloszlás.

Megfordítva, tegyük fel, hogy  $p \in (0, \frac{1}{2})$ . Megmutatjuk, hogy létezik stacionárius eloszlás. Tekintettel arra, hogy a Markov-lánc irreducibilis, a 2.7.11. Tétel alapján ehhez

azt kell belátnunk, hogy  $\mathbb{X}$  egyetlen osztálya (a teljes állapottér) pozitív rekurrens. Ezt a Pakes-lemma (lásd 2.7.16. Következmény) segítségével látjuk be. Ekkor

$$E(X_1 | X_0 = 0) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p,$$

és

$$E(X_1 | X_0 = i) = (i - 1)(1 - p) + (i + 1)p = i - 1 + 2p, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Így, felhasználva, hogy  $p \in (0, \frac{1}{2})$ , kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \limsup_{i \rightarrow \infty} E(X_1 - X_0 | X_0 = i) &= \limsup_{i \rightarrow \infty} (E(X_1 | X_0 = i) - i) \\ &= \limsup_{i \rightarrow \infty} (2p - 1) = 2p - 1 < 0. \end{aligned}$$

Emiatt teljesülnek a Pakes-lemma (lásd 2.7.16. Következmény) feltételei.  $\square$

**2.8.11. Példa. (A 2.7.21. Példa első részének megoldása)** Tekintsük a 2.1.9. Példa (iv) részében bevezetett  $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  Markov-láncot:

$$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + \xi_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

ahol feltételezzük, hogy  $E(\xi_1) < \infty$ . Mikor létezik stacionáris eloszlás? Amikor létezik, határozzuk meg a generátorfüggvényét!

Tetszőleges  $|z| \leq 1$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , esetén

$$\begin{aligned} z^{X_{n+1}+1} &= z^{(X_n-1)^+} z^{\xi_{n+1}} = \left( z^{X_n} \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}} + z^1 \mathbb{1}_{\{X_n=0\}} \right) z^{\xi_{n+1}} \\ &= \left( z^{X_n} (1 - \mathbb{1}_{\{X_n=0\}}) + z \mathbb{1}_{\{X_n=0\}} \right) z^{\xi_{n+1}} \\ &= \left( z^{X_n} - z^0 \mathbb{1}_{\{X_n=0\}} + z \mathbb{1}_{\{X_n=0\}} \right) z^{\xi_{n+1}}, \end{aligned}$$

melyből következik, hogy

$$z \cdot z^{X_{n+1}} = z^{X_n} z^{\xi_{n+1}} + (z - 1) \mathbb{1}_{\{X_n=0\}} z^{\xi_{n+1}}, \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C},$$

azaz

$$z \cdot z^{X_{n+1}} - z^{X_n} z^{\xi_{n+1}} = (z - 1) \mathbb{1}_{\{X_n=0\}} z^{\xi_{n+1}}, \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Így, felhasználva, hogy  $X_n$  és  $\xi_{n+1}$  függetlenek, kapjuk, hogy

$$z E(z^{X_{n+1}}) - E(z^{X_n}) E(z^{\xi_{n+1}}) = (z - 1) P(X_n = 0) E(z^{\xi_{n+1}}), \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C},$$

azaz

$$z g_{X_{n+1}}(z) - g_{X_n}(z) g_{\xi_{n+1}}(z) = (z - 1) P(X_n = 0) g_{\xi_{n+1}}(z), \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Mivel  $\xi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , független, azonos eloszlásúak, kapjuk, hogy

$$z g_{X_{n+1}}(z) - g_{X_n}(z) g_{\xi_1}(z) = (z - 1) P(X_n = 0) g_{\xi_1}(z), \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tegyük fel, hogy létezik  $(\pi_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$  stacionárius eloszlás. Ekkor a 2.7.2. Tétel alapján  $X_n \sim \pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ , és

$$(2.8.2) \quad g_\pi(z)(z - g_{\xi_1}(z)) = z g_\pi(z) - g_\pi(z) g_{\xi_1}(z) = (z - 1) \pi_0 g_{\xi_1}(z), \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Így

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i \pi_i = g_{\pi}(z) = \pi_0 \frac{(z-1)g_{\xi_1}(z)}{z - g_{\xi_1}(z)}, \quad |z| < 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Az alábbiakban meghatározzuk  $\pi_0$  értékét. Deriváljuk a (2.8.2) egyenlet mindkét oldalát a  $(-1, 1)$  intervallumon  $z$ -szerint:

$$g'_{\pi}(z)(z - g_{\xi_1}(z)) + g_{\pi}(z)(1 - g'_{\xi_1}(z)) = \pi_0 g_{\xi_1}(z) + (z-1)\pi_0 g'_{\xi_1}(z), \quad z \in (-1, 1).$$

Mivel  $g_{\xi_1}(1) = 1$ ,  $g_{\pi}(1) = 1$  és  $g'_{\xi_1}(1-) = E(\xi_1)$ , a  $z \uparrow 1$  határértéket véve kapjuk, hogy

$$g'_{\pi}(1-)(1-1) + 1(1 - E(\xi_1)) = \pi_0 \cdot 1 + (1-1)\pi_0 E(\xi_1),$$

amiből következik, hogy  $\pi_0 = 1 - E(\xi_1)$ . Mivel  $\pi_0 \geq 0$ , kapjuk, hogy ha létezik stacionárius eloszlás, akkor  $E(\xi_1) \leq 1$ .

Ha  $P(\xi_1 = 1) = 1$ , akkor  $X_n = \max(X_0, 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , P-m.m.. A továbbiakban ezt az esetet kizárjuk, mert ha  $X_0$  ismert, akkor  $X_n$  is ismert P-m.m. ebben az esetben.

Belátjuk, hogy ha  $P(\xi_1 = 1) < 1$ , akkor  $E(\xi_1) < 1$  szükséges feltétele a stacionárius eloszlás létezésének. Ha  $E(\xi_1) = 1$  teljesülne, akkor  $\pi_0 = 1$  állna fenn, és így (2.8.2) alapján

$$g_{\pi}(z)(z - g_{\xi_1}(z)) = 0, \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}$$

teljesülne. Mivel  $g'_{\xi_1}(1-) = E(\xi_1) = 1$  és  $P(\xi_1 = 1) < 1$ , a későbbiekben szereplő 2.9.5. Tétel (ii) része alapján az  $x - g_{\xi_1}(x) = 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , egyenletnek csak  $x = 1$  a megoldása. Így  $g_{\pi}(x) = 0$ ,  $x \in [0, 1)$ . Felhasználva, hogy  $g_{\pi}$  analitikus a nyílt egységkörleapon és  $g_{\pi}(x) = 0$ ,  $x \in [0, 1)$ , a komplex függvénytanból tanultak alapján  $g_{\pi}(z) = 0$ ,  $|z| < 1$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Ez azonban ellentmondás, mert egy nemnegatív egészértékű véletlen változó generátorfüggvénye nem lehet azonosan 0.

Összefoglalva, ha létezik stacionárius eloszlás, akkor  $E(\xi_1) < 1$  és

$$g_{\pi}(z) = E(z^{\pi}) = (1 - E(\xi_1)) \frac{(z-1)g_{\xi_1}(z)}{z - g_{\xi_1}(z)}, \quad |z| < 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

A Pakes-lemma (2.7.16. Következmény) segítségével megmutatjuk, hogy ha  $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  irreducibilis is, akkor az  $E(\xi_1) < 1$  feltétel elegendő is a stacionárius eloszlás létezéséhez. A 2.3.9. Példa alapján  $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  akkor és csak akkor irreducibilis, ha

$$P(\xi_1 = 0) = a_0 > 0 \quad \text{és} \quad P(\xi_1 \geq 2) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k > 0.$$

A Pakes-lemma feltételei ekkor teljesülnek, mert

$$E(X_1 | X_0 = i) = E((X_0 - 1)^+ + \xi_1 | X_0 = i) = (i-1)^+ + E(\xi_1) < \infty, \quad i \in \mathbb{Z}_+,$$

és

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} E(X_1 - X_0 | X_0 = i) = \limsup_{i \rightarrow \infty} ((i-1)^+ + E(\xi_1) - i) = E(\xi_1) - 1 < 0.$$

Ezért a Pakes-lemma alapján  $\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  pozitív rekurrens.  $\square$

## 2.9. Galton-Watson-folyamat

Egy populációt szeretnénk modellezni. A modellfeltevésünk, hogy minden egyed egymástól függetlenül azonos eloszlással hoz létre utódokat. Vezessük be a következő nevezetes folyamatot.

**2.9.1. Definíció. (Galton-Watson-folyamat)** Legyenek  $\{\xi_{n,i} : n \in \mathbb{Z}_+, i \in \mathbb{N}\}$  független, azonos eloszlású, nemnegatív egészértékű véletlen változók,  $X_0$  pedig egy ezekről független nemnegatív egészértékű véletlen változó. Azt mondjuk, hogy az  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  sztochasztikus folyamat egy Galton-Watson-(elágazó)folyamat, ha

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_{n,i}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

ahol  $\sum_{i=1}^0 := 0$ .

Az  $X_0$  eloszlását kezdeti eloszlásnak, a  $\{\xi_{n,i} : n \in \mathbb{Z}_+, i \in \mathbb{N}\}$  változók közös eloszlását pedig utódeloszlásnak nevezzük, hiszen  $X_n$  reprezentálja a populáció  $n$ -edik generációjának méretét, és  $\xi_{n,i}$  pedig az  $n$ -edik generáció  $i$ -edik tagjának utódainak számát. Így valóban az  $(n+1)$ -edik generáció méretét megkapjuk a definícióban szereplő véletlen tag-számú összegként. A továbbiakban jelöljön  $\xi$  egy olyan véletlen változót, melynek eloszlása megegyezik  $\xi_{1,1}$  eloszlásával.

Vegyük észre, hogy tetszőleges  $n \in \mathbb{Z}_+$  esetén az  $X_0, \xi_{m,i}, m = 0, 1, \dots, n, i \in \mathbb{N}$ , véletlen változók egyértelműen meghatározzák az  $X_0, \dots, X_{n+1}$  véletlen változók értékeit. Továbbá, a feltevés következtében, a  $\xi_{m,i}, m = n+1, n+2, \dots, i \in \mathbb{N}$ , véletlen változók függetlenek az  $X_0, \dots, X_n, X_{n+1}$  véletlen változóktól (generációméretektől).

**2.9.2. Állítás.** Legyen  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  egy Galton-Watson-folyamat. Ekkor  $\mathbb{X}$  egy homogén Markov-lánc.

**Bizonyítás.** Tetszőleges  $n \in \mathbb{Z}_+$  és  $i_0, i_1, \dots, i_n, j \in \mathbb{Z}_+$  esetén

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{X_n} \xi_{n,i} = j \mid X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{i_n} \xi_{n,i} = j\right) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n), \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy  $X_0, X_1, \dots, X_n$  és  $\xi_{n,i}, i \in \mathbb{N}$ , függetlenek.  $\square$

Megjegyezzük, hogy a 0 állapot egy elnyelő állapot, ami a populáció kihalását jelenti.

A Galton-Watson-folyamat története a 19. századra nyúlik vissza. 1873-ban Sir Francis Galton egy cikkében azt a kérdést vetette fel, hogy mi az esélye annak, hogy  $X_0 = 1$  kezdeti érték esetén a folyamat kihál. A pontosság kedvéért megjegyezzük, hogy őt az angol nemesi családnevek kihálási valószínűsége érdekelte. 1874-ben Reverend Henry William Watson közölt egy megoldást, melyben azt állította, hogy a kihálás valószínűsége mindig 1. 1930-ban Johan Frederik Steffensen publikálta a helyes és pontos választ bizonyítással. Kiderült az is, hogy Irénée-Jules Bienaymé már 1845-ben megfogalmazta a helyes választ, de bizonyítás nélkül. Az ő tiszteletére a folyamatot sokan Bienaymé-Galton-Watson-folyamatnak (is) nevezik.

Jelölje  $q^*$  a kihalás valószínűségét, azaz

$$q^* := P(\{\text{létezik } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ melyre } X_n = 0\}).$$

Vegyük észre, hogy  $X_0 = 1$  esetén  $q^*$  megkapható mint a  $p_1^{\{0\}}$  elnyelési valószínűség. Viszont ezen általános feltételek mellett ez a valószínűség nehezen határozható meg. Ehelyett a generátorfüggvényeket használhatjuk.

**2.9.3. Állítás.** Legyen  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  egy Galton-Watson-folyamat,  $X_0 = 1$  kezdeti értékkel és  $\xi$  utóeloszlással. Tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  esetén, az  $X_n$  véletlen változó generátorfüggvénye megkapható az utóeloszlás generátorfüggvényének  $n$ -szeres iteráltjaként, azaz

$$(2.9.1) \quad G_{X_n}(z) = \underbrace{(G_\xi \circ \cdots \circ G_\xi)}_{n \text{ db}}(z), \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Továbbá, ha  $E(\xi) < \infty$ , akkor

$$(2.9.2) \quad E(X_n) = (E(\xi))^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

**Bizonyítás.** Mivel tetszőleges  $n \in \mathbb{Z}_+$  esetén  $X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_{n,i}$ , ahol  $\xi_{n,i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , azonos eloszlásúak és függetlenek  $X_n$ -től, a 2.8.5. Tétel (véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye) alapján kapjuk, hogy

$$G_{X_{n+1}}(z) = G_{X_n}(G_{\xi_{1,1}}(z)), \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

A (2.9.1) összefüggést teljes indukcióval igazoljuk. Mivel  $X_0 = 1$ , kapjuk, hogy  $X_1 = \xi_{1,1} \stackrel{D}{=} \xi$ , és így  $G_{X_1} = G_\xi$ . Felhasználva azt is, hogy

$$G_{X_0}(z) = E(z^{X_0}) = E(z) = z, \quad z \in \mathbb{C},$$

kapjuk, hogy  $n = 1$  esetén teljesül (2.9.1). Tegyük fel, hogy

$$G_{X_k} = \underbrace{G_\xi \circ \cdots \circ G_\xi}_{k \text{ db}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ekkor

$$G_{X_{n+1}} = G_{X_n} \circ G_\xi = \underbrace{(G_\xi \circ \cdots \circ G_\xi)}_{n \text{ db}} \circ G_\xi = \underbrace{G_\xi \circ \cdots \circ G_\xi}_{n+1 \text{ db}}.$$

A (2.9.2) összefüggést is teljes indukcióval mutatjuk meg. Mivel  $X_0 = 1$ , adódik, hogy  $E(X_0) = 1$ , és így (2.9.2) teljesül  $n = 0$  esetén. Mivel  $X_1 \stackrel{D}{=} \xi$ , kapjuk, hogy  $E(X_1) = E(\xi)$ , és így (2.9.2) teljesül  $n = 1$  esetén. Tegyük fel, hogy  $E(X_k) = (E(\xi))^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Ekkor a Wald-azonosság (2.8.6. Következmény) alapján kapjuk, hogy

$$E(X_{n+1}) = E(X_n) E(\xi) = (E(\xi))^n E(\xi) = (E(\xi))^{n+1},$$

ahol a Wald-azonosságot valóban alkalmazhattuk, mert az indukciós feltétel és  $E(\xi) < \infty$  miatt  $E(X_n) = (E(\xi))^n < \infty$ .  $\square$

**2.9.4. Állítás.** Legyen  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  egy Galton-Watson-folyamat  $\xi$  utódeloszlással. Ekkor

$$(2.9.3) \quad G_{X_n}(z) = (G_{X_0} \circ \underbrace{G_\xi \circ \cdots \circ G_\xi}_{n \text{ db}})(z), \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Továbbá, ha  $E(X_0) < \infty$  és  $E(\xi) < \infty$ , akkor

$$(2.9.4) \quad E(X_n) = E(X_0) \cdot (E(\xi))^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

**Bizonyítás.** Mivel tetszőleges  $n \in \mathbb{Z}_+$  esetén  $X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_{n,i}$ , ahol  $\xi_{n,i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , azonos eloszlásúak és függetlenek  $X_n$ -től, a 2.8.5. Tétel (véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye) alapján kapjuk, hogy

$$(2.9.5) \quad G_{X_{n+1}}(z) = G_{X_n}(G_{\xi_{1,1}}(z)), \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

A (2.9.3) összefüggést teljes indukcióval igazoljuk. Az (2.9.5) összefüggés  $n = 0$  esetén nem más, mint a (2.9.3) összefüggés  $n = 1$  esetén. Tegyük fel, hogy (2.9.3) teljesül  $1, 2, \dots, n$  esetén. Ekkor (2.9.5) alapján

$$\begin{aligned} G_{X_{n+1}}(z) &= G_{X_n}(G_\xi(z)) = (G_{X_0} \circ \underbrace{G_\xi \circ \cdots \circ G_\xi}_{n \text{ db}})(G_\xi(z)) \\ &= G_{X_0} \circ \underbrace{G_\xi \circ \cdots \circ G_\xi}_{n+1 \text{ db}}(z), \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

A (2.9.4) összefüggés hasonlóan igazolható teljes indukcióval.  $\square$

**2.9.5. Tétel. (Kihalási tétel)** Legyen  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  egy Galton-Watson-folyamat,  $X_0 = 1$  kezdeti értékkel és  $\xi$  utódeloszlással, hogy  $E(\xi) < \infty$ .

(i) Ekkor a  $q^*$  kihalási valószínűség az

$$x = G_\xi(x), \quad x \in [0, 1],$$

egyenlet legkisebb gyöke (a legkisebb gyök alatt a gyökök infimumát értjük, melyről a bizonyításból kiderül, hogy valóban gyök).

(ii) Továbbá, az utódeloszlás várható értéke alapján az alábbi eseteket különböztethetjük meg:

$$\begin{aligned} \text{ha } E(\xi) < 1, & \quad \text{akkor } q^* = 1, \\ \text{ha } E(\xi) = 1 \text{ és } P(\xi = 1) < 1, & \quad \text{akkor } q^* = 1, \\ \text{ha } P(\xi = 1) = 1 \text{ és így } E(\xi) = 1, & \quad \text{akkor } q^* = 0, \\ \text{ha } E(\xi) > 1, & \quad \text{akkor } q^* < 1. \end{aligned}$$

**Bizonyítás.** (i): Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy mivel  $G_\xi(1) = 1$ , a  $G_\xi(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ , egyenletnek az  $x = 1$  mindig gyöke, tehát az egyenletnek garantáltan van a  $[0, 1]$  intervallumba eső gyöke. Továbbá, a 2.8.2. Tétel (iii) része alapján  $G_X$  folytonos a  $[0, 1]$  intervallumon, ezért a gyökök infimuma is gyök, ami azt jelenti, hogy a "legkisebb gyök" jól-definiált. Valóban, jelölje  $x_\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , a  $G_\xi(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ , egyenlet gyökeit, ahol  $\Gamma$  egy nemüres halmaz ( $1 \in \Gamma$  mindig teljesül). Legyen  $x_0 := \inf_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ . Ekkor

$x_0 \in [0, 1]$ ,  $G_\xi(x_\gamma) = x_\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , és létezik olyan  $\gamma_n \in \Gamma$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sorozat, hogy  $x_{\gamma_n} \rightarrow x_0$ , ha  $n \rightarrow \infty$ . Mivel  $G_\xi$  folytonos a  $[0, 1]$  intervallumon, kapjuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} G_\xi(x_{\gamma_n}) = G_\xi(x_0)$ . Továbbá, mivel  $G_\xi(x_{\gamma_n}) = x_{\gamma_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , teljesül az is, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_\xi(x_{\gamma_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\gamma_n} = x_0.$$

Így  $G_\xi(x_0) = x_0$ , azaz  $x_0$  is gyök. Végezül, mivel  $x_0$  a gyökök infimuma, nem létezik nála kisebb gyök.

Jelölje  $q$  a szóbanforgó legkisebb nemnegatív gyököt. Célunk azt megmutatni, hogy  $q = q^*$ .

Ekkor, mivel  $X_0 = 1$ , kapjuk, hogy

$$q^* = P(\{\exists k \in \mathbb{N} : X_k = 0\}) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_k = 0\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n \{X_k = 0\}\right),$$

ahol az utolsó lépésben a valószínűség folytonosságát használtuk tekintettel arra, hogy  $\bigcup_{k=1}^n \{X_k = 0\} \uparrow \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_k = 0\}$ , amint  $n \rightarrow \infty$ . Felhasználva, hogy ha  $X_k = 0$  valamely  $k \in \{1, \dots, n\}$  esetén, akkor  $X_{k+1} = \dots = X_n = 0$  (hiszen nincs bevándorlás), kapjuk, hogy

$$\bigcup_{k=1}^n \{X_k = 0\} = \{X_n = 0\},$$

és így

$$(2.9.6) \quad q^* = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{X_n}(0).$$

Idézzük fel, hogy (2.9.1) alapján

$$G_{X_n} = \underbrace{G_\xi \circ \dots \circ G_\xi}_{n \text{ db}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Továbbá,

$$(2.9.7) \quad 0 \leq P(\xi = 0) = G_\xi(0) \leq G_\xi(q) = q,$$

ahol a harmadik lépésben azt használtuk fel, hogy  $q \in [0, 1]$  és  $G_\xi$  monoton növekvő a  $[0, 1]$  intervallumon (lásd, a 2.8.2. Tétel (iii) részét), a negyedik lépésben pedig azt, hogy  $q$  (a legkisebb) gyök, melyről az előzőekben láttuk, hogy valóban gyök. Így, felhasználva, hogy  $\xi \stackrel{D}{=} X_1$ , kapjuk, hogy

$$0 \leq G_\xi(0) = G_{X_1}(0) \leq q,$$

melyből (2.9.7) alapján és felhasználva újra, hogy  $G_\xi$  monoton növekvő, adódik, hogy

$$(2.9.8) \quad 0 \leq G_\xi(0) \leq G_\xi(G_{X_1}(0)) \leq G_\xi(q) = q.$$

Figyelembe véve, hogy  $\xi \stackrel{D}{=} X_1$  és  $G_\xi \circ G_{X_1} = G_\xi \circ G_\xi = G_{X_2}$ , a (2.9.8) összefüggés maga után vonja, hogy

$$0 \leq G_{X_1}(0) \leq G_{X_2}(0) \leq q.$$

Ebből kiindulva, teljes indukcióval belátható, hogy

$$0 \leq G_{X_1}(0) \leq G_{X_2}(0) \leq \dots \leq G_{X_n}(0) \leq q, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tehát a  $(G_{X_n}(0))_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat monoton növekvő, minden tagja  $[0, q]$ -ban van, és így (2.9.6) miatt  $q^* = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{X_n}(0) \in [0, q]$ . Megjegyezzük, hogy (2.9.6) alapján csak a  $\lim_{n \rightarrow \infty} G_{X_n}(0)$  határérték létezése és az következik, hogy  $q^*$ -al egyenlő, az nem, hogy  $[0, q]$ -beli, a fenti finomabb gondolatmenetre volt szükség, hogy belássuk, hogy a határérték  $[0, q]$ -beli.

Mivel  $G_\xi$  folytonos  $[0, 1]$ -en, így

$$\begin{aligned} G_\xi(q^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} G_\xi(G_{X_n}(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_\xi(\underbrace{G_\xi \circ \cdots \circ G_\xi(0)}_{n \text{ db}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{G_\xi \circ \cdots \circ G_\xi(0)}_{n+1 \text{ db}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} G_{X_{n+1}}(0) = q^*. \end{aligned}$$

Ezért  $q^*$  gyöke a  $G_\xi(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ , egyenletnek. Mivel  $q^* \leq q$  és  $q$  a legkisebb gyök, kapjuk, hogy  $q^* = q$ .

(ii): *I. eset:* Tegyük fel először, hogy  $P(\xi = 0) + P(\xi = 1) < 1$ .

Ekkor  $G_\xi$  szigorúan monoton növekvő, kétszer folytonosan differenciálható és konvex a  $[0, 1]$  intervallumon, mert a 2.8.2. Tétel (v) részének bizonyítása és a 2.8.3. Megjegyzés alapján

$$\begin{aligned} G'_\xi(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} j x^{j-1} P(\xi = j) > 0, \quad x \in (0, 1], \\ G''_\xi(x) &= \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) x^{j-2} P(\xi = j) > 0, \quad x \in (0, 1], \end{aligned}$$

hiszen a  $P(\xi = j)$ ,  $j \geq 2$ , együtthatók közül valamelyik pozitív és tetszőleges  $x > 0$  esetén  $x^{j-1} > 0$ ,  $j \geq 1$ , és  $x^{j-2} > 0$ ,  $j \geq 2$ . Felhívjuk a figyelmet, hogy az előzőekben a  $G'_\xi(1)$  és  $G''_\xi(1)$  deriváltakat a 2.8.3. Megjegyzésben leírtak szerint értjük. Mivel  $G_\xi$  folytonos  $[0, 1]$ -en (speciálisan a 0 pontban), valóban a  $[0, 1]$  intervallumon lesz  $G_\xi$  szigorúan monoton növekvő, kétszer folytonosan differenciálható és konvex.

A Lagrange-féle középérték tétel szerint tetszőleges  $x \in [0, 1)$  esetén létezik olyan  $y \in (x, 1)$ , hogy

$$\frac{G_\xi(1) - G_\xi(x)}{1 - x} = G'_\xi(y).$$

Mivel  $G''_\xi(x) > 0$ ,  $x \in (0, 1]$ , és  $G'_\xi$  folytonos  $(-1, 1]$ -en (lásd, 2.8.2. Tétel (iv) része és 2.8.3. Megjegyzés), kapjuk, hogy  $G'_\xi$  szigorúan monoton növekvő a  $[0, 1]$  intervallumon, és így  $G'_\xi(y) < G'_\xi(1) = E(\xi)$ , ahol azt a konvenciót is használtuk, hogy az  $[0, 1) \ni x \mapsto G'_\xi(x)$  függvény folytonosan kiterjeszthető  $[0, 1]$ -re a  $G'_\xi(1) := E(\xi)$  definícióval (lásd 2.8.3. Megjegyzés).

*I/(a) aleset:* Ha  $E(\xi) \leq 1$ , akkor

$$\frac{1 - G_\xi(x)}{1 - x} = \frac{G_\xi(1) - G_\xi(x)}{1 - x} = G'_\xi(y) < G'_\xi(1) = E(\xi) \leq 1, \quad x \in [0, 1),$$

melyből következik, hogy

$$1 - G_\xi(x) < 1 - x, \quad x \in [0, 1),$$

és így  $G_\xi(x) > x$ ,  $x \in [0, 1)$ . Ezért a  $G_\xi(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ , egyenletnek csak az  $x = 1$  a megoldása, ezért ekkor a kihalás  $q^*$  valószínűsége, mely a minimális megoldás az (i) rész alapján, 1-gyel egyenlő.

*I/(b) aleset:* Ha  $E(\xi) > 1$ , akkor  $G'_\xi(1) = E(\xi) > 1$ , és mivel  $G'_\xi$  folytonos a  $(-1, 1]$  intervallumon (lásd, 2.8.2. Tétel (iv) része és 2.8.3. Megjegyzés), létezik olyan  $x \in (0, 1)$ ,

hogy  $G'_\xi(x) > 1$ . A fentiek alapján a Lagrange-féle középérték tétel szerint létezik olyan  $y \in (x, 1)$ , hogy

$$\frac{G_\xi(1) - G_\xi(x)}{1 - x} = G'_\xi(y).$$

Mivel  $G'_\xi$  szigorúan monoton növekvő a  $[0, 1]$ -en, kapjuk, hogy  $G'_\xi(x) < G'_\xi(y)$ , és így

$$1 < G'_\xi(x) < G'_\xi(y),$$

melyből következik, hogy

$$\frac{1 - G_\xi(x)}{1 - x} = \frac{G_\xi(1) - G_\xi(x)}{1 - x} = G'_\xi(y) > 1.$$

Mivel  $x \in (0, 1)$ , a fentiek alapján  $1 - G_\xi(x) > 1 - x$ , azaz  $G_\xi(x) - x < 0$ . Mivel  $G_\xi(0) - 0 = P(\xi = 0) \geq 0$ , és a  $[0, 1] \ni t \mapsto G_\xi(t)$  függvény folytonos, a Bolzano-tétel alapján a  $[0, 1] \ni t \mapsto G_\xi(t)$  függvénynek létezik gyöke  $[0, x)$ -ben, és így a  $[0, 1)$ -ben is, hiszen  $[0, x) \subset [0, 1)$ . Így a kihalás  $q^*$  valószínűsége, mely a minimális megoldás az (i) rész alapján, szigorúan kisebb, mint 1.

II. eset: Tegyük most fel, hogy  $P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 1$ . Ekkor

$$(2.9.9) \quad \begin{aligned} G_\xi(x) - x &= x^0 P(\xi = 0) + x^1 P(\xi = 1) - x = 1 - P(\xi = 1) + x P(\xi = 1) - x \\ &= (1 - P(\xi = 1))(1 - x), \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

II/(a) aleset: Ha  $P(\xi = 1) < 1$ , azaz  $E(\xi) = 0 \cdot P(\xi = 0) + 1 \cdot P(\xi = 1) = P(\xi = 1) < 1$ , akkor (2.9.9) alapján a  $G_\xi(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ , egyenletnek, azaz a  $G_\xi(x) - x = 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , egyenletnek csak az  $x = 1$  a megoldása, és így a kihalás  $q^*$  valószínűsége, mely a minimális megoldás az (i) rész alapján, 1-gyel egyenlő.

II/(b) aleset: Ha  $P(\xi = 1) = 1$ , azaz  $E(\xi) = 1$ , akkor (2.9.9) alapján a  $G_\xi(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ , egyenletnek, azaz a  $G_\xi(x) - x = 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , egyenletnek tetszőleges  $x \in [0, 1]$  megoldása, és így a kihalás  $q^*$  valószínűsége, mely a minimális megoldás az (i) rész alapján, 0-val egyenlő.

Összefoglalva:

- ha  $E(\xi) < 1$  és  $P(\xi \leq 1) < 1$ , akkor  $q^* = 1$  (I/(a) aleset),
- ha  $E(\xi) < 1$  és  $P(\xi \leq 1) = 1$ , akkor  $q^* = 1$  (II/(a) aleset),
- ha  $E(\xi) = 1$  és  $P(\xi \leq 1) < 1$ , akkor  $q^* = 1$  (I/(a) aleset),
- ha  $E(\xi) = 1$  és  $P(\xi \leq 1) = 1$ , akkor  $q^* = 0$  (II/(b) aleset),
- ha  $E(\xi) > 1$  és  $P(\xi \leq 1) < 1$ , akkor  $q^* < 1$  (I/(b) aleset).

Felhívjuk a figyelmet, hogy olyan eset nincs, hogy  $E(\xi) > 1$  és  $P(\xi \leq 1) = 1$ , mert  $E(\xi) = P(\xi = 1) \leq 1$ .

