DIPLOMAMUNKA

BARCZY MÁTYÁS

VALÓSZÍNŰSÉGI MÉRTÉKEK LOKÁLISAN KOMPAKT ABEL-CSOPORTOKON

TÉMAVEZETŐ: DR. PAP GYULA

MATEMATIKAI ÉS INFORMATIKAI INTÉZET

DEBRECENI EGYETEM

2001

I. Bevezetés.

Diplomamunkám a valószínűségszámítás azon területéhez kapcsolódik, mely csoportokon értelmezett valószínűségi mértékek tulajdonságait vizsgálja. Esetünkben ez a csoport egy tetszőleges lokálisan kompakt Ábel-csoport lesz.

Diplomamunkám szűkebb témája K. R. Parthasarathy: „ *Probability measures on metric spaces* " című könyve felhasználásával azon út bemutatása, mely elvezet lokálisan kompakt Ábel-csoportokon értelmezett eloszlások karakterisztikus függvényének az alakjához. Részletesen szólok az idempotens mértékekről, a lokális belső szorzásokról, s bizonyítással együtt szerepel az infinitézimális kicsiség feltételét teljesítő háromszögrendszerek lehetséges határeloszlásait jellemző tétel (III. fejezet 5.2. Tétel).

Diplomamunkám kapcsolódik TDK dolgozatomhoz is, a következő módon. Ismert, hogy euklideszi esetben két Gauss mérték konvolúciója is Gauss mérték, s a paraméterek összeadódnak, pontosabban, ha μ' ill. μ'' Gauss mértékek $\mathbb{R}^k$-n (a', A') ill (a'', A'') paraméterekkel, azaz $\mu' \sim \mathcal{N}(a', A')$ ill. $\mu'' \sim \mathcal{N}(a'', A'')$, akkor $\mu' * \mu''$ is Gauss mérték $(a' + a'', A' + A'')$ paraméterekkel, azaz $\mu' * \mu'' \sim \mathcal{N}(a' + a'', A' + A'')$ (Gauss mértéken itt $\mathbb{R}^k$-beli értékű normális eloszlású valószínűségi változó eloszlását értjük). Felhasználva Parthasarathy [3] 4. fejezet 6.1. Tételét megmutatjuk, hogy lokálisan kompakt Ábel-csoportokon Gauss mértékek konvolúciója Gauss mérték (és a paraméterek összeadódnak). „ *Heisenberg csoporton értelmezett Gauss mértékek Fourier transzformáltja* " című TDK dolgozatomban pedig azt vizsgáltam, hogy mikor lesz két, a Heisenberg csoporton értelmezett Gauss mérték konvolúciója Gauss mérték.

II. Metrikus csoporton értelmezett valószínűségi mértékek.

II. 1. Valószínűségi mértékek konvolúciója.

Legyen X egy szeparábilis metrikus csoport. A csoportbeli szorzást xy módon jelöljük, ahol $x,\ y \in X$. Jelölje e az X csoport egységelemét. Ha $A,\ B \subset X$ részhalmazok, akkor $AB := \{z\ :\ z = xy,\ x \in A,\ y \in B\}$, illetve $A^{-1} := \{z\ :\ z^{-1} \in A\}$. A II. fejezetben mértéken a $\mathcal{B}_X$ σ-algebrán definiált valószínűségi mértéket értünk. Jelölje $\mathcal{M}(X)$ az X-en értelmezett valószínűségi mértékek terét a gyenge topológiával, $C(X)$ a valós értékű, korlátos, folytonos függvények; $U(X)$ pedig a valós értékű, korlátos, egyenletesen folytonos függvények terét.

A dolgozatban sok helyen szerepel hivatkozás a jólismert Prohorov tételre, ami az $\mathcal{M}(X)$-beli kompakt részhalmazokat jellemzi.

1.0. Tétel. (Prohorov) Legyen X egy teljes, szeparábilis metrikus tér és $\Gamma \subset \mathcal{M}(X)$. Ekkor $\overline{\Gamma}$ akkor és csak akkor kompakt, ha bármilyen $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan $K_\epsilon \subset X$ kompakt halmaz, hogy $\mu(K_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$ bármilyen $\mu \in \Gamma$ esetén, más szóval a Γ család egyenletesen feszes.

Bizonyítás. Először a feltétel elegendő voltát látjuk be. Megjegyezzük, hogy ehhez elegendő csak azt feltételezni, hogy X szeparábilis metrikus tér. Uryshon jólismert tétele alapján X topológiailag beágyazható az egységintervallum önmagával vett direkt szorzatába. (Következésképpen létezik X-en az eredetivel ekvivalens olyan metrika, mellyel teljesen korlátos.) Jelölje $\widehat{X}$ az X-et topológikus altérként tartalmazó kompakt metrikus teret. Ha μ valószínűségi mérték X-en, akkor értelmezzük a $\widehat{\mu}$ valószínűségi mértéket $\widehat{X}$-n a következőképpen $\widehat{\mu}(A) = \mu(A \cap X)$ bármilyen $A \subset \widehat{X}$ Borel halmazra.

Ahhoz, hogy $\overline{\Gamma}$ kompakt legyen azt kell belátnunk, hogy minden Γ-beli részsorozatnak van konvergens részsorozata. Legyen $\mu_1, \mu_2, \dots$ Γ-ból való mértékek egy sorozata, $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \dots$ pedig az ennek megfelelő, $\widehat{X}$-n definiált mértékek sorozata. ($\widehat{\mu}$ most nem Fourier transzformáltat jelöl.) Mivel $\widehat{X}$ kompakt $\mathcal{M}(\widehat{X})$ kompakt metrikus tér, ugyanis fennáll az, hogy $\mathcal{M}(X)$ akkor és csak akkor kompakt metrikus tér, ha X kompakt metrikus tér. Így $\{\widehat{\mu}_n\}$-nek van konvergens részsorozata. Legyen ν a $\{\widehat{\mu}_n\}$ sorozat egy torlódási pontja. Ekkor létezik egy olyan $m_1 < m_2 < \dots$ sorozat, hogy $\widehat{\mu}_{m_k} \Rightarrow \nu$, amint $k \to \infty$. A feltétel miatt bármilyen $r \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $K_r \subset X$ kompakt halmaz, hogy $\mu(K_r) \geq 1 - \frac{1}{r}$ minden $\mu \in \Gamma$-ra. Mivel K_r kompakt X-ben, így kompakt $\widehat{X}$-ban is, és mivel zárt Borel halmaz $\widehat{X}$-ban $\mu(K_r) = \widehat{\mu}(K_r)$ minden $\mu \in \Gamma$-ra. Azaz $\widehat{\mu}_{m_k}(K_r) \geq 1 - \frac{1}{r}$ minden $k \in \mathbb{N}$-re. Az $\mathcal{M}(X)$-beli gyenge konvergencia jólismert jellemzési tétele alapján, mivel $\widehat{\mu}_{m_k} \Rightarrow \nu$ kapjuk, hogy $\nu(K_r) \geq \limsup_{k\to\infty} \widehat{\mu}_{m_k}(K_r) \geq 1 - \frac{1}{r}$. Legyen $E := \bigcup_{r=1}^{\infty} K_r$, ekkor $E \subset X$ egy olyan Borel halmaz $\widehat{X}$-ban, melyre $\nu(E) = 1$, ugyanis ha $B_n := \bigcup_{r=1}^{n} K_r$, akkor $\{B_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ monoton növekedő rendszer, s a mérték folytonossági tétele alapján $\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) \geq \lim_{n\to\infty} \nu(K_r) \geq 1 - \frac{1}{r}$ minden $r \in \mathbb{N}$ esetén, így $r \to \infty$ esetén $\nu(E) \geq 1$ és mivel ν valószínűségi mérték kapjuk, hogy $\nu(E) = 1$. Halmos egy mértékelméleti eredménye ([2] 76. old) alapján létezik egy olyan μ mérték X-en, melyre $\widehat{\mu} = \nu$. Azaz $\widehat{\mu}_{m_k} \Rightarrow \widehat{\mu}$.

Legyen most C tetszőleges zárt részhalmaza X-nek. Ekkor létezik egy olyan D zárt részhalmaza $\widehat{X}$-nak, hogy $C = X \cap D$. Mivel $\widehat{\mu}_{m_k} \Rightarrow \widehat{\mu}$ $\widehat{X}$-ban $\limsup_{k\to\infty} \widehat{\mu}_{m_k}(D) \leq \widehat{\mu}(D)$, ami ugyanaz, mint $\limsup_{k\to\infty} \mu_{m_k}(C) \leq \mu(C)$. Így az $\mathcal{M}(X)$-beli gyenge konvergencia jellemzési tétele alapján $\mu_{m_k} \Rightarrow \mu$, azaz $\{\mu_n\}$-nek van konvergens részsorozata.