Továbbá, végiggondoljuk, hogy

$$E(\xi) = 1 \text{ és } P(\xi \leq 1) < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad E(\xi) = 1 \text{ és } P(\xi = 1) < 1.$$

Az odafele irány abból következik, hogy  $P(\xi = 1) \leq P(\xi \leq 1)$ . A visszafele irány pedig a következőképpen látható be. Mivel  $1 = E(\xi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell P(\xi = \ell)$  és  $P(\xi = 1) < 1$ , kapjuk, hogy létezik olyan  $\ell \geq 2$ , hogy  $P(\xi = \ell) > 0$ , amiből adódik, hogy

$$P(\xi \leq 1) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 1 - \sum_{j=3}^{\infty} P(\xi = j) \leq 1 - P(\xi = \ell) < 1.$$

Végezetül, belátjuk, hogy

$$E(\xi) = 1 \text{ és } P(\xi \leq 1) = 1 \iff P(\xi = 1) = 1.$$

Az odafele irány az alábbi módon látható be. Mivel  $P(\xi \leq 1) = 1$ , ezért  $P(\xi = \ell) = 0$ ,  $\ell \geq 2$ , és így  $E(\xi) = P(\xi = 1)$ . Mivel  $E(\xi) = 1$ , ezért  $P(\xi = 1) = 1$ . A visszafele irány triviálisan következik, hiszen  $P(\xi = 1) = 1$  esetén  $P(\xi = \ell) = 0$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$ .  $\square$

**2.9.6. Megjegyzés.** Ha  $P(\xi \leq 1) < 1$ , akkor a 2.9.5. Tétel bizonyításában láttuk, hogy  $G_\xi$  szigorúan konvex, szigorúan monoton növekvő és kétszer folytonosan differenciálható a  $[0, 1]$  intervallumon. A 1. ábrán a 2.9.5. Tétel (ii) részének bizonyításában szereplő I/(a), I/(b), II/(a) és II/(b) esetekben ábrázoltuk a  $G_\xi$  generátorfüggvényt, bejelölve a  $q^*$  kihalási valószínűséget is.  $\square$

**2.9.7. Megjegyzés.** Ha például  $\xi$  eloszlása  $P(\xi = 0) = \frac{1}{4}$ ,  $P(\xi = 2) = \frac{1}{5}$  és  $P(\xi = 5) = \frac{11}{20}$ , akkor a 2.9.5. Tétel (i) részében szereplő  $x = G_\xi(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ , egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$x = x^0 \cdot \frac{1}{4} + x^2 \cdot \frac{1}{5} + x^5 \cdot \frac{11}{20}, \quad x \in [0, 1],$$

azaz

$$11x^5 + 4x^2 - 20x + 5 = 0, \quad x \in [0, 1].$$

$\square$

A kihalási tétel miatt a Galton-Watson-folyamatokat az utódeloszlás várható értéke alapján osztályozzuk. Azt mondjuk, hogy egy Galton-Watson-folyamat *szubkritikus*, ha  $E(\xi) < 1$ , *kritikus*, ha  $E(\xi) = 1$  és *szuperkritikus*, ha  $E(\xi) > 1$ . Továbbá, a 2.9.5. Tétel alapján (annak feltételei mellett)

$$q^* = \begin{cases} 0 & \text{ha } P(\xi = 0) = 0, \\ 1 & \text{ha } P(\xi = 0) > 0 \text{ és } E(\xi) \leq 1. \end{cases}$$

Ha  $P(\xi = 0) = 0$ , akkor  $P(\xi \geq 1) = 1$ , és így  $P(X_n \geq 1) = 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ , illetve  $E(\xi) \geq 1$ .

**2.9.8. Állítás. (Additivitás)** Legyen  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  egy Galton-Watson-folyamat  $\xi$  utódeloszlással, hogy  $X_0 = i$ , ahol  $i \in \mathbb{N}$ . Ekkor léteznek olyan  $\{Y_n^{(j)} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ ,  $j = 1, \dots, i$ , független Galton-Watson folyamatok  $\xi$  utódeloszlással, hogy  $Y_0^{(j)} = 1$ ,  $j = 1, \dots, i$ , és

$$(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (Y_n^{(1)} + \dots + Y_n^{(i)})_{n \in \mathbb{Z}_+},$$

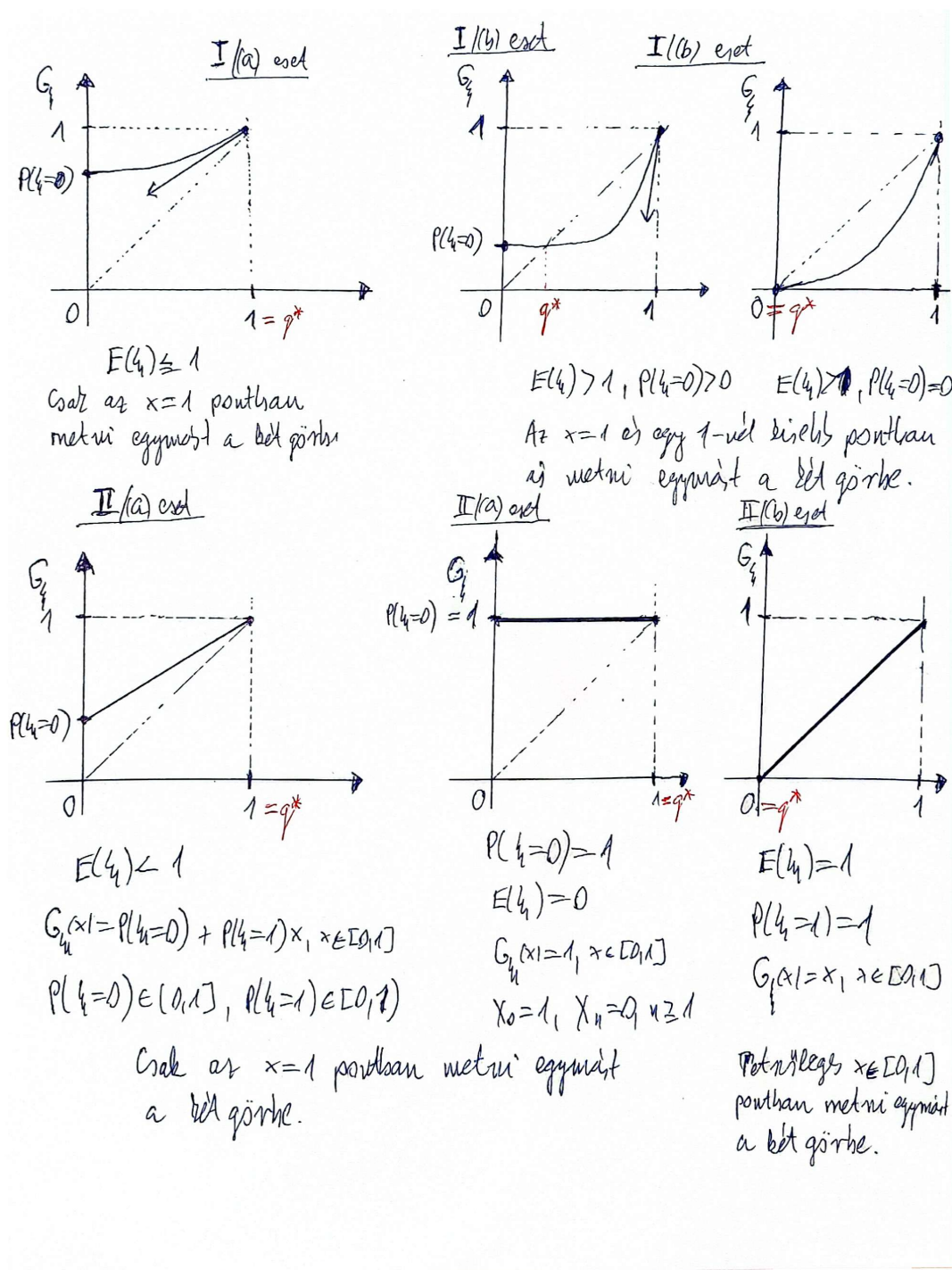
ahol  $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$  a sztochasztikus folyamatok közötti eloszlásbeli egyenlőséget jelöli.

Felhívjuk a figyelmet, hogy a 2.9.8. Állításban szereplő  $\{Y_n^{(j)} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ ,  $j = 1, \dots, i$ , Galton-Watson folyamatok nemcsak függetlenek, hanem azonos eloszlásúak is (hiszen mindegyik elágazó folyamat 1-ből indul és az utódeloszlásuk  $\xi$ ).

**2.9.9. Tétel.** Legyen  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  egy Galton-Watson-folyamat  $\xi$  utódeloszlással, hogy  $E(\xi) < \infty$ . Ekkor

$$q^* = P(\{\text{létezik } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ melyre } X_n = 0\}) = \sum_{i=0}^{\infty} (t^*)^i P(X_0 = i),$$

ahol  $t^*$  az  $x = G_\xi(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ , egyenlet legkisebb gyöke.



CamScannerrel szkennelve

1. ábra. Kihalási valószínűségek.

**Bizonyítás.** A teljes valószínűség tétele alapján, a 2.9.8. Állítás jelöléseit is használva, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(\{\exists n \in \mathbb{Z}_+ : X_n = 0\}) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(\{\exists n \in \mathbb{Z}_+ : X_n = 0\} \mid X_0 = i) P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P(\{\exists n \in \mathbb{Z}_+ : Y_n^{(1)} + \dots + Y_n^{(i)} = 0\} \mid X_0 = i) P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{j=1}^i \{Y_n^{(j)} = 0\}\right) P(X_0 = i). \end{aligned}$$

Végiggondoljuk, hogy

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{j=1}^i \{Y_n^{(j)} = 0\} = \bigcap_{j=1}^i \bigcup_{n=0}^{\infty} \{Y_n^{(j)} = 0\}.$$

Ha  $\omega \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{j=1}^i \{Y_n^{(j)} = 0\}$ , akkor létezik olyan  $n(\omega) \in \mathbb{Z}_+$ , hogy  $Y_{n(\omega)}^{(j)}(\omega) = 0$ ,  $j \in \{1, \dots, i\}$ , azaz  $\omega \in \bigcap_{j=1}^i \{\exists n \in \mathbb{Z}_+ : Y_n^{(j)} = 0\}$ , és így  $\omega \in \bigcap_{j=1}^i \bigcup_{n=0}^{\infty} \{Y_n^{(j)} = 0\}$ . Ha  $\omega \in \bigcap_{j=1}^i \bigcup_{n=0}^{\infty} \{Y_n^{(j)} = 0\}$ , akkor minden  $j \in \{1, \dots, i\}$  esetén létezik olyan  $n_j(\omega) \in \mathbb{Z}_+$ , hogy  $Y_{n_j(\omega)}^{(j)}(\omega) = 0$ . Mivel ekkor  $Y_{n_j(\omega)+\ell}^{(j)}(\omega) = 0$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}_+$  (hiszen  $\{Y_n^{(j)} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ ,  $j = 1, \dots, i$ , bevándorlás nélküli elágazó folyamatok), kapjuk, hogy  $Y_k^{(j)}(\omega) = 0$ ,  $k \geq \max\{n_1(\omega), \dots, n_i(\omega)\}$ ,  $j \in \{1, \dots, i\}$ . Így  $\omega \in \{\exists n \in \mathbb{Z}_+ : \bigcap_{j=1}^i \{Y_n^{(j)} = 0\}\}$ , azaz  $\omega \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{j=1}^i \{Y_n^{(j)} = 0\}$ .

Ezért, a 2.9.5. Tétel és a 2.9.8. Állítás alapján (külön kiemelve az  $\{Y_n^{(j)} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ ,  $j = 1, \dots, i$ , elágazó folyamatok függetlenségét), kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(\{\exists n \in \mathbb{Z}_+ : X_n = 0\}) &= \sum_{i=0}^{\infty} P\left(\bigcap_{j=1}^i \bigcup_{n=0}^{\infty} \{Y_n^{(j)} = 0\}\right) P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^i P(\{\exists n \in \mathbb{Z}_+ : Y_n^{(j)} = 0\}) P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (t^*)^i P(X_0 = i), \end{aligned}$$

ahol a  $\prod_{j=1}^0 := 1$  konvenciót is használtuk. □

**2.9.10. Tétel.** Legyen  $\mathbb{X} = \{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$  egy Galton-Watson-folyamat  $\xi$  utódeloszlással, hogy  $P(\xi = 1) < 1$ . Ekkor minden pozitív egész  $j \in \mathbb{N}$  állapot tranzienst, és ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j) = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Megjegyezzük, hogy ha  $P(\xi = 1) = 1$ , akkor  $P(X_n = X_0, n \in \mathbb{Z}_+) = 1$ , és így  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j) = P(X_0 = j)$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$ .

### 3. Felújítási folyamatok és a Poisson-folyamat

#### 3.1. Exponenciális eloszlás, Gamma eloszlás

**3.1.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy  $X$  abszolút folytonos valószínűségi változó exponenciális eloszlást követ  $\lambda > 0$  paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

és így eloszlásfüggvénye

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Jelölés:  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

Ellenőrizhető, hogy  $X$  várható értéke  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ .

**3.1.2. Definíció. (Örökifjú tulajdonság)** Azt mondjuk, hogy egy  $X$  nemnegatív értékű, abszolút folytonos eloszlású véletlen változó rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal, ha tetszőleges  $t, s \geq 0$  számok esetén

$$P(X \geq s + t \mid X \geq s) = P(X \geq t).$$

Az örökifjú tulajdonság azt fejezi ki, hogy ha valamilyen élettartamot vagy időtartamot tekintünk, ami rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor ha már tudjuk, hogy valamennyi  $s$  idő eltelt a vizsgált időtartamból, a hátralévő időtartam eloszlása nem függ ettől az  $s$  értéktől. Tekinthejtük úgy, mintha a véletlen időtartam most indulna.

**3.1.3. Tétel. (Az örökifjú tulajdonság jellemzése)** Legyen  $X$  egy nemnegatív értékű, abszolút folytonos eloszlású véletlen változó. Ekkor  $X$  akkor és csak akkor rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal, ha exponenciális eloszlást követ.

**3.1.4. Definíció. (Túlélési függvény)** Legyen adott egy  $X$  véletlen változó  $F$  eloszlásfüggvényével. Ekkor az

$$\bar{F}(t) := 1 - F(t) = P(X \geq t), \quad t \in \mathbb{R},$$

függvényt az  $X$  véletlen változó túlélési függvényének nevezzük.

**3.1.5. Példa.** Legyen  $X$  egy nemnegatív értékű, abszolút folytonos eloszlású véletlen változó, melynek eloszlásfüggvénye  $F$ , sűrűségfüggvénye  $f$ . Tegyük fel, hogy  $F(t) < 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Ekkor tetszőleges  $t \geq 0$  esetén,  $X$ -nek az  $\{X \geq t\}$  eseményre vonatkozó feltételes eloszlásfüggvénye, illetve feltételes sűrűségfüggvénye:

$$F_{X|\{X \geq t\}}(s) = \begin{cases} \frac{F(s) - F(t)}{1 - F(t)} & \text{ha } s > t, \\ 0 & \text{ha } s \leq t, \end{cases}$$

és

$$f_{X|\{X \geq t\}}(s) = \begin{cases} \frac{f(s)}{1 - F(t)} & \text{ha } s > t, \\ 0 & \text{ha } s \leq t, \end{cases}$$

hiszen tetszőleges  $t \geq 0$  és  $s > t$  esetén

$$P(X < s | X \geq t) = \frac{P(t \leq X < s)}{P(X \geq t)} = \frac{F(s) - F(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_s^t f(u) du.$$

Speciálisan, ha  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , akkor tetszőleges  $t \geq 0$  esetén

$$f_{X|\{X \geq t\}}(s) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda t}} = \lambda e^{-\lambda(s-t)} & \text{ha } s > t, \\ 0 & \text{ha } s \leq t, \end{cases}$$

és így  $(X - t)$ -nek az  $\{X \geq t\}$  eseményre vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X-t|\{X \geq t\}}(s) = f_{X|\{X \geq t\}}(s+t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda s} & \text{ha } s > 0, \\ 0 & \text{ha } s \leq 0, \end{cases}$$

azaz  $(X - t)$ -nek az  $\{X \geq t\}$  eseményre vonatkozó feltételes eloszlása  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlás. Valóban, tetszőleges  $t \geq 0$  és  $s > 0$  esetén teljesül, hogy

$$\begin{aligned} P(X - t < s | X \geq t) &= P(X < t + s | X \geq t) = \int_{-\infty}^{t+s} f_{X|\{X \geq t\}}(u) du \\ &= \int_{-\infty}^s f_{X|\{X \geq t\}}(v+t) dv, \end{aligned}$$

melyből adódik, hogy  $f_{X-t|\{X \geq t\}}(s) = f_{X|\{X \geq t\}}(s+t)$ .

Az előzőek alapján, ha  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , akkor  $(X - t)$ -nek az  $\{X \geq t\}$  eseményre vonatkozó feltételes várható értéke  $\frac{1}{\lambda}$ , és ezért  $X$ -nek az  $\{X \geq t\}$  eseményre vonatkozó feltételes várható értéke:

$$E(X | X \geq t) = E(X - t | X \geq t) + t = \frac{1}{\lambda} + t.$$

□

**3.1.6. Definíció. (Hazard függvény)** Legyen  $X$  egy nemnegatív értékű, abszolút folytonos eloszlású véletlen változó, melynek eloszlásfüggvénye  $F$ , sűrűségfüggvénye  $f$ . Tegyük fel, hogy  $F(t) < 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Ekkor az

$$r(t) := \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

függvényt az  $X$  véletlen változó hazard függvényének (angolul hazard function vagy failure function vagy force of mortality) nevezzük.

**3.1.7. Példa.** Legyen  $X$  egy nemnegatív értékű, abszolút folytonos eloszlású véletlen változó (véletlen élettartam), melynek eloszlásfüggvénye  $F$ , sűrűségfüggvénye  $f$ . Tegyük fel, hogy  $F(t) < 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Határozzuk meg  $X$  hazard függvényének a segítségével, hogy mennyi annak a valószínűsége, hogy egy  $t$  idős egyed (eszköz) nem éli meg a  $t + s$  időt, ahol  $t \geq 0$  és  $s > 0$ .

Vegyük észre, hogy

$$(\log(\bar{F}(t)))' = -\frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = -r(t), \quad t \geq 0,$$

és  $\bar{F}(0) = P(X \geq 0) = 1$  (hiszen  $X$  nemnegatív) és így  $\log(\bar{F}(0)) = 0$ . A szóbanforgó Cauchy probléma megoldása

$$\bar{F}(t) = e^{-\int_0^t r(u) du}, \quad t \geq 0,$$

és így

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t r(u) du}, \quad t \geq 0, \quad f(t) = r(t)e^{-\int_0^t r(u) du}, \quad t \geq 0.$$

Ezért tetszőleges  $t \geq 0$  és  $s > 0$  esetén

$$\begin{aligned} (3.1.1) \quad P(X < t + s | X \geq t) &= \frac{P(t \leq X < t + s)}{P(X \geq t)} = \frac{F(t + s) - F(t)}{\bar{F}(t)} \\ &= \frac{\left(1 - e^{-\int_0^{t+s} r(u) du}\right) - \left(1 - e^{-\int_0^t r(u) du}\right)}{e^{-\int_0^t r(u) du}} \\ &= \frac{e^{-\int_0^t r(u) du} - e^{-\int_0^{t+s} r(u) du}}{e^{-\int_0^t r(u) du}} = 1 - e^{-\int_t^{t+s} r(u) du}. \end{aligned}$$

Ebből az is adódik, hogy tetszőleges  $t \geq 0$  esetén

$$f_{X|\{X \geq t\}}(t + s) = r(t + s)e^{-\int_t^{t+s} r(u) du}, \quad s > 0,$$

melyből következik, hogy tetszőleges  $t \geq 0$  esetén

$$f_{X|\{X \geq t\}}(q) = \begin{cases} r(q)e^{-\int_t^q r(u) du}, & \text{ha } q > t, \\ 0, & \text{ha } q \leq t. \end{cases}$$

Ha  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , akkor

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda, \quad t \geq 0,$$

és így (3.1.1) alapján

$$P(X < t + s | X \geq t) = 1 - e^{-\lambda s}.$$

□

### 3.1.8. Tétel. (Két független exponenciális eloszlású véletlen változó minimuma)

Legyenek  $X$  és  $Y$  független véletlen változók, hogy  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  és  $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ , ahol  $\lambda > 0$  és  $\mu > 0$ . Ekkor

$$(i) \quad \min(X, Y) \sim \text{Exp}(\lambda + \mu),$$

$$(ii) \quad P(X \leq Y) = P(X = \min(X, Y)) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad \text{és} \quad P(Y \leq X) = P(Y = \min(X, Y)) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

**Bizonyítás.** (i): Tetszőleges  $z \in \mathbb{R}$  esetén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(\min(X, Y) < z) &= 1 - P(\min(X, Y) \geq z) = 1 - P(X \geq z, Y \geq z) \\ &= 1 - P(X \geq z)P(Y \geq z) \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda z}e^{-\mu z} = 1 - e^{-(\lambda + \mu)z} & \text{ha } z > 0, \\ 1 - 1 \cdot 1 = 0 & \text{ha } z \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(ii): A teljes valószínűség tétele alapján, felhasználva azt is, hogy  $X$  nemnegatív, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(X = \min(X, Y)) &= P(X \leq Y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X \leq Y \mid X = x) f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} P(X \leq Y \mid X = x) \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} P(x \leq Y) \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\mu x} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

A teljes valószínűség tételét úgy is használhatjuk, hogy az  $Y$  nemnegatív véletlen változóra vesszünk feltételt:

$$\begin{aligned} P(X = \min(X, Y)) &= P(X \leq Y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X \leq Y \mid Y = y) f_Y(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} P(X \leq Y \mid Y = y) \mu e^{-\mu y} dy \\ &= \int_0^{\infty} P(X \leq y) \mu e^{-\mu y} dy = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda y}) \mu e^{-\mu y} dy \\ &= \mu \int_0^{\infty} e^{-\mu y} dy - \mu \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)y} dy = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

Továbbá, a fentiek alapján

$$P(Y = \min(X, Y)) = P(Y \leq X) = 1 - P(Y > X) = 1 - P(Y \geq X) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

ahol a harmadik lépésben felhasználtuk, hogy  $P(X = Y) = 0$ , mely abból következik, hogy

$$P(X = Y) = \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=y\}} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=y\}} \lambda \mu e^{-\lambda x} e^{-\mu y} dx dy$$

és az  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$  halmaz 2-dimenziós Lebesgue-mértéke 0.  $\square$

Ezek az eredmények érvényben maradnak tetszőleges véges sok független exponenciális eloszlású változó esetén is az alábbiak szerint.

### 3.1.9. Tétel. (Véges sok független exponenciális eloszlású véletlen változó minimuma)

Legyen  $n \in \mathbb{N}$  és  $X_1, X_2, \dots, X_n$  független véletlen változók, hogy  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ahol  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ekkor

$$(i) \min(X_1, \dots, X_n) \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n),$$

$$(ii) P(X_i = \min(X_1, \dots, X_n)) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

**3.1.10. Definíció.** Legyen  $n \in \mathbb{N}$  és  $X_1, \dots, X_n$  független azonos exponenciális eloszlású változók  $\lambda > 0$  paraméterrel. Ekkor azt mondjuk, hogy az  $S := X_1 + \dots + X_n$  véletlen változó Gamma (Erlang) eloszlást követ  $n$  renddel és  $\lambda$  paraméterrel.

Agner Krarup Erlang dán matematikus volt, ő alkotta meg az ERLANG (ERICSSON LANGUAGE) funkcionális programnyelvet 1986-ban. A Whatsup applikációt is ebben kódolták.

**3.1.11. Állítás.** Az  $n \in \mathbb{N}$ -ed rendű és  $\lambda > 0$  paraméterű Gamma eloszlás sűrűség- és eloszlásfüggvénye:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

és

$$F(t) = \begin{cases} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

**Bizonyítás.** Az állítást  $n$  szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az  $n = 1$  esetben triviálisan teljesül az állítás, hiszen az elsőrendű és  $\lambda > 0$  paraméterű Gamma eloszlás nem más, mint a  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlás.

Az  $n = 2$  esetben is leírjuk a levezetést, a későbbi indukciós lépés jobb megértése céljából. A teljes valószínűség tétele alapján, felhasználva azt is, hogy  $X_2$  nemnegatív, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_{X_1+X_2}(t) &= P(X_1 + X_2 < t) = \int_0^{\infty} P(X_1 + X_2 < t \mid X_2 = x) \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} P(X_1 + x < t) \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} F_{X_1}(t - x) \lambda e^{-\lambda x} dx, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Így  $F_{X_1+X_2}(t) = 0$ , ha  $t \leq 0$ , és

$$\begin{aligned} F_{X_1+X_2}(t) &= \int_0^t (1 - e^{-\lambda(t-x)}) \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dx \\ &= P(X < t) - \lambda e^{-\lambda t} t = 1 - e^{-\lambda t} - t \lambda e^{-\lambda t} = (e^{\lambda t} - 1 - \lambda t) e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Ezért  $X_1 + X_2$  sűrűségfüggvénye  $f_{X_1+X_2}(t) = 0$ , ha  $t \leq 0$ , és

$$f_{X_1+X_2}(t) = \frac{d}{dt} (1 - e^{-\lambda t} - t \lambda e^{-\lambda t}) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Tegyük most fel, hogy az állítás teljesül  $1, 2, \dots, n$  esetén, és megmutatjuk, hogy teljesül  $n + 1$  esetén is. Tetszőleges  $t \in \mathbb{R}$  esetén, a teljes valószínűség tétele alapján, felhasználva az indukciós feltevést és azt is, hogy  $X_1 + \dots + X_n$  nemnegatív, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_{X_1+\dots+X_{n+1}}(t) &= P(X_1 + \dots + X_{n+1} < t) \\ &= \int_0^{\infty} P(X_1 + \dots + X_{n+1} < t \mid X_1 + \dots + X_n = x) \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} P(x + X_{n+1} < t) \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} F_{X_{n+1}}(t - x) \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Így  $F_{X_1+\dots+X_{n+1}}(t) = 0$ , ha  $t \leq 0$ , és

$$\begin{aligned}
 F_{X_1+\dots+X_{n+1}}(t) &= \int_0^t (1 - e^{-\lambda(t-x)}) \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \\
 &= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda t} dx \\
 &= F_{X_1+\dots+X_n}(t) - \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1} dx \\
 &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} - \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \cdot \frac{t^n}{n} \\
 &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0,
 \end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti lépésben használtuk az indukciós feltevést is. Ebből adódik az  $X_1 + \dots + X_{n+1}$  eloszlásfüggvényére vonatkozó formula.

A sűrűségfüggvényre vonatkozó képletet megkaphatnánk deriválással is, de most egy másik utat mutatunk be. Az előzőek alapján

$$F_{X_1+\dots+X_{n+1}}(t) = \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx - \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \cdot \frac{t^n}{n}, \quad t > 0,$$

melyből parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 F_{X_1+\dots+X_{n+1}}(t) &= \left[ e^{-\lambda x} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} x^n \right]_0^t - \int_0^t \frac{\lambda^n}{n!} x^n (-\lambda) e^{-\lambda x} dx - \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \frac{t^n}{n} \\
 &= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \int_0^t x^n e^{-\lambda x} dx \\
 &= \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1-1)!} x^{n+1-1} e^{-\lambda x} dx, \quad t > 0,
 \end{aligned}$$

melyből a sűrűségfüggvény definíciója alapján kapjuk az  $X_1 + \dots + X_{n+1}$  sűrűségfüggvényére vonatkozó formulát.  $\square$

## 3.2. Számláló és felújítási folyamatok

Bevezetjük folytonos idejű sztochasztikus folyamatok egy osztályát, amikor bizonyos események bekövetkezéseit számoljuk.

**3.2.1. Definíció. (Számláló folyamat)** Legyenek  $S_1, S_2, \dots$  nemnegatív értékű valószínűségi változók. Legyen továbbá  $T_0 := 0$  és  $T_n := S_1 + \dots + S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ekkor az

$$N_t := |\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\}| = \max\{n \in \mathbb{Z}_+ : T_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

sztochasztikus folyamatot számláló folyamatnak nevezzük. (Vegyük észre, hogy  $N_t \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ ,  $t \geq 0$ .)

Ha az  $S_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , véletlen változók bizonyos események között eltelt időket írják le, akkor a  $T_n$  véletlen változó az  $n$ -edik esemény bekövetkezésének időpontja, az  $N_t$  véletlen változó pedig megmondja, hogy egy adott  $t$  időpontig (a  $t$  időponttal bezárólag)

hány esemény következett már be. Ha például  $T_1 = T_2 = 0$  és  $T_3 > 0$ , akkor  $N_0 = 2$ , azaz  $N_0$  nem feltétlenül 0. Ha  $S_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , egyenletes eloszlású véletlen változó a  $[0, \frac{1}{k^2}]$  intervallumon, akkor  $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} S_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , és így  $N_t = \infty$  tetszőleges  $t > \frac{\pi^2}{6}$  esetén.

**3.2.2. Definíció. (Felújítási folyamat)** Egy  $(N_t)_{t \geq 0}$  számláló folyamatot felújítási folyamatnak nevezzünk, ha a kapcsolatos  $S_1, S_2, \dots$  (nemnegatív) véletlen változók független és azonos eloszlásúak. Ekkor az  $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \infty]$ ,  $m(t) := E(N_t)$ ,  $t \geq 0$ , függvényt  $(N_t)_{t \geq 0}$  felújítási függvényének nevezzük.

A felújítási függvény kapcsán felhívjuk a figyelmet, hogy esetlegesen  $\infty$ -t is felvehet értékként.

**3.2.3. Tétel. (Elemi felújítási tétel)** Legyen  $(N_t)_{t \geq 0}$  egy felújítási folyamat, melyre  $P(S_1 = 0) < 1$ . Ekkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} E\left(\frac{N_t}{t}\right) = \frac{1}{E(S_1)}, \quad \text{valamint} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{E(S_1)}, \quad \text{P-m.b.}$$

A 3.2.3. Tételben  $E(S_1) \in (0, \infty]$ , hiszen  $P(S_1 = 0) < 1$ , és így  $\frac{1}{E(S_1)} \in [0, \infty)$  (az  $E(S_1) = \infty$  esetben  $\frac{1}{E(S_1)} := 0$ ). A 3.2.3. Tétel első állítása szerint az események (felújítások) bekövetkezésének hosszútávú egységnyi idő alatti várható száma megegyezik az események bekövetkezései között eltelt várható időtartam reciprokával.

**3.2.4. Állítás.** Legyen  $(N_t)_{t \geq 0}$  egy felújítási folyamat, hogy  $P(S_1 = 0) < 1$ . Ekkor  $(N_t)_{t \geq 0}$  felújítási függvénye,  $m$ , véges (azaz  $m(t) \in [0, \infty)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ), monoton növekvő és jobbról folytonos. Következésképpen, tetszőleges  $t \geq 0$  esetén  $N_t$  nemnegatív egészértékű véletlen változó.

Tekinthetjük a felújítási folyamatok általánosítását, mikor egy esemény (felújítás) bekövetkezésekor a folyamat nem egyet ugrik felfelé, hanem valamilyen véletlen mennyiséget változik. Biztosításmatematikában ez egy tipikus szituáció.

**3.2.5. Definíció. (Felújítási díjfolyamatok)** Legyenek  $(S_n, C_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , független és azonos eloszlású vektorváltozók, hogy  $S_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , és  $P(S_1 = 0) < 1$ . Legyen  $(N_t)_{t \geq 0}$  az  $S_1, S_2, \dots$  véletlen változók, mint felújítások közötti idők által meghatározott felújítási folyamat. Ekkor az

$$R_t := \sum_{n=1}^{N_t} C_n = C_1 + \dots + C_{N_t}, \quad t \geq 0,$$

sztochasztikus folyamatot felújítási díjfolyamatnak nevezzük, ahol az üres összeget 0-nak definiáljuk.

Az 3.2.4. Állítás alapján tetszőleges  $t \geq 0$  esetén  $P(N_t \in \mathbb{Z}_+) = 1$ , és így  $C_{N_t}$  jóldefiniált.