A következőkben a szükségességet bizonyítjuk be. Legyen X egy teljes szeparábilis metrikus tér és $\overline{\Gamma}$ kompakt részhalmaza X-beli mértékeknek (itt $\overline{\Gamma}$ Γ lezártját jelöli). Mivel X szeparábilis, minden $n \in \mathbb{N}$-re találhatunk olyan $S_{n1}, S_{n2}, \dots$ $\frac{1}{n}$ sugarú nyílt gömböket, hogy $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{n_j}$. Megmutatjuk, hogy minden $n = 1, 2, \dots$ természetes számra és tetszőleges $\eta > 0$-ra létezik olyan $k_n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{k_n} S_{nj}\Big) > 1 - \eta \quad \text{minden } \mu \in \Gamma\text{-ra.}$$

Ugyanis ellenkező esetben minden $n \in \mathbb{N}$-re létezik egy olyan $\mu_1, \mu_2, \dots \in \Gamma$ sorozat, $\eta_0 > 0$ szám, és egészeknek $m_1 < m_2 < \dots$ sorozata, hogy

$$\mu_k\Big(\bigcup_{j=1}^{m_k} S_{nj}\Big) \leq 1 - \eta_0 \quad \text{minden } k \in \mathbb{N}\text{-re.}$$

Mivel $\overline{\Gamma}$ kompakt feltehető, hogy $\mu_k \Rightarrow \mu$, ahol μ valószínűségi mérték X-en (áttérhetünk ugyanis a megfelelő részsorozatra.) Minden rögzített l-re

$$\bigcup_{j=1}^{m_l} S_{nj} \subset \bigcup_{j=1}^{m_k} S_{nj} \quad \text{minden } k > l\text{-re},$$

és így $\mu_k(\bigcup_{j=1}^{m_l} S_{nj}) \leq 1 - \eta_0$ minden $k > l$-re. Mivel $\mu_k \Rightarrow \mu$ és $\bigcup_{j=1}^{m_l} S_{nj}$ nyílt, az $\mathcal{M}(X)$-beli gyenge konvergencia jólismert jellemzési tétele miatt,

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{m_l} S_{nj}) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_k(\bigcup_{j=1}^{m_l} S_{nj}) \leq 1 - \eta_0.$$

Ha $l \to \infty$ úgy $\bigcup_{j=1}^{m_l} S_{nj}$ monoton növekedően tart X-hez, hiszen $m_l \to \infty$, így $\mu(X) \leq 1 - \eta_0$. Ez pedig ellentmondás, mert μ valószínűségi mérték.
Tekintsük egy olyan, az előbbiek alapján létező, $\{k_n\}$ sorozatot, melyre $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{k_n} S_{nj}\big) > 1 - \frac{\epsilon}{2^n}$ minden $\mu \in \Gamma$-ra. Legyen $F_n := \bigcup_{j=1}^{k_n} \overline{S_{nj}}$ és $K_\epsilon := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Mivel $\mu(F_n) > 1 - \frac{\epsilon}{2^n}$ minden $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \Gamma$ esetén kapjuk, hogy $\mu(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$ minden $\mu \in \Gamma$ esetén. Ugyanis, ha $C_n := \bigcap_{k=1}^{n} F_k$, akkor C_n monoton csökkenően tart K_ϵ-hoz, és mivel valószínűségi mértékekről van szó, a mérték folytonossági tétele miatt $\mu(K_\epsilon) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n)$. Felhasználva, hogy

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} F_k') \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(F_k') \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{2^k}$$

kapjuk, hogy

$$\mu(C_n) = 1 - \mu(\bigcup_{k=1}^{n} F_k') \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{2^k} \quad \text{minden } n \in \mathbb{N}\text{-re},$$

így $n \to \infty$ határátmenettel $\mu(K_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$.
Megmutatjuk, hogy K_ϵ kompakt. Mivel F_n zárt, K_ϵ is zárt és $K_\epsilon \subset F_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, ami alapján $K_\epsilon \subset \bigcup_{j=1}^{k_n} \overline{S_{nj}}$minden $n \in \mathbb{N}$-re. Azt mutatjuk meg, hogy K_ϵ sorozatkompakt, ami ekvivalens a kompaktsággal. Ehhez azt kell belátni, hogy tetszőleges K_ϵ-beli sorozatnak van konvergens részsorozata, s hogy a torlódási pont is K_ϵ-beli legyen. Ha a tekintett K_ϵ-beli sorozatban a különböző elemek száma véges, akkor triviálisan igaz az állítás. Legyen tehát $x_1, x_2, \ldots$ olyan sorozat, hogy a különböző elemek száma végtelen. Ekkor létezik olyan $n_1(\leq k_1)$, hogy $K_\epsilon \cap \overline{S_{1n_1}} =: K_1$ végtelen sok különböző tagját tartalmazza a sorozatnak, ellenkező esetben ellentmondásba kerülnénk azzal, hogy a sorozatbeli különböző elemek száma végtelen. Mivel $K_1 \subset \bigcup_{j=1}^{k_2} \overline{S_{2j}}$, létezik egy olyan $n_2(\leq k_2)$, hogy $K_1 \cap \overline{S_{2n_2}} =: K_2$ végtelen sok különböző tagját tartalmazza a sorozatnak. Ekkor $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ és $\operatorname{diam} K_n \leq \frac{2}{n}$, mivel K_n benne van egy $\frac{1}{n}$ sugarú zárt gömbben. Mivel X teljes metrikus tér igaz a Cantor-féle metszettétel, így létezik $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Mivel $K_n \subset K_\epsilon$ kapjuk, hogy $x_0 \in K_\epsilon$. A konstrukció folytán x_0 minden környezete végtelen sok tagját tartalmazza a sorozatnak, így K_ϵ kompakt.

$\square$

Megjegyzés. A bizonyítás alapján az alábbi kompaktsági kritérium is megfogalmazható. Legyen X egy teljes szeparábilis metrikus tér, Γ X-beli mértékek halmaza. Ekkor $\overline{\Gamma}$ akkor és csak akkor kompakt, ha bármilyen $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ esetén létezik egy olyan $S_{\epsilon,\delta}$ halmaz, mely véges sok $\delta > 0$ sugarú nyílt gömb uniója és $\mu(S_{\epsilon,\delta}) > 1 - \epsilon$ minden $\mu \in \Gamma$ esetén.

1.1. Definíció. A μ és ν valószínűségi mértékek konvolúcióján a

$$\mu * \nu(A) := \int \mu(Ax^{-1})\, d\nu(x), \quad A \in \mathcal{B}_X$$

módon értelmezett halmazfüggvényt értjük.

Megjegyzés. A Fubini-tétel felhasználásával

$$\mu * \nu(A) = \int \nu(x^{-1}A)\, d\mu(x),$$

ugyanis

$$\begin{aligned}\mu * \nu(A) &:= \int \mu(Ax^{-1})\, d\nu(x) = \int \left(\int \mathrm{I}_{\{Ax^{-1}\}}(y)\, d\mu(y) \right) d\nu(x) = \\ &= \int \left(\int \mathrm{I}_{\{y^{-1}A\}}(x)\, d\nu(x) \right) d\mu(y) = \int \nu(y^{-1}A)\, d\mu(y).\end{aligned}$$

Az is fennáll, hogy

$$\mu * \nu(A) = \int \int \mathrm{I}_A(yx)\, d\mu(y) d\nu(x).$$

Tetszőleges $x \in X$ esetén jelölje szintén x az x pontba koncentrálódó Dirac-mértéket. Ezen jelöléseket használva, $\mu * x$ a μ mértéknek x általi jobbeltoltja és $(\mu * x)(A) = \mu(Ax^{-1})$ bármilyen A Borel-halmazra.

1.1. Lemma. Legyenek Y és Z szeparábilis metrikus terek. Tegyük fel, hogy $\mu_n \in \mathcal{M}(Y)$, $\nu_n \in \mathcal{M}(Z)$ és $\mu_n \Rightarrow \mu$, $\nu_n \Rightarrow \nu$. Ekkor az $Y \times Z$ térben a $\mu_n \times \nu_n$ szorzatmértékekre $\mu_n \times \nu_n \Rightarrow \mu \times \nu$, amint $n \to \infty$.

Bizonyítás. Felhasználva Uryshon jólismert eredményét, miszerint egy X szeparábilis metrikus tér topológiailag beágyazható $[0,1]^{\mathbb{N}}$-be, létezik rajta egy, az eredtivel ekvivalens, olyan metrika, mellyel X teljesen korlátos. Tudva azt is, hogy tetszőleges metrikus térnek van teljes metrikus burka, és ez izometria elejéig egyértelműen meghatározott, ha $\bar{Y}$, ill. $\bar{Z}$ jelöli Y, ill. Z teljes metrikus burkát, akkor ezek kompaktak (hiszen metrikus tér teljes és teljesen korlátos részhalmaza kompakt, s az is fennáll, hogy ha X teljesen korlátos, akkor X teljes metrikus burka is az). Az $Y \times Z$ szorzattér teljes metrikus burka pedig $\bar{Y} \times \bar{Z}$ lesz.

Belátjuk, hogy az $U(Y)$, $U(Z)$, ill. $U(Y \times Z)$ Banach-terek izomorfak a $C(\bar{Y})$, $C(\bar{Z})$, ill. $C(\bar{Y} \times \bar{Z})$ Banach-terekkel. Tekintsünk ehhez egy X teljesen korlátos metrikus teret, így bármilyen $r > 0$-hoz létezik r-sugarú gömböknek olyan véges rendszere, mely lefedi X-et. Jelölje $\bar{X}$ X teljes metrikus burkát, a korábbiak alapján ez kompakt, és X sűrű $\bar{X}$-ben. Bármilyen $g \in U(X)$ függvény egyértelműen kiterjeszthető egy $\widehat{g} \in C(\bar{X})$ függvénnyé, továbbá $\sup_{x \in X} |g(x)| = \sup_{x \in \bar{X}} |\widehat{g}(x)|$, azaz az $U(X)$ és $C(\bar{X})$ Banach-terek izomorfak. Mivel $\bar{X}$ kompakt $C(\bar{X})$ szeparábilis. Így $U(X)$ is szeparábilis. (Azt is beláttuk így, hogy ha X teljesen korlátos metrikus tér, akkor $U(X)$ szeparábilis Banach-tér a szuprémum normával.)

Jelölje $\mathcal{A}_0$ az $Y \times Z$ szorzatéren értelmezett $f(y)g(z)$, $f \in U(Y)$, $g \in U(Z)$ alakú függvények által generált algebrát. Mivel $\bar{Y} \times \bar{Z}$ kompakt, $\mathcal{A}_0$ elválasztja $Y \times Z$ pontjait és tartalmazza az azonosan egy függvényt, valamint $C(\bar{Y} \times \bar{Z}) \simeq U(Y \times Z))$ a Stone-Weierstrass tétel felhasználásával $\mathcal{A}_0$ sűrű $U(Y \times Z)$-ben. Mivel $\mu_n \Rightarrow \mu$, $\nu_n \Rightarrow \nu$ kapjuk, hogy bármilyen $f \in \mathcal{A}_0$ függvényre $\int f \, d\mu_n \times \nu_n \to \int f \, d\mu \times \nu$. Így bármilyen $f \in U(Y \times Z)$ függvényre $\int f \, d\mu_n \times \nu_n \to \int f \, d\mu \times \nu$, ami pedig azzal ekvivalens, hogy $\mu_n \times \nu_n \Rightarrow \mu \times \nu$.

□

1.1. Tétel. Legyen X egy szeparábilis metrikus csoport. Ekkor $\mathcal{M}(X)$ topológikus félcsoport a $(\mu, \nu) \mapsto \mu * \nu$ művelettel.

Bizonyítás. A $*$ operátor tranzitív, hiszen a Fubini tétel alapján minden A Borel-halmazra

$$((\mu * \nu) * \kappa)(A) = \int (\mu * \nu)(Ax^{-1}) \, d\kappa(x) = \int \left(\int \mu(Ax^{-1}y^{-1}) \, d\nu(y) \right) d\kappa(x),$$

illetve

$$(\mu * (\nu * \kappa))(A) = \int \mu(A(xy)^{-1}) \, d\nu(x) d\kappa(y) = \int \int \mu(Ay^{-1}x^{-1}) \, d\nu(x) d\kappa(y).$$

(Itt felhasználtuk, hogy $\mu * \nu(A) = \int \int \mathrm{I}_A(yx) \, d\mu(y) d\nu(x)$.) Egységelemes félcsoport $\mathcal{M}(X)$, mert $\mu * e = e * \mu = \mu$. Azt kell még ellenőrizni, hogy a $*$ művelet folytonos a gyenge topológiában. A konvolúció definíciójából következik, hogy minden $f \in C(X)$ folytonos függvényre

$$\int f \, d\mu * \nu = \int f(xy) \, d\mu(x) d\nu(y) = \int f(xy) \, d\mu \times \nu.$$

Ha $f \in C(X)$, akkor $f(xy) \in C(X \times X)$. Így az 1.1. lemma felhasználásával, ha $\mu_n \Rightarrow \mu$ és $\nu_n \Rightarrow \nu$, akkor $\mu_n \times \nu_n \Rightarrow \mu \times \nu$. Így

$$\int f \, d\mu_n * \nu_n = \int f(xy) \, d\mu_n \times \nu_n \to \int f(xy) \, d\mu \times \nu = \int f \, d\mu * \nu.$$

Tehát $\mu_n * \nu_n \Rightarrow \mu * \nu$, azaz a $*$ művelet folytonos.

□

II. 2. Shift kompaktság $\mathcal{M}(\mathbf{X})$-ben.

A független valószínűségi változók összegeivel foglalkozó elméletek gyakran visszatérő problémája, hogy valószínűségi mértékek egy sorozata nem konvergál semmilyen határértékhez sem, alkalmasan centrálva viszont már igen. Távolabbi célunk ezen jelenség vizsgálata csoportokon értelmezett valószínűségi mértékek konvolúciójára vonatkozóan.

2.1. Definíció. Egy $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}(X)$ halmazt jobb (ill. bal) shift kompaktnak nevezünk, ha minden $\mu_n \in \mathcal{K}\,(n = 1, 2, \ldots)$ sorozathoz létezik egy olyan $\{\nu_n\}$ sorozat, hogy
(1) ν_n valamilyen jobb (ill. bal) eltoltja μ_n-nek és
(2) ν_n-nek van konvergens részsorozata (a gyenge topológiában).

Ezen fejezet fő eredményei az alábbi két tétel, mely a vizsgált topologikus félcsoportok fontos struktúrális tulajdonságát fogalmazza meg a shift kompaktság fogalmára alapozva.

2.1. Tétel. Legyen X egy teljes szeparábilis metrikus csoport és legyenek $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, $\{\nu_n\}$ X-en értelmezett valószínűségi mértékek olyan sorozata, melyre $\lambda_n = \mu_n * \nu_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ha a $\{\lambda_n\}$ és $\{\mu_n\}$ sorozatok feltételesen kompaktak, akkor a $\{\nu_n\}$ sorozat is feltételesen kompakt. [feltételes kompaktságon itt relatív kompaktságot értünk.]

Bizonyítás. Mivel $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ feltételesen kompaktak a Prohorov tétel alapján bármilyen $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan K_ϵ kompakt halmaz, hogy $\lambda_n(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$, $\mu_n(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Így

$$1 - \epsilon < \lambda_n(K_\epsilon) = \int \nu_n(x^{-1}K_\epsilon)\, d\mu_n(x) = \int_{K_\epsilon} \nu_n(x^{-1}K_\epsilon)\, d\mu_n(x) + \int_{X \setminus K_\epsilon} \nu_n(x^{-1}K_\epsilon)\, d\mu_n(x)$$

$$\leq \int_{K_\epsilon} \nu_n(x^{-1}K_\epsilon)\, d\mu_n(x) + \mu_n(X \setminus K_\epsilon) \leq \int_{K_\epsilon} \nu_n(x^{-1}K_\epsilon)\, d\mu_n(x) + \epsilon,$$

azaz $\int_{K_\epsilon} \nu_n(x^{-1}K_\epsilon)\, d\mu_n(x) > 1 - 2\epsilon$. Ezt felhasználva létezik egy olyan $x_n \in K_\epsilon$ pont, hogy $\nu_n(x_n^{-1}K_\epsilon) > 1 - 3\epsilon$, ahol $\epsilon < \frac{1}{3}$. Ugyanis ha minden $x \in K_\epsilon$-ra $\nu_n(x_n^{-1}K_\epsilon) \leq 1 - 3\epsilon$, akkor a fentiek miatt $1 - 3\epsilon > 1 - 2\epsilon$ lenne, ami ellentmondás. Mivel $x_n^{-1}K_\epsilon \subset K_\epsilon^{-1}K_\epsilon$, $\nu_n(K_\epsilon^{-1}K_\epsilon) > 1-3\epsilon$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Felhasználva, hogy $K_\epsilon^{-1}K_\epsilon$ kompakt és ϵ tetszőleges, újra a Prohorov tétel alapján kapjuk, hogy $\{\nu_n\}$ feltételesen kompakt.