**3.2.6. Tétel. (Elemi díjfelújítási tétel)** Legyen  $(R_t)_{t \geq 0}$  egy felújítási díjfolyamat, hogy  $P(S_1 = 0) < 1$  és  $E(|C_1|) < \infty$ . Ekkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(R_t)}{t} = \frac{E(C_1)}{E(S_1)}, \quad \text{valamint} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} = \frac{E(C_1)}{E(S_1)}, \quad \text{P-m.b.}$$

(A fentiekben a  $P(S_1 = 0) < 1$  feltételt a hangsúlyozás végett írtuk ki külön, formálisan már megköveteltük ezt a felújítási díjfolyamat 3.2.5. Definíciójában.)

### 3.3. Poisson-folyamat

A következő nevezetes számláló folyamat központi jelentőségű.

**3.3.1. Definíció.** Legyenek  $S_1, S_2, \dots$  független azonos exponenciális eloszlású eloszlású változók  $\lambda > 0$  paraméterrel. Ekkor a kapcsolatos  $(N_t)_{t \geq 0}$  felújítási folyamatot Poisson-folyamatnak, a  $\lambda$  paramétert a Poisson-folyamat intenzitásának (paraméterének) nevezzük.

Nyilván,  $P(N_0 = 0) = 1$ , hiszen  $T_0 = 0$ , és  $k \in \mathbb{N}$  esetén  $P(T_k = 0) = 0$ , ugyanis  $k \in \mathbb{N}$  esetén  $T_k$  abszolút folytonos eloszlású ( $k$ -ad rendű és  $\lambda$  paraméterű Gamma eloszlású, lásd a 3.1.11. Állítást).

**3.3.2. Megjegyzés.** Honnan ered a Poisson-folyamat elnevezés? Tetszőleges  $t \geq 0$  és  $k \in \mathbb{Z}_+$  esetén

$$P(N_t = k) = P(T_k \leq t < T_{k+1}) = P(T_k \leq t) - P(T_{k+1} \leq t) = F_{T_k}(t) - F_{T_{k+1}}(t),$$

ahol  $T_0 = 0$ , és  $k \in \mathbb{N}$  esetén  $T_k = S_1 + \dots + S_k$   $k$ -ad rendű és  $\lambda$  paraméterű Gamma-eloszlású (lásd 3.1.11. Állítás). Így

$$P(N_t = 0) = P(0 < t) - P(T_1 < t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

és a 3.1.11. Állítás alapján

$$P(N_t = k) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k \in \mathbb{N},$$

tehát

$$N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t), \quad \forall t > 0.$$

Továbbá, mivel  $E(N_t) = \lambda t$ ,  $t \geq 0$ , kapjuk, hogy  $(N_t)_{t \geq 0}$  felújítási függvénye  $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $m(t) = E(N_t) = \lambda t$ ,  $t \geq 0$ , és

$$E\left(\frac{N_t}{t}\right) = \frac{E(N_t)}{t} = \lambda, \quad t > 0,$$

tehát az egységnyi idő alatt bekövetkező beérkezések várható száma egyenlő  $\lambda$ -val. Látjuk azt is, hogy ebben a speciális esetben az elemi felújítási tétel (3.2.3. Tétel) triviális módon teljesül (nincs is szükség a  $t \rightarrow \infty$  határátmenetre), hiszen  $E(S_1) = 1/\lambda$ .  $\square$

**3.3.3. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy  $\{X_t : t \geq 0\}$  sztochasztikus folyamat **független növekményű**, ha  $P(X_0 = 0) = 1$ , és tetszőleges  $k \in \mathbb{N}$  és tetszőleges  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$  időpontok esetén az  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$  növekmények (teljesen) függetlenek.

Azt mondjuk, hogy egy  $\{X_t : t \geq 0\}$  sztochasztikus folyamat **független, stacionárius növekményű**, ha független növekményű, és a növekmények eloszlása időeltolással szemben invariáns, azaz tetszőleges  $t, h \geq 0$  időpontok esetén  $X_{t+h} - X_t$  eloszlása nem függ  $t$ -től (következésképpen megegyezik  $X_h$  eloszlásával).

A következőkben olyan eredményeket tárgyalunk, melyek a Poisson-folyamat alternatív definícióira adnak lehetőséget (szám szerint további három alternatív definícióra, lásd 3.3.4. Tétel, 3.3.7. Tétel és 3.3.9. Tétel).

**3.3.4. Tétel.** Legyen  $\lambda > 0$ . Egy  $\{N_t : t \geq 0\}$  sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor  $\lambda$  paraméterű Poisson-folyamat, ha

- (i) független, stacionárius növekményű,
- (ii) tetszőleges  $0 \leq s < t$  időpontok esetén  $N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s))$  (azaz  $N_t - N_s$  Poisson eloszlású  $\lambda(t-s)$  paraméterrel),
- (iii) a  $[0, \infty) \ni t \mapsto N_t$  trajektóriák jobbról folytonosak.

Az alábbiakban a Poisson-folyamat egy újabb (sorrendben a harmadik) definiálására lehetőséget adó állítást tárgyalunk. Szükségünk lesz arra a fogalomra, hogy egy  $f(x)$  függvény  $o(x)$  tulajdonságú, amint  $x \rightarrow 0$ .

**3.3.5. Definíció. (Landau-jelölés)** Azt mondjuk, hogy egy  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $o(x)$  tulajdonságú, amint  $x \rightarrow 0$ , ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

**3.3.6. Megjegyzés.** (i) Az a tény, hogy egy  $f$  függvény  $o(x)$  tulajdonságú, amint  $x \rightarrow 0$  heurisztikusan azt jelenti, hogy  $f(x)$  gyorsabban tart a 0-hoz, mint az  $x$  függvény, ha  $x \rightarrow 0$ .

(ii) Az  $f(x) = x^2$  függvény  $o(x)$  tulajdonságú, amint  $x \rightarrow 0$ , mert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

(iii) Az  $f(x) = x$  függvény nem  $o(x)$  tulajdonságú, amint  $x \rightarrow 0$ , mert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \neq 0.$$

(iv) Ha  $f$  és  $g$   $o(x)$  tulajdonságúak, amint  $x \rightarrow 0$ , akkor  $f + g$  és  $cf$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) is  $o(x)$  tulajdonságú, amint  $x \rightarrow 0$ .

□

**3.3.7. Tétel.** Legyen  $\{N_t : t \geq 0\}$  egy valós értékű sztochasztikus folyamat. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i)  $\{N_t : t \geq 0\}$   $\lambda$  paraméterű Poisson-folyamat,
- (ii) (a) független, stacionárius növekményű,  
(b) nemnegatív egészértékű,  $P(N_t \geq 2) = o(t)$  amint  $t \downarrow 0$  (ún. ritkasági feltétel) és  $P(N_t = 1) = \lambda t + o(t)$  amint  $t \downarrow 0$  (ún. sűrűségi feltétel),  
(c) a  $[0, \infty) \ni t \mapsto N_t$  trajektóriák jobbról folytonosak.

**3.3.8. Megjegyzés.** (i) A 3.3.7. Tétel (ii)/(b) részében a  $P(N_t \geq 2) = o(t)$  és  $P(N_t = 1) = \lambda t + o(t)$  amint  $t \downarrow 0$  feltételek részletesebben kiírva azt jelentik, hogy

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{P(N_t \geq 2)}{t} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{P(N_t = 1)}{t} = \lambda.$$

(ii) A következőkben a 3.3.7. Tétel (ii)/(b) részének  $P(N_t \geq 2) = o(t)$  amint  $t \downarrow 0$  feltételét világítjuk meg. Legyen  $\{N_t : t \geq 0\}$  egy független, stacionárius növekményű nemnegatív egészértékű sztochasztikus folyamat, hogy a trajektóriák monoton növekvők és jobbról folytonosak, továbbá  $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} P(N_t \geq 2) = 0$  teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$(3.3.1) \quad P \left( \sup_{t \in (0,1]} (N_t - N_{t-}) \geq 2 \right) = 0.$$

Mivel feltételeztük, hogy a trajektóriák monoton növekvők, és ismert, hogy egy monoton növekvő függvénynek legfeljebb megszámlálható sok szakadási helye lehet, a (3.3.1) összefüggés azt jelenti, hogy  $(N_t)_{t \geq 0}$  P-m.m. trajektóriájának legfeljebb csak megszámlálható sok szakadási helye lehet és minden ugrás nagysága legfeljebb 1. Rátérve (3.3.1) bizonyítására, a valószínűség folytonossága miatt

$$\begin{aligned} P \left( \sup_{t \in (0,1]} (N_t - N_{t-}) \geq 2 \right) &= P \left( \sup_{t \in (0,1]} (N_t - N_{t-}) > 1 \right) \\ &\leq P \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left\{ N_{\frac{k+1}{2^n}} - N_{\frac{k}{2^n}} > 1 \right\} \right) \\ &= P \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left\{ N_{\frac{k+1}{2^n}} - N_{\frac{k}{2^n}} \geq 2 \right\} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left\{ N_{\frac{k+1}{2^n}} - N_{\frac{k}{2^n}} \geq 2 \right\} \right) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \bigcap_{k=0}^{2^n-1} \left\{ N_{\frac{k+1}{2^n}} - N_{\frac{k}{2^n}} \leq 1 \right\} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{2^n-1} P(N_{\frac{k+1}{2^n}} - N_{\frac{k}{2^n}} \leq 1) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( P(N_{2^{-n}} \leq 1) \right)^{2^n} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - P(N_{2^{-n}} \geq 2) \right)^{2^n} \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2^n P(N_{2^{-n}} \geq 2)}{2^n} \right)^{2^n} = 1 - e^{-0} = 0, \end{aligned}$$

mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n P(N_{2^{-n}} \geq 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{-n}} P(N_{2^{-n}} \geq 2) = 0,$$

hiszen  $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} P(N_t \geq 2) = 0$ . □

### A 3.3.7. Tétel bizonyítása (részleges).

(i)  $\implies$  (ii)/(b): Mivel  $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ ,  $t > 0$  (lásd, 3.3.2. Megjegyzés), így  $P(N_t \in \mathbb{Z}_+) = 1$ , azaz  $P(N_t = \infty) = 0$ . Továbbá,

$$P(N_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + o(\lambda t) = 1 - \lambda t + o(t), \quad \text{amint } t \downarrow 0,$$

hiszen a  $\mathcal{L}$ 'Hospital-szabály alapján

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{e^{-\lambda t} - 1 + \lambda t}{\lambda t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{-\lambda e^{-\lambda t} + \lambda}{\lambda} = 0.$$

Továbbá,

$$\begin{aligned} P(N_t = 1) &= \frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-\lambda t} = \lambda t (1 - \lambda t + o(t)) = \lambda t - \lambda^2 t^2 + \lambda t o(t) \\ &= \lambda t + o(t), \quad \text{amint } t \downarrow 0, \end{aligned}$$

hiszen

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{-\lambda^2 t^2 + \lambda t o(t)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \left( -\lambda^2 t + \lambda \cdot \frac{o(t)}{t} \cdot t \right) = 0.$$

Továbbá,

$$\begin{aligned} P(N_t \geq 2) &= 1 - P(N_t = 0) - P(N_t = 1) \\ &= 1 - (1 - \lambda t + o(t)) - (\lambda t + o(t)) = o(t), \quad \text{amint } t \downarrow 0. \end{aligned}$$

(ii)  $\implies$  (i): Csak azt mutatjuk meg, hogy  $N_t$  Poisson-eloszlású  $\lambda t$  paraméterrel tetszőleges  $t > 0$  esetén. Először belátjuk, hogy  $(N_t)_{t \geq 0}$  trajektóriái monoton növekvők. Mivel  $(N_t)_{t \geq 0}$  nemnegatív egészértékű és stacionárius növekményű, tetszőleges  $0 \leq s < t$  esetén  $N_s$  nemnegatív egészértékű és  $N_t - N_s$  eloszlása megegyezik  $N_{t-s}$  eloszlásával, mely nemnegatív egészértékű. Ezért az  $N_t = N_s + (N_t - N_s)$  felbontás alapján  $N_t \geq N_s$ .

Legyen  $p_k(t) := P(N_t = k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $t \geq 0$ . Tetszőleges  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\Delta > 0$  és  $t \geq 0$  esetén, felhasználva, hogy ha  $N_{t+\Delta} = k$ , akkor  $N_t \in \{0, \dots, k\}$  (hiszen  $(N_t)_{t \geq 0}$  nemnegatív egészértékű és trajektóriái monoton növekvők), kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (3.3.2) \quad p_k(t + \Delta) &= P(N_{t+\Delta} = k) \\ &= \sum_{n=0}^k P(N_{t+\Delta} = k \mid N_t = k - n) P(N_t = k - n) \\ &= \sum_{n=0}^k P(N_{t+\Delta} - N_t = n \mid N_t = k - n) P(N_t = k - n) \\ &= \sum_{n=0}^k P(N_\Delta = n) P(N_t = k - n) \\ &= \sum_{n=0}^k p_n(\Delta) p_{k-n}(t), \end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti egyenlőség abból következik, hogy  $(N_t)_{t \geq 0}$  független, stacionárius növekményű. Így tetszőleges  $t > 0$  és  $k \in \mathbb{N}$  esetén

$$\begin{aligned} p_k(t + \Delta) &= \sum_{n=0}^k p_n(\Delta) p_{k-n}(t) \\ &= p_0(\Delta) p_k(t) + p_1(\Delta) p_{k-1}(t) + (p_2(\Delta) p_{k-2}(t) + \dots + p_k(\Delta) p_0(t)) \\ &= (1 - \lambda \Delta + o(\Delta)) p_k(t) + (\lambda \Delta + o(\Delta)) p_{k-1}(t) + o(\Delta), \quad \text{amint } \Delta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{p_k(t + \Delta) - p_k(t)}{\Delta} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta}, \quad \text{amint } \Delta \rightarrow 0.$$

Ezért tetszőleges  $t > 0$  esetén (a  $\Delta \rightarrow 0$  határátmenet után) kapjuk, hogy

$$p'_k(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ha  $k = 0$ , akkor (3.3.2) miatt tetszőleges  $t > 0$  esetén

$$p_0(t + \Delta) = p_0(\Delta) p_0(t) = (1 - \lambda \Delta + o(\Delta)) p_0(t), \quad \text{amint } \Delta \rightarrow 0,$$

azaz

$$\frac{p_0(t + \Delta) - p_0(t)}{\Delta} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta}, \quad \text{amint } \Delta \rightarrow 0.$$

Ezért tetszőleges  $t > 0$  esetén

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t).$$

Továbbá tudjuk, hogy

$$(3.3.3) \quad p_0(0) = P(N_0 = 0) = 1 \quad \text{és} \quad p_k(0) = P(N_0 = k) = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

hiszen  $(N_t)_{t \geq 0}$  független növekményű.

Ez a differenciálegyenletrendszer rekurzívan megoldható és a (3.3.3) kezdeti feltételhez tartozó egyértelmű megoldása:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

melyből adódik, hogy  $N_t$  Poisson eloszlású  $\lambda t$  paraméterrel, ha  $t > 0$ .

Megjegyezzük, hogy a szóbanforgó differenciálegyenletrendszer nem más, mint az ún. előrehaladó Kolmogorov-féle egyenlet, melyet a 4.1.24. Példában megoldunk.  $\square$

Az alábbi eredmény a Poisson-folyamat egy újabb (sorrendben a negyedik) definiálására ad lehetőséget.

**3.3.9. Tétel.** *Legyen  $\lambda > 0$  és  $L_n, X_k^{(n)}, k, n \in \mathbb{N}$ , független valószínűségi változók, hogy  $L_n$  Poisson eloszlású  $\lambda$  paraméterrel és  $X_k^{(n)}$  egyenletes eloszlású az  $(n-1, n]$  intervallumon. Ekkor*

$$N_t := |\{(k, n) \in \mathbb{N}^2 : k \leq L_n \text{ és } X_k^{(n)} \leq t\}|, \quad t \geq 0,$$

egy  $\lambda$  paraméterű Poisson-folyamat.

**3.3.10. Állítás. (Poisson-folyamat Markov tulajdonsága)** *Legyen  $\{N_t : t \geq 0\}$  egy  $\lambda > 0$  paraméterű Poisson-folyamat. Tetszőleges olyan  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k \leq t$  és  $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k \leq n$ ,  $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{Z}_+$ , esetén, melyekre  $P(N_{s_k} = m_k, \dots, N_{s_1} = m_1) > 0$ , teljesül, hogy*

$$\begin{aligned} P(N_t = n \mid N_{s_k} = m_k, \dots, N_{s_1} = m_1) &= P(N_t = n \mid N_{s_k} = m_k) = P(N_{t-s_k} = n - m_k) \\ &= \frac{(\lambda(t - s_k))^{n-m_k}}{(n - m_k)!} e^{-\lambda(t-s_k)}, \end{aligned}$$

azaz  $\{N_t : t \geq 0\}$  egy folytonos idejű homogén Markov-lánc a fenti formulában szereplő átmenetvalószínűségekkel. (A folytonos idejű Markov-láncokkal a 4. Fejezetben foglalkozunk majd részletesen.)

**Bizonyítás.** A 3.3.4. Tétel alapján  $\{N_t : t \geq 0\}$  független, stacionárius növekményű folyamat (speciálisan,  $N_0 = 0$ ), így

$$\begin{aligned} P(N_t = n \mid N_{s_k} = m_k, \dots, N_{s_1} = m_1) &= \frac{P(N_t = n, N_{s_k} = m_k, \dots, N_{s_1} = m_1)}{P(N_{s_k} = m_k, \dots, N_{s_1} = m_1)} \\ &= \frac{P(N_t - N_{s_k} = n - m_k, N_{s_k} - N_{s_{k-1}} = m_k - m_{k-1}, \dots, N_{s_1} - N_0 = m_1)}{P(N_{s_k} - N_{s_{k-1}} = m_k - m_{k-1}, \dots, N_{s_1} - N_0 = m_1)} \\ &= \frac{P(N_t - N_{s_k} = n - m_k) P(N_{s_k} - N_{s_{k-1}} = m_k - m_{k-1}) \dots P(N_{s_1} - N_0 = m_1)}{P(N_{s_k} - N_{s_{k-1}} = m_k - m_{k-1}) \dots P(N_{s_1} - N_0 = m_1)} \\ &= P(N_t - N_{s_k} = n - m_k) = P(N_{t-s_k} = n - m_k) = \frac{(\lambda(t - s_k))^{n-m_k}}{(n - m_k)!} e^{-\lambda(t-s_k)}, \end{aligned}$$

ahol a második egyenlőségnél azt használtuk, hogy

$$\begin{aligned} & \{N_t = n, N_{s_k} = m_k, \dots, N_{s_1} = m_1\} \\ &= \{N_t - N_{s_k} = n - m_k, N_{s_k} - N_{s_{k-1}} = m_k - m_{k-1}, \dots, N_{s_1} - N_0 = m_1\}, \end{aligned}$$

mely abból következik, hogy

$$\begin{pmatrix} N_t \\ N_{s_k} \\ \vdots \\ N_{s_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_t - N_{s_k} \\ N_{s_k} - N_{s_{k-1}} \\ \vdots \\ N_{s_1} - N_0 \end{pmatrix}.$$

Hasonló gondolatmenettel következik, hogy

$$\begin{aligned} P(N_t = n \mid N_{s_k} = m_k) &= \frac{P(N_t = n, N_{s_k} = m_k)}{P(N_{s_k} = m_k)} = \frac{P(N_t - N_{s_k} = n - m_k, N_{s_k} = m_k)}{P(N_{s_k} = m_k)} \\ &= \frac{P(N_t - N_{s_k} = n - m_k) P(N_{s_k} = m_k)}{P(N_{s_k} = m_k)} = P(N_t - N_{s_k} = n - m_k) \\ &= \frac{(\lambda(t - s_k))^{n-m_k}}{(n - m_k)!} e^{-\lambda(t-s_k)}. \end{aligned}$$

□

**3.3.11. Állítás. (Poisson-folyamat eltolása)** Legyen  $\{N_t : t \geq 0\}$  egy  $\lambda > 0$  paraméterű Poisson-folyamat és  $\tau$  egy tőle független nemnegatív értékű valószínűségi változó. Legyen  $N'_t := N_{\tau+t} - N_\tau$ ,  $t \geq 0$ . Ekkor  $\{N'_t : t \geq 0\}$   $\lambda$  paraméterű Poisson-folyamat, mely független a  $\{\tau, N_t, t \in [0, \tau]\}$  véletlen változóktól.

Legyen  $\{N_t : t \geq 0\}$   $\lambda$  paraméterű Poisson-folyamat és legyen  $0 < p < 1$  rögzített. A Poisson-folyamat 3.3.1. Definícióját alapul véve,  $N_t$  interpretálható úgy, mint a  $t$  időpontig (a  $t$  időponttal bezárólag) bekövetkező "események" száma valamely kísérletben, ahol az "események" bekövetkezési időpontjai  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Például, ha  $N_t$  a  $t$  időpontig egy adott áruházba betérő emberek számát jelöli, akkor egy vásárlónak az áruházba történő belépése felel meg egy "eseménynek". Tegyük fel, hogy minden alkalommal, mikor egy „esemény” bekövetkezik azt vagy I-es típusúnak vagy II-es típusúnak minősítjük. Feltételezzük, hogy egy eseményt I-es típusúnak  $p$ , II-es típusúnak  $1 - p$  valószínűséggel minősítünk, ahol  $p \in (0, 1)$  adott, és ezek a minősítések egymástól teljesen függetlenül történnek. Tekintsük mintaként az előző példát. Tegyük fel, hogy egy eseményt, azaz egy vásárló érkezését aszerint minősítjük, osztályozzuk, hogy ő férfi vagy nő. Jelen esetben  $p = 1/2$  természetes választás. (A  $p \neq 1/2$  eset annak felelhetne meg, hogy az áruházat kicseréljük például egy női fodrász szalonra.) A továbbiakban újra az általános konstrukciót tekintjük. Tetszőleges  $t \geq 0$  esetén jelölje  $N_t^{(1)}$  a  $t$  időpontig (a  $t$  időponttal bezárólag) I-típusúnak minősített események,  $N_t^{(2)}$  pedig a II-típusúnak minősített események számát. Nyilván  $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$  minden  $t \geq 0$  esetén.

**3.3.12. Állítás. (Poisson-folyamat ritkítása)** Legyen  $\{N_t : t \geq 0\}$  egy  $\lambda > 0$  paraméterű Poisson-folyamat és legyen  $0 < p < 1$ . Ekkor  $\{N_t^{(1)} : t \geq 0\}$   $\lambda p$  paraméterű,  $\{N_t^{(2)} : t \geq 0\}$   $\lambda(1-p)$  paraméterű, egymástól független Poisson-folyamatok. Továbbá, tetszőleges  $t > 0$  esetén

$$(3.3.4) \quad P(N_t^{(1)} = k \mid N_t = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\},$$

azaz  $N_t^{(1)}$ -nek az  $\{N_t = n\}$  eseményre vonatkozó feltételes eloszlása  $n$ -edrendű,  $p$ -paraméterű binomiális eloszlás.

**Bizonyítás.** Felhasználva  $N_t^{(1)}$  és  $N_t^{(2)}$  konstrukcióját az könnyen adódik, hogy  $\{N_t^{(1)} : t \geq 0\}$  és  $\{N_t^{(2)} : t \geq 0\}$  független növekményű folyamatok, és a trajektóriák jobbról folytonossága is nyilvánvaló. A következőkben meghatározzuk  $N_t^{(1)}$  és  $N_t^{(2)}$  együttes eloszlását, azaz a

$$P(N_t^{(1)} = n, N_t^{(2)} = m), \quad n, m \in \mathbb{Z}_+$$

valószínűségeket. A teljes valószínűség tétele alapján kapjuk, hogy

$$P(N_t^{(1)} = n, N_t^{(2)} = m) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_t^{(1)} = n, N_t^{(2)} = m \mid N_t = k) P(N_t = k).$$

Ahhoz, hogy a  $t$  időpontig  $n$  darab I-típusú és  $m$  darab II-típusú esemény következzen be szükséges, hogy összesen  $n + m$  esemény következzen be a  $t$  időpontig, így

$$P(N_t^{(1)} = n, N_t^{(2)} = m \mid N_t = k) = 0, \quad \text{ha} \quad k \neq n + m.$$

Ezért, felhasználva, hogy  $N_t$  Poisson eloszlású  $\lambda t$  paraméterrel, kapjuk, hogy minden  $n, m \in \mathbb{Z}_+$  esetén

$$\begin{aligned} P(N_t^{(1)} = n, N_t^{(2)} = m) &= P(N_t^{(1)} = n, N_t^{(2)} = m \mid N_t = n + m) P(N_t = n + m) \\ &= P(N_t^{(1)} = n, N_t^{(2)} = m \mid N_t = n + m) \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Mivel minden eseményt  $p$  valószínűséggel I-típusúnak,  $(1-p)$  valószínűséggel II-típusúnak osztályozunk egymástól függetlenül, feltételezve, hogy összesen  $n + m$  esemény következett be, az I-típusú események száma  $(n+m)$ -edrendű és  $p$ -paraméterű binomiális eloszlást követ (felhívjuk a figyelmet, hogy a szóban forgó binomiális eloszlás paramétere nem függ  $\lambda$ -tól). Ezért annak a valószínűsége, hogy  $n + m$  eseményből  $n$ -et I-típusúnak, és következésképpen  $m$ -et II-típusúnak osztályozunk

$$\binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m.$$

Mivel  $N_t = n + m$  esetén  $\{N_t^{(1)} = n\} = \{N_t^{(1)} = n, N_t^{(2)} = m\}$ , kapjuk azt is, hogy

$$P(N_t^{(1)} = n \mid N_t = n + m) = \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m,$$

melyből következik (3.3.4). Továbbá,

$$\begin{aligned} (3.3.5) \quad P(N_t^{(1)} = n, N_t^{(2)} = m) &= \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t (1-p))^m}{m!} e^{-\lambda t (1-p)}. \end{aligned}$$

Összegezve ezen egyenlet mindkét oldalát  $m$  szerint

$$\begin{aligned} P(N_t^{(1)} = n) &= \sum_{m=0}^{\infty} P(N_t^{(1)} = n, N_t^{(2)} = m) \\ &= \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t (1-p))^m}{m!} e^{-\lambda t (1-p)} = \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

A (3.3.5) egyenlet mindkét oldalát  $n$  szerint összegezve, hasonlóan adódik, hogy

$$P(N_t^{(2)} = m) = \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!} e^{-\lambda t(1-p)}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Ezért (3.3.5) alapján

$$(3.3.6) \quad P(N_t^{(1)} = n, N_t^{(2)} = m) = P(N_t^{(1)} = n) P(N_t^{(2)} = m), \quad t \geq 0, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Hasonlóan beláthatjuk, hogy  $0 \leq s < t$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}_+$ , esetén

$$P(N_t^{(1)} - N_s^{(1)} = n, N_t^{(2)} - N_s^{(2)} = m) = \frac{(\lambda(t-s)p)^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)p} \frac{(\lambda(t-s)(1-p))^m}{m!} e^{-\lambda(t-s)(1-p)}.$$

(Az  $s$  időpont után a  $t$  időpontig bekövetkező I-típusú, illetve II-típusú eseményeket kell figyelni.) Összegezve ezen egyenlet mindkét oldalát  $m$  szerint, illetve  $n$  szerint, az is következik, hogy tetszőleges  $0 \leq s < t$  esetén

$$\begin{aligned} N_t^{(1)} - N_s^{(1)} &\sim N_{t-s}^{(1)} \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)p), \\ N_t^{(2)} - N_s^{(2)} &\sim N_{t-s}^{(2)} \sim \text{Pois}(\lambda(t-s)(1-p)). \end{aligned}$$

Azaz  $\{N_t^{(1)} : t \geq 0\}$  és  $\{N_t^{(2)} : t \geq 0\}$  stacionárius növekményű folyamatok is és a növekmények eloszlása a 3.3.4. Tétel (ii) részében megkívánt. A 3.3.4. Tétel alapján  $\{N_t^{(1)} : t \geq 0\}$   $\lambda p$  paraméterű Poisson-folyamat,  $\{N_t^{(2)} : t \geq 0\}$  pedig  $\lambda(1-p)$  paraméterű Poisson-folyamat.