$\square$

2.2. Tétel. Legyen X egy teljes, szeparábilis metrikus csoport és legyenek $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, $\{\nu_n\}$ X-en értelmezett valószínűségi mértékek olyan sorozata, melyre $\lambda_n = \mu_n * \nu_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ha a $\{\lambda_n\}$ sorozat feltételesen kompakt, akkor a $\{\mu_n\}$ sorozat jobb shift kompakt, a $\{\nu_n\}$ sorozat pedig bal shift kompakt.

Bizonyítás. Rögzítsük pozitív számoknak egy $\{\epsilon_n\}$ sorozatát, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$. A Prohorov tétel felhasználásával létezik kompakt halmazoknak olyan $\{K_r\,:\, r \in \mathbb{N}\}$ sorozata, hogy $\lambda_n(K_r) > 1 - \epsilon_r$, $r = 1, 2, \ldots$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.
Válasszunk egy olyan pozitív, 0-hoz tartó η_r sorozatot, melyre $\sum_{r=1}^{\infty} \epsilon_r \eta_r^{-1} \leq \frac{1}{2}$. Ilyen létezik, hiszen például $\epsilon_r = \frac{1}{r^2}$, $\eta_r = \frac{c}{r^\delta}$, $0 < \delta < 1$, és alkalmas c választásával $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \frac{r^\delta}{c} =$

$\frac{1}{c}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^{2-\delta}} < \infty$, mert $2 > 2-\delta > 1$. Legyen

$$E_{nr} := \{x \,:\, \mu_n(K_r x^{-1}) > 1-\eta_r\}, \quad F_n := \bigcap_{r=1}^{\infty} E_{nr}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} 1-\epsilon_r \le \lambda_n(K_r) &= \int_{E_{nr}} \mu_n(K_r x^{-1})\, d\nu_n(x) + \int_{X\setminus E_{nr}} \mu_n(K_r x^{-1})\, d\nu_n(x) \\ &\le \nu_n(E_{nr}) + (1-\eta_r)\nu_n(X\setminus E_{nr}). \end{aligned}$$

Ezért $\nu_n(X\setminus E_{nr}) \le \epsilon_r\eta_r^{-1}$, s így $\nu_n(X\setminus F_n) \le \sum_{r=1}^{\infty}\epsilon_r\eta_r^{-1} \le \frac{1}{2}$. Így $F_n \ne \emptyset$, s legyen x_n tetszőleges eleme F_n-nek. Ekkor F_n definíciója alapján bármilyen $x_n \in F_n$-re $\mu_n(K_r x_n^{-1}) > 1-\eta_r$ minden $n,\, r \in \mathbb{N}$-re. Bevezetve az $\alpha_n = \mu_n * x_n$, $\beta_n = x_n^{-1} * \nu_n$ jelöléseket kapjuk, hogy $\lambda_n = \alpha_n * \beta_n$, illetve

$$\alpha_n(K_r) = \mu_n(K_r x_n^{-1}) \ge 1-\eta_r$$

minden $n,\, r \in \mathbb{N}$-re. Mivel $\eta_r \to 0$, a Prohorov tétel felhasználásával kapjuk, hogy $\{\alpha_n\}$ feltételesen kompakt. Mivel $\{\lambda_n\}$, $\{\alpha_n\}$ feltételesen kompaktak, a 2.1. Tétel alapján kapjuk, hogy $\{\beta_n\}$ is feltételesen kompakt. Így $\{\mu_n\}$ jobb shift kompakt, mert a relatív kompaktság egybesik a szekvenciális kompaktsággal metrikus terekben. Hasonlóan $\{\nu_n\}$ bal shift kompakt.

□

II. 3. Idempotens mértékek.

Megjegyzés. A metrikus csoport definíciójában nincs összekötve a csoportművelet és a metrika fogalma, viszont igaz a következő. Ha X egy szeparábilis metrikus csoport, akkor létezik az eredeti metrikával ekvivalens bal (ill. jobb) invariáns metrika rajta, azaz létezik olyan d metrika, melyre

$$d(x,y) = d(zx,zy), \quad (\text{ill. } d(x,y) = d(xz,yz)) \quad \text{minden } x,y,z \in X \text{ esetén.}$$

3.1. Definíció. Egy $\mu \in \mathcal{M}(X)$ valószínűségi mértéket idempotensnek nevezünk, ha $\mu * \mu = \mu$.

Ezen fejezet célja megmutatni, hogy egy teljes, szeparábilis metrikus csoporton az idempotens mértékek pontosan a kompakt részcsoportok normalizált Haar mértékei. Egy Z lokálisan kompakt metrikus csoport esetén a λ balinvariáns Haar mérték konstans szorzó elejéig egyértelműen meghatározott a $\lambda(zA) = \lambda(A)$, $A \in \mathcal{B}_Z$, $z \in Z$ összefüggés által. Amennyiben Z kompakt vagy Ábel, úgy λ jobbinvariáns is, azaz $\lambda(Az) = \lambda(A)$, $A \in \mathcal{B}_Z$, $z \in Z$ esetén.

3.1. Lemma. Legyen X egy szeparábilis metrikus csoport és $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Ekkor bármilyen $K \subset X$ kompakt halmaz esetén létezik egy olyan $x_0 \in X$ pont, hogy

$$\mu(Kx_0) = \sup_{x \in X} \mu(Kx).$$

Bizonyítás. Legyen $\delta_K = \sup_{x\in X} \mu(Kx)$. Ha $\delta_K = 0$, akkor a lemma állítása automatikusan teljesül bármilyen $x_0 \in X$-re.
Tegyük fel, hogy $\delta_K > 0$. Legyen $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy olyan X-beli sorozat, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mu(Kx_n) = \delta_K.$$

Először megmutatjuk, hogy $\{x_n\}$-nek van konvergens részsorozata. Tegyük fel, hogy nem így van. Feltehető, hogy $\mu(Kx_n) \geq \frac{1}{2}\delta_K$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ha $Kx_1 \cap Kx_n \neq \emptyset$ minden $n \geq 2$ esetén, akkor $x_n \in K^{-1}Kx_1$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, ugyanis ha $z \in Kx_1 \cap Kx_n$ $\forall\, n \geq 2$ esetén, úgy $z = a_1x_1 = a_2x_n$, ahol $a_1, a_2 \in K$, azaz $x_n = a_2^{-1}a_1x_1 \in K^{-1}Kx_1$. Mivel K kompakt, így $K^{-1}Kx_1$ is kompakt, így $\{x_n\}$-nek lenne konvergens részsorozazta, és mivel ennek az ellenkezőjét tételeztük fel, létezik olyan $n_1 \in \mathbb{N}$, hogy $Kx_1 \cap Kx_{n_1} = \emptyset$. Legyen $K_1 := Kx_1 \cup Kx_{n_1}$. Ha $K_1 \cap Kx_n \neq \emptyset$ bármilyen $n > n_1$ esetén, akkor $x_n \in K^{-1}K_1$ minden $n > n_1$-re és az előzőekhez hasonlóan, K és K_1 kompaktsága miatt $\{x_n\}$-nek lenne konvergens részsorozata. Ezért létezik egy olyan $n_2 \in \mathbb{N}$, hogy $n_2 > n_1$ és $K_1 \cap Kx_{n_2} = \emptyset$. Ezt az eljárást ismételve kapjuk, hogy létezik egy olyan $\{n_j\}$ sorozat, hogy $Kx_{n_1}, Kx_{n_2}, \ldots$ páronként diszjunktak. Felhasználva, hogy $\mu(Kx_{n_j}) \geq \frac{1}{2}\delta_K$, $j = 1, 2, \ldots$ ellentmondáshoz jutunk, hiszen μ valószínűségi mérték, most pedig azt kaptuk, hogy $\mu(X) = \infty$.

Létezik tehát egy olyan $\{x_n\}$ konvergens sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} \mu(Kx_n) = \delta_K$. Legyen x_0 $\{x_n\}$ határértéke. Felhasználva, hogy ha X egy metrikus tér, akkor X homeomorf a $D := \{p_x : x \in X\}$ halmazzal, ahol tetszőleges $x \in X$ esetén p_x az x pontba koncetrálódó mértéket jelöli, valamint az 1.1. lemmát kapjuk, hogy $p_{x_n} \Rightarrow p_{x_0}$, ill. $\mu * x_n^{-1} \Rightarrow \mu * x_0^{-1}$ (itt a legutolsó lépésben kihasználtuk az eltolásinvariáns metrika létezését is). Mivel $\delta_K = \sup_{x\in X} \mu(Kx)$ adódik, hogy $\delta_K \geq \mu(Kx_0) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(Kx_n) = \delta_K$, hiszen Kx_n zárt halmaz, mivel K kompakt. Így $\mu(Kx_0) = \delta_K$.

□

3.1. Tétel. Legyen X egy teljes szeparábilis metrikus csoport, μ egy idempotens mérték X-en. Ekkor létezik egy olyan $S \subset X$ kompakt részcsoport, hogy μ a normalizált Haar-mérték S-en.

Bizonyítás. Először azt bizonyítjuk be, hogy μ tartója kompakt. A μ mérték tartója létezik, mert ha X egy szeparábilis metrikus tér, μ pedig egy mérték X-en, akkor egyértelműen létezik egy C_μ zárt halmaz, melyre (i) $\mu(C_\mu) = 1$, (ii) bármilyen D zárt halmazra, melyre $\mu(D) = 1$ kapjuk, hogy $C_\mu \subset D$. Fennáll továbbá az is, hogy

$$C_\mu = \{x : \mu(U) > 0 \quad \text{minden } x\text{-et tartalmazó } U \text{ nyílt halmazra}\}.$$

Felhasználva, hogy teljes szeparábilis metrikus téren minden mérték feszes, létezik egy olyan K kompakt részhalmaza X-nek , melyre $\mu(K) > 0$. Legyen $\delta_K = \sup_{x\in X} \mu(Kx)$, ekkor $\delta_K > 0$, mert $\mu(K) > 0$. A 3.1. Lemma alapján létezik egy olyan $x_0 \in X$ pont, hogy $\mu(Kx_0) = \delta_K$. Legyen $K_0 := Kx_0$. Ekkor $\delta_K = \mu(K_0) = (\mu * \mu)(K_0) = \int \mu(K_0x^{-1})d\mu(x)$. Mivel az integrandus kisebb egyenlő, mint δ_K,

$$\mu(K_0x^{-1}) = \delta_K \quad \mu \text{ m. m. } x\text{-re},$$

ugyanis tegyük fel, hogy azon x-ek halmazának mértéke, melyre $\mu(K_0x^{-1}) \neq \delta_K$ nem nulla μ szerint, ezen x-ek halmazát A-val jelölve kapjuk, hogy

$$\delta_K = \int_A \mu(K_0x^{-1})\, d\mu(x) + \int_{X\setminus A} \mu(K_0x^{-1})\, d\mu(x) = \int_A \mu(K_0x^{-1})\, d\mu(x) + \delta_K \mu(X \setminus A).$$

Így

$$\int_A \delta_K \, d\mu(x) = \delta_K\mu(A) = \int_A \mu(K_0x^{-1})\, d\mu(x), \quad \text{azaz} \quad \int_A (\delta_K - \mu(K_0x^{-1}))\, d\mu(x) = 0.$$

Mivel az A halmazon $\delta_K - \mu(K_0x^{-1}) > 0$, az alábbi mértékelméleti tétel alapján kapjuk, hogy $\mu(A) = 0$, ami ellentmondás. Az idevonatkozó mértékelméleti tétel a következő: ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$, $f : X \to]0, \infty[$ mérhető leképezés, és fennáll, hogy $\int_A f \, d\mu = 0$, akkor $\mu(A) = 0$.

Ha $\mu(K_0x_n^{-1}) = \delta_K$ és $x_n \to x$, amint $n \to \infty$, úgy $p_{x_n} \Rightarrow p_x$ miatt $\mu * x_n \Rightarrow \mu * x$; felhasználva, hogy $\mu(K_0x_n^{-1}) = (\mu * x_n)(K_0)$ és, hogy K_0 kompakt a gyenge konvergencia jellemzései tétele miatt $\limsup_{n\to\infty} \mu(K_0x_n^{-1}) \leq \mu(K_0x^{-1})$, így $\delta_K \leq \mu(K_0x^{-1})$. Mivel $\delta_K = \sup_{y\in X} \mu(Ky)$ kapjuk, hogy $\mu(K_0x^{-1}) = \delta_K$. Így $\mu(K_0x^{-1}) = \delta_K$ minden $x \in S$-re, ahol S μ tartója. Hiszen minden μ szerint 1-mértékű halmaz sűrű a μ mérték S tartójában. Ezt a tartó definíciójának ekvivalens átfogalmazása segítségével láthatjuk be. Tegyük fel, hogy $\mu(A) = 1$ és A nem sűrű S-ben, ekkor létezik olyan $\epsilon > 0$ és $x_0 \in S$, hogy bármilyen $x \in A$ esetén $d(x, x_0) \geq \epsilon$. Így $x_0 \in S$-nek $\frac{\epsilon}{2}$ sugarú nyílt gömbkörnyezetében, G-ben nincs A-beli pont, viszont a tartó definíciója miatt $\mu(G) > 0$, ez azonban ellentmondás, mert így $\mu(A) < 1$ lenne. Jelen esetben azon x-ek halmazának μ szerint mértéke, melyekre $\mu(K_0x^{-1}) \neq \delta_K$ nulla, így ennek komplementere 1 mértékű, s az előbbiek alapján ez a halmaz sűrű S-ben és minden pontjára $\mu(K_0x^{-1}) = \delta_K$. Felhasználva a határátmenetre vonatkozó előbbi gondolatmenetet kapjuk, hogy $\mu(K_0x^{-1}) = \delta_K$ minden $x \in S$-re.
Mivel a kompaktság ekvivalens a szekvenciális kompaktsággal, ha S nem lenne kompakt, akkor létezne olyan $\{x_n\}$ sorozat, melyre $\mu(K_0x_n^{-1}) = \delta_K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re és nincs konvergens részsorozata. A 3.1. Lemma bizonyításához hasonlóan, mivel $\lim_{n\to\infty} \mu(K_0x_n^{-1}) = \delta_K$ következne, hogy $\{x_n\}$-nek van konvergens részsorozata, ami ellentmondás. Így S kompakt.

Megmutatjuk, hogy a μ mérték S tartója csoport. Felhasználva, hogy $\mu * \mu = \mu$

$$\int \mu(Sx^{-1})\, d\mu(x) = \mu(S) = 1.$$

Mivel bármilyen A Borel halmazra $\mu(A) \leq 1$, a korábbiakhoz hasonlóan a fenti egyenlőség alapján $\mu(Sx^{-1}) = 1$ μ m. m. x-re. Mivel S zárt, ha $x_n \to x$, amint $n \to \infty$ és $\mu(Sx_n^{-1}) = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, akkor $\mu(Sx^{-1}) = 1$. Így $\mu(Sx^{-1}) = 1$ minden $x \in S$-re.

Mivel S a legszűkebb, μ szerint 1 mértékű zárt részhalmaz kapjuk, hogy $S \subset Sx^{-1}$ minden $x \in S$-re. Így $S \cdot S \subset S$, azaz S félcsoport.
Amennyiben $x \in S$, úgy $x^n \in S$ minden $n = 1, 2, \ldots$ esetén. Ha e nem torlódási pontja az $\{x^n\}$ sorozatnak, akkor ez a sorozat diszkrét lenne, (azaz izolált pontokból állna.) Ugyanis, ha e nem torlódási pont, akkor létezik olyan $\epsilon > 0$, hogy bármilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(x^n, e) > \epsilon$. (Itt az eredeti metrikával olyan ekvivalens metrikát veszünk, mely jobbinvariáns, ilyen a tételt megelőző megjegyzés alapján létezik.) Ekkor $d(x^{n+k}, x^n) = d(x^{-n}x^{n+k}, x^{-n}x^n) = d(x^k, e) > \epsilon$, így a sorozat bármely két tagjának a távolsága nagyobb, mint ϵ. Azonban mivel S kompakt, lenne torlódási pontja az $\{x_n\}$ sorozatnak, ami ellentmond annak, hogy a sorozat diszkrét. Tehát e torlódási pont, így létezik olyan $\{x^{n_k}\}$ részsorozat, melyre $d(x^{n_k}, e) \to 0$, azaz $d(x^{n_k - 1}, x^{-1}) \to 0$, ami alapján x^{-1} is torlódási pont. Így $S = S^{-1}$, azaz S csoport. A μ mérték tartója tehát kompakt részcsoport.