A következőkben, felhasználva (3.3.5)-t, megmutatjuk, hogy a  $\{N_t^{(1)} : t \geq 0\}$  és  $\{N_t^{(2)} : t \geq 0\}$  Poisson-folyamatok függetlenek. Azt kell megmutatnunk, hogy a  $\sigma(N_t^{(1)}, t \geq 0)$  és a  $\sigma(N_t^{(2)}, t \geq 0)$   $\sigma$ -algebrák függetlenek. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges  $s, t \geq 0$  esetén  $N_s^{(1)}$  és  $N_t^{(2)}$  függetlenek. Feltéhető, hogy  $0 \leq s < t$ . Ekkor tetszőleges  $n, m \in \mathbb{Z}_+$  esetén

$$\begin{aligned} P(N_s^{(1)} = n, N_t^{(2)} = m) &= \sum_{k=0}^m P(N_s^{(1)} = n, N_s^{(2)} = k, N_t^{(2)} = m) \\ &= \sum_{k=0}^m P(N_s^{(1)} = n, N_s^{(2)} = k, N_t^{(2)} - N_s^{(2)} = m - k). \end{aligned}$$

Hasonlóan az előző számolásokhoz

$$\begin{aligned} &P(N_s^{(1)} = n, N_s^{(2)} = k, N_t^{(2)} - N_s^{(2)} = m - k) \\ &= \sum_{\ell=m-k}^{\infty} P(N_s^{(1)} = n, N_s^{(2)} = k, N_t^{(2)} - N_s^{(2)} = m - k \mid N_s = n + k, N_t - N_s = \ell) \\ &\quad \times P(N_s = n + k, N_t - N_s = \ell) \\ &= \sum_{\ell=m-k}^{\infty} P(N_s^{(1)} = n, N_s^{(2)} = k, N_t^{(2)} - N_s^{(2)} = m - k \mid N_s = n + k, N_t - N_s = \ell) \\ &\quad \times \frac{(\lambda s)^{n+k}}{(n+k)!} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda(t-s))^\ell}{\ell!} e^{-\lambda(t-s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\ell=m-k}^{\infty} \binom{n+k}{n} p^n (1-p)^k \binom{\ell}{m-k} p^{\ell-(m-k)} (1-p)^{m-k} \frac{\lambda^{n+k+\ell} s^{n+k} (t-s)^\ell}{(n+k)! \ell!} e^{-\lambda t} \\
&= \sum_{\ell=m-k}^{\infty} \frac{1}{n! k! (m-k)! (\ell-m+k)!} p^{n+\ell-m+k} (1-p)^m \lambda^{n+k+\ell} s^{n+k} (t-s)^\ell e^{-\lambda t} \\
&= \frac{p^{n-m+k} (1-p)^m \lambda^{n+k} s^{n+k} e^{-\lambda t}}{n! k! (m-k)!} \sum_{\ell=m-k}^{\infty} \frac{1}{(\ell-m+k)!} p^\ell \lambda^\ell (t-s)^\ell \\
&= \frac{p^{n-m+k} (1-p)^m \lambda^{n+k} s^{n+k} e^{-\lambda t}}{n! k! (m-k)!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(p\lambda(t-s))^{\ell+m-k}}{\ell!} \\
&= \frac{p^{n-m+k} (1-p)^m \lambda^{n+k} s^{n+k} e^{-\lambda t}}{n! k! (m-k)!} (p\lambda(t-s))^{m-k} e^{p\lambda(t-s)} \\
&= \frac{p^n (1-p)^m \lambda^{n+m} s^{n+k} (t-s)^{m-k}}{n! k! (m-k)!} e^{-\lambda(t-p(t-s))},
\end{aligned}$$

mely megegyezik az alábbival:

$$\begin{aligned}
&P(N_s^{(1)} = n) P(N_s^{(2)} = k) P(N_t^{(2)} - N_s^{(2)} = m-k) \\
&= \frac{(\lambda s p)^n}{n!} e^{-\lambda s p} \cdot \frac{(\lambda s (1-p))^k}{k!} e^{-\lambda s (1-p)} \cdot \frac{(\lambda(t-s)(1-p))^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda(t-s)(1-p)} \\
&= P(N_s^{(1)} = n) P(N_s^{(2)} = k, N_t^{(2)} - N_s^{(2)} = m-k).
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
P(N_s^{(1)} = n, N_t^{(2)} = m) &= \sum_{k=0}^m P(N_s^{(1)} = n) P(N_s^{(2)} = k, N_t^{(2)} - N_s^{(2)} = m-k) \\
&= \sum_{k=0}^m P(N_s^{(1)} = n) P(N_s^{(2)} = k, N_t^{(2)} = m) \\
&= P(N_s^{(1)} = n) P(N_t^{(2)} = m).
\end{aligned}$$

Tehát  $N_t^{(1)}$  és  $N_s^{(2)}$  függetlenek tetszőleges  $s, t \geq 0$  esetén. Ebből már következik, hogy a szóbanforgó  $\sigma$ -algebrák is függetlenek (a pontos bizonyítás a Kolmogorov 0-1 törvény bizonyításánál látottaknak megfelelően történhet).  $\square$

**3.3.13. Megjegyzés.** Nem az a meglepő, hogy  $\{N_t^{(1)} : t \geq 0\}$  és  $\{N_t^{(2)} : t \geq 0\}$  Poisson-folyamatok, hanem az, hogy függetlenek. Jelölje például  $N_t$  a  $t$  időpontig (a  $t$  időponttal bezárólag) egy bankba érkező ügyfelek számát (az időt mérjük órában). Tegyük fel, hogy  $\{N_t : t \geq 0\}$  1 paraméterű Poisson-folyamat. Tételezzük fel továbbá azt is, hogy minden egyes ügyfél  $1/2$  valószínűséggel férfi, ill. nő. Tudjuk, hogy a bank nyitása utáni 10 órában 100 férfi érkezett. Várhatóan mennyi nő érkezett ez idő alatt a bankba? Egy **téves** érvelés a következő, mivel 100 férfi érkezett és minden érkező  $1/2$  valószínűséggel férfi, várhatóan összesen 200-an érkeztek, ezért várhatóan 100 nő érkezett ez idő alatt. Azonban ez hibás érvelés. A helyes gondolatmenet a következő. A 3.3.12. Állítás alapján, ha  $N_t^{(2)}$  jelöli a  $t$  időpontig a bankba érkező női ügyfelek számát, akkor  $\{N_t^{(2)} : t \geq 0\}$   $1/2$  paraméterű Poisson-folyamat. Így az első 10 órában érkező női ügyfelek száma Poisson eloszlású  $10 \cdot 1/2 = 5$  paraméterrel. Felhasználva, hogy a Poisson eloszlás várható értéke megegyezik a paraméterével kapjuk, hogy várhatóan 5 nő érkezik a bankba az első 10 órában (és ez független az ez idő alatt a bankba érkező férfi ügyfelek számától).  $\square$

A 3.3.12. Állítás szerint, ha egy  $\lambda$  paraméterű Poisson-folyamat minden egyes „eseményét” egymástól függetlenül I. vagy II. típusúnak osztályozzuk  $p$ , ill.  $1 - p$  valószínűséggel, ahol  $p \in (0, 1)$  adott, akkor az I-típusú, ill. II-típusú eseményeket számláló folyamatok egymástól független  $\lambda p$ , ill.  $\lambda(1 - p)$  paraméterű Poisson-folyamatok. Vizsgáljunk most egy kicsit összetettebb helyzetet. Tegyük fel, hogy a bekövetkező eseményeket  $k$  darab, egymástól különböző típusúnak osztályozhatjuk és az, hogy egy eseményt milyen típusúnak minősítünk függ attól is, hogy mikor következik be. Tegyük fel, hogy ha egy esemény az  $y$  időpontban következik be, akkor őt  $p_i(y)$  valószínűséggel minősítjük  $i$ -edik típusúnak ( $i = 1, \dots, k$ ), minden olyan eseménytől (és annak minősítésétől) függetlenül, ami előtte következett be. (Nyilván  $\sum_{i=1}^k p_i(y) = 1$  minden  $y \geq 0$  esetén.) A 3.3.12. Állítás alapján bizonyítható a következő állítás.

**3.3.14. Állítás. (Poisson-folyamat ritkítása, általános eset)** Legyen  $\{N_t : t \geq 0\}$  egy  $\lambda > 0$  paraméterű Poisson-folyamat és tekintsük az állítás előtt szereplő konstrukciót. Jelölje  $N_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, k$  a  $t \geq 0$  időpontig (a  $t$  időponttal bezárólag) bekövetkező  $i$ -edik típusú események számát. Ekkor minden  $t \geq 0$  esetén  $N_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , független Poisson eloszlású valószínűségi változók  $E(N_i(t)) = \lambda \int_0^t p_i(s) ds$  paraméterekkel.

A Poisson-folyamattal nemcsak a Poisson eloszlás és az exponenciális eloszlás áll kapcsolatban. Megmutatjuk, hogyan jön itt elő az egyenletes és a binomiális eloszlás.

**3.3.15. Tétel.** Legyen  $\{N_t : t \geq 0\}$  egy  $\lambda > 0$  paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor minden  $n \in \mathbb{N}$  és  $t > 0$  esetén  $(T_1, T_2, \dots, T_n)$  feltételes eloszlása az  $\{N_t = n\}$  feltételre vonatkozóan megegyezik a  $(0, t)$  intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók  $n$  elemű rendezett mintájának eloszlásával, ahol  $T_1, \dots, T_n$  a 3.3.1. Definícióban szereplő valószínűségi változók. Azaz minden  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t > 0$  és  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t$  esetén

$$\begin{aligned} P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n | N_t = n) &= \frac{n!}{t^n} \int \cdots \int_{\substack{x_1 + \dots + x_i \leq t_i \\ x_i \geq 0, i=1, \dots, n}} 1 dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{n!}{t^n} \int_0^{t_1} \int_{y_1}^{t_2} \cdots \int_{y_{n-1}}^{t_n} 1 dy_1 \cdots dy_n. \end{aligned}$$

**Bizonyítás.** A feltételes várható érték definíciója alapján és felhasználva, hogy  $N_t$  Poisson eloszlású  $\lambda t$  paraméterrel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n | N_t = n) &= \frac{P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n, N_t = n)}{P(N_t = n)} \\ &= \frac{P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n, N_t = n)}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}. \end{aligned}$$

Felhasználva a  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , definícióját és azt, hogy a definiálásában szereplő  $S_1, S_2, \dots$  valószínűségi változók független,  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlásúak kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n, N_t = n) &= P(S_1 \leq t_1, S_1 + S_2 \leq t_2, \dots, S_1 + \dots + S_n \leq t_n, S_1 + \dots + S_{n+1} > t) \\ &= \int_{(0, \infty)^{n+1}} \mathbf{1}_{\{x_1 \leq t_1, x_1 + x_2 \leq t_2, \dots, x_1 + \dots + x_n \leq t_n, x_1 + \dots + x_{n+1} > t\}} f_{(S_1, \dots, S_{n+1})}(x_1, \dots, x_{n+1}) dx_1 \cdots dx_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2-x_1} \cdots \int_0^{t_n-x_1-\cdots-x_{n-1}} \int_{t-x_1-\cdots-x_n}^{\infty} \lambda^{n+1} e^{-\lambda(x_1+\cdots+x_{n+1})} dx_1 \cdots dx_{n+1} \\
&= \lambda^{n+1} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2-x_1} \cdots \int_0^{t_n-x_1-\cdots-x_{n-1}} e^{-\lambda(x_1+\cdots+x_n)} \left[ \frac{e^{-\lambda u}}{-\lambda} \right]_{u=t-x_1-\cdots-x_n}^{u=\infty} dx_1 \cdots dx_n \\
&= \lambda^n e^{-\lambda t} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2-x_1} \cdots \int_0^{t_n-x_1-\cdots-x_{n-1}} 1 dx_1 \cdots dx_n.
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n \mid N_t = n) &= \frac{n!}{t^n} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2-x_1} \cdots \int_0^{t_n-x_1-\cdots-x_{n-1}} 1 dx_1 \cdots dx_n \\
&= \frac{n!}{t^n} \int \cdots \int_{\substack{x_1+\cdots+x_i \leq t_i \\ x_i \geq 0, i=1, \dots, n}} 1 dx_1 \dots dx_n.
\end{aligned}$$

Végrehajtva az  $x_1 + \cdots + x_i = y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  helyettesítést, a helyettesítés Jacobi-mátrixa determinánsának abszolút értéke 1, és az  $x_1 + \cdots + x_i \leq t_i$ ,  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  integrálási tartomány az  $y_i \leq t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$  integrálási tartományba megy át. Így

$$(3.3.7) \quad P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n \mid N_t = n) = \frac{n!}{t^n} \int_0^{t_1} \int_{y_1}^{t_2} \cdots \int_{y_{n-1}}^{t_n} 1 dy_1 \cdots dy_n.$$

Azt kell még megmutatni, hogy a (3.3.7) formula jobb oldala megegyezik a  $(0, t)$  intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók  $n$  elemű rendezett mintájának eloszlásfüggvényének a  $(t_1, \dots, t_n)$  helyen felvett értékével. Legyenek  $X_1, \dots, X_n$  független, a  $(0, t)$  intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Meghatározzuk az  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$  rendezett minta elemeinek együttes sűrűségfüggvényét. Először az együttes eloszlásfüggvényüket határozzuk meg:

$$F_{X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1^* < x_1, X_2^* < x_2, \dots, X_n^* < x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Csak olyan  $x_1, \dots, x_n$ -ekre vizsgálódunk, melyekre  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq t$ . Az, hogy  $x_i \in (0, t)$  annak a következménye, hogy a mintánk  $(0, t)$ -n egyenletes eloszlásra van. A növekvő sorrend pedig annak, hogy ha például  $x_1 > x_2$ , akkor  $X_1^* \leq X_2^* < x_2 < x_1$  miatt  $X_1^* < x_1$ , így

$$P(X_1^* < x_1, X_2^* < x_2, \dots, X_n^* < x_n) = P(X_2^* < x_2, \dots, X_n^* < x_n).$$

Ezért amikor az együttes sűrűségfüggvényt határozzuk meg deriválással, az  $x_1$  változó szerint konstans függvényt kell deriválni, így az ilyen helyeken a sűrűségfüggvény nulla.

Tehát  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq t$  esetén

$$\begin{aligned}
P(X_1^* < x_1, X_2^* < x_2, \dots, X_n^* < x_n) &= \int \cdots \int_{\substack{(y_1, \dots, y_n) \in (0, t)^n \\ y_i^* < x_i, i=1, \dots, n}} \frac{1}{t^n} dy_1 \dots dy_n \\
&= n! \int \cdots \int_{\substack{(y_1, \dots, y_n) \in (0, t)^n \\ y_1 \leq \cdots \leq y_n, y_i < x_i, i=1, \dots, n}} \frac{1}{t^n} dy_1 \dots dy_n,
\end{aligned}$$

ugyanis  $P(X_1^* < x_1, X_2^* < x_2, \dots, X_n^* < x_n)$  az  $X_1, \dots, X_n$  minta egy függvényének várható értékeként írható fel, és az  $X_1, \dots, X_n$  minta együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} \frac{1}{t^n} & \text{ha } y_i \in (0, t), \quad i = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

az utolsó lépésben pedig az integrandus  $y_1, \dots, y_n$ -ben való szimmetriáját, illetve azt használtuk fel, hogy egy permutáció mátrix determinánsának abszolútértéke 1-el egyenlő.

Ezért

$$f_{X_1^*, \dots, X_n^*}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n} & \text{ha } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq t, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Összefoglalva, minden  $n \in \mathbb{N}$  és  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t$  esetén

$$\begin{aligned} (3.3.8) \quad P(X_1^* < t_1, X_2^* < t_2, \dots, X_n^* < t_n) &= \frac{n!}{t^n} \int \dots \int_{\substack{x_i \leq t_i, i=1, \dots, n \\ 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq t}} 1 \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{n!}{t^n} \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{t_2} \dots \int_{x_{n-1}}^{t_n} 1 \, dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Ez utóbbi pedig megegyezik (3.3.7) jobboldalával.  $\square$

**3.3.16. Megjegyzés.** Speciálisan, ha az  $n = 1$  választással élünk a 3.3.15. Tételben, akkor  $t > 0$  és  $0 \leq t_1 \leq t$  esetén

$$P(T_1 \leq t_1 \mid N_t = 1) = \frac{1}{t} \int_0^t 1 \, dx_1 = \frac{t_1}{t}.$$

Hasonlóan, ha  $n = 2$ ,  $t > 0$  és  $0 \leq t_1 < t_2 \leq t$ , akkor

$$\begin{aligned} P(T_1 \leq t_1, t_1 < T_2 \leq t_2 \mid N_t = 2) &= P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2 \mid N_t = 2) - P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_1 \mid N_t = 2) \\ &= \frac{2}{t^2} \int_0^{t_1} \left( \int_{x_1}^{t_2} 1 \, dx_2 \right) dx_1 - \frac{2}{t^2} \int_0^{t_1} \left( \int_{x_1}^{t_1} 1 \, dx_2 \right) dx_1 \\ &= \frac{2}{t^2} \int_0^{t_1} (t_2 - x_1) \, dx_1 - \frac{2}{t^2} \int_0^{t_1} (t_1 - x_1) \, dx_1 \\ &= \frac{2}{t^2} \left( t_2 t_1 - \frac{t_1^2}{2} \right) - \frac{2}{t^2} \left( t_1^2 - \frac{t_1^2}{2} \right) = \frac{2}{t^2} \cdot t_1(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Az előző valószínűséget direkt módon is kiszámoljuk:

$$\begin{aligned} P(T_1 \leq t_1, t_1 < T_2 \leq t_2 \mid N_t = 2) &= P(N_{t_1} = 1, N_{t_2} = 2 \mid N_t = 2) \\ &= \frac{P(N_{t_1} = 1, N_{t_2} = 2, N_t = 2)}{P(N_t = 2)} \\ &= \frac{P(N_{t_1} = 1, N_{t_2} - N_{t_1} = 1, N_t - N_{t_2} = 0)}{P(N_t = 2)} \\ &= \frac{P(N_{t_1} = 1) P(N_{t_2} - N_{t_1} = 1) P(N_t - N_{t_2} = 0)}{P(N_t = 2)} \\ &= \frac{\lambda t_1 e^{-\lambda t_1} \lambda (t_2 - t_1) e^{-\lambda(t_2 - t_1)} e^{-\lambda(t - t_2)}}{\frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{2}{t^2} \cdot t_1(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

□

Az alábbiakban azt vizsgáljuk meg, hogyan jön be a Poisson-folyamatnál a binomiális eloszlás. A 3.3.12. Állításban (Poisson folyamat ritkítása) is bejött már binomiális eloszlás.

**3.3.17. Állítás.** Legyen  $\{N_t : t \geq 0\}$  egy  $\lambda > 0$  paraméterű Poisson-folyamat. Ekkor minden  $0 < u < t$  és  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $N_u$  feltételes eloszlása a  $N_t = n$  feltételre vonatkozóan  $n$ -edrendű,  $u/t$  paraméterű binomiális eloszlás. Azaz minden  $0 < u < t$ ,  $n \in \mathbb{N}$  és  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  esetén

$$P(N_u = k | N_t = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{u}{t}\right)^k \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{u^k (t-u)^{n-k}}{t^n}.$$

**Bizonyítás.** A Poisson-folyamat tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} P(N_u = k | N_t = n) &= \frac{P(N_u = k, N_t = n)}{P(N_t = n)} = \frac{P(N_u = k, N_t - N_u = n - k)}{P(N_t = n)} \\ &= \frac{P(N_u = k) P(N_t - N_u = n - k)}{P(N_t = n)} \\ &= \frac{\frac{(\lambda u)^k}{k!} e^{-\lambda u} \frac{(\lambda(t-u))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(t-u)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} = \binom{n}{k} \frac{u^k (t-u)^{n-k}}{t^n}. \end{aligned}$$

□

**3.3.18. Példa. (A megfigyelő paradoxona)** Tegyük fel, hogy egy megállóban a buszok érkezései között egymástól független és azonos eloszlású  $S$  idő telik el, mi pedig egy véletlen időpontban érünk ki a megállóba. Várhatóan mennyit kell várnunk a következő buszra?

Tegyük fel először, hogy  $S$  exponenciális eloszlást követ.

1. válasz: A buszok érkezése közötti idő átlagosan  $E(S)$ , így ha egy véletlenszerű időpontban érkezünk, akkor átlagosan  $E(S)/2$  időt kell várnunk.

2. válasz: A buszok érkezése közötti  $S$  idő exponenciális eloszlású, így rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal. Emiatt függetlenül attól, hogy mennyi idő telt el az előző busz óta, átlagosan  $E(S)$  időt kell várnunk. Láthatjuk, hogy ez különbözik az 1. választól, így mind a kettő nem lehet helyes. Továbbgondolva ezt, az az idő, amely az előző busztól eltelik szintén átlagosan  $E(S)$ , így az előző és a következő busz érkezése között átlagosan  $2E(S)$  idő telik el.

Az alábbiakból kiderül, hogy amennyiben  $S$  exponenciális eloszlású, akkor a 2. válasz a helyes, azaz hátralévő várakozási idő várható értéke  $E(S)$ . Az általános esetben, amikor  $S$  nem feltétlen exponenciális eloszlású, ez nem feltétlenül igaz.

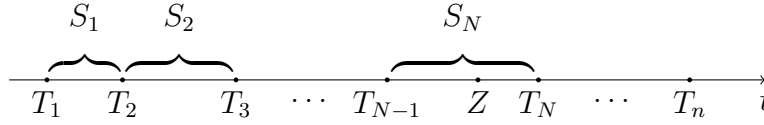
Az általános eset vizsgálatára áttérve, tegyük fel, hogy  $E(S^2) < \infty$  és  $E(S) > 0$ . Jelölje az érkező buszok között eltelt időket  $S_1, S_2, \dots$ , melyek független, azonos ( $S$  eloszlásával megegyező) eloszlású változók, közös  $E(S)$  várható értékkel és  $D^2(S)$  varianciával, melyek végesek.

Megmutatható, hogy a hátralévő várakozási idő várható értéke

$$E(\text{hátralévő várakozási idő}) = \frac{E(S)}{2} + \frac{D^2(S)}{2E(S)},$$

ahol  $S$  az érkezések közötti időt jelöli.

Az alábbiakban egy heurisztikus gondolatmenetet mutatunk. Jelölje  $Z$  azt a véletlen időpontot, amikor kiérek a megállóba. Legyen  $Z$  egyenletes eloszlású a  $[0, T_n]$  intervallumon, ahol  $T_n$  az  $n$ -edik busz érkezési ideje, ahol  $n \in \mathbb{N}$ . Legyen  $N$  annak a busznak a sorszámát, amelyiket elérem:



Tegyük fel, hogy  $S$  véges sok értéket felvevő diszkrét eloszlású véletlen változó, eloszlása  $p_i = P(S = x_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , ahol  $k \in \mathbb{N}$ . A  $P(S = 0) \in (0, 1)$  eset annak felel meg, hogy pozitív az esélye annak, hogy két busz egyszerre érkezik a megállóba. Ekkor

$$E(S_N | T_n) = \sum_{i=1}^k x_i P(S_N = x_i | T_n) \approx \sum_{i=1}^k x_i \frac{np_i x_i}{T_n},$$

mivel egyenletes eloszlás szerint érkeztünk a  $T_n$  hosszúságú  $[0, T_n]$  intervallumon belül, és a kedvező halmaz hosszúsága  $np_i x_i$ , hiszen az  $x_i$  hosszúságú intervallumok várható darabszáma  $np_i$  (ugyanis az  $n$  darab részintervallum mindegyike  $p_i$  valószínűséggel  $x_i$  hosszúságú és  $1 - p_i$  valószínűséggel nem  $x_i$  hosszúságú, azaz az  $x_i$  hosszúságú részintervallumok darabszáma  $n$ -ed rendű és  $p_i$  paraméterű binomiális eloszlású). Tehát

$$E(S_N | T_n) \approx \sum_{i=1}^k x_i \frac{np_i x_i}{T_n} = \frac{n}{T_n} \sum_{i=1}^k p_i x_i^2 = \frac{n}{T_n} E(S^2).$$

A nagy számok törvénye és  $E(S) > 0$  miatt

$$\frac{n}{T_n} = \frac{n}{S_1 + \dots + S_n} \rightarrow \frac{1}{E(S)} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty \text{ P-m.b.,}$$

és így

$$\begin{aligned} E(S_N) &= E(E(S_N | T_n)) = E\left(\frac{n}{T_n} E(S^2)\right) = E\left(\frac{n}{T_n}\right) E(S^2) \\ &\approx \frac{E(S^2)}{E(S)} = \frac{(E(S))^2 + D^2(S)}{E(S)} = E(S) + \frac{D^2(S)}{E(S)}, \end{aligned}$$

ahol a negyedik lépésben szereplő közelítés valóban heurisztikus. Tehát a véletlenszerűen választott időintervallum várhatóan hosszabb, mint az általános várható időköz. A várható várakozási idő, ezen mennyiség fele:

$$\frac{E(S_N)}{2} = \frac{E(S)}{2} + \frac{D^2(S)}{2E(S)} \geq \frac{E(S)}{2}.$$

Összefoglalva: az a heurisztikus gondolat, hogy a hátralévő idő várhatóan az érkezési időköz fele akkor és csak akkor igaz, ha a buszok determinisztikusan járnak, azaz  $S$  determinisztikus, hiszen  $D^2(S) = 0$  akkor és csak akkor, ha  $P(S = E(S)) = 1$ . Amint van valamennyi véletlen a rendszerben, a várakozási időnk szigorúan több lesz ennél. Abban az esetben, amikor Poisson-folyamat szerint érkeznek a buszok, azaz amikor  $S$  exponenciális eloszlású valamilyen  $\lambda > 0$  paraméterrel, akkor a hátralévő várakozási időnk várható értéke

$$\frac{1}{2\lambda} + \frac{\frac{1}{\lambda^2}}{2 \cdot \frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} = E(S),$$

mely pontosan megegyezik a buszok közötti érkezési időköz várható értékével. Ez természetesen nem meglepő, ha az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságára gondolunk (lásd

a korábbi 2. választ). Az általános esetben (amikor is  $S$  nem feltétlenül exponenciális eloszlású) a hátralevő idő várható értéke akkor és csak akkor egyezik meg a buszok közötti érkezési idő várható értékével, ha

$$\frac{E(S)}{2} + \frac{D^2(S)}{2E(S)} = E(S),$$

azaz  $E(S) = \frac{D^2(S)}{E(S)}$ , mely azzal ekvivalens, hogy  $D^2(S) = (E(S))^2$ , azaz  $E(S^2) = 2(E(S))^2$ .  
 $\square$

## 4. Folytonos idejű Markov-láncok

### 4.1. Átmenetvalószínűségi függvények, Kolmogorov-féle differenciálegyenletek

A folytonos idejű Markov-láncok nagyjából hasonlóan kezelhetők, mint a diszkrét idejűek. A legnagyobb különbség, hogy elméletileg bármilyen kicsiny idő alatt történhet állapotváltozás, nincs egy kitüntetett legkisebb idő, mint a diszkrét esetben a lépés.

**4.1.1. Definíció.** Egy  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  folytonos idejű, egészértékű sztochasztikus folyamatot folytonos idejű Markov-láncnak nevezünk, ha tetszőleges  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , időpontokra és olyan  $i_1, i_2, \dots, i_n, j \in \mathbb{Z}$  egészekre, melyekre  $P(X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1) > 0$ , teljesül a

$$P(X_t = j \mid X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1) = P(X_t = j \mid X_{t_n} = i_n)$$

egyenlőség.

A későbbi technikai bonyodalmak elkerülése kedvéért tettük fel, hogy  $X_t, t \geq 0$ , egészértékű valószínűségi változók. Jelölje  $I$  azon  $i$  egész számok halmazát, melyekhez létezik olyan  $t \in [0, \infty)$ , hogy  $P(X_t = i) > 0$ . Ezt az  $I$  halmazt nevezzük állapottérnek.

**4.1.2. Definíció.** Egy  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  Markov-láncot homogénnek nevezzük, ha tetszőleges  $t \geq 0$  és  $i, j \in I$  esetén

$$P(X_{s+t} = j \mid X_s = i)$$

értéke  $s$ -től nem függ, pontosabban

$$P(X_{s+t} = j \mid X_s = i) = P(X_{r+t} = j \mid X_r = i)$$

minden olyan  $s, r \geq 0$  esetén, melyekre  $P(X_s = i) > 0$  és  $P(X_r = i) > 0$ .

A továbbiakban csak homogén Markov-láncokkal foglalkozunk!

Tetszőleges  $i, j \in I$  esetén, a  $p_{i,j}(t) := P(X_t = j \mid X_0 = i)$ ,  $t \geq 0$ , függvényt átmenetvalószínűségi függvénynek nevezzük. Nyilván,

$$p_{i,j}(0) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

A  $\mathbf{q} = (q_i)_{i \in I}$  sorvektor, ahol  $q_i := P(X_0 = i)$ ,  $i \in I$ , egy diszkrét valószínűségeloszlás, melyet a lánc kezdeti eloszlásának nevezünk. Az  $X_t, t \geq 0$ , valószínűségi változók eloszlásait a lánc abszolút valószínűségeinek nevezzük, jelölés:  $q_i(t) := P(X_t = i)$ ,  $i \in I$ .

**4.1.3. Definíció.** Legyen  $\Gamma$  egy nemüres, megszámlálható halmaz, és  $\mathcal{M} := \{(b_{i,j})_{i,j \in \Gamma} : b_{i,j} \in \mathbb{R}, i, j \in \Gamma\}$ . Egy  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}$  (mátrix értékű) függvényt sztochasztikus mátrixfüggvénynek nevezünk, ha  $f(t)$  sztochasztikus mátrix minden  $t \in [0, \infty)$ -ra, és  $f(s+t) = f(s)f(t)$  érvényes minden  $s, t \in [0, \infty)$  esetén (azaz teljesül az exponenciális Cauchy-függvényegyenlet).

A  $\mathbb{P}(t) := (p_{i,j}(t))_{i,j \in I}$ ,  $t \in [0, \infty)$ , mátrix értékű függvényt a lánc átmeneti mátrixfüggvényének nevezzük.

**4.1.4. Példa.** Legyen  $(N_t)_{t \geq 0}$  egy Poisson-folyamat  $\lambda > 0$  intenzitással. Ekkor  $(N_t)_{t \geq 0}$  egy folytonos idejű homogén Markov-lánc, melynek fázistere  $I = \mathbb{Z}_+$ , kezdeti eloszlása  $\mathbf{q} = (1, 0, 0, \dots)$  és átmeneti mátrixfüggvénye  $\mathbb{P}(t) = (p_{i,j}(t))_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ ,  $t \geq 0$ , ahol

$$p_{i,j}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, & \text{ha } j \geq i, \\ 0 & \text{ha } j < i, \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad t \geq 0.$$

Valóban, a 3.3.10. Állításban már láttuk, hogy  $(N_t)_{t \geq 0}$  egy folytonos idejű homogén Markov-lánc. Továbbá, szintén a 3.3.10. Állítás alapján kapjuk, hogy tetszőleges  $j \geq i$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}_+$ , és  $t \geq 0$  esetén

$$p_{i,j}(t) = P(N_{s+t} = j \mid N_s = i) = \frac{(\lambda(t+s-i))^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t+s-i)} = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t},$$

ahol  $s > 0$  tetszőleges. □

**4.1.5. Állítás.** Egy  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  folytonos idejű (homogén) Markov-lánc  $\mathbb{P}(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , átmeneti mátrixfüggvénye sztochasztikus mátrixfüggvény, így érvényes a

$$\mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{P}(s), \quad s, t \geq 0,$$

összefüggés, melyet úgy is írhatunk, hogy

$$(4.1.1) \quad p_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in I} p_{i,k}(s) p_{k,j}(t), \quad i, j \in I, \quad s, t \in [0, \infty),$$

azaz teljesülnek az ún. Chapman–Kolmogorov egyenletek.

**Bizonyítás.** Valóban, minden  $t \geq 0$  esetén a  $\mathbb{P}(t)$  mátrix minden eleme nemnegatív, hiszen feltételes valószínűségekről van szó, illetve a teljes valószínűség tétele alapján minden  $i \in I$  esetén

$$\sum_{j \in I} p_{i,j}(t) = \sum_{j \in I} P(X_t = j \mid X_0 = i) = P\left(\bigcup_{j \in I} \{X_t = j\} \mid X_0 = i\right) = P(\Omega \mid X_0 = i) = 1.$$

Továbbá, a teljes valószínűség tétele, a Markov-tulajdonság és a homogenitás alapján

$$\begin{aligned} p_{i,j}(s+t) &= P(X_{t+s} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in I} P(X_{t+s} = j, X_s = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in I} P(X_{t+s} = j \mid X_s = k, X_0 = i) P(X_s = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in I} P(X_{t+s} = j \mid X_s = k) P(X_s = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in I} p_{k,j}(t) P(X_s = k \mid X_0 = i) = \sum_{k \in I} p_{k,j}(t) p_{i,k}(s) = \sum_{k \in I} p_{i,k}(s) p_{k,j}(t). \end{aligned}$$

□

Jelölje  $\mathbf{q}(t) := (q_i(t))_{i \in I}$ ,  $t \geq 0$ , az abszolút valószínűségekből álló sorvektort. Ekkor  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q} \mathbb{P}(t)$ ,  $t \geq 0$ , ahol  $\mathbf{q} := \mathbf{q}(0)$  a lánc kezdeti eloszlását tartalmazó sorvektor. Valóban,  $i \in I$  és  $t \geq 0$  esetén

$$\begin{aligned} q_i(t) &= P(X_t = i) = \sum_{j \in I} P(X_t = i, X_0 = j) = \sum_{j \in I} P(X_t = i \mid X_0 = j) P(X_0 = j) \\ &= \sum_{j \in I} p_{j,i}(t) q_j = \sum_{j \in I} q_j p_{j,i}(t) = (\mathbf{q} \mathbb{P}(t))_i. \end{aligned}$$

Következésképpen, tetszőleges  $t \geq 0$  esetén  $X_t$  eloszlása  $\mathbf{q} \mathbb{P}(t)$ .