Legyen most K tetszőleges zárt részhalmaza S-nek. Mivel S kompakt, ezért korlátos és zárt is, s felhasználva, hogy teljes metrikus tér zárt részhalmaza is teljes, kapjuk, hogy S teljes szeparábilis metrikus csoport. Mivel S kompakt és K zárt, felhasználva, hogy kompakt metrikus tér zárt részhalmaza kompakt, a 3.1. lemma alapján létezik olyan $x_0 \in S$ pont, hogy $\mu(Kx_0) = \sup_{x \in S} \mu(Kx) = \delta_K$. Ha $K_0 := Kx_0$, akkor $\mu = \mu * \mu$ alapján

$$\delta_K = \int_S \mu(K_0 x^{-1})\, d\mu(x),$$

hiszen $\mu(S) = 1$. A korábbiakhoz hasonlóan $\mu(K_0x^{-1}) = \delta_K$ μ m. m. x-re, így $\mu(K_0x^{-1}) = \delta_K$ minden $x \in S$-re. Így minden $K \subset S$ kompakt halmazra $\mu(Kx) = \mu(K)$ bármilyen $x \in S$ esetén, hiszen $\mu(Kx) = \mu(K_0x_0^{-1}x) = \mu(Kx_0)$, azaz $\mu(Kx)$, mint x-nek függvénye konstans S-en, így $x = e$ választásával kapjuk a fenti egyenlőséget. Felhasználva, hogy a μ mérték reguláris (ugyanis ha X metrikus tér, akkor rajta minden mérték reguláris) kapjuk, hogy $\mu * x = \mu$ minden $X \in S$-re, azaz μ jobbinvariáns. Jelen esetben, mivel S kompakt a jobb-, ill. balinvariáns Haar-mérték egybeesik S-en. Emlékeztetőül egy X metrikus téren értelmezett μ mértéket akkor nevezünk regulárisnak, ha minden Borel halmaz μ-reguláris. Egy $A \in \mathcal{B}_X$ Borel halmazt pedig akkor nevezünk μ-regulárisnak, ha

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) \,:\, C \subset A,\ \ C \text{ zárt}\} = \inf\{\mu(U) \,:\, A \subset U,\ \ U \text{ nyílt}\}.$$

Ennek alapján az előbb azt használtuk fel, hogy egy metrikus téren értelmezett mértéket egyértelműen meghatározza a zárt halmazokon felvett értékei (ez nyíltra is igaz). Így μ a normalizált Haar mértéke a S halmaznak.

$\square$

Szükségünk lesz a későbbiekben a faktor fogalmára.

3.2. Definíció. Egy λ mértéket felbonthatónak nevezünk, ha létezik két olyan nemdegenerált μ és ν mérték, melyekre $\lambda = \mu * \nu$. Ellenkező esetben λ-t felbonthatatlannak nevezzük.

3.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy nemdegenerált α mérték a β mérték faktora, ha létezik egy olyan γ mérték, melyre vagy $\beta = \alpha * \gamma$ vagy $\beta = \gamma * \alpha$. Jelölés: $\alpha \prec \beta$.

II. 4. Kommutatív metrikus csoportok esete.

Azt a speciális esetet fogjuk vizsgálni, mikor X egy teljes szeparábilis kommutatív metrikus csoport. Tetszőleges két A, $B \subset X$ részhalmaz esetén jelölje $A + B := \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$, ahol $+$ jelöli a csoportbeli műveletet, ill. $-A := \{-x : x \in A\}$, ahol $-$ jelöli a csoportbeli inverzet.

Mivel X kommutatív, $\mathcal{M}(X)$-ben a $*$ konvolúció operátor kommutatív, valamint a bal- és jobb shift kompaktság fogalma egybeesik.

4.1. Definíció. Az α és β valószínűségi mértékeket shift ekvivalenseknek nevezzük, ha egyik a másiknak valamilyen shiftje, azaz létezik egy olyan $x_0 \in X$ pont, hogy $\alpha = \beta * x_0$. Jelölés: $\alpha \sim \beta$.

Tetszőleges μ valószínűségi mérték esetén jelölje $F(\mu)$ μ összes faktoraiból álló halmazt. Ha $\mathcal{K}$ X-en értelmezett valószínűségi mértékek halmaza, jelölje $F(\mathcal{K})$ $\mathcal{K}$ elemeinek faktoraiból álló halmazt. Mint korábban $\alpha \prec \beta$-t írunk, ha α β faktora. $\widetilde{\mathcal{M}}(X)$-el jelöljük az $\mathcal{M}(X)$-beli shift ekvivalencia osztályok összességét. Amennyiben α valószínűségi mérték, úgy $\widetilde{\alpha}$ jelöli azt az ekvivalencia osztályt, melyhez α tartozik. Felruházva $\widetilde{\mathcal{M}}(X)$-et a faktortopológiával topológikus félcsoporttá válik, és az $\alpha \mapsto \widetilde{\alpha}$ leképezés folytonos homomorfizmus $\mathcal{M}(X)$-ről $\widetilde{\mathcal{M}}(X)$-re.

4.2. Definíció. Egy $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}(X)$ részhalmazt shift kompaktnak nevezünk, ha $\widetilde{\mathcal{M}}(X)$-beli $\widetilde{\mathcal{K}}$ képe feltételesen kompakt.

A következő tétel a 2.2. Tétel közvetlen következménye.

4.1. Tétel. Legyen X egy teljes szeparábilis metrikus Ábel-csoport és $\mathcal{K}$ shift kompakt részhalmaza $\mathcal{M}(X)$-nek. Ekkor $F(\mathcal{K})$ is shift kompakt.

Ha μ valószínűségi mérték, akkor $\overline{\mu}$-vel jelöljük a $\overline{\mu}(A) = \mu(-A)$ minden A Borel halmazra alapján definiált valószínűségi mértéket. A $\mu * \overline{\mu}$ mértéket pedig $|\mu|^2$-el jelöljük. Ha $\mu = \overline{\mu}$, akkor μ-t szimmetrikusnak nevezzük.

4.1. Következmény. Egy $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}(X)$ részhalmaz akkor és csak akkor shift kompakt, ha a $|\mathcal{K}|^2$ halmaz, mely a $|\mu|^2 = \alpha \in \mathcal{M}(X)$ alakú elemekből áll, ahol $\mu \in \mathcal{K}$, feltételesen kompakt.

4.2. Következmény. Bármilyen μ valószínűségi mértékre $F(\mu)$ shift kompakt.

Könnyen adódik, hogy az $\mathcal{M}(X)$-beli $\prec$ rendezés természetes módon átvihető $\widetilde{\mathcal{M}}(X)$-beli rendezéssé. Megmutatjuk, hogy $\prec$ lineáris rendezés $\widetilde{\mathcal{M}}(X)$-ben.

4.2. Tétel. Legyen X egy teljes szeparábilis metrikus Ábel-csoport. Ha α és β valószínűségi mértékek X-en, hogy $\alpha \prec \beta$ és $\beta \prec \alpha$, akkor α és β shift ekvivalensek (azaz $\widetilde{\mathcal{M}}(X)$-ben egyenlőek).

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \beta * \gamma$, $\beta = \alpha * \delta$ és $\eta = \gamma * \delta$. Ekkor

$$\begin{aligned} \alpha =& \alpha * \delta * \gamma = \alpha * \eta = \alpha * \eta^n \\ \beta =& \beta * \gamma * \delta = \beta * \eta = \beta * \eta^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

ahol η^n η n-szeres konvolúcióját jelöli. Ezen egyenleteket $r = 1, 2, \ldots, n$-ig összeadva és osztva n-el kapjuk, hogy

$$\alpha = \alpha * (\sum_{r=1}^{n} \frac{\eta^r}{n}), \qquad \beta = \beta * (\sum_{r=1}^{n} \frac{\eta^r}{n}), \quad \text{minden } n \in \mathbb{N}\text{-re.} \tag{5.1}$$

(Itt $\sum_{r=1}^{n} \frac{\eta^r}{n}$ valószínűségi mérték lesz.)
A 2.1. Tétel alapján a $\{\sum_{r=1}^{n} \frac{\eta^r}{n}\}$ sorozat feltételesen kompakt, s egyszerű számolás mutatja, hogy ezen sorozat bármely Θ torlódási pontjára $\Theta = \Theta * \eta = \Theta * \Theta$. Így a 3.1. Tétel alapján Θ a normalizált Haar mértéke valamilyen kompakt részcsoportnak. Továbbá, mivel $\Theta = \Theta * \eta$, $\eta = \gamma * \delta$ kapjuk, hogy $\gamma \prec \Theta$ és $\delta \prec \Theta$. Így a Haar mérték tulajdonsága miatt $\gamma * \Theta \sim \Theta$ és $\delta * \Theta \sim \Theta$, speciálisan ha a Θ Haar mérték tartója az egész csoport, akkor $\gamma * \Theta = \Theta$, $\delta * \Theta = \Theta$. Ugyanis

$$\begin{aligned} (\gamma * \Theta)(A) = \int \gamma(Ax^{-1})\, d\Theta(x) = \int \Theta(x^{-1}A)\, d\gamma(x) = \\ = \int \Theta(A)\, d\gamma(x) = \Theta(A). \end{aligned}$$

Felhaszanálva (5.1.)-et és Θ definícióját, $\alpha = \alpha * \Theta \sim \alpha * \delta * \Theta = \beta * \Theta = \beta$. Így $\alpha \sim \beta$.
□

4.3. Tétel. Legyen X egy teljes szeparábilis metrikus Ábel- csoport. Tegyük fel, hogy $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \cdots$ és $\alpha_n \prec \mu$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ekkor létezik egy olyan $\{\alpha'_n\}$ sorozat, hogy α'_n α_n shiftje minden $n \in \mathbb{N}$-re, és $\{\alpha'_n\}$ gyengén konvergens.