**4.1.6. Állítás. (Többlépéses multiplikációs formula)** Legyen  $\{X_t : t \geq 0\}$  egy folytonos idejű Markov-lánc  $\mathbf{q}$  kezdeti eloszlással és  $(\mathbb{P}(t))_{t \geq 0}$  átmeneti mátrix függvényvel. Ekkor tetszőleges  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$  időpontok és  $i_0, i_1, \dots, i_k \in I$  állapotok esetén

$$\begin{aligned} P(X_{t_k} = i_k, X_{t_{k-1}} = i_{k-1}, \dots, X_{t_1} = i_1, X_0 = i_0) \\ = q_{i_0} p_{i_0, i_1}(t_1) p_{i_1, i_2}(t_2 - t_1) \dots p_{i_{k-1}, i_k}(t_k - t_{k-1}). \end{aligned}$$

A diszkrét paraméterű esethez hasonlóan bizonyítható az egzisztenciátétel:

**4.1.7. Tétel. (Markov-láncok egzisztenciátétele)** Legyen adott egy  $\mathbb{P}(t)$ ,  $t \geq 0$ , sztochasztikus mátrixfüggvény és egy  $\mathbf{q}$  diszkrét eloszlás  $I$ -n, ahol  $I$  egy részhalmaza  $\mathbb{Z}$ -nek. Ekkor létezik olyan folytonos idejű homogén Markov-lánc, melynek  $I$  a fázistere,  $\mathbf{q}$  a kezdeti eloszlása és  $\mathbb{P}(t)$ ,  $t \geq 0$ , az átmeneti mátrixfüggvénye.

Általában véve folytonos idejű Markov-láncok átmenetfüggvényének meghatározása nehéz feladat lehet. Így a dinamika leírására más megközelítést alkalmazunk. Az alábbi megjegyzés motiválja, hogy miként jön elő természetes módon az átmeneti mátrixfüggvény 0 pontbeli viselkedésének a vizsgálata.

**4.1.8. Megjegyzés.** Tetszőleges  $t \geq 0$  esetén, a Chapman–Kolmogorov-egyenletek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(t) &= \mathbb{P}\left(\frac{t}{n} + \left(t - \frac{t}{n}\right)\right) = \mathbb{P}\left(\frac{t}{n}\right) \mathbb{P}\left(t - \frac{t}{n}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{t}{n}\right) \mathbb{P}\left(\frac{t}{n}\right) \mathbb{P}\left(t - \frac{2t}{n}\right) \\ &= \underbrace{\left(\mathbb{P}\left(\frac{t}{n}\right) \dots \mathbb{P}\left(\frac{t}{n}\right)\right)}_n \mathbb{P}(0) = \left(\mathbb{P}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{P}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{t}{n}\right)^n, \quad t \geq 0,$$

és tekintettel arra, hogy tetszőleges  $t \geq 0$  esetén  $t/n \rightarrow 0$ , amint  $n \rightarrow \infty$ , látható, hogy a  $\mathbb{P}(t)$ ,  $t \geq 0$ , átmeneti mátrixfüggvény 0 pont körüli viselkedése fontos szerepet játszik.  $\square$

Ésszerű feltételezni, hogy a lánc egy-egy állapotban eltölt valamennyi időt, vagyis rövid idő alatt kis valószínűséggel következik be állapotváltozás, melyet precízen a következő definícióban fogalmazunk meg.

**4.1.9. Definíció.** Egy  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  Markov-láncot standardnak nevezünk, ha tetszőleges  $i, j \in I$  állapotokra

$$\lim_{t \downarrow 0} p_{i,j}(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{ha } i \neq j, \end{cases} = p_{i,j}(0),$$

azaz az átmenetvalószínűségi függvény folytonos a 0 pontban.

Ha  $(N_t)_{t \geq 0}$  egy Poisson-folyamat  $\lambda > 0$  intenzitással, akkor  $(N_t)_{t \geq 0}$  standard (a 4.1.4. Példában szereplő átmenetvalószínűségi függvények alakjából adódóan).

**4.1.10. Megjegyzés.** Mélyebb analízisbeli eszközökkel bebizonyítható, hogy egy standard Markov-lánc átmenetvalószínűségi függvényei folytonosak, sőt egyenletesen is folytonosak, és tetszőleges  $i, j \in I$  állapotokra két eset lehetséges: vagy  $p_{i,j}(t) > 0$  minden  $t > 0$ -ra, vagy pedig  $p_{i,j}(t) = 0$  minden  $t > 0$ -ra. Ebből azt már könnyű látni, hogy az abszolút valószínűségek is folytonosak, felhasználva a  $q_i(t) = \sum_{j \in I} q_j p_{j,i}(t)$ ,  $t \geq 0$ , előállítását és a dominált konvergencia tételt. A dominált konvergencia tételt valóban lehet alkalmazni, ugyanis  $|q_j p_{j,i}(t)| \leq q_j$ ,  $t \geq 0$ , és  $\sum_{j \in I} q_j = 1 < \infty$ .  $\square$

A standarditás fogalmát világítja meg a következő állítás, átfogalmazva azt sztochasztika nyelvezetre (tisztán analízis nyelvezet helyett).

**4.1.11. Állítás.** Egy  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  Markov-lánc akkor és csak akkor standard, ha sztochasztikusan jobbról folytonos, azaz ha tetszőleges  $t \geq 0$  esetén  $X_s$  tart sztochasztikusan  $X_t$ -hez, amint  $s \downarrow t$ , azaz  $\lim_{s \downarrow t} P(|X_s - X_t| \geq \varepsilon) = 0$  teljesül bármilyen  $\varepsilon > 0$  esetén.

**Bizonyítás.** (i). Tegyük fel először, hogy a lánc sztochasztikusan jobbról folytonos. Tetszőleges rögzített  $i \in I$  állapothoz létezik olyan  $t \geq 0$  ( $I$  definíciója miatt), melyre  $q_i(t) = P(X_t = i) > 0$ . A lánc sztochasztikus jobbról folytonossága miatt  $\lim_{s \downarrow t} P(|X_s - X_t| \geq \frac{1}{2}) = 0$ . Mivel  $X_t$  csak egész értékeket vehet fel, így minden  $s > t$ -re,

$$\begin{aligned} P(|X_s - X_t| \geq \tfrac{1}{2}) &= P(X_s \neq X_t) = \sum_{j \in I} P(X_s \neq X_t | X_t = j) P(X_t = j) \\ &= \sum_{j \in I} (1 - P(X_s = j | X_t = j)) q_j(t) = \sum_{j \in I} (1 - p_{j,j}(s - t)) q_j(t) \\ &\geq q_i(t) (1 - p_{i,i}(s - t)) \geq 0. \end{aligned}$$

Így, felhasználva, hogy  $q_i(t) > 0$ , a rendőr tétel alapján kapjuk, hogy  $\lim_{s \downarrow t} p_{i,i}(s - t) = 1$ , azaz  $\lim_{h \downarrow 0} p_{i,i}(h) = 1$ . Ha  $j \neq i$ , úgy  $p_{i,i}(h) + p_{i,j}(h) \leq 1$ ,  $h > 0$ , és így  $p_{i,j}(h) \leq 1 - p_{i,i}(h)$ ,  $h > 0$ , amiből következik, hogy

$$\limsup_{h \downarrow 0} p_{i,j}(h) \leq \limsup_{h \downarrow 0} (1 - p_{i,i}(h)) = \lim_{h \downarrow 0} (1 - p_{i,i}(h)) = 0,$$

ahol a jobb oldalon szereplő  $\limsup_{h \downarrow 0}$  kiszámításánál felhasználtuk, hogy már beláttuk, hogy  $\lim_{h \downarrow 0} p_{i,i}(h) = 1$ . Az előzőekből adódik, hogy  $\lim_{h \downarrow 0} p_{i,j}(h) = 0$ , ha  $i \neq j$ .

(ii). Megfordítva, tegyük fel, hogy a lánc standard. Az (i) részben levezettük, hogy

$$\begin{aligned} P(X_s \neq X_t) &= \sum_{j \in I} (1 - p_{j,j}(s - t)) q_j(t) \\ &= \sum_{j \in I} q_j(t) - \sum_{j \in I} p_{j,j}(s - t) q_j(t) = 1 - \sum_{j \in I} p_{j,j}(s - t) q_j(t), \quad \forall s > t. \end{aligned}$$

Így a dominált konvergencia tétel és a standarditás alapján

$$\lim_{s \downarrow t} P(X_s = X_t) = \sum_{i \in I} \lim_{s \downarrow t} (p_{i,i}(s - t) q_i(t)) = \sum_{i \in I} q_i(t) = 1.$$

Valóban, a dominált konvergencia tételt lehet alkalmazni, ugyanis  $|p_{i,i}(s - t) q_i(t)| \leq q_i(t)$ ,  $s > t$  és  $\sum_{i \in I} q_i(t) = 1 < \infty$ . Felhasználva, hogy tetszőleges  $\varepsilon > 0$  esetén  $P(|X_s - X_t| \geq \varepsilon) \leq P(X_s \neq X_t)$ , kapjuk, hogy

$$\lim_{s \downarrow t} P(|X_s - X_t| \geq \varepsilon) \leq \lim_{s \downarrow t} P(X_s \neq X_t) = 1 - \lim_{s \downarrow t} P(X_s = X_t) = 0,$$

azaz a lánc sztochasztikusan jobbról folytonos.  $\square$

A továbbiakban csak standard Markov-láncokat tárgyalunk. Ekkor belátható, hogy az átmenetvalószínűségi függvények még differenciálhatóak is, és kielégítenek bizonyos differenciálegyenleteket. Először is bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

**4.1.12. Tétel.** Legyen  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  egy standard Markov-lánc. Ekkor

(i) tetszőleges  $i \in I$  esetén létezik a

$$p'_{i,i}(0) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{i,i}(t) - p_{i,i}(0)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{i,i}(t) - 1}{t} \in [-\infty, 0]$$

jobboldali derivált, amely  $-\infty$  is lehet;

(ii) tetszőleges  $i \neq j$ ,  $i, j \in I$ , esetén létezik és véges a

$$p'_{i,j}(0) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{i,j}(t) - p_{i,j}(0)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{i,j}(t)}{t} \in [0, \infty)$$

jobboldali derivált.

**4.1.13. Definíció.** Az  $\mathbf{A} := (a_{i,j})_{i,j \in I}$ ,  $a_{i,j} := p'_{i,j}(0)$  mátrixot a lánc infinitézimális mátrixának (vagy generátor mátrixának) nevezzük. Vezessük be továbbá  $i \in I$  esetén az  $a_i := -a_{i,i} \in [0, \infty]$  jelölést.

Az alábbi megjegyzésben az  $a_{i,j}$  mennyiségek valószínűség számítási (szemléletes) jelentésével foglalkozunk.

**4.1.14. Megjegyzés.** Az  $a_{i,j}$  definíció alapján  $i \neq j$  esetén  $p_{i,j}(h) = a_{i,j}h + o(h)$ , ha  $h \rightarrow 0$ , ahol  $o(h)$  olyan mennyiséget jelöl, melyre  $\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/h = 0$ . Vagyis kicsi  $\Delta t$  esetén  $p_{i,j}(\Delta t) \sim a_{i,j}\Delta t$ , azaz rövid  $\Delta t$  időintervallum esetén az  $i$ -ből  $j$ -be való átmenet valószínűsége  $\Delta t$ -vel arányos, és  $a_{i,j}$  az arányossági tényező. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy  $a_{i,j}$  az  $i$ -ből  $j$ -be történő átmenet intenzitása, ha  $i \neq j$ . Másrészt véges  $a_{i,i}$  esetén  $p_{i,i}(h) = 1 + a_{i,i}h + o(h) = 1 - a_i h + o(h)$ , ha  $h \rightarrow 0$ , így  $1 - p_{i,i}(\Delta t) \sim a_i \Delta t$ , azaz rövid  $\Delta t$  időintervallum esetén annak a valószínűsége, hogy a lánc  $i$ -ből indulva  $\Delta t$  idő múlva már nem az  $i$  állapotban lesz,  $\Delta t$ -vel arányos, és  $a_i$  az arányossági tényező. Vagyis  $a_i = -a_{i,i}$  az  $i$  állapot elhagyásának intenzitása, amennyiben  $a_i$  véges. Ha  $a_i = \infty$ , az interpretálható úgy, hogy az  $i$  állapot elhagyásának az intenzitása  $+\infty$ , azaz az  $i$  állapotot "azonnal" elhagyja a lánc (ez lesz később a pillanatnyi állapot, lásd a 4.2.6. Definíciót). A fentieket (részben) úgy is összefoglalhatjuk, hogy ha  $\{X_t : t \geq 0\}$  egy standard Markov-lánc  $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{i,j \in I}$  generátormátrixszal, akkor tetszőleges  $i, j \in I$  esetén

$$p_{i,j}(\Delta) = P(X_\Delta = j \mid X_0 = i) = \delta_{i,j} + a_{i,j}\Delta + o(\Delta), \quad \text{amint } \Delta \downarrow 0.$$

Valóban, a fentiek alapján

$$a_{i,j} = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{p_{i,j}(\Delta) - \delta_{i,j}}{\Delta},$$

és így

$$p_{i,j}(\Delta) = \delta_{i,j} + a_{i,j}\Delta + o(\Delta), \quad \text{amint } \Delta \downarrow 0.$$

$\square$

Az infinitézimális mátrix alapvető tulajdonságairól szól az alábbi állítás.

**4.1.15. Állítás.** Legyen  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  egy standard Markov-lánc.

(i) Tetszőleges  $i \in I$  esetén  $-\infty \leq a_{i,i} \leq 0$ , azaz  $0 \leq a_i \leq \infty$ .

(ii) Tetszőleges  $i \neq j$ ,  $i, j \in I$ , esetén  $0 \leq a_{i,j} < \infty$ .

(iii) Tetszőleges  $i \in I$  esetén  $\sum_{j \in I \setminus \{i\}} a_{i,j} \leq -a_{i,i} = a_i$ . Ha  $a_i \in [0, \infty)$  (azaz  $a_{i,i} \in (-\infty, 0]$ ), akkor  $\sum_{j \in I} a_{i,j} \leq 0$ .

**Bizonyítás.** Az (i) és (ii) a definíció közvetlen következménye.

(iii). Legyen  $i \in I$  rögzített. Tetszőleges  $t > 0$  esetén

$$\frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} - \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \frac{p_{i,j}(t)}{t} = \frac{1 - \sum_{j \in I} p_{i,j}(t)}{t} = \frac{1 - 1}{t} = 0.$$

Így

$$(4.1.2) \quad \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \frac{p_{i,j}(t)}{t} = \frac{1 - p_{i,i}(t)}{t}, \quad t > 0.$$

A (mértékelméleti) Fatou-lemma alapján

$$\sum_{j \in I \setminus \{i\}} a_{i,j} = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{i,j}(t)}{t} \leq \liminf_{t \downarrow 0} \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \frac{p_{i,j}(t)}{t}.$$

Ezért (4.1.2) alapján

$$\sum_{j \in I \setminus \{i\}} a_{i,j} \leq \liminf_{t \downarrow 0} \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \frac{p_{i,j}(t)}{t} = \liminf_{t \downarrow 0} \frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} = -a_{i,i} = a_i.$$

□

A 2. ábrán a  $p_{i,j}(t)$ ,  $t \geq 0$ , átmenetvalószínűségi függvények láthatóak. Az ábrán egy olyan eset van feltüntetve, hogy  $p_{i,i}$  monoton csökkenő függvény rövid  $[0, h]$  intervallumon (mely a  $p_{i,i}(h) \approx 1 - a_i h$  közelítésre gondolva "hihető"), az  $i \neq j$  esetben pedig  $p_{i,j}$  monoton növekvő függvény rövid  $[0, h]$  intervallumon (mely a  $p_{i,j}(h) \approx a_{i,j} h$  közelítésre gondolva "hihető").

**4.1.16. Definíció.** Egy  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  Markov-láncot konzervatívnak nevezünk, ha tetszőleges  $i \in I$  állapotra  $a_{i,i} > -\infty$  és  $\sum_{j \in I} a_{i,j} = 0$  (azaz  $a_i < \infty$  és  $\sum_{j \in I \setminus \{i\}} a_{i,j} = a_i$ ).

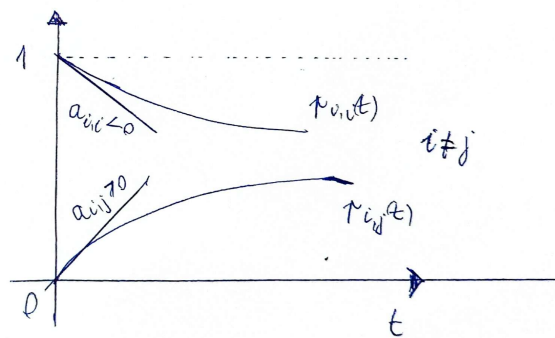
A konzervativitás azt jelenti szavakban, hogy tetszőleges állapot elhagyásának az intezi-tása véges és ez az intenzitás megegyezik az összes többi, tőle különböző állapotba történő átmenetek intenzitásainak az összegével (nincs az állapottérből való "kiugrás").

**4.1.17. Megjegyzés.** Például, ha véges az  $I$  állapottér és tetszőleges  $i \in I$  állapotra  $a_{i,i} > -\infty$ , akkor a lánc konzervatív. Valóban, felhasználva, hogy a véges összegzés és a határérték képzés művelete felcserélhető, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} a_{i,j} &= \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{i,j}(t)}{t} + \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{i,i}(t) - 1}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left( \sum_{j \in I} p_{i,j}(t) - 1 \right) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{0}{t} = 0, \quad i \in I. \end{aligned}$$

Ha  $j < i$ , akkor  $p_{i,j}(t) = 0$  tetszőleges  $t > 0$  esetén, és így  $a_{i,j} = 0$ .

□



CamScannerrel szkennelve

2. ábra. A  $p_{i,j}(t)$ ,  $t \geq 0$ , átmenetvalószínűségi függvények.

**4.1.18. Példa.** Legyen  $(N_t)_{t \geq 0}$  egy Poisson folyamat  $\lambda > 0$  intenzitással. Ekkor

$$a_{i,j} = \begin{cases} -\lambda, & \text{ha } j = i, \\ \lambda, & \text{ha } j = i + 1, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Valóban, a 3.3.7. Tétel alapján, tetszőleges  $s > 0$  esetén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{i,i}(t) - 1}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P(N_{t+s} = i \mid N_s = i) - 1}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{P(N_t = 0) - 1}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - \lambda t + o(t) - 1}{t} = -\lambda, \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{P(N_t = 1)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\lambda t + o(t)}{t} = \lambda, \\ a_{i,j} &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{P(N_t \geq 2)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0, \quad j > i + 1, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

A fentiek alapján  $(N_t)_{t \geq 0}$  egy konzervatív Markov-lánc. □

A következőkben mutatunk egy heurisztikus gondolatmenetet a Kolmogorov-féle differenciálegyenletek származtatására. A  $\mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t)$  Chapman–Kolmogorov-egyenletet  $s$  szerint formálisan deriválva,  $\mathbb{P}'(s+t) = \mathbb{P}'(s)\mathbb{P}(t)$  adódik, majd  $s \downarrow 0$  esetén kapjuk a  $\mathbb{P}'(t) = \mathbf{A} \mathbb{P}(t)$  differenciálegyenletet (mely valójában egy differenciálegyenlet-rendszer a  $(p_{i,j}(t))_{t \geq 0}$ ,  $i, j \in I$ , átmenetvalószínűségi függvényekre, a  $\mathbf{A}$  generátormátrixot ismertnek feltételezve). Hasonlóan,  $t$  szerint formálisan deriválva, adódik, hogy  $\mathbb{P}'(s+t) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}'(t)$ , majd  $t \downarrow 0$  esetén kapjuk a  $\mathbb{P}'(s) = \mathbb{P}(s)\mathbf{A}$  differenciálegyenletet. Ezt az intuitív gondolatot teszi precízzé a következő tétel.

**4.1.19. Tétel.** (i) Ha a lánc konzervatív, akkor tetszőleges  $t > 0$  pontban a  $p_{i,j}(t)$  átmenetvalószínűségi függvények differenciálhatóak és eleget tesznek a

$$(4.1.3) \quad p'_{i,j}(t) = \sum_{k \in I} a_{i,k} p_{k,j}(t), \quad t > 0, \quad i, j \in I,$$

Kolmogorov-féle első (vagy "backward") differenciálegyenlet-rendszernek, azaz

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}(t) = \mathbf{A} \mathbb{P}(t), \quad t > 0.$$

(ii) Ha  $a_{j,j} > -\infty$  minden  $j \in I$ -re és rögzített  $j \in I$  esetén a  $\lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{i,j}(t)}{t} = a_{i,j}$  konvergencia  $i$ -ben egyenletes ( $i \neq j$ ), akkor tetszőleges  $t > 0$  pontban a  $p_{i,j}(t)$  átmenetvalószínűségi függvények differenciálhatóak és eleget tesznek a

$$(4.1.4) \quad p'_{i,j}(t) = \sum_{k \in I} p_{i,k}(t) a_{k,j}, \quad t > 0, \quad i, j \in I,$$

Kolmogorov-féle második (vagy "forward") differenciálegyenlet-rendszernek, azaz

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(t) \mathbf{A}, \quad t > 0.$$

**Bizonyítás.** (i). Ha a lánc konzervatív, akkor bármely rögzített  $i \in I$  állapot esetén  $-\infty < a_{i,i} \leq 0$  és  $\sum_{j \in I} a_{i,j} = 0$ , ahol  $a_{i,j} \geq 0$ ,  $j \neq i$ -re. Ebből az is következik, hogy a (4.1.3) jobb oldalán álló sor abszolút konvergencia, hiszen

$$\sum_{k \in I} |a_{i,k} p_{k,j}(t)| \leq \sum_{k \in I} |a_{i,k}| = |a_{i,i}| + \sum_{k \in I \setminus \{i\}} a_{i,k} = -a_{i,i} + \sum_{k \in I \setminus \{i\}} a_{i,k} = -2a_{i,i} < \infty$$

tetszőleges  $t > 0$  esetén. Továbbá,  $0 \leq \sum_{j \in I \setminus \{i\}} a_{i,j} = -a_{i,i} < \infty$ , és ezért tetszőleges  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan  $J \subset I \setminus \{i\}$  véges részhalmaz (nyilván ekkor  $i \notin J$ , illetve  $J$  függ  $\varepsilon$ -tól, de ezt a függést nem jelöljük), melyre

$$(4.1.5) \quad \sum_{k \in (I \setminus \{i\}) \setminus J} a_{i,k} < \varepsilon.$$

A Chapman–Kolmogorov-egyenlet alapján tetszőleges  $t, h > 0$ -ra

$$p_{i,j}(t+h) = p_{i,i}(h) p_{i,j}(t) + \sum_{k \in I \setminus \{i\}} p_{i,k}(h) p_{k,j}(t),$$

amiből

$$(4.1.6) \quad \frac{p_{i,j}(t+h) - p_{i,j}(t)}{h} = \frac{p_{i,i}(h) - 1}{h} p_{i,j}(t) + \sum_{k \in I \setminus \{i\}} \frac{p_{i,k}(h)}{h} p_{k,j}(t).$$

Itt

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{p_{i,i}(h) - 1}{h} = p'_{i,i}(0) = a_{i,i},$$

így látjuk, hogy a  $p_{i,j}$  függvény  $t$ -beli differenciálhatósága és a (4.1.3) formula következik, ha belátjuk, hogy

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{k \in I \setminus \{i\}} \frac{p_{i,k}(h)}{h} p_{k,j}(t) = \sum_{k \in I \setminus \{i\}} \left( \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{p_{i,k}(h)}{h} p_{k,j}(t) \right) = \sum_{k \in I \setminus \{i\}} a_{i,k} p_{k,j}(t),$$

ahol az első egyenlőség bizonyítása, a limesz és a szumma felcserélése igényel bizonyítást. Nem ezt a gondolatmenetet fejezzük be, hanem felhasználva (4.1.6)-t, direktben vizsgáljuk  $\frac{p_{i,j}(t+h) - p_{i,j}(t)}{h}$ -nak a várt ( $h \rightarrow 0$  esetén vett) határértékétől való eltérését.

Felhasználva (4.1.6)-t:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{p_{i,j}(t+h) - p_{i,j}(t)}{h} - \sum_{k \in I} a_{i,k} p_{k,j}(t) \right| \\ &= \left| \left( \frac{p_{i,i}(h) - 1}{h} - a_{i,i} \right) p_{i,j}(t) + \sum_{k \in I \setminus \{i\}} \left( \frac{p_{i,k}(h)}{h} - a_{i,k} \right) p_{k,j}(t) \right| \\ &\leq \left| \frac{p_{i,i}(h) - 1}{h} - a_{i,i} \right| + \sum_{k \in J} \left| \frac{p_{i,k}(h)}{h} - a_{i,k} \right| + \sum_{k \in (I \setminus \{i\}) \setminus J} \frac{p_{i,k}(h)}{h} + \sum_{k \in (I \setminus \{i\}) \setminus J} a_{i,k}. \end{aligned}$$

Felhasználva (4.1.5)-t, a negyedik tag kisebb mint  $\varepsilon$ , és ez igaz az első és második tagra is, ha  $h$  elegendően kicsi, hiszen  $J$  véges halmaz. Megmutatjuk, hogy a harmadik tag is tetszőlegesen kicsivé tehető, amint  $h \rightarrow 0$ . Felhasználva, hogy  $(p_{i,j}(h))_{i,j \in I}$  sztochasztikus mátrix, kapjuk, hogy

$$1 = p_{i,i}(h) + \sum_{k \in J} p_{i,k}(h) + \sum_{k \in (I \setminus \{i\}) \setminus J} p_{i,k}(h), \quad i \in I, \quad h > 0,$$

és így

$$\sum_{k \in (I \setminus J) \setminus \{i\}} \frac{p_{i,k}(h)}{h} = \sum_{k \in (I \setminus \{i\}) \setminus J} \frac{p_{i,k}(h)}{h} = \frac{1 - p_{i,i}(h)}{h} - \sum_{k \in J} \frac{p_{i,k}(h)}{h}, \quad i \in I, \quad h > 0,$$

ahol a jobboldal határértéke  $h \downarrow 0$  esetén  $-a_{i,i} - \sum_{k \in J} a_{i,k}$ , hiszen  $J$  véges. Mivel a lánc konzervatív,  $\sum_{j \in I} a_{i,j} = 0$ , és így (4.1.5) alapján

$$-a_{i,i} - \sum_{k \in J} a_{i,k} = \sum_{k \in (I \setminus \{i\}) \setminus J} a_{i,k} < \varepsilon.$$

Ezért

$$\limsup_{h \downarrow 0} \left( \sum_{k \in (I \setminus J) \setminus \{i\}} \frac{p_{i,k}(h)}{h} \right) \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Így

$$\lim_{h \downarrow 0} \left| \frac{p_{i,j}(t+h) - p_{i,j}(t)}{h} - \sum_{k \in I} a_{i,k} p_{k,j}(t) \right| = 0,$$

amiből következik (i).

(ii). Legyen  $j \in I$  rögzített állapot. A feltétel szerint tetszőleges  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan  $\delta > 0$ , hogy  $0 < h < \delta$  esetén bármely  $k \neq j$ ,  $k \in I$ -re  $\left| \frac{p_{k,j}(h)}{h} - a_{k,j} \right| < \varepsilon$ . Ebből az is következik, hogy a (4.1.4) jobb oldalán álló sor abszolút konvergencia, hiszen

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I} |p_{i,k}(t) a_{k,j}| &\leq -a_{j,j} + \sum_{k \in I \setminus \{j\}} p_{i,k}(t) a_{k,j} \leq -a_{j,j} + \sum_{k \in I \setminus \{j\}} p_{i,k}(t) \left( \frac{p_{k,j}(h)}{h} + \varepsilon \right) \\ &= -a_{j,j} + \frac{1}{h} \sum_{k \in I \setminus \{j\}} p_{i,k}(t) p_{k,j}(t) + \varepsilon \sum_{k \in I \setminus \{j\}} p_{i,k}(t) \\ &\leq -a_{j,j} + \frac{1}{h} p_{i,j}(t+h) + \varepsilon < \infty, \quad t > 0, \end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti lépésben a Chapman-Kolmogorov egyenleteket használtuk.

Nyilván  $\delta$  (esetleges) csökkentésével elérhető, hogy még  $\left| \frac{p_{j,j}(h)-1}{h} - a_{j,j} \right| < \varepsilon$  is teljesül, hiszen  $\lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{j,j}(h)-1}{h} = p'_{j,j}(0) = a_{j,j}$ . Az (i) rész bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy tetszőleges  $i, j \in I$  esetén

$$p_{i,j}(t+h) = p_{i,j}(t)p_{j,j}(h) + \sum_{k \in I \setminus \{j\}} p_{i,k}(t)p_{k,j}(h),$$

amiből

$$\frac{p_{i,j}(t+h) - p_{i,j}(t)}{h} = \frac{p_{j,j}(h) - 1}{h} p_{i,j}(t) + \sum_{k \in I \setminus \{j\}} p_{i,k}(t) \frac{p_{k,j}(h)}{h}.$$

Így

$$\begin{aligned} & \left| \frac{p_{i,j}(t+h) - p_{i,j}(t)}{h} - \sum_{k \in I} p_{i,k}(t) a_{k,j} \right| \\ &= \left| p_{i,j}(t) \left( \frac{p_{j,j}(h) - 1}{h} - a_{j,j} \right) + \sum_{k \in I \setminus \{j\}} p_{i,k}(t) \left( \frac{p_{k,j}(h)}{h} - a_{k,j} \right) \right| \\ &\leq p_{i,j}(t)\varepsilon + \sum_{k \in I \setminus \{j\}} p_{i,k}(t)\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

amiből  $\varepsilon \rightarrow 0$  határátmenettel kapjuk az állítást.  $\square$

**4.1.20. Megjegyzés.** A bizonyítás alapján „megsejthetjük” a backward és forward elnevezések magyarázatát. A

$$\frac{p_{i,j}(t+h) - p_{i,j}(t)}{h}$$

összefüggésben  $p_{i,j}(t+h)$ -nak a Kolmogorov-Chapman egyenletek felhasználásával történő felbontásakor a forward egyenlet esetén a "nagy t idő" után változtatok egy kicsit,  $h$ -t, míg a backward egyenlet esetén a "nagy t idő" előtt változtatok egy kicsit,  $h$ -t.  $\square$

A Kolmogorov-féle differenciálegyenlet-rendszer kezdeti feltételei a standarditás következtében  $p_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$ ,  $i, j \in I$ . Felmerül a kérdés, hogy a Kolmogorov-féle differenciálegyenlet-rendszernek mikor létezik megoldása, és az mikor egyértelmű? Másképpen feltéve a kérdést: ha megadunk egy olyan  $\mathbf{A}$  mátrixot, mely rendelkezik egy konzervatív Markov-lánc infinitézimális mátrixának tulajdonságaival, akkor létezik-e egyértelműen olyan Markov-lánc, melynek  $\mathbf{A}$  az infinitézimális mátrixa? Az előbbiekben egyértelműségeen azt értjük, hogy az átmeneti mátrix függvény egyértelműen van meghatározva. Véges állapottér esetén a válasz egyszerű, lásd a 4.1.22. Állítást. A bizonyításban szükségünk lesz az alábbi lemmára.

**4.1.21. Lemma.** Legyenek  $\mathbf{B}$  és  $\mathbf{C}$   $(n \times n)$ -es mátrixok, hogy  $\mathbf{BC} = \mathbf{CB}$ , ahol  $n \in \mathbb{N}$ . Ekkor  $e^{\mathbf{B}+\mathbf{C}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{C}} = e^{\mathbf{C}}e^{\mathbf{B}}$ , ahol

$$e^{\mathbf{B}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^k}{k!}.$$

Vegyük észre, hogy  $e^{\mathbf{B}}$  értelmezésével nincs gond, mert a fenti sor abszolút konvergens, hiszen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{\mathbf{B}^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathbf{B}\|^k}{k!} = e^{\|\mathbf{B}\|} < \infty,$$

ahol  $\|\mathbf{B}\| := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|\mathbf{B}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ .

**Bizonyítás.** Mivel  $\mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{B}$ , a binomiális tétel alapján

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \mathbf{B}^i \mathbf{C}^{k-i}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Így felhasználva azt is, hogy egy abszolút konvergens sor tetszőlegesen átrendezhető a konvergencia és az összeg megváltozása nélkül, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{B}+\mathbf{C}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{B} + \mathbf{C})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\mathbf{B}^i \mathbf{C}^{k-i}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \frac{\mathbf{B}^i \mathbf{C}^{k-i}}{i!(k-i)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^{\ell} \mathbf{C}^j}{\ell! j!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^{\ell}}{\ell!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{C}^j}{j!} = e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{C}}, \end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti lépésben azt is felhasználtuk, hogy

$$\left\{ (i, k-i) : k \in \mathbb{Z}_+, i \in \{0, 1, \dots, k\} \right\} = \left\{ (\ell, j) : \ell, j \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

□

**4.1.22. Állítás.** Legyen  $I \subset \mathbb{Z}$  egy véges részhalmaz, és  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{|I| \times |I|}$  egy konzervatív infinitézimális mátrix. Ekkor a Kolmogorov-féle differenciálegyenleteknek a  $\mathbb{P}(0) = (\delta_{i,j})_{i,j \in I}$  kezdeti feltétel esetén létezik egyértelmű megoldása, és ez a

$$\mathbb{P}(t) := e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k, \quad t \geq 0,$$

sztochasztikus mátrixfüggvény. Így teljesülnek a Chapman-Kolmogorov egyenletek is, és a Kolmogorov-féle backward- és forward differenciálegyenletek megoldásai ugyanazok.

**Bizonyítás.** A megadott  $\mathbb{P}(t)$ ,  $t \geq 0$ , mátrixfüggvény kielégíti a Kolmogorov-egyenleteket, hiszen az összegzés és a differenciálás sorrendje felcserélhető, mert a  $\mathbb{P}(t)$  definíciójában szereplő sor abszolút konvergens:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} \mathbf{A}^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \mathbf{A}^k = \mathbf{A} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \mathbf{A}^{k-1} \\ &= \mathbf{A} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{\ell}}{\ell!} \mathbf{A}^{\ell} = \mathbf{A} \mathbb{P}(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

és hasonlóan adódik, hogy  $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbf{A}$ ,  $t > 0$ . Így teljesül a Kolmogorov-féle első, ill. második differenciálegyenlet-rendszer is, hiszen mint láttuk ezek írhatók  $\mathbb{P}'(t) = \mathbf{A}\mathbb{P}(t)$ ,  $t > 0$ , illetve  $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbf{A}$ ,  $t > 0$ , alakban is. A megoldás egyértelmű, hiszen egy kezdeti feltétellel adott (véges dimenziós) lineáris differenciálegyenletről van szó.

Megmutatjuk, hogy  $\mathbb{P}(t)$ ,  $t \geq 0$ , sztochasztikus mátrixfüggvény. Legyen  $a := \min_{i \in I} a_{i,i} \in (-\infty, 0]$ , hiszen az  $I$  állapotter véges és  $\mathbf{A}$  konzervatív; legyen továbbá minden  $t \geq 0$ -ra  $\mathbf{Q}(t) := e^{-at}\mathbb{P}(t) = e^{t(\mathbf{A}-a\mathbf{I})}$ . Mivel  $\mathbf{B} := \mathbf{A} - a\mathbf{I}$  nemnegatív elemű (ha  $i \neq j$ , úgy  $a_{i,j} \geq 0$ ), így  $\mathbf{Q}(t) = e^{t\mathbf{B}}$ , illetve  $\mathbb{P}(t) = e^{at}\mathbf{Q}(t)$  is nemnegatív elemű. Ezért  $\mathbb{P}(t)$  elemei nemnegatívak.

Jelölje most  $\mathbf{1}$  azt az oszlopvektort, mely csupa 1-esből áll,  $\mathbf{0}$  pedig azt, amely csupa 0-ból áll. Ekkor a lánc konzervativitása miatt  $\mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ , így indukcióval  $\mathbf{A}^k\mathbf{1} = \mathbf{0}$ ,  $k \geq 1$ , amiből  $(\mathbb{P}(t))$  definíciója alapján

$$\mathbb{P}(t)\mathbf{1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k \mathbf{1} = \frac{t^0}{0!} \mathbf{A}^0 \mathbf{1} = \mathbf{I}\mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad t \geq 0,$$

azaz a  $\mathbb{P}(t)$  sorösszegei 1-gyel egyenlőek bármely  $t \geq 0$ -ra.

Felhasználva a 4.1.21. Lemmát, teljesül a Chapman–Kolmogorov-egyenlet is:  $\mathbb{P}(s+t) = e^{(s+t)\mathbf{A}} = e^{s\mathbf{A}}e^{t\mathbf{A}} = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t)$ ,  $s, t \geq 0$ .  $\square$

**4.1.23. Példa.** Tekintsünk egy olyan folytonos idejű Markov-láncot, melynek generátor-mátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } \lambda \geq 0 \text{ és } \mu \geq 0.$$

Ekkor belátható, hogy tetszőleges  $t > 0$  esetén

$$\mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix}, \quad \text{ha } \lambda + \mu > 0,$$

és

$$\mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ha } \lambda + \mu = 0, \text{ azaz } \lambda = \mu = 0.$$

$\square$

A 4.1.22. Állítás bizonyításból látható, hogy ha  $\mathbf{A}$  nem véges, konzervatív infinitezimális mátrix és az  $\inf_{i \in I} a_{i,i} > -\infty$  feltétel is teljesül, akkor a 4.1.22. Állításban definiált mátrixfüggvény sztochasztikus, és megoldása a Kolmogorov-egyenleteknek. De ha ez a feltétel nem teljesül, akkor a Kolmogorov-egyenletek megoldása lehet nem sztochasztikus, csak *szubsztokasztikus* mátrixfüggvény, azaz a sorösszegek nem feltétlenül 1-gyel egyenlőek, hanem csak 1-nél kisebb vagy egyenlőek. Ezt úgy lehet valószínűség-számítási szempontból értelmezni, hogy a lánc pozitív valószínűséggel "kiugorhat" az állapotteréből. Általánosságban elmondható, hogy a forward (előrehaladó) Kolmogorov-féle egyenleteknek nem mindig létezik megoldásuk, de ha van akkor az egyértelműen az átmenetvalószínűségi függvény. A backward (visszafelé haladó) Kolmogorov-féle egyenleteknek mindig van megoldásuk, az átmenetvalószínűségi függvény is köztük van, de nem feltétlenül egyértelmű.

**4.1.24. Példa.** Legyen  $(N_t)_{t \geq 0}$  egy Poisson-folyamat  $\lambda > 0$  intenzitással. A 3.3.7. Tétel bizonyításában pontosan az előrehaladó Kolmogorov-féle egyenletet kellett megoldani, mely esetben az egyértelműen megoldható. Valóban, a 4.1.18. Példa alapján

$$a_{i,j} = \begin{cases} -\lambda, & \text{ha } j = i, \\ \lambda, & \text{ha } j = i + 1, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Ezért tetszőleges  $i \in \mathbb{Z}_+$  esetén

$$(4.1.7) \quad p'_{i,0}(t) = p_{i,0}(t)(-\lambda) = -\lambda p_{i,0}(t), \quad t > 0,$$

és tetszőleges  $i \in \mathbb{Z}_+$  és  $j \in \mathbb{N}$  esetén

$$p'_{i,j}(t) = p_{i,j}(t)(-\lambda) + p_{i,j-1}(t)\lambda = -\lambda p_{i,j}(t) + \lambda p_{i,j-1}(t), \quad t > 0,$$

ahol a kezdeti feltételek  $p_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}_+$ . A (4.1.7) szeparábilis differenciálegyenlet a  $p_{i,0}(t) = \delta_{i,0}$  kezdeti feltétellel közvetlenül megoldható:

$$p_{i,0}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{ha } i = 0, \\ 0 & \text{ha } i \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad t > 0.$$

A további differenciálegyenleteket pedig rekurzívan megoldva adódik, hogy

$$p_{i,j}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, & \text{ha } j \geq i, \\ 0 & \text{ha } j < i, \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad t \geq 0.$$

Például,  $j = 1$  esetén

$$p'_{i,1}(t) = -\lambda p_{i,1}(t) + \lambda p_{i,0}(t), \quad t > 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Így

$$(4.1.8) \quad p'_{0,1}(t) = -\lambda p_{0,1}(t) + \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \quad p_{0,1}(0) = 0,$$

és

$$(4.1.9) \quad p'_{i,1}(t) = -\lambda p_{i,1}(t), \quad t > 0, \quad i \in \mathbb{N}, \quad p_{i,1}(0) = \delta_{i,1}.$$

A (4.1.8) egy inhomogén lineáris DE, ahol a megfelelő homogén lineáris DE általános megoldása  $p_{0,1}(t) = Ce^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ , ahol  $C \in \mathbb{R}$  tetszőleges. Az inhomogén DE egy partikuláris megoldását keressük  $C(t)e^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ , alakban:

$$C'(t)e^{-\lambda t} + C(t)e^{-\lambda t}(-\lambda) = -\lambda C(t)e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

melyből adódik, hogy  $C'(t)e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t}$ ,  $t > 0$ , és így  $C'(t) = \lambda$ ,  $t > 0$ . Ezért az inhomogén DE egy partikuláris megoldása  $\lambda te^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ . Így az inhomogén DE általános megoldása:

$$p_{0,1}(t) = Ce^{-\lambda t} + \lambda te^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Mivel  $p_{0,1}(0) = 0$ , kapjuk, hogy  $C = 0$ , és így  $p_{0,1}(t) = \lambda te^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ .

A (4.1.9) DE megoldása  $p_{i,1}(t) = Ce^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ , ahol  $C \in \mathbb{R}$  tetszőleges. Mivel  $p_{1,1}(0) = 1$ , kapjuk, hogy  $C = 1$ , és így  $p_{1,1}(t) = e^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ . Mivel  $p_{i,1}(0) = 0$ ,  $i \geq 2$ , kapjuk, hogy  $C = 0$ , és így  $p_{i,1}(t) = 0$ ,  $t \geq 0$ ,  $i \geq 2$ .

A visszafelé haladó Kolmogorov-féle egyenletekről pedig megmutatható, hogy végtelen sok megoldásuk van.  $\square$

## 4.2. Állapotváltozások dinamikája

Az intuíciónk alapján úgy képzeljük el egy folytonos idejű Markov-lánc mozgását, hogy először véletlen hosszúságú időtartamot eltölt a kezdeti  $i$  állapotban, majd véletlenszerűen, valamely  $a_{i,j}^*$  valószínűséggel átugrik egy másik  $j$  állapotba, ott is eltölt egy véletlen hosszúságú időtartamot, ami után átugrik valahová, stb. Ennek a fejezetnek az a célja, hogy meghatározzuk az egyes állapotokban való tartózkodási idők eloszlását, és az  $a_{i,j}^*$  valószínűségeket. Az első feladat megoldásához meg kell határozni a

$$P(X_u = i, s < u < s + t \mid X_s = i)$$

valószínűségeket. Azonban a

$$\{\omega \in \Omega : X_u = i, s < u < s + t\} = \bigcap_{s < u < s+t} \{\omega \in \Omega : X_u = i\}$$

halmaz nem feltétlenül esemény, hiszen valószínűségi változóknak megszámlálhatónál nagyobb számosságú halmazától függ, pontosabban a nem megszámlálható sok  $\{X_u = i\}$ ,  $s < u < s + t$ , események metszete. Így valójában nincs is jogunk e halmazra eseményként hivatkozni. Ezt a problémát a lánc szeparábilis modifikációjának segítségével lehet áthidalni.

**4.2.1. Definíció.** Legyen  $\{\eta_t : t \geq 0\}$  egy valós értékű sztochasztikus folyamat egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy  $\{\eta_t : t \geq 0\}$  **szeparábilis**, ha létezik a  $[0, \infty)$  paramétertartománynak egy olyan megszámlálható  $D$  részhalmaza és egy olyan  $N \in \mathcal{A}$  0-valószínűségű esemény, hogy tetszőleges  $A \subset \mathbb{R}$  zárt halmazra és bármely  $G \subset [0, \infty)$  nyílt intervallumra

$$(4.2.1) \quad \{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap D\} \setminus \{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap [0, \infty)\} \subset N.$$

$A \subset D$  halmazt szeparabilitási halmaznak hívjuk. Nyilván, ha  $D^* \subset [0, \infty)$  megszámlálható és  $D \subset D^*$ , akkor  $\{\eta_t : t \geq 0\}$   $D^*$ -gal is szeparábilis. Valóban,

$$\begin{aligned} & \{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap D^*\} \setminus \{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap [0, \infty)\} \\ & \subset \{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap D\} \setminus \{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap [0, \infty)\} \subset N. \end{aligned}$$

Következésképpen feltehetjük, hogy a  $D$  szeparabilitási halmaz mindenütt sűrű  $[0, \infty)$ -ben. Egy valós értékű  $\{\eta_t : t \geq 0\}$  sztochasztikus folyamatot **teljesen szeparábilisnak** hívunk, ha a  $[0, \infty)$  paramétertartománynak bármely mindenütt sűrű, megszámlálható részhalmaza szeparabilitási halmaz.

Egy sztochasztikus folyamat szeparabilitása heurisztikusan azt jelenti, hogy egy olyan sztochasztikus folyamatról van szó, mely trajektóriáinak a viselkedését lényegében meghatározza egy megszámlálható halmazon vett viselkedése.

**4.2.2. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy a (4.2.1) baloldalán álló különbség-halmaz nem feltétlenül esemény. Ha azonban az  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőről feltesszük, hogy teljes, azaz minden 0-valószínűségű eseménynek bármely részhalmaza esemény (és így 0-valószínűségű), akkor a rajta értelmezett  $\{\eta_t : t \geq 0\}$  szeparábilis folyamatra az

$$\{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap [0, \infty)\}$$

típusú halmazok is események. Valóban, felhasználva, hogy  $H_1 \subseteq H_2$  esetén  $H_1 = H_2 \setminus (H_2 \setminus H_1)$ , kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap [0, \infty)\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap D\} \\ & \setminus \left( \{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap D\} \setminus \{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap [0, \infty)\} \right). \end{aligned}$$

Itt  $\{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap D\}$  mindig esemény (akkor is, ha az alapul vett valószínűségi mező nem teljes), hiszen  $G \cap D$  megszámlálható. Továbbá, a teljesség és szeparabilitás miatt

$$\{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap D\} \setminus \{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in G \cap [0, \infty)\}$$

is esemény.

Az is végiggondolható, hogy  $\{\omega \in \Omega : \eta_t \in A, t \in \overline{G} \cap [0, \infty)\}$  is esemény.  $\square$

A 4.2.1. Definíció és a 4.2.2. Megjegyzés megfogalmazható, illetve érvényben marad tetszőleges  $\{\eta_t : t \in T\}$  sztochasztikus folyamat esetén is, ahol  $T \subset \mathbb{R}$  egy intervallum.

A szeparabilitási követelmény kirovása a sztochasztikus folyamatokra nem jelent erős korlátozást. Ezt világítja meg a következő eredmény.

**4.2.3. Tétel.** *Legyen  $\{X_t : t \geq 0\}$  egy folytonos idejű Markov-lánc. Tegyük fel, hogy minden  $t > 0$  esetén a  $\mathbb{P}(t)$  átmenetvalószínűségi mátrix elemei mind pozitívak. Ekkor a láncnak akkor és csak akkor létezik teljesen szeparábilis modifikációja, ha a lánc standard.*

**4.2.4. Tétel.** *Legyen  $\{X_t : t \geq 0\}$  egy standard, teljesen szeparábilis folytonos idejű Markov-lánc valamely  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  teljes valószínűségi mezőn. Ekkor tetszőleges  $i \in I$ ,  $s \geq 0$ ,  $t > 0$  esetén  $\{\omega \in \Omega : X_u(\omega) = i, s < u < s + t\} \in \mathcal{A}$ , és*

$$P(X_u = i, s < u < s + t \mid X_s = i) = e^{-a_i t} = e^{a_i, i t},$$

ahol  $a_i = \infty$  esetén  $e^{-a_i t} := 0$ , ha  $t > 0$ .

**Bizonyítás.** Mivel  $(X_t)_{t \geq 0}$  teljesen szeparábilis, a

$$D := \{s + mt2^{-n} : n \geq 1, m \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}\}$$

halmaz szeparabilitási halmaz az  $(X_u)_{u \in (s, s+t)}$  sztochasztikus folyamat számára. (A  $D$  definíciójában az  $m = 0$ , illetve  $m = 2^n$  azért nem szerepel, mert az  $(s, s + t)$  nyílt paraméterhalmazt tekintjük most.) Így létezik egy olyan nulla valószínűségű  $N$  esemény, hogy bármely  $\{i\} \subset I$  zárt halmazra fennáll, hogy

$$\{\omega : X_u(\omega) = i, u \in (s, s + t) \cap D\} \setminus \{\omega : X_u(\omega) = i, u \in (s, s + t)\} \subset N.$$

Ez a különbség-halmaz az  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  teljessége miatt esemény, és nulla valószínűségű, így a 4.2.2. Megjegyzést is használva,  $\{\omega : X_u(\omega) = i, s < u < s + t\} \in \mathcal{A}$ , és

$$P(X_u = i, s < u < s + t \mid X_s = i) = P(X_u = i, u \in (s, s + t) \cap D \mid X_s = i).$$

(Mivel  $D$  megszámlálható,  $\{X_u = i, u \in (s, s + t) \cap D\} \in \mathcal{A}$  mindig teljesül.) Ekkor

$$\begin{aligned} & \{\omega : X_u(\omega) = i, u \in (s, s + t) \cap D\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X_u(\omega) = i, u = s + mt2^{-n}, 1 \leq m \leq 2^n - 1\} =: \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \end{aligned}$$

és  $A_{n+1} \subset A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , hiszen

$$\begin{aligned} & \{s + mt2^{-n} : n \geq 1, m \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}\} \\ & \subset \{s + mt2^{-(n+1)} : n \geq 1, m \in \{1, 2, \dots, 2^{n+1} - 1\}\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Így a valószínűség folytonossága alapján

$$\begin{aligned} & P(X_u = i, u \in (s, s+t) \cap D \mid X_s = i) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \mid X_s = i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_u = i, u = s + mt2^{-n}, 1 \leq m \leq 2^n - 1 \mid X_s = i). \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy annak, hogy  $D$ -nek az  $(s, s+t)$ -be eső diadikus számokat választottuk ott volt jelentősége, hogy  $A_{n+1} \subset A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , és így használhattuk a valószínűség folytonosságát. Így a Markov-tulajdonság és a multiplikációs formula (4.1.6. Állítás) alapján,

$$\begin{aligned} P(X_u = i, u \in (s, s+t) \cap D \mid X_s = i) & = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^{2^n-1} P(X_{s+mt2^{-n}} = i \mid X_{s+(m-1)t2^{-n}} = i) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ p_{i,i} \left( \frac{t}{2^n} \right) \right]^{2^n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ p_{i,i} \left( \frac{t}{2^n} \right) \right]^{2^n}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy a lánc standarditása miatt  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,i} \left( \frac{t}{2^n} \right) = p_{i,i}(0) = 1$ . Ismert, hogy  $\lim_{M \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x_M}{M} \right)^M = e^x$ , ha  $\lim_{M \rightarrow \infty} x_M = x \in [-\infty, \infty]$ . Az  $x_M := M(p_{i,i}(t/M) - 1)$ ,  $M \in \mathbb{N}$ , választással kapjuk, hogy

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x_M = t \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{p_{i,i}(t/M) - p_{i,i}(0)}{\frac{t}{M}} = tp'_{i,i}(0) = ta_{ii} = -ta_i,$$

és így

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left[ p_{i,i} \left( \frac{t}{M} \right) \right]^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{M(p_{i,i}(t/M) - 1)}{M} \right]^M = e^{-ta_i}.$$

Felhasználva, hogy  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  egy részsorozata  $(M)_{M \in \mathbb{N}}$ -nek, kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ p_{i,i} \left( \frac{t}{2^n} \right) \right]^{2^n} = e^{-ta_i}.$$

□

**4.2.5. Következmény.** A 4.2.4. Tétel feltételei mellett az is teljesül, hogy tetszőleges  $s > 0$  és  $t > 0$  esetén

$$P(X_u = i, s \leq u \leq s+t \mid X_s = i) = e^{-a_i t} = e^{a_{i,i} t}.$$

**Bizonyítás.** A valószínűség folytonossága miatt

$$\begin{aligned} P(X_u = i, s \leq u \leq s+t \mid X_s = i) & = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_u = i, s - 1/n < u < s+t + 1/n \mid X_s = i) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-a_i(t + \frac{2}{n})} = e^{-a_i t}. \end{aligned}$$

□

Legyen  $s \geq 0$ , és jelölje  $\tau_i$  az  $s$  időpont után az  $i$  állapotban eltöltött időt:

$$(4.2.2) \quad \tau_i(\omega) := \begin{cases} \inf\{t > 0 : X_{s+t}(\omega) \neq i\}, & \text{ha létezik } t > 0, \text{ melyre } X_{s+t}(\omega) \neq i, \\ \infty, & \text{ha } X_{s+t}(\omega) = i \text{ minden } t > 0\text{-ra,} \end{cases}$$

ahol  $\omega \in \Omega$ . Megjegyezzük, hogy diszkrét időben  $\tau_i$  mást jelölt (lásd a 2.1.12. Definíciót). A Markov-tulajdonság miatt  $\tau_i$ -nek a  $\{X_s = i\}$  feltételre vonatkozó feltételes eloszlása nem függ  $s$ -től (ezért nem szerepeltettük  $s$ -et a  $\tau_i$  jelölésben). Továbbá, ha  $a_i \in (0, \infty)$ , akkor  $\tau_i$  ezen feltételes eloszlása a 4.2.4. Tétel szerint  $a_i$  paraméterű exponenciális eloszlás, hiszen

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} P(\tau_i < t \mid X_s = i) &= 1 - P(\tau_i \geq t \mid X_s = i) \\ &= 1 - P(X_u = i, s < u < s + t \mid X_s = i) = 1 - e^{-a_i t}, \end{aligned}$$

minden  $t > 0$  esetén. A (4.2.3) formula akkor is érvényes, ha  $a_i = \infty$  vagy  $a_i = 0$ . Ha  $a_i = \infty$ , úgy  $P(\tau_i < t \mid X_s = i) = 1 - 0 = 1, \forall t > 0$ , és így

$$P(\tau_i = 0 \mid X_s = i) = \lim_{t \downarrow 0} P(\tau_i < t \mid X_s = i) = \lim_{t \downarrow 0} 1 = 1,$$

vagyis a lánc 0 időt tölt az  $i$  állapotban. Ez összhangban van azzal, hogy  $a_i = \infty$  interpretálható úgy, hogy az  $i$  állapot elhagyásának az intenzitása  $+\infty$ .

Ha  $a_i = 0$ , úgy  $P(\tau_i < t \mid X_s = i) = 1 - 1 = 0, \forall t > 0$ , és így

$$P(\tau_i = \infty \mid X_s = i) = \lim_{t \uparrow \infty} P(\tau_i \geq t \mid X_s = i) = \lim_{t \uparrow \infty} 1 = 1,$$

azaz  $i$ -ből indulva a lánc már végleg az  $i$ -ben ragad. Ez összhangban van azzal, hogy  $a_i = 0$  interpretálható úgy, hogy az  $i$  állapot elhagyásának az intenzitása 0.

Ezért az  $a_i$  értéke alapján a következő elnevezéseket vezetjük be.

**4.2.6. Definíció.** (i) Az  $i$  állapotot **pillanatnyi állapotnak** nevezzük, ha  $a_{i,i} = -\infty$ , azaz  $a_i = \infty$ .

(ii) Az  $i$  állapotot **reguláris állapotnak** nevezzük, ha  $-\infty < a_{i,i} < 0$ , azaz  $0 < a_i < \infty$ .

(iii) Az  $i$  állapotot **elnyelő állapotnak** nevezzük, ha  $a_{i,i} = 0$ , azaz  $a_i = 0$ .

**4.2.7. Megjegyzés.** (i) A pillanatnyi állapotoktól gyakorlati szempontból nyilván el lehet tekinteni.

(ii) Ha  $i$  reguláris állapot, akkor az exponenciális eloszlás **örökifjú tulajdonsága** szerint

$$P(\tau_i < t + u \mid \tau_i \geq t, X_s = i) = P(\tau_i < u \mid X_s = i)$$

tetszőleges  $s, t \geq 0$  és  $u > 0$ -ra. Valóban, a feltételes valószínűség definíciója alapján, felhasználva (4.2.3)-t is,

$$\begin{aligned} P(\tau_i < t + u \mid \tau_i \geq t, X_s = i) &= \frac{P(\tau_i < t + u, \tau_i \geq t, X_s = i)}{P(\tau_i \geq t, X_s = i)} \\ &= \frac{P(t \leq \tau_i < t + u \mid X_s = i) P(X_s = i)}{P(\tau_i \geq t \mid X_s = i) P(X_s = i)} \\ &= \frac{P(\tau_i < t + u \mid X_s = i) - P(\tau_i < t \mid X_s = i)}{P(\tau_i \geq t \mid X_s = i)} \\ &= \frac{1 - e^{-a_i(t+u)} - (1 - e^{-a_i t})}{e^{-a_i t}} = \frac{-e^{-a_i(t+u)} + e^{-a_i t}}{e^{-a_i t}} \\ &= 1 - e^{-a_i u} = P(\tau_i < u \mid X_s = i). \end{aligned}$$

Így hiába tudjuk, hogy a lánc már bizonyos  $t$  időt eltöltött az  $i$  állapotban, az  $i$ -beli tartózkodási idő hátralevő részének eloszlása még mindig ugyanolyan paraméterű exponenciális eloszlás, vagyis nem számíthatunk arra, hogy most már például hajlamosabb lenne elhagyni az  $i$  állapotot, mint  $t$  idővel azelőtt! Ez persze összecseng a Markov-tulajdonsággal, azaz, hogy a folyamat elfelejti a múltját.  $\square$

Rátérünk a fejezet elején megfogalmazott második feladat megoldására, azaz a

$$a_{i,j}^* := P(X_u = j, \tau_i < u < \tau_i + \alpha \text{ valamely } \alpha > 0\text{-val} \mid X_s = i), \quad i \neq j, \quad i, j \in I,$$

valószínűségek vizsgálatára.

**4.2.8. Tétel.** *Legyen  $\{X_t : t \geq 0\}$  egy standard, konzervatív, teljesen szeparábilis folytonos idejű Markov-lánc valamely  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  teljes valószínűségi mezőn. Ekkor annak a valószínűsége, hogy valamely  $i$  reguláris állapot után a tőle különböző  $j \neq i$  állapot következik:*

$$a_{i,j}^* := \frac{a_{i,j}}{a_i}.$$

(Mivel  $i$  reguláris,  $a_i \in (0, \infty)$ , így  $a_{i,j}^*$  jóldefiniált.)

Tekintsünk egy konzervatív láncot és vezessük be az  $\mathbf{A}^* := (a_{i,j}^*)_{i,j \in I}$  mátrixot, ahol elnyelő  $i$  állapot esetén  $a_{i,j}^* := \delta_{i,j}$ , és reguláris  $i$  állapot esetén

$$a_{i,j}^* = \begin{cases} \frac{a_{i,j}}{a_i} & \text{ha } i \neq j, \\ 0 & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

Mivel egy konzervatív láncnak nincsenek pillanatnyi állapotai,  $\mathbf{A}^*$  definíciója teljes (azaz  $a_{i,j}^*$ -ot nem kell definiálnunk, ha  $i$  pillanatnyi állapot).

**4.2.9. Állítás.** *Az  $\mathbf{A}^*$  mátrix egy sztochasztikus mátrix.*

**Bizonyítás.** Az elemek nemnegatívak és elnyelő  $i$  állapot esetén  $\sum_{j \in I} a_{i,j}^* = \sum_{j \in I} \delta_{i,j} = 1$ , illetve reguláris  $i$  állapot esetén  $\sum_{j \in I} a_{i,j}^* = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \frac{a_{i,j}}{a_i} = -\frac{a_{i,i}}{a_i} = 1$ , hiszen a lánc konzervativitása miatt  $\sum_{j \in I \setminus \{i\}} a_{i,j} = -a_{i,i}$ .  $\square$

Ha a lánc nem konzervatív, akkor tetszőleges  $i$  reguláris állapot esetén

$$a_{i\infty}^* := 1 - \sum_{j \in I} a_{i,j}^* = 1 - \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \left( \frac{a_{i,j}}{a_i} \right) = \frac{-a_{i,i} - \sum_{j \in I \setminus \{i\}} a_{i,j}}{a_i} = -\frac{\sum_{j \in I} a_{i,j}}{a_i} \in [0, 1],$$

ugyanis a 4.1.15. Állítás szerint  $\sum_{j \in I} a_{i,j} \leq 0$ , illetve, felhasználva, hogy  $-a_{i,i} \in (0, \infty)$ , adódik, hogy

$$-\frac{\sum_{j \in I} a_{i,j}}{a_i} \leq 1 \iff -\sum_{j \in I} a_{i,j} \leq a_i = -a_{i,i} \iff \sum_{j \in I \setminus \{i\}} a_{i,j} \geq 0,$$

ami pedig teljesül, mert  $a_{i,j} \geq 0, j \in I \setminus \{i\}$ . Az  $a_{i\infty}^*$  mennyiség úgy értelmezhető, mint annak a valószínűsége, hogy a lánc a reguláris  $i$  állapot után kiugrik az állapottérből, hiszen  $\sum_{j \in I \setminus \{i\}} \left( \frac{a_{i,j}}{a_i} \right)$  annak a valószínűsége, hogy az  $i$  állapot után valamely tőle különböző állapot következik. Konzervatív láncnál  $a_{i\infty}^* = 0$ .

A következő megjegyzésben az állapotváltozások dinamikáját szemléltetjük konzervatív Markov-láncok esetén az ún. **egy-, illetve többórás leírással**.

**4.2.10. Megjegyzés.** Konzervatív Markov-lánc esetén tehát a lánc a következő módon mozog az állapottéren: először a kezdeti  $i$  reguláris állapotban tölt el  $a_i$  paraméterű exponenciális eloszlású időtartamot, majd  $a_{i,j}^*$  valószínűséggel átugrik egy másik  $j$  állapotba, ott is eltölt  $a_j$  paraméterű exponenciális eloszlású időtartamot, ami után átugrik valahová, stb. A Markov-tulajdonság alapján bebizonyítható, hogy az egyes állapotokban eltöltött (exponenciális eloszlású) időtartamok (teljesen) függetlenek! (Intuitíve: a folyamat "elfelejti a múltját".) Ez az ún. **egyórás leírás**, miszerint a Markov-lánc egy adott  $i$  reguláris állapotból indulva elindít egy  $\text{Exp}(-a_{i,i})$  eloszlású időt mérő időmérő órát. Amikor ez megcsörren, akkor pedig  $a_{i,j}^*$  valószínűséggel átugrik egy  $j \neq i$  állapotba.