Bizonyítás. Mivel $\alpha_n \prec \mu$ minden $n \in \mathbb{N}$-re kapjuk, hogy $\alpha_n \in F(\mu)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, így a 4.2. Következmény alapján létezik egy olyan X-beli $\{x_n\}$ pontsorozat, hogy az $\{\alpha_n * x_n\}$ kompakt (ez a 2.1. Definíció alapján világos). Legyen β és γ két tetszőleges torlódási pontja az $\{\alpha_n * x_n\}$ sorozatnak. Mivel α_n növekedő a $\prec$ rendezés szerint, a faktor definíciója alapján kapjuk, hogy $\alpha_n * x_n$ szintén növekedő. Ugyanis ha a tétel feltételeit figyelembe véve bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \nu_1 := \alpha_1,\ \alpha_2 := \nu_1 * \nu_2,\ \alpha_3 := \nu_1 * \nu_2 * \nu_3,\ \cdots, \\ \mu = \nu_1 * \kappa_1 = \nu_1 * \nu_2 * \kappa_2 = \cdots, \end{aligned}$$

akkor $\alpha_{n+1} * x_{n+1} = \alpha_n * \nu_n * x_{n+1} = \alpha_n * x_n * (x_n^{-1} * \nu_n * x_{n+1})$.
Megmutatjuk, hogy $\beta \prec \gamma$ és $\gamma \prec \beta$. Mivel β (ill. γ) torlódási pontja az $\{\alpha_n * x_n\}$ sorozatnak létezik β-hoz (ill. γ-hoz) konvergáló részsorozata az $\{\alpha_n * x_n\}$ sorozatnak, azaz léteznek olyan n', ill. n'' sorozatok, melyekre

$$\alpha_{n'} * x_{n'} = \nu_1 * \nu_2 * \cdots * \nu_{n'} * x_{n'} \Rightarrow \beta, \text{ ill. } \alpha_{n''} * x_{n''} = \nu_1 * \nu_2 * \cdots * \nu_{n''} * x_{n''} \Rightarrow \gamma.$$

Minden n''-höz válasszuk ki azt a legkisebb n'-t, mely meghaladja, s végezzük el a következő átalakítást $\alpha_{n'} * x_{n'} = (\nu_1 * \nu_2 * \cdots * \nu_{n''} * x_{n''}) * x_{n''}^{-1} * \nu_{n''+1} * \cdots * \nu_{n'} * x_{n'}$. Felhasználva, hogy $\nu_1 * \nu_2 * \cdots * \nu_{n''} * x_{n''} \Rightarrow \gamma$ és $\alpha_{n'} * x_{n'} \Rightarrow \beta$, amint $n'' \to \infty$ a 2.1. Tétel alapján $x_{n''}^{-1} * \nu_{n''+1} * \cdots * \nu_{n'} * x_{n'}$ feltételesen kompakt, így van konvergens részsorozata, áttérve erre a részsorozatra kapjuk, hogy $\gamma \prec \beta$. Hasonlóan láthatjuk be, hogy $\beta \prec \gamma$. Az 5.2. Tétel alapján $\beta \sim \gamma$. Így az $\{\alpha_n * x_n\}$ sorozat összes torlódási pontja ugyanahhoz az ekvivalencia osztályhoz tartozik. Legyen α_0 ezen ekvivalenciaosztály egy tetszőleges eleme. Legyen továbbá d olyan metrika, mely az $\mathcal{M}(X)$-beli topológiát indukálja, ilyen létezik, mert tetszőleges X metrikus tér esetén $\mathcal{M}(X)$ akkor és csak akkor metrizálható szeparábilis metrikus térként, ha X szeparábilis metrikus tér. Így

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{x \in X} d(\alpha_n * x, \alpha_0) = 0,$$

ami alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén ki tudunk választani α_n-nek olyan α'_n shiftjét, hogy az $\{\alpha'_n\}$ sorozat gyengén tart α_0-hoz.

□

Hasonló módon bizonyíthatjuk a következő tételt.

4.4. Tétel. Legyen X egy teljes szeparábilis metrikus Ábel- csoport és $\alpha_1 \succ \alpha_2 \succ \cdots$. Ekkor létezik egy olyan $\{\alpha'_n\}$ sorozat, hogy α'_n α_n shiftje minden $n \in \mathbb{N}$-re és $\{\alpha'_n\}$ gyengén konvergens.

III. Valószínűségi mértékek lokálisan kompakt Ábel-csoportokon.

III. 1. Bevezetés.

A valós számegyenesen értelmezett valószínűség eloszlásokra vonatkozóan három olyan alaptétel van, melyekre a független valószínűségi változók összegének határértékét vizsgáló elméletek támaszkodnak. Ezek a következők:

(a) a korlátlanul osztható eloszlások Lévy-Hincsin reprezentációja.

(b) korlátlanul osztható eloszlások gyenge konvergenciájának kritériuma.

(c) az infinitézimális mennyiségek összegére vonatkozó Hincsin tétel, mely szerint ilyen összegek akkor és csak akkor konvergálnak gyengén, ha bizonyos, ezekhez rendelt korlátlanul osztható eloszlások konvergálnak.

Ezen eredmények pontos megfogalmazása megtalálható például Gnedenko és Kolmogorov [2] munkájában. Ebben a fejezetben X egy lokálisan kompakt Ábel-csoportot jelöl, és azt vizsgáljuk, hogy a fent említett, valós egyenesre vonatkozó klasszikus határérték tételek milyen mértékben általánosíthatók. A következőkben felhasználjuk a lokálisan kompakt Ábel- csoportok dualitás elméletét, illetve a Fourier-transzformáltak elméletét is. Ezek például Rudin [7], Weil [8], ill. Pontrjagin [6] munkáiban találhatók meg.

III. 2. Előzmények lokálisan kompakt Ábel-csoportokról és ezek karaktercsoportjáról.

Az X topológikus teret kompaktnak nevezzük, ha X minden nyílt halmazokkal való lefedéséből kiválasztható véges lefedés. Az X topológikus teret lokálisan kompaktnak nevezzük, ha X minden pontjának van olyan U nyílt környezete, hogy $\overline{U}$ kompakt (mint X topológikus altere). Egy topológikus teret teljesen szétesőnek nevezünk, ha minden komponense egyetlen pontból áll. Egy X lokálisan kompakt, Hausdorff, teljesen szétesö topológikus tér esetén az egyszerre nyílt és zárt halmazok (nyílt) bázisát alkotják X topológiájának.

Azt mondjuk, hogy az X halmaz topológikus csoport, ha egyszerre csoport is és topológikus tér is, és fennállnak az alábbiak

(i) az $(x, y) \mapsto xy$ $G \times G$-t G-re képező leképezés folytonos $G \times G$ és G között,

(ii) az $x \mapsto x^{-1}$ G-t G-re képező leképezés folytonos.

2.1. Állítás. Ha H nyílt részcsoportja az X topológikus csoportnak, akkor H zárt is.

Bizonyítás. Ha H nyílt részcsoport X-ben, akkor $X \setminus H = \bigcup\{xH : x \notin H\}$. Ugyanis ha $x \in X \setminus H$, úgy $x = xe$ és $e \in H$, mert H részcsoport; megfordítva, ha $z = xh$, $(x \notin H, h \in H)$, akkor $z \notin H$, mert egyébként $x = zh^{-1} \in H$ lenne, ami ellentmondás. Felhasználva, hogy minden xH halmaz nyílt, $X \setminus H$ is nyílt, ezért H zárt.