Véges és konzervatív Markov-lánc esetén a **többórás leírás** szerint a Markov-lánc egy adott  $i$  reguláris állapotban tartózkodva minden más  $j$  állapothoz rendelve elindít egy-egy  $\text{Exp}(a_{i,j})$  eloszlású  $\eta_{i,j}$  időt mérő időmérő órát. Amikor ezek közül az első megcsörren, akkor átugrik oda, ahol csörrent az óra. A két leírás az exponenciális eloszlás tulajdonságai miatt ekvivalens, hiszen a 3.1.9. Tétel szerint adott  $i$  reguláris állapot esetén a  $j \neq i$  állapothoz tartozó  $\text{Exp}(a_{i,j})$  eloszlású idők  $\min_{j \neq i} \{\eta_{i,j}\}$  minimumának eloszlása  $\text{Exp}(\sum_{j \neq i} a_{i,j})$  eloszlású, ahol a konzervitás miatt  $\sum_{j \neq i} a_{i,j} = -a_{i,i}$ , így az  $i$  állapotban  $\text{Exp}(-a_{i,i})$  eloszlású időt tartózkodik a Markov-lánc. Továbbá, szintén a 3.1.9. Tétel szerint

$$P(\eta_{i,j_0} = \min_{j \neq i} \{\eta_{i,j}\}) = \frac{a_{i,j_0}}{\sum_{j \neq i} a_{i,j}} = \frac{a_{i,j_0}}{-a_{i,i}} = \frac{a_{i,j_0}}{a_i} = a_{i,j_0}^*, \quad j_0 \neq i,$$

azaz az  $i$  állapot után  $a_{i,j_0}^*$  valószínűséggel a  $j_0$  állapot következik.  $\square$

Megjegyezzük, hogy még konzervatív  $\mathbf{A}$  infinitézimális mátrix esetén is előfordulhat, hogy ha a 4.2.10. Megjegyzésben vázolt (egyórás) állapotváltozási mechanizmussal konstruálunk egy folyamatot, akkor az összes állapotban eltöltött összes tartózkodási idők összege véges, azaz a lánc "kiszalad" az állapottérből. (Erre fogunk példát látni a tiszta születési folyamatoknál.) Egyébként ekkor a Kolmogorov-egyenletek megoldása szubsztochasticus mátrix.

**4.2.11. Definíció.** Legyen  $(X_t)_{t \geq 0}$  egy standard, konzervatív, teljesen szeparábilis folytonos idejű Markov-lánc valamely teljes valószínűségi mezőn  $I$  állapottérrel. Tegyük fel, hogy  $I$  minden állapota reguláris állapot. Legyen  $T_0 := 0$ , és definiáljuk rekurzívan az állapotváltozások időpontjait:

$$T_1 := \inf\{t > 0 : X_t \neq X_0\},$$

és

$$T_{n+1} := \inf\{t > T_n : X_t \neq X_{T_n}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tetszőleges  $n \in \mathbb{Z}_+$  esetén legyen  $Y_n := X_{T_n}$ . Ekkor az  $\mathbb{Y} = \{Y_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  diszkrét idejű sztochasztikus folyamatot az  $(X_t)_{t \geq 0}$  folytonos idejű Markov-lánc beágyazott folyamatának nevezzük.

**4.2.12. Állítás.** Legyen  $(X_t)_{t \geq 0}$  egy standard, konzervatív, teljesen szeparábilis folytonos idejű Markov-lánc valamely teljes valószínűségi mezőn,  $I$  állapottérrel,  $\mathbf{q}$  kezdeti eloszlással és  $\mathbf{A}$  infinitézimális mátrisszal. Tegyük fel, hogy  $I$  minden állapota reguláris állapot. Ekkor az  $\mathbb{Y} = \{Y_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  beágyazott folyamat egy diszkrét idejű Markov-lánc  $I$  fázistérrel,  $\mathbf{q}$  kezdeti eloszlással és  $\mathbf{R} = (r_{i,j})_{i,j \in I}$  átmenetmátrisszal, ahol

$$r_{i,j} := a_{i,j}^* = \begin{cases} \frac{a_{i,j}}{a_i}, & \text{ha } i \neq j, \\ 0, & \text{ha } i = j, \end{cases} \quad \text{azaz} \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}^*.$$

Az  $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  diszkrét idejű Markov-láncot az  $(X_t)_{t \geq 0}$  folytonos idejű Markov-lánchoz tartozó beágyazott Markov-láncnak nevezzük.

**4.2.13. Példa.** Legyen  $(N_t)_{t \geq 0}$  egy Poisson folyamat  $\lambda > 0$  intenzitással. A 4.1.18. Példa alapján

$$a_{i,j} = \begin{cases} -\lambda, & \text{ha } j = i, \\ \lambda, & \text{ha } j = i + 1, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Így az  $(N_t)_{t \geq 0}$ -hez tartozó diszkrét idejű beágyazott Markov-lánc fázistere  $\mathbb{Z}_+$ , kezdeti eloszlása a 0-ba koncentrálódó Dirac-eloszlás, átmeneti mátrixa pedig  $\mathbf{R} = (r_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ , ahol

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = i + 1, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Egyúttal kapjuk azt is, hogy

$$a_{i,j}^* = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = i + 1, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

□

**4.2.14. Példa.** Tekintsünk egy ATM-et, ami egy bank előterében van, ahol egyszerre legfeljebb csak ketten férnek el. Az emberek  $\lambda$  intenzitású Poisson-folyamat szerint érkeznek, és minden ember egymásól függetlenül  $\text{Exp}(\mu)$  idő alatt végez az ATM-nél, ahol  $\lambda > 0$  és  $\mu > 0$ . Az automatához egyszerre csak egy ember fér oda (és maximum két ember várakozhat az előtérben), és ha éppen akkor érkezik egy ember, amikor ketten állnak az előtérben, akkor ő továbbmegy másik ATM-et keresni. Modellezzük a rendszert konzervatív folytonos idejű Markov-lánccal, és határozzuk meg az intenzitásokat.

Legyen  $X_t :=$  az előtérben lévő emberek száma a  $t \geq 0$  időpontban. Ekkor  $(X_t)_{t \geq 0}$  folytonos idejű Markov-lánc  $I := \{0, 1, 2\}$  fázistérrel. Mivel a feladat szövege alapján a 0 időpontban való  $\tau_0$  tartózkodási idő eloszlása  $\text{Exp}(\lambda)$ , így  $a_{0,0} = -\lambda$  és így  $a_{0,1} = \lambda$ . Továbbá,  $\tau_2 \sim \text{Exp}(\mu)$ , így  $a_{2,2} = -\mu$  és így  $a_{2,1} = \mu$ . Az eddigiek alapján, figyelembe véve a Markov-lánc konzervativitását, kapjuk, hogy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ ? & ? & ? \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Legyen  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$  és  $\eta \sim \text{Exp}(\mu)$  független véletlen változók. Felhasználva a 4.2.7. Megjegyzés (ii) részét is (exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága), az 1 állapotban való  $\tau_1$  tartózkodási idő eloszlása megegyezik  $\min(\xi, \eta)$  eloszlásával. Így a 3.1.9. Tétel szerint

$$\tau_1 \sim \text{Exp}(\lambda + \mu),$$

amiből következik, hogy  $a_{1,1} = -(\lambda + \mu)$ . Továbbá, szintén a 3.1.9. Tétel szerint

$$P(\eta < \xi) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{és} \quad P(\xi < \eta) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

és így  $a_{1,0} = \mu$ , és  $a_{1,2} = \lambda$ . Ezért

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

A 4.2.11. Definícióbeli diszkrét idejű beágyazott Markov-lánc átmenetmátrixa:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Diszkrét idejű Markov-láncok esetében az átmenetgráf hasznos eszköznek bizonyult mind a Markov-lánc szemléltetése, mind a folyamat különböző tulajdonságainak vizsgálatánál. A folytonos idejű esetben ezt a szerepet az intenzitásdiagram játssza.

**4.2.15. Definíció.** Legyen  $\mathbb{X} = \{X_t, t \geq 0\}$  egy folytonos idejű Markov-lánc  $\mathbf{A}$  generátormátrixszal. Ekkor  $\mathbb{X}$  intenzitásdiagramján azt a  $G$  irányított, súlyozott gráfot értjük, melyre

(i)  $V_G = I$ , azaz a csúcsok halmaza a kapcsolatos Markov-lánc állapottere,

(ii)  $(i, j) \in E_G$  akkor és csak akkor, ha  $a_{i,j} > 0$ ,

(iii)  $c_G((i, j)) = a_{i,j}$ ,  $\forall (i, j) \in E_G$ .

Jelölje  $\mathbb{Y}$  az  $\mathbb{X}$  folytonos idejű Markov-lánchoz tartozó diszkrét idejű beágyazott Markov-láncot (lásd 4.2.12. Állítás).

Ekkor az  $\mathbb{X}$  folytonos idejű Markov-lánc intenzitási diagramja és az  $\mathbb{Y}$  diszkrét idejű beágyazott Markov-lánc átmenetgráfja az élekre írt értékektől eltekintve csak annyiban különbözik egymástól, hogy az intenzitásdiagram nem tartalmazza azokat a hurokéleket, melyek az átmenetgráfon az elnyelő állapotokra vannak illesztve. Ez egyben azt is jelenti, hogy a két gráfon azonosak az erősen összefüggő komponensek, így az  $\mathbb{X}$  és  $\mathbb{Y}$  Markov-lánc kommunikációs osztályai is azonosak.

### 4.3. Invariáns eloszlás, ergodikusság

Ha egy folytonos paraméterű (homogén) Markov-láncot csak bizonyos  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots$  időpontokban tekintünk, akkor egy diszkrét paraméterű (de nem feltétlenül homogén) Markov-láncot kapunk. Ha a  $t_1 < t_2 < \dots$  időpontok számtani sorozatot alkotnak, akkor a kapott diszkrét paraméterű Markov-lánc is homogén. Az állapotok osztályozásánál és az állapotok különböző tulajdonságainak vizsgálatánál ezek a diszkrét láncok fontos eszközök.

**4.3.1. Definíció.** Legyen  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  Markov-lánc, és  $h > 0$ . A lánc  **$h$ -lépéses vázának** a  $(X_{nh})_{n \in \mathbb{Z}_+}$  diszkrét idejű Markov-láncot nevezzük.

Vegyük észre, hogy a  $h$ -lépéses váznál az időpontok egy  $h$ -differenciájú,  $0$  kezdeti értékű számtani sorozat egymást követő tagjai. A  $h$ -lépéses váz  $n$ -lépéses átmeneti mátrixa nyilván  $(p_{i,j}(nh))_{i,j \in I}$ .

**4.3.2. Definíció.** A  $j$  állapotot az  $i$  állapotból **elérhetőnek** nevezzük (jelölésben  $i \rightarrow j$ ), ha valamely  $t \geq 0$  esetén  $p_{i,j}(t) > 0$ . Az  $i$  és  $j$  állapotokat **kölcsönösen elérhetőnek** nevezzük (jelölésben  $i \leftrightarrow j$ ), ha  $i \rightarrow j$  és  $j \rightarrow i$ .

A  $\leftrightarrow$  reláció ekvivalencia reláció, az állapotok osztályozása ezen reláció, mint ekvivalencia reláció által indukált osztályozást jelenti. Hasonlóan a diszkrét idejű esethez,

ha egy Markov-láncnak csak egy kommunikációs osztálya van, azaz minden állapot kommunikál minden állapottal, *irreducibilisnek* nevezzük. A lánc *reducibilis*, ha egynél több kommunikációs osztálya van.

A 4.1.10. Megjegyzés alapján (mivel standard láncról van szó), ha  $i \neq j$ , úgy  $i \rightarrow j$  akkor és csak akkor, ha bármely  $t > 0$  esetén  $p_{i,j}(t) > 0$ . Ezért ha  $i \neq j$ , úgy  $i \rightarrow j$  akkor és csak akkor, ha bármely  $h > 0$  esetén a  $h$ -lépéses vázban  $i \rightarrow j$ . Emiatt a bevezetett osztályozás eredménye ugyanaz, mint tetszőleges  $h$ -lépéses vázból kiindulva az osztályozás eredménye.

**4.3.3. Állítás.** *A nem pillanatnyi állapotok mind aperiodikusak tetszőleges  $h$ -lépéses vázban.*

**Bizonyítás.** Elég azt ellenőriznünk, hogy egy nem pillanatnyi  $i$  állapot, azaz egy reguláris, ill. egy elnyelő  $i$  állapot esetén  $p_{i,i}(t) = 0$ ,  $\forall t > 0$  nem teljesülhet. Ugyanis ez esetben a 4.1.10. Megjegyzés alapján  $p_{i,i}(t) > 0$ ,  $\forall t > 0$ , és így tetszőleges  $h > 0$  esetén az  $i$  állapot a  $h$ -lépéses vázban aperiodikus lesz, hiszen ekkor  $p_{i,i}(nh) > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Ha  $i$  elnyelő, úgy  $a_i = 0$  és így a valószínűség monotonitása és a 4.2.4. Tétel miatt  $p_{i,i}(t) \geq e^{-a_i t} = 1$ ,  $t > 0$ , és így  $p_{i,i}(t) = 1$ ,  $\forall t > 0$ .

Ha  $i$  reguláris, úgy  $a_i \in (0, \infty)$ , és így a valószínűség monotonitása és a 4.2.4. Tétel miatt  $p_{i,i}(t) \geq e^{-a_i t} > 0$ ,  $\forall t > 0$ .  $\square$

A 4.3.3. Állítás alapján folytonos idejű standard Markov-láncoknál a periodikusság fogalmát nem definiáljuk (mely mögött valójában a 4.1.10. Megjegyzés áll).

**4.3.4. Megjegyzés.** Az alábbiakban azt vizsgáljuk, hogy a "pillanatnyiság", "reguláriság", ill. "elnyelőség" osztálytulajdonságok-e. Az "elnyelőség" nyilván osztálytulajdonság, minden elnyelő állapot egyedül van egy osztályban. A "pillanatnyiság", ill. "reguláriság" **nem** osztálytulajdonságok. Ezt egy példát adva mutatjuk meg. Legyen  $\{X_t : t \geq 0\}$  az alábbi Markov-lánc: fázistere  $\{1, 2, 3\}$ , ahol 1 és 2 reguláris állapotok, 3 pedig pillanatnyi állapot, továbbá  $X_0 := 1$ , és tegyük fel, hogy az átmenetvalószínűségi függvények minden  $t > 0$  pontban pozitívak. Valahogy úgy kell elképzelni, hogy az 1 állapotból indulva a Markov-lánc eltölt ott  $a_1$ -paraméterű exponenciális hosszú időtartamot, majd átugrik a 2-es vagy 3-as állapotba. Ha a 3-as állapotba ugrik, ott "nulla időt tölt el", azaz azonnal ugrik is tovább az 1-es vagy 2-es állapotba. Ha az 1-es állapotból a 2-es állapotba ugrott, úgy ott eltölt  $a_2$ -paraméterű exponenciális hosszú időtartamot, majd az 1-es vagy 3-as állapotba ugrik. Így ez a Markov-lánc irreducibilis, azaz  $\{1, 2, 3\}$  egy osztály, azonban 1 és 2 reguláris, 3 pedig pillanatnyi állapot.  $\square$

**4.3.5. Definíció.** *Az  $i$  állapotot **visszatérőnek** nevezzük, ha valamely  $h > 0$  esetén a  $h$ -lépéses vázban  $i$  visszatérő (azaz a lánc  $i$ -ből indulva 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér az  $i$  állapotba valamely  $h$ -lépéses láncban lépkedve).*

**4.3.6. Tétel.** *A következő állítások ekvivalensek:*

- (i)  $i$  visszatérő állapot, azaz (a diszkrét idejű Markov-láncokra vonatkozó visszatérőségi kritérium alapján, lásd 2.4.5. Tétel) valamely  $h > 0$  esetén  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}(nh) = \infty$ ,
- (ii) bármely  $h > 0$  esetén a  $h$ -lépéses vázban  $i$  visszatérő, azaz bármely  $h > 0$  esetén  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}(nh) = \infty$ ,
- (iii)  $\int_0^{\infty} p_{i,i}(t) dt = \infty$ .

**Bizonyítás.** Nyilván (ii)  $\implies$  (i). Jelölje rögzített  $h > 0$  esetén  $\delta(h) := \inf_{0 \leq r \leq h} p_{i,i}(r)$ . Véggondoljuk, hogy  $\delta(h) > 0$ . Tegyük fel indirekt módon, hogy  $\delta(h) = 0$ . Mivel a lánc standard, a 4.1.10. Megjegyzés következtében a  $[0, \infty) \ni t \mapsto p_{i,i}(t)$  átmenetvalószínűségi függvény folytonos, és így (mivel kompakt halmazon folytonos függvény felveszi infimumát) létezik olyan  $r_0 \in (0, h]$ , hogy  $p_{i,i}(r_0) = 0$  (hiszen  $p_{i,i}(0) = 1$ , így  $r_0$  valóban nem lehet 0). Ekkor, újra a 4.1.10. Megjegyzést használva,  $p_{i,i}(r) = 0$ ,  $r \in (0, h]$ . Azonban ekkor  $\lim_{r \downarrow 0} p_{i,i}(r) = 0$ , ami ellentmondásban van azzal, hogy a lánc standard (mikoris  $\lim_{r \downarrow 0} p_{i,i}(r) = 1$ ).

A Chapman–Kolmogorov-egyenlet alapján tetszőleges  $t \in [nh, (n+1)h]$  időpontra

$$p_{i,i}(t) \geq p_{i,i}(nh)p_{i,i}(t-nh) \geq p_{i,i}(nh)\delta(h),$$

így

$$m_n(h) := \inf_{nh \leq t \leq (n+1)h} p_{i,i}(t) \geq p_{i,i}(nh)\delta(h).$$

Másképp,

$$p_{i,i}((n+1)h) \geq p_{i,i}(t)p_{i,i}((n+1)h-t) \geq p_{i,i}(t)\delta(h),$$

amiből, felhasználva, hogy  $\delta(h) > 0$ ,

$$M_n(h) := \sup_{nh \leq t \leq (n+1)h} p_{i,i}(t) \leq \frac{p_{i,i}((n+1)h)}{\delta(h)}.$$

Ezeket a becsléseket felhasználva integrálközelítő összegekkel tetszőleges  $N \geq 1$ -re

$$h\delta(h) \sum_{n=0}^{N-1} p_{i,i}(nh) \leq h \sum_{n=0}^{N-1} m_n(h) \leq \int_0^{Nh} p_{i,i}(t) dt \leq h \sum_{n=0}^{N-1} M_n(h) \leq \frac{h}{\delta(h)} \sum_{n=0}^{N-1} p_{i,i}((n+1)h),$$

ahol felhasználtuk, hogy a standarditás miatt a  $[0, \infty) \ni t \mapsto p_{i,i}(t)$  függvény Riemann-integrálható  $[0, Nh]$ -n (hiszen folytonos). Így  $N \rightarrow \infty$  esetén kapjuk a

$$h\delta(h) \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}(nh) \leq \int_0^{\infty} p_{i,i}(t) dt \leq \frac{h}{\delta(h)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}((n+1)h)$$

becslést. (Mivel  $p_{i,i} \geq 0$ , a  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{Nh} p_{i,i}(t) dt$  határérték létezik, legfeljebb  $+\infty$ .) Ebből a diszkrét paraméterű láncokra vonatkozó visszatérősségi kritériumot (2.4.5. Tétel) felhasználva következik (i)  $\implies$  (iii) és (iii)  $\implies$  (ii).  $\square$

**4.3.7. Megjegyzés.** Belátható az is, hogy egy  $i$  állapot akkor és csak akkor visszatérő, ha

$$P(\{\omega \in \Omega : \lambda(S_i(\omega)) = \infty\} | X_0 = i) = 1,$$

ahol  $S_i(\omega) := \{t \in [0, \infty) : X_t(\omega) = i\}$ ,  $\omega \in \Omega$ , és  $\lambda$  jelöli a Lebesgue-mértéket  $\mathbb{R}$ -en.  $\square$

Amiatt, hogy a (nem pillanatnyi) állapotok aperiodikusak tetszőleges  $h$ -lépéses vázban, a diszkrét paraméterű láncoktól eltérően mindig konvergensek a  $p_{i,j}(t)$  átmenetvalószínűségi függvények, ha  $t \rightarrow \infty$ , ahogy azt az alábbi állítás mutatja.

**A felesleges bonyodalmak elkerülése végett a pillanatnyi állapotoktól a továbbiakban eltekintünk.**

**4.3.8. Állítás.** Legyen  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  egy standard Markov-lánc, melynek nincsenek pillanatnyi állapotai. Ekkor tetszőleges  $i, j$  (nem pillanatnyi) állapotok esetén létezik a

$$\pi_{i,j} := \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t)$$

határérték.

**Bizonyítás.** A 4.1.10. Megjegyzés alapján a  $[0, \infty) \ni t \mapsto p_{i,j}(t)$  függvény folytonos, sőt egyenletesen is folytonos. Ezért bármely  $\varepsilon > 0$  esetén létezik  $h > 0$  úgy, hogy  $|s - s'| < h$ ,  $s, s' \geq 0$ , esetén  $|p_{i,j}(s) - p_{i,j}(s')| < \varepsilon/3$ . A 4.3.3. Állítás alapján az  $(X_{nh})_{n \in \mathbb{Z}_+}$   $h$ -lépéses váz egy diszkrét idejű aperiódikus Markov-lánc. (A standarditás miatt tetszőleges  $i \in I$  esetén  $p_{i,i}(t) > 0$ ,  $\forall t > 0$  (ugyanis  $\lim_{t \downarrow 0} p_{i,i}(t) = 1$  miatt létezik olyan  $t > 0$ , hogy  $p_{i,i}(t) > 0$ ), illetve  $i \neq j$  esetén  $p_{i,j}(t) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ , vagy  $p_{i,j}(t) > 0$ ,  $\forall t > 0$ .) A diszkrét idejű Markov-lánccok elmélete alapján (a 2.7.17. Tétel (i) részét, és egyéb, korábban a diszkrét idejű Markov-lánccoknál nem tanult eredményeket is használva) létezik a  $\pi_{i,j}(h) := \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}(nh)$  határérték, így (mivel egy konvergens sorozat Cauchy-sorozat is) létezik  $n_0 \in \mathbb{N}$  úgy, hogy  $n, n' \geq n_0$  esetén  $|p_{i,j}(nh) - p_{i,j}(n'h)| < \varepsilon/3$ . A két becslést felhasználva azt kapjuk, hogy tetszőleges  $t, t' > n_0 h$  esetén

(4.3.1)

$$|p_{i,j}(t) - p_{i,j}(t')| \leq |p_{i,j}(t) - p_{i,j}(nh)| + |p_{i,j}(nh) - p_{i,j}(n'h)| + |p_{i,j}(n'h) - p_{i,j}(t')| < \varepsilon,$$

ahol  $n$  és  $n'$  olyan  $n_0$ -nál nagyobb vagy egyenlő (nemnegatív) egészek, hogy  $|t - nh| < h$  és  $|t' - n'h| < h$ . Ilyen  $n$  és  $n'$  valóban választható, hiszen  $|t - nh| < h$  akkor és csak akkor teljesül, ha

$$-h < t - nh < h \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{t}{h} - 1 < n < \frac{t}{h} + 1,$$

és  $\frac{t}{h} > n_0$  miatt  $\frac{t}{h} - 1 > n_0 - 1$ , így  $n > n_0 - 1$ , amiből adódik, hogy  $n \geq n_0$ , illetve, mivel a  $(t/h - 1, t/h + 1)$  intervallum hossza 2, biztosan tartalmaz egész számot. Felhasználva azt, hogy a  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t) := \pi_{i,j}$  határérték létezése az átviteli elv alapján azzal ekvivalens, hogy tetszőleges olyan nemnegatív számokból álló  $(t_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  sorozat esetén, melyre  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell = \infty$ , teljesül, hogy  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} p_{i,j}(t_\ell) = \pi_{i,j}$ , illetve azt is, hogy egy  $\mathbb{R}$ -beli sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat, kapjuk a bizonyítandó állítást. Valóban, ha  $(t_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  olyan nemnegatív számokból álló sorozat, hogy  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell = \infty$  és  $\varepsilon > 0$ , akkor létezik olyan  $\ell_0 \in \mathbb{N}$ , hogy  $t_\ell > n_0 h$ , ha  $\ell \geq \ell_0$  (itt  $n_0$  és  $h$  a fentiek alapján létezik). Így, ha  $\ell, \tilde{\ell} \geq \ell_0$ , akkor (4.3.1) alapján  $|p_{i,j}(t_\ell) - p_{i,j}(t_{\tilde{\ell}})| < \varepsilon$ , azaz  $(p_{i,j}(t_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}}$  Cauchy-sorozat. Ezért létezik a  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} p_{i,j}(t_\ell)$  határérték. Összefoglalva, ha  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell = \infty$ , akkor létezik a  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} p_{i,j}(t_\ell)$  határérték. Az, hogy  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} t_\ell = \infty$  és  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tilde{t}_\ell = \infty$  esetén  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} p_{i,j}(t_\ell) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} p_{i,j}(\tilde{t}_\ell)$  abból következik, hogy a  $(t_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  és  $(\tilde{t}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  sorozatok  $(t_\ell^*)_{\ell \in \mathbb{N}}$  egyesítése is  $\infty$ -hez konvergál és erre a sorozatra léteznie kell a  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} p_{i,j}(t_\ell^*)$  határértéknek.  $\square$

A 4.3.11. Állítás utáni részből kiderül majd, hogy a 4.3.8. Állításban bevezetett  $\pi_{i,j}$  határérték nem függ  $i$ -től, így használhatnánk a  $\pi_j$  jelölést is (mely összhangban van a 2.7.17. Tétel (i) részében levő állítással).

**4.3.9. Definíció.** Az  $i$  (nem pillanatnyi) állapotot **pozitív rekurrensnek (ergodikusnak)** nevezzük, ha  $\pi_{i,i} > 0$ . Az  $i$  (nem pillanatnyi) állapotot **null rekurrensnek** nevezzük, ha visszatérő és  $\pi_{i,i} = 0$ .

**4.3.10. Állítás.** Legyen  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  egy standard Markov-lánc.

- (i) Egy  $i$  (nem pillanatnyi) állapot akkor és csak akkor pozitív rekurrens illetve null rekurrens, ha bármely  $h > 0$  esetén a  $h$ -lépéses vázban  $i$  pozitív rekurrens illetve null rekurrens.
- (ii) Egy ergodikus állapot mindig visszatérő.

**Bizonyítás.** (i). Tegyük fel, hogy az  $i$  (nem pillanatnyi) állapot pozitív rekurrens (a folytonos idejű Markov-láncban), és legyen  $h > 0$ . Ekkor a 4.3.8. Állítás alapján  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,i}(t) = \pi_{i,i} > 0$ , és így  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,i}^{(nh)} = \pi_{i,i} > 0$ , illetve  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(nh)} = \infty$ . Ezért a 2.4.5. Tétel (iii) része alapján  $i$  pozitív rekurrens a  $h$ -lépéses vázban.

Tegyük most fel, hogy az  $i$  (nem pillanatnyi) állapot pozitív rekurrens tetszőleges  $h$  lépéses vázban. Ekkor a 2.4.5. Tétel alapján  $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_{i,i}^{(nh)} > 0$  tetszőleges  $h > 0$  esetén. Mivel a 4.3.8. Állítás szerint létezik a  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,i}(t) = \pi_{i,i}$  határérték, az előzőekből következik, hogy  $\pi_{i,i} > 0$ , és így az  $i$  állapot pozitív rekurrens. Az (i) részbeli állításnak a null rekurrens állapotra vonatkozó részét hasonlóan igazolhatjuk azzal kiegészítve, hogy a 4.3.6. Tételben már láttuk, hogy  $i$  akkor és csak akkor visszatérő, ha tetszőleges  $h > 0$  esetén visszatérő a  $h$ -lépéses vázban.

(ii). Legyen  $i \in I$  egy ergodikusan állapot. Ekkor a 4.3.8. Állítás alapján  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,i}(t) = \pi_{i,i} > 0$ , és így  $\int_0^{\infty} p_{i,i}(t) dt = \infty$ , ezért, a 4.3.6. Tétel alapján,  $i$  visszatérő.  $\square$

Tegyük fel, hogy  $X_0 = i$  és tekintsük az  $i$  állapotba történő első visszatérési időpontot:

$$\kappa_i(\omega) := \begin{cases} \inf\{t \in \mathbb{R} : t > \tau_i(\omega) \text{ és } X_t(\omega) = i\} & \text{ha } \exists t \in \mathbb{R} : t > \tau_i(\omega), \text{ hogy } X_t(\omega) = i, \\ \infty & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol  $\omega \in \Omega$  és  $\tau_i(\omega)$ -t már korábban definiáltuk (lásd (4.2.2)), a 0 időpont után az  $i$  állapotban eltöltött időt jelöli:

$$\tau_i(\omega) := \begin{cases} \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \neq i\}, & \text{ha létezik } t > 0, \text{ melyre } X_t(\omega) \neq i, \\ \infty, & \text{ha } X_t(\omega) = i \text{ minden } t > 0\text{-ra.} \end{cases}$$

Az  $m_{i,i} := E(\kappa_i | X_0 = i)$  várható értéket az  $i$  állapot **átlagos visszatérési idejének** nevezzük. Vegyük észre, hogy folytonos időben az  $i$  állapotba történő első visszatérési idő mást jelöl, mint diszkrét időben. Folytonos időben  $\kappa_i$  definíciójában benne van az is a diszkrét idővel ellentétben, hogy az  $i$  állapotból először ki kell lépnie a Markov-láncnak és csak utána visszalépnie  $i$ -be. Diszkrét időben  $T_i = T_{i,1}$  definíciójában (lásd, 2.4.1. Definíció) az  $i$  állapotból való kilépést nem követeltük meg (ha például  $X_0 = X_1 = 1$ , akkor  $T_i = 1$ , noha a Markov-lánc nem hagyta el az  $i$  állapotot).

Az átmenetvalószínűségi függvények Laplace-transzformáltjainak segítségével lehet bebizonyítani a következő állítást is:

**4.3.11. Állítás.** (i) Ha  $C$  visszatérő osztály, akkor tetszőleges (nem pillanatnyi)  $i, j \in C$  állapotokra

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t) = \frac{1}{a_j m_{j,j}}.$$

(ii) Legyenek  $i$  és  $j$  nem pillanatnyi állapotok. Ha  $j$  nem visszatérő, akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t) = 0.$$

A határérték az (i) részben látszólag különbözik attól, mint amit a diszkrét esettel való analógia alapján várunk ( $\frac{1}{m_{j,j}}$ -t várhatunk). Az eltérés tényleg csak látszólagos: az előzőekben már megjegyeztük, hogy folytonos időben  $m_{j,j}$  mást jelöl, mint diszkrét időben. Mivel  $a_j$  a  $j$  állapot elhagyásának intenzitása, heurisztikusan érthető a dolog. Látjuk azt is, hogy a 4.3.8. Állításban bevezetett  $\pi_{i,j}$  határérték a 4.3.11. Állítás alapján nem függ  $i$ -től.

**4.3.12. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  Markov-lánc erősen stacionárius, ha a véges dimenziós eloszlásai eltolásinvariánsak, azaz  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$  és  $\forall h \geq 0$  esetén  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  és  $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$  eloszlásai megegyeznek.

Megjegyezzük, hogy az egydimenziós eloszlások nem határozzák meg a véges dimenziós eloszlásokat általában. Például, legyen  $X_t := W_t, t \geq 0$ , egy standard Wiener folyamat,  $\eta_t := \sqrt{t}\zeta, t \geq 0$ , ahol  $\zeta$  egy standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor tetszőleges  $t \geq 0$  esetén  $X_t \stackrel{D}{=} \eta_t$ , de  $(X_{t_1}, X_{t_2})$  és  $(\eta_{t_1}, \eta_{t_2})$  eloszlása nem egyezik meg.

A következő állításban megmutatjuk, hogy az erős stacionaritás folytonos idejű Markov-láncoknál is ekvivalens az egydimenziós eloszlások eltolásinvarianciájával (a diszkrét idejű Markov-láncokra vonatkozó megfelelő eredmény a 2.7.5. Állítás).

**4.3.13. Állítás.** Egy  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  (homogén) Markov-lánc akkor és csak akkor erősen stacionárius, ha tetszőleges  $i \in I$  és  $t \geq 0$  esetén  $P(X_t = i) = P(X_0 = i)$ , azaz  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0)$  (ahol  $\mathbf{q}(t)$  az abszolút valószínűségekből álló sorvektort jelöli).

**Bizonyítás.** Az odafele irány triviálisan igaz  $n := 1$  és  $t_1 := t$  választásokkal. Megfordítva, tetszőleges  $n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n, h \geq 0$  és  $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$  állapotok esetén, a lánc-szabály és a homogenitás alapján,

$$\begin{aligned} & P(X_{t_1+h} = i_1, X_{t_2+h} = i_2, \dots, X_{t_n+h} = i_n) \\ &= P(X_{t_1+h} = i_1) p_{i_1, i_2}(t_2 + h - (t_1 + h)) p_{i_2, i_3}(t_3 + h - (t_2 + h)) \dots p_{i_{n-1}, i_n}(t_n + h - (t_{n-1} + h)) \\ &= P(X_{t_1+h} = i_1) p_{i_1, i_2}(t_2 - t_1) p_{i_2, i_3}(t_3 - t_2) \dots p_{i_{n-1}, i_n}(t_n - t_{n-1}) \\ &= P(X_{t_1} = i_1) p_{i_1, i_2}(t_2 - t_1) p_{i_2, i_3}(t_3 - t_2) \dots p_{i_{n-1}, i_n}(t_n - t_{n-1}) \\ &= P(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \dots, X_{t_n} = i_n), \end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti egyenlőségénél használtuk fel a feltételt, hogy az egydimenziós eloszlások eltolásinvariánsak.  $\square$

**4.3.14. Definíció.** Egy  $\{u_i, i \in I\}$  valós számsorozat a  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  lánc **stacionárius eloszlása**, ha

- (i)  $u_i \geq 0, i \in I$  és  $\sum_{i \in I} u_i = 1$ ,
- (ii)  $u_j = \sum_{i \in I} u_i p_{i,j}(t), j \in I, t \geq 0$ .

A stacionaritás egyenlete mátrixos alakban:  $\mathbf{u} = \mathbf{u} \mathbb{P}(t), t \geq 0$ , ahol  $\mathbf{u}$  az  $u_i, i \in I$  elemekből álló sorvektor. Mivel  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q} \mathbb{P}(t), t > 0$ , kapjuk, hogy  $\mathbf{u} = (u_i)_{i \in I}$  pontosan akkor stacionárius eloszlás, ha  $X_0 \sim \mathbf{u}$  esetén,  $X_t \sim \mathbf{u}$  bármilyen  $t > 0$  időpontra.

**4.3.15. Állítás.** A következő állítások ekvivalensek:

- (i) Egy  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  Markov-lánc erősen stacionárius.
- (ii) Tetszőleges  $h > 0$ -ra a  $h$ -lépéses váz erősen stacionárius.
- (iii) A kezdeti valószínűségek a láncnak stacionárius eloszlását alkotják.

**4.3.16. Tétel.** (i) Ha egy irreducibilis Markov-lánc ergodikus, akkor egyetlen stacionárius eloszlása van, mely nemmás, mint  $u_i = \pi_i = \frac{1}{a_i m_{i,i}} > 0, i \in I$ . Továbbá,  $\mathbf{u} := (u_i)_{i \in I}$  az egyértelmű megoldása az alábbi egyenletrendszernek:  $\mathbf{0} = \mathbf{u} \mathbf{A}$  és  $\sum_{i \in I} u_i = 1, u_i \geq 0, i \in I$ .

(ii) Ha egy irreducibilis Markov-lánc nem ergodikus, akkor nem létezik stacionárius eloszlása.

Az 4.3.16. Tétel (i) része második felének levezetése megtalálható például a *Kulkarni: Modeling and Analysis of Stochastic Systems, 3rd ed (2017) könyvben (Theorem 6.24)*.

Emlékeztetünk rá, hogy a stacionaritás egyenlete mátrixos alakban:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbb{P}(t)$ ,  $t \geq 0$ , ahol  $\mathbf{u}$  az  $u_i$ ,  $i \in I$  elemekből álló sorvektor. Ezért, ha fennáll Kolmogorov második (forward) egyenlete (lásd 4.1.19. Tétel (ii) része), akkor a stacionaritás egyenletét deriválva kapjuk, hogy  $\mathbf{0} = \mathbf{u}\mathbb{P}'(t) = \mathbf{u}\mathbb{P}(t)\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{A}$ , így a stacionárius eloszlás meghatározásához nem szükségesek az átmenetvalószínűségi függvények, elegendő ismerni az infinitezimális mátrixot (lásd a következő állítást is, mely a véges állapotterű esetre vonatkozik). A  $\mathbf{0} = \mathbf{u}\mathbf{A}$  egyenletrendszer azt jelenti, hogy  $\mathbf{A}$ -nak a  $\mathbf{0}$  sajátértéke,  $\mathbf{u}$  pedig egy, a  $\mathbf{0}$ -hoz tartozó baloldali sajátvektora.

**4.3.17. Állítás.** Legyen  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  egy homogén, véges állapotterű konzervatív Markov lánc. Az  $\{u_i, i \in I\}$  valós számsorozat akkor és csak akkor stacionárius eloszlás  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  számára, ha  $u_i \geq 0$ ,  $i \in I$ ,  $\sum_{i \in I} u_i = 1$ , és  $\mathbf{0} = \mathbf{u}\mathbf{A}$ .

**Bizonyítás.** Tegyük fel először, hogy  $\{u_i, i \in I\}$  stacionárius eloszlás  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  számára. Ekkor  $\mathbf{u}\mathbb{P}(t) = \mathbf{u}$ ,  $t \geq 0$ , és így a 4.1.22. Állítás alapján  $\mathbf{u}e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{u}$ ,  $t \geq 0$ , azaz  $\mathbf{u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mathbf{A}^n}{n!} = \mathbf{u}$ ,  $t \geq 0$ . Ezért  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{u}\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ ,  $t \geq 0$ , és így  $\mathbf{u}\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ ,  $n \geq 1$ , speciálisan  $\mathbf{u}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ .

Megfordítva, tegyük fel, hogy  $\mathbf{0} = \mathbf{u}\mathbf{A}$  és  $u_i \geq 0$ ,  $i \in I$ ,  $\sum_{i \in I} u_i = 1$ . Ekkor  $\mathbf{u}\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ ,  $n \geq 1$ , és így  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{u}\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ ,  $t \geq 0$ . Ezért  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{u}\mathbf{A}^n = \mathbf{u}$ ,  $t \geq 0$ , azaz  $\mathbf{u}e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{u}$ ,  $t \geq 0$ , és így a 4.1.22. Állítás alapján  $\mathbf{u}\mathbb{P}(t) = \mathbf{u}$ ,  $t \geq 0$ .  $\square$

**4.3.18. Megjegyzés.** Legyen  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  egy homogén, véges állapotterű, irreducibilis pozitív rekurrens Markov lánc. Ekkor az  $\mathbf{u}\mathbf{A} = \mathbf{0}$  egyenletrendszerhez úgy is eljuthatunk, ha meggondoljuk, hogy stacionárius állapotban lévő Markov-lánc esetén (tehát amikor  $X_0$  eloszlása a lánc egyértelmű stacionárius eloszlása) minden állapotra teljesülnie kell annak, hogy a stacionárius valószínűségekkel súlyozott befolyó intenzitások összege egyenlő a stacionárius valószínűségekkel súlyozott kifolyó intenzitások összegével. Tekintsük példaként az  $I := \{0, 1\}$  állapotteret és az

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

generátormátrixot, ahol  $\lambda > 0$  és  $\mu > 0$ . Ekkor

$$\mathbf{u}\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -\lambda u_0 + \mu u_1 = 0, \\ \lambda u_0 - \mu u_1 = 0. \end{cases}$$

Továbbá, a 0 és 1 állapotok esetén felírva azt, hogy a stacionárius valószínűségekkel súlyozott befolyó intenzitások összege egyenlő a stacionárius valószínűségekkel súlyozott kifolyó intenzitások összegével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mu u_1 &= \lambda u_0, & \text{a 0 állapotra,} \\ \lambda u_0 &= \mu u_1, & \text{az 1 állapotra.} \end{aligned}$$

Látható, hogy a két egyenletrendszer ugyanaz.  $\square$

Hasonlóan az előzőekhez, kapjuk, hogy ha fennáll Kolmogorov második (forward) egyenlete, akkor az abszolút valószínűségek kielégítik a  $\mathbf{q}'(t) = \mathbf{q}(t)\mathbf{A}$  differenciálegyenletrendszert. Valóban, a  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}\mathbb{P}(t)$ ,  $t > 0$  összefüggést differenciálva  $t$ -szerint, kapjuk, hogy

$$\mathbf{q}'(t) = \mathbf{q}\mathbb{P}'(t) = \mathbf{q}\mathbb{P}(t)\mathbf{A} = \mathbf{q}(t)\mathbf{A}.$$

Azaz az abszolút valószínűségek meghatározásához sem kell ismerni az átmenetvalószínűségeket, elég az infinitezimális mátrixot ismerni.

**4.3.19. Tétel. (Ergodikus tétel Markov-láncokra)** Legyen  $\{X_t : t \geq 0\}$  egy irreducibilis és pozitív rekurrens Markov-lánc, és  $\pi$  az egyértelmű invariáns eloszlása.

(i) Ekkor egy  $i \in I$  állapotban töltött idő hosszútávú aránya

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_{\{X_t=i\}} dt = \pi_i, \quad \text{P-m.b..}$$

(ii) Tetszőleges  $c : I \rightarrow \mathbb{R}$  (költség)függvény esetén, melyre  $\sum_{i \in I} |c(i)|\pi_i < \infty$ , teljesül, hogy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T c(X_t) dt = \sum_{i \in I} c(i)\pi_i, \quad \text{P-m.b..}$$

A  $\sum_{i \in I} c(i)\pi_i$  mennyiségre gondolhatunk úgy, mint hosszútávú átlagos költségre.

## 4.4. Születési-kihalási folyamatok

A születési-kihalási folyamatok a nemnegatív egészen történő általánosított bolyongások, azaz olyan folytonos idejű Markov-láncok, melyek egy  $i$  állapotból csak valamelyik szomszédos állapotba ugorhatnak át.

**4.4.1. Definíció.** Egy  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  folytonos idejű Markov-láncot **születési-kihalási folyamatnak** nevezzük, ha állapottere a nemnegatív egész számok halmaza, és az infinitezimális mátrixa

$$A := \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

alakú, ahol  $0 \leq \lambda_i, \mu_i < \infty$ . Elnevezések:  $\lambda_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_+$ , születési intenzitások,  $\mu_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , kihalási intenzitások.

Másképpen megfogalmazva: az átmenetvalószínűségi függvényeire teljesül, hogy  $h \downarrow 0$  esetén

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(h) &= \lambda_i h + o(h), & i \geq 0, \\ p_{i,i-1}(h) &= \mu_i h + o(h), & i \geq 1, \\ p_{0,0}(h) &= 1 - \lambda_0 h + o(h), \\ p_{i,i}(h) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), & i \geq 1, \\ p_{i,j}(h) &= o(h), & |i - j| \geq 2, \end{aligned}$$

ahol  $i, j \in \mathbb{Z}_+$ , és emlékeztetünk rá, hogy  $o(h)$  olyan mennyiséget jelöl, melyre  $\lim_{h \downarrow 0} o(h)/h = 0$ . A születési–kihalási folyamatok a definícióból következően konzervatívák és standardok is. Valóban,  $i \geq 0$  esetén

$$\lim_{h \downarrow 0} p_{i,i+1}(h) = \lim_{h \downarrow 0} h \frac{p_{i,i+1}(h)}{h} = \lambda_i \lim_{h \downarrow 0} h = 0 = p_{i,i+1}(0),$$

illetve  $i \geq 1$  esetén

$$\lim_{h \downarrow 0} p_{i,i}(h) = \lim_{h \downarrow 0} \left( h \frac{p_{i,i}(h) - 1}{h} + 1 \right) = 1 - (\lambda_i + \mu_i) \lim_{h \downarrow 0} h = 1 = p_{i,i}(0),$$

illetve hasonlóan,  $i = 0$  esetén

$$\lim_{h \downarrow 0} p_{0,0}(h) = 1 - \lambda_0 \lim_{h \downarrow 0} h = 1 = p_{0,0}(0).$$

Ha  $i \geq 1$ , akkor

$$\lim_{h \downarrow 0} p_{i,i-1}(h) = \lim_{h \downarrow 0} h \frac{p_{i,i-1}(h)}{h} = \mu_i \lim_{h \downarrow 0} h = 0 = p_{i,i-1}(0).$$

Ha  $|i - j| \geq 2$ , akkor

$$\lim_{h \downarrow 0} p_{i,j}(h) = \lim_{h \downarrow 0} o(h) = 0 = p_{i,j}(0).$$

A fentiek alapján kapjuk a standarditást, azaz, hogy az átmenetvalószínűségi függvények folytonosak a 0 pontban. A konzervitivitás a definícióból és  $\mathbf{A}$  alakjából közvetlenül adódik.

**4.4.2. Példa.** (i) Poisson-folyamat:  $\lambda_i = \lambda$ ,  $i \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\mu_i = 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,

(ii) tisztán születési folyamat:  $\mu_i = 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$  (lásd a 4.4.6. Definíciót is),

(iii) tisztán halálozási folyamat:  $\lambda_i = 0$ ,  $i \in \mathbb{Z}_+$ ,

(iv) egyszerveres sorbanállási modell (M/M/1):  $\lambda_i = \lambda$ ,  $i \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\mu_i = \mu$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,

(v) egy populációdinamikai modell:  $\lambda_0 \geq 0$ ,  $\lambda_i = i\lambda$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_i = i\mu$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Interpretáció: ha egy adott időpontban  $i \in \mathbb{N}$  darab egyedből áll a populáció, akkor a következő egyed beérkezéséig eltelt idő  $\text{Exp}(i\lambda)$  elszólású, és a következő egyed távozásáig eltelt idő  $\text{Exp}(i\mu)$  eloszlású.

□

A Kolmogorov–féle első (backward) egyenletrendszer  $p'_{i,j}(t) = \sum_{k \in I} a_{i,k} p_{k,j}(t)$ ,  $t > 0$ ,  $i, j \in I$ , az alábbi alakot ölti (a konzervativitás feltétele most teljesül):

$$\begin{cases} p'_{0,j}(t) = -\lambda_0 p_{0,j}(t) + \lambda_0 p_{1,j}(t) & \text{ha } j \geq 0, \\ p'_{i,j}(t) = \mu_i p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{i,j}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t) & \text{ha } i \geq 1, j \geq 0. \end{cases}$$

a Kolmogorov–féle második (forward) egyenletrendszer  $p'_{i,j}(t) = \sum_{k \in I} p_{i,k}(t) a_{k,j}$ ,  $t > 0$ ,  $i, j \in I$ , pedig az alábbi alakot ölti:

$$\begin{cases} p'_{i,0}(t) = -\lambda_0 p_{i,0}(t) + \mu_1 p_{i,1}(t) & \text{ha } i \geq 0, \\ p'_{i,j}(t) = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{i,j}(t) + \mu_{j+1} p_{i,j+1}(t) & \text{ha } i \geq 0, j \geq 1. \end{cases}$$

Ha  $\lambda_i, \mu_i \in (0, \infty)$ ,  $i \in \mathbb{Z}_+$ , akkor a születési–kihalási folyamat irreducibilis.

Tetszőleges  $\lambda_i, \mu_i \geq 0$ ,  $i \in \mathbb{Z}_+$ , esetén nem feltétlenül létezik olyan sztochasztikus mátrixfüggvény, mely kielégíti ezeket az egyenleteket. A születési–kihalási folyamatokkal kapcsolatban felmerülő kérdésekre a következő tétel ad választ.

**4.4.3. Tétel. (Karlin–McGregor–tétel)** Legyenek  $\lambda_i, \mu_i > 0, i \in \mathbb{Z}_+$ . Jelölje  $\varrho_0 := 1, \tilde{\varrho}_0 := 1$ , és

$$\varrho_n := \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}, \quad \tilde{\varrho}_n := \frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) A Kolmogorov-egyenleteknek (a kezdeti feltételekkel együtt) akkor és csak akkor létezik egyértelmű megoldása, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n = \infty, \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varrho}_n = \infty.$$

(ii) Ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n = \infty, \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varrho}_n < \infty,$$

akkor a lánc nem visszatérő.

(iii) Ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n = \infty, \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varrho}_n = \infty,$$

akkor a lánc állapotai nullrekurrenssek. Ilyenkor a lánc visszatérő is, mert nullrekurrens állapot visszatérő definíció szerint.

(iv) Ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n < \infty, \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varrho}_n = \infty,$$

akkor a lánc pozitív rekurrens (ergodikus), és az egyértelmű stacionárius eloszlása

$$\pi_i = \frac{\varrho_i}{\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n}, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Ilyenkor a lánc visszatérő is, mert ergodikus állapot visszatérő (lásd a 4.3.10. Állítás (ii) részét).

A fenti esetekben a Kolmogorov backward és forward egyenletek megoldásai ugyanazok.

**4.4.4. Példa.** Tegyük fel, hogy  $\lambda_i = \lambda > 0, i \in \mathbb{Z}_+$ , és  $\mu_i = \mu > 0, i \in \mathbb{Z}_+$ . Ekkor

$$\varrho_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad \tilde{\varrho}_n = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

így a lánc  $\lambda < \mu$  esetén pozitív rekurrens (ergodikus),  $\lambda = \mu$  esetén nullrekurrens állapotokból áll,  $\lambda > \mu$  esetén pedig nem visszatérő. Valóban,

- ha  $\lambda < \mu$ , akkor  $\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n < \infty$  és  $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varrho}_n = \infty$ , és ezért a lánc ergodikus,
- ha  $\lambda = \mu$ , akkor  $\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n = \infty$  és  $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varrho}_n = \infty$ , és ezért a lánc állapotai nullrekurrens állapotok,
- ha  $\lambda > \mu$ , akkor  $\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n = \infty$  és  $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varrho}_n < \infty$ , és ezért a lánc nem visszatérő.

A  $\lambda < \mu$  ergodikus esetben az egyértelmű stacionárius eloszlás:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} = \frac{\mu - \lambda}{\mu},$$

$$\pi_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\frac{\mu}{\mu - \lambda}} = (\mu - \lambda) \frac{\lambda^n}{\mu^{n+1}}, \quad n \geq 1,$$

azaz

$$\pi_n = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

□

**4.4.5. Példa.** Legyen  $\{X_t : t \geq 0\}$  egy születési-halálozási folyamat, hogy  $\lambda_i > 0, i \in \mathbb{Z}_+$ , és  $\mu_i > 0, i \in \mathbb{N}$ . Határozzuk meg az egyértelmű invariáns eloszlását, amennyiben létezik!

Ekkor  $\{X_t : t \geq 0\}$  irreducibilis. Legyen  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ . Ekkor a 4.3.16. Tétel alapján  $\boldsymbol{\pi}$  pontosan akkor invariáns eloszlás, ha a Markov-lánc ergodikus, illetve ezzel ekvivalens módon, ha megoldása a  $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A} = \mathbf{0}$  és  $\sum_{i \in \mathbb{Z}_+} \pi_i = 1, \pi_i \geq 0, i \in \mathbb{Z}_+$ , egyenletrendszernek. Az  $\boldsymbol{\pi} \mathbf{A} = \mathbf{0}$  egyenlet az alábbi alakot ölti

$$-\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0,$$

$$\lambda_{i-1} \pi_{i-1} + \mu_{i+1} \pi_{i+1} = (\lambda_i + \mu_i) \pi_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Belátjuk teljes indukcióval, hogy

$$\pi_i = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} \pi_0, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Az állítás  $i = 1$  esetén igaz, lásd a legelső egyenletet. A második egyenletet átrendezve adódik, hogy

$$\pi_{i+1} = \frac{(\lambda_i + \mu_i) \pi_i - \lambda_{i-1} \pi_{i-1}}{\mu_{i+1}}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Az indukciós feltevés alapján behelyettesítés után pedig

$$\begin{aligned} \pi_{i+1} &= \frac{(\lambda_i + \mu_i) \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} \pi_0 - \lambda_{i-1} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-2}}{\mu_1 \cdots \mu_{i-1}} \pi_0}{\mu_{i+1}} = \frac{1}{\mu_{i+1}} \cdot \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_{i-1}} \pi_0 \left( \frac{\lambda_i + \mu_i}{\mu_i} - 1 \right) \\ &= \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_i}{\mu_1 \cdots \mu_{i+1}} \pi_0. \end{aligned}$$

Mivel  $\boldsymbol{\pi}$  eloszlás kell hogy legyen, kapjuk, hogy

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 + \pi_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \pi_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \cdots = \pi_0 Z,$$

ahol

$$Z := 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots$$

Így  $\boldsymbol{\pi}$  pontosan akkor invariáns eloszlása, ha

$$Z = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \cdots < \infty,$$

és ekkor

$$\pi_0 = \frac{1}{Z}, \quad \pi_i = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i} \pi_0, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Ez összhangban van a 4.4.3. Tétel (iv) részével.  $\square$

**4.4.6. Definíció.** Egy születési–kihalási folyamatot akkor nevezünk **tiszta születési folyamatnak**, ha  $\mu_n = 0$ ,  $n \geq 1$  (és  $\lambda_n > 0$ ,  $n \geq 0$ ). Ekkor az infinitezimális mátrixa

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

alakú.

Mivel  $\mu_n = 0$ ,  $n \geq 1$ , ezért egy tiszta születési folyamatra a Karlin-McGregor-tétel nem alkalmazható. Jelölje  $\mathbf{1}$  azt az  $(I \times 1)$ -es oszlopvektort, mely csupa 1-esből áll.

**4.4.7. Tétel.** Legyen  $\mathbf{q}$  tetszőleges eloszlás a nemnegatív egészen. Ekkor az abszolút valószínűségekre vonatkozó  $\mathbf{q}'(t) = \mathbf{q}(t)\mathbf{A}$ ,  $t \geq 0$ , differenciálegyenletrendszernek a  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}$  kezdeti feltétel esetén létezik egyértelmű megoldása, mely nemnegatív és

$$\mathbf{q}(t)\mathbf{1} = 1, \quad \forall t \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

(A Kolmogorov forward differenciálegyenletek teljesülése esetén  $\mathbf{q}'(t) = \mathbf{q}(t)\mathbf{A}$ ,  $t > 0$ , fennáll.)

**Bizonyítás.** A differenciálegyenleteket kiírva:

$$(4.4.1) \quad \begin{cases} q'_0(t) = -\lambda_0 q_0(t) \\ q'_k(t) = \lambda_{k-1} q_{k-1}(t) - \lambda_k q_k(t), \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Megmutatjuk először, hogy a (4.4.1) differenciálegyenletrendszernek a  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}$  kezdeti feltétel esetén egyértelműen létezik  $\mathbf{q}(t)$ ,  $t \geq 0$ , megoldása, melyre  $q_n(t) \geq 0$  tetszőleges  $t \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  esetén. Nyilván,  $q_0(t) = q_0 e^{-\lambda_0 t}$ ,  $t \geq 0$ , és így  $q_0(t)$ ,  $t \geq 0$  egyértelmű és nemnegatív (hiszen  $q_0 \geq 0$ ). Belátjuk most, hogy a

$$(4.4.2) \quad \begin{cases} q'_1(t) = \lambda_0 q_0(t) - \lambda_1 q_1(t), \quad t \geq 0, \\ q_1(0) = q_1 \geq 0, \end{cases}$$

megoldása is egyértelmű és nemnegatív. A  $q'_1(t) = -\lambda_1 q_1(t)$ ,  $t \geq 0$ , homogén egyenlet összes megoldása  $q_1(t) = C e^{-\lambda_1 t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . A konstans variálás módszerével, a szóban forgó inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását  $C(t) e^{-\lambda_1 t}$ ,  $t \geq 0$ , alakban keresve

$$\begin{aligned} C'(t) e^{-\lambda_1 t} + C(t) (-\lambda_1) e^{-\lambda_1 t} &= \lambda_0 q_0(t) - \lambda_1 C(t) e^{-\lambda_1 t}, \\ \Updownarrow \\ C'(t) &= \lambda_0 q_0(t) e^{\lambda_1 t}, \end{aligned}$$

amiből

$$C(t) = \lambda_0 \int_0^t q_0(u) e^{\lambda_1 u} du, \quad t \geq 0.$$

Így a szóban forgó inhomogén egyenlet összes megoldása

$$Ce^{-\lambda_1 t} + \lambda_0 e^{-\lambda_1 t} \int_0^t q_0(u) e^{-\lambda_1 u} du, \quad t \geq 0.$$

Figyelembe véve a  $q_1(0) = q_1$  kezdeti feltételt is  $C = q_1$ , és így (4.4.2) megoldása:

$$q_1(t) = q_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_0 e^{-\lambda_1 t} \int_0^t q_0(u) e^{-\lambda_1 u} du, \quad t \geq 0.$$

Mivel  $\lambda_0, q_1 \geq 0$ ,  $q_0(t) \geq 0, t \geq 0$ , kapjuk, hogy  $q_1(t), t \geq 0$ , egyértelmű és nemnegatív. A fenti gondolatmenetet rekurzívan alkalmazva, teljesen analóg módon adódik, hogy  $q_n(t), t \geq 0$ , egyértelmű és  $q_n(t) \geq 0$  tetszőleges  $t \geq 0, n \geq 1$  esetén.

Jelölje  $S_n(t) := \sum_{k=0}^n q_k(t)$ ,  $n \geq 0$ . Összeadva a (4.4.1)-beli egyenleteket  $k = 0, 1, \dots, n$  esetén:  $S'_n(t) = -\lambda_n q_n(t)$ ,  $n \geq 0$ , amiből  $\int_0^T S'_n(t) dt = -\lambda_n \int_0^T q_n(t) dt$  tetszőleges  $T > 0$ -ra, így

$$(4.4.3) \quad S_n(0) - S_n(T) = \lambda_n \int_0^T q_n(t) dt, \quad n \geq 0.$$

Mivel  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}$  egy diszkrét valószínűségeloszlás a nemnegatív egészekben, kapjuk, hogy  $\sum_{k=0}^{\infty} q_k(0) = 1$ , és így  $S_n(0) = \sum_{k=0}^n q_k(0) \uparrow 1$ , ha  $n \rightarrow \infty$ . Így tetszőleges  $\varepsilon > 0$  esetén létezik  $n_0 \in \mathbb{N}$  úgy, hogy  $n \geq n_0$ -ra  $1 - \varepsilon < S_n(0) \leq 1$ . Másrészt bármely  $T > 0$ -ra létezik az  $U(T) := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - S_n(T))$  határérték, ugyanis  $\sum_{k=0}^n q_k(T), n \in \mathbb{N}$  monoton növekvő sorozat, és így

$$U(T) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} q_k(T) \in [0, 1].$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy előfordulhat, hogy  $U(T) > 0$ . Ezért

$$\begin{aligned} U(T) - \varepsilon &< U(T) + S_n(0) - 1 = S_n(0) - \sum_{k=0}^{\infty} q_k(T) \\ &\leq S_n(0) - \sum_{k=0}^n q_k(T) = S_n(0) - S_n(T), \quad n \geq n_0, \end{aligned}$$

illetve

$$S_n(0) - S_n(T) \leq 1 - S_n(T) \leq 1, \quad n \geq 0.$$

Ezért (4.4.3) alapján

$$(4.4.4) \quad \frac{U(T) - \varepsilon}{\lambda_n} < \int_0^T q_n(t) dt, \quad n \geq n_0,$$

$$(4.4.5) \quad \int_0^T q_n(t) dt \leq \frac{1}{\lambda_n}, \quad n \geq 0.$$

Így (4.4.4) alapján  $N \geq n_0$ -ra

$$(4.4.6) \quad (U(T) - \varepsilon) \sum_{n=n_0}^N \frac{1}{\lambda_n} \leq \int_0^T \sum_{n=n_0}^N q_n(t) dt = \int_0^T (S_N(t) - S_{n_0-1}(t)) dt,$$

másképp (4.4.5) alapján minden  $N \geq 0$ -ra

$$(4.4.7) \quad \int_0^T S_N(t) dt \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{\lambda_n}.$$

Ha  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$ , akkor belátjuk, hogy nem teljesülhet, hogy  $\mathbf{q}(t)\mathbf{1} = 1$  bármely  $t \geq 0$ -ra. Valóban, ekkor az következne, hogy  $\sum_{k=0}^{\infty} q_k(t) = 1$ ,  $t \geq 0$ , és így bármely  $t \geq 0$ -ra  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) = 1$  teljesülne. Ezért (4.4.7) alapján tetszőleges  $T > 0$ -ra

$$\infty > \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T S_N(t) dt = \int_0^T \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) dt = \int_0^T 1 dt = T,$$

ahol az utolsó előtti lépésben a Lebesgue-féle dominált konvergencia tételt használtuk. Ezzel ellentmondáshoz jutottunk, hiszen  $T \rightarrow \infty$  határátmenettel azt kapnánk, hogy  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$ .

Ha pedig  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$ , akkor nem lehet, hogy valamely  $T \geq 0$ -ra  $\mathbf{q}(T)\mathbf{1} \neq 1$ , mert ebből az következne, hogy  $U(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - S_n(T)) > 0$ . Így (4.4.6) alapján  $\varepsilon = U(T)/2$  választással

$$\frac{U(T)}{2} \sum_{n=n_0}^N \frac{1}{\lambda_n} \leq \int_0^T (S_N(t) - S_{n_0-1}(t)) dt \leq \int_0^T S_N(t) dt \leq T, \quad N \geq n_0,$$

következne, és  $N \rightarrow \infty$  esetén ellentmondásra jutnánk.  $\square$

Az állapotváltozások mechanizmusa szerint a lánc először eltölt a kezdeti  $i$  állapotban  $\lambda_i$  paraméterű exponenciális eloszlású időtartamot, majd átugrik az  $i+1$  állapotba, ott is eltölt  $\lambda_{i+1}$  paraméterű exponenciális eloszlású időtartamot, ami után átugrik az  $i+2$  állapotba, stb. Ezért a kezdeti  $i$  állapotban várhatóan  $\frac{1}{\lambda_i}$  időt tölt, majd átugrik az  $i+1$  állapotba, ott várhatóan  $\frac{1}{\lambda_{i+1}}$  időt tölt, majd átugrik az  $i+2$  állapotba, stb. Így ha  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$ , akkor várhatóan  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$  idő alatt kiszalad az állapottérből.

Tiszta születési folyamatnál a Kolmogorov-féle forward egyenlet minden megoldása a backward egyenlet megoldása is, és a backward egyenletnek van olyan megoldása, ami nem megoldása a forward egyenletnek.