□

Legyen a továbbiakban X egy lokálisan kompakt, megszámlálható bázisú, Ábel-csoport és Y pedig a karaktercsoportja. A karaktercsoport az összes X-et az 1 abszolút értékű komplex számok csoportjába képező folytonos homomorfizmusból áll. A kompakt halmazokon egyenletes konvergencia topológiájával Y is lokálisan kompakt, megszámlálható bázisú, Ábel-csoport. Amennyiben $x \in X$ és $y \in Y$, úgy $\langle x, y\rangle$ jelöli az y karakternek az x helyen felvett értékét, $\mathrm{R}\,\langle x, y\rangle$ pedig ennek valós részét.

A dualitás elmélet alapján az X és Y közötti kapcsolat teljesen „szimmetrikus", azaz X Y-nak a karaktercsoportja. Pontosabban a következőről van szó. Tetszőlegesen rögzített $x \in X$-re legyen x' az az Y-n értelmezett függvény, melyre $x'(y) = y(x)$ minden $y \in Y$ esetén. Legyen továbbá $\tau(x) := x'$, $x \in X$, és jelölje Ω Y karaktercsoportját (Ω-t X második karaktercsoportjaként említjük). A Pontrjagin-féle dualitás tétel szerint τ topológikus izomorfizmus X és Ω között.

Továbbá, ha G zárt részcsoportja X-nek, H a G annihilátora Y-ban, azaz $H := \{y : \langle x, y\rangle = 1, \ \forall\ x \in G\}$, akkor G és Y/H egymás karaktercsoportjai. Ha X kompakt, akkor Y diszkrét, és fordítva is. Ha X az egységelem egy kompakt környezete által generált, akkor X felírható $V \oplus C \oplus Z_0^r$ alakban, ahol V egy véges dimenziós valós vektortér, C egy kompakt csoport, Z_0^r pedig az egész számok additív csoportjának r-számú példányának Descartes-szorzata. A későbbi fejezetekben a lokálisan kompakt Ábel-csoportokra vonatkozó ezen és további eredményeket majd gyakran felhasználjuk.

III. 3. Mértékek és Fourier-transzformáltjuk.

Egy nemnegatív, teljesen additív, az X Borel halmazain értelmezett halmazfüggvényt X-en értelmezett mértéknek nevezünk. Valószínűségi mértéken olyan mértéket értünk, melynél az egész tér mértéke 1. A korábbi fejezetben mértéken mindig valószínűségi mértéket értettünk, azonban most szükségessé válik a valószínűségi mértékek megkülönböztetése a mértékektől. Mint korábban $\mathcal{M}(X)$ jelöli a valószínűségi mértékek terét. Mivel egy lokálisan kompakt, megszámlálható bázisú csoport topológikusan teljes tér (azaz homeomorf egy teljes metrikus térrel), a 3. fejezet összes eredménye érvényes $\mathcal{M}(X)$-re. Ha λ, $\mu \in \mathcal{M}(X)$, és E tetszőleges Borel halmaz, akkor $(\lambda * \mu)(E) = \int \mu(E-x)\, d\lambda$, továbbá $\lambda * \mu \in \mathcal{M}(X)$. Ha $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathcal{M}(X)$, akkor $\lambda_1 * \lambda_2 * \cdots * \lambda_n$-et $\prod_{i=1}^n \lambda_i$-vel jelöljük. Hasonlóan a korábbiakhoz, $\overline{\mu}(A) := \mu(-A)$ minden A Borel halmazra és $|\mu|^2 = \mu * \overline{\mu}$. $\mathcal{M}(X)$-beli konvergencián gyenge konvergenciát értünk, hacsak mást nem mondunk.

Tetszőleges $\mu \in \mathcal{M}(X)$ valószínűségi mérték esetén μ karakterisztikus függvénye az Y karaktercsoporton értelmezett $\widehat{\mu}(y)$ függvény, ahol:

$$\widehat{\mu}(y) = \int_X \langle x, y\rangle \, d\mu(x).$$

A karakterisztikus függvény alapvető tulajdonságait az alábbi tétel foglalja össze.

3.1. Tétel.

(1) $\widehat{\mu}$ egyenletesen folytonos Y-n.

(2) ha $\widehat{\mu}_1(y) = \widehat{\mu}_2(y)$ minden $y \in Y$ esetén, akkor $\mu_1 = \mu_2$.

(3) $\widehat{(\mu * \lambda)}(y) = \widehat{\mu}(y)\widehat{\lambda}(y)$ minden $y \in Y$, μ, $\lambda \in \mathcal{M}(X)$ esetén.

(4) $\widehat{\overline{\mu}}(y) = \overline{\widehat{\mu}(y)}$.

3.1. Definíció. Az Y karaktercsoporton értelmezett φ függvényt pozitív definitnek nevezzük, ha minden $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ és $y_1, \dots, y_n \in Y$ karakterek esetén

$$\sum_{i,j=1}^n a_i \overline{a_j} \varphi(y_i - y_j) \geq 0.$$

3.2. Tétel. Az Y karaktercsoporton értelmezett φ függvény akkor és csak akkor karakterisztikus függvénye egy $\mu \in \mathcal{M}(X)$ valószínűségi mértéknek, ha (1) $\varphi(e) = 1$, (2) φ folytonos, és (3) pozitív definit.

A 3.1. és 3.2. Tételek bizonyítása megtalálható például Rudin [5] (1. fejezet, 36. old.) könyvében.

3.3. Tétel. Legyen $\{\mu_n\}$ egy sorozat $\mathcal{M}(X)$-ben. Ekkor $\mu_n \Rightarrow \mu$ akkor és csak akkor, ha $\widehat{\mu}_n(y) \to \widehat{\mu}(y)$ egyenletesen Y minden kompakt részhalmazán. Továbbá, ha $\widehat{\mu}_n(y)$ egyenletesen konvergál valamilyen határértékhez Y minden kompakt részhalmazán, akkor létezik egy olyan $\mu \in \mathcal{M}(X)$ mérték, hogy

(i) $\widehat{\mu}(y) = \lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}_n(y)$,

(ii) $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Ez a tétel a ,,folytonossági tétel " általánosítása lokálisan kompakt Ábel-csoportokra.

Bizonyítás.
1. Rész. Tegyük fel, hogy $\mu_n \Rightarrow \mu$. Legyen K tetszőleges Y-beli kompakt részhalmaz. Mivel K kompakt, így korlátos és zárt is, s mivel bármilyen $y \in Y$, $x \in X$ esetén $|y(x)| = 1$, kapjuk, hogy egyenletesen korlátos és relatív kompakt is. Így az Arzela-Ascoli tétel alapján tetszőleges $x \in X$ pontban ekvifolytonos. Ezt felhasználva következik, hogy $\widehat{\mu}(y) = \lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}_n(y)$ egyenletesen K-n, belátjuk ugyanis a következő, önmagában is fontos tételt.

Segédtétel. Legyen X egy szeparábilis metrikus tér, $\{\mu_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségi mérték sorozata X-en. Ekkor $\mu_n \Rightarrow \mu$ akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{A}_0} \Big| \int f\, d\mu_n - \int f\, d\mu \Big| = 0$$

minden $\mathcal{A}_0 \subset C(X)$ halmazra, mely minden $x \in X$ pontban ekvifolytonos és egyenletesen korlátos, azaz létezik olyan M konstans, hogy $|f(x)| \leq M$ minden $x \in X$ és $f \in \mathcal{A}_0$ esetén.

A segédtétel bizonyítása. Először megmutatjuk, hogy ha X szeparábilis metrikus tér, μ mérték X-en, $\mathcal{A}_0 \subset C(X)$ minden $x \in X$ pontban ekvifolytonos függvények családja, akkor bármilyen $\epsilon > 0$-hoz létezik halmazoknak olyan $\{A_j\}$ sorozata, hogy $\mu(\overline{A_j} \setminus A_j^\circ) = 0$ minden j-re (ezt úgy említjük, hogy A_j μ folytonossági halmaza), továbbá fennáll, hogy

(i) $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = X$, (ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$,

(iii) $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ minden $x,\, y \in A_j$ és $f \in \mathcal{A}_0$ esetén.

Jelöljük d-vel a metrikát X-en, illetve bármilyen $\delta > 0$ és $x \in X$ esetén $S(x,\delta)$ jelöli az x középpontú, δ sugarú nyílt gömböt, azaz $S(x,\delta) = \{y : d(y,x) < \delta\}$. Legyen $B(x,\delta) := \{y : d(y,x) = \delta\}$, így $B(x,\delta)$ $S(x,\delta)$ határa. Minden $S(x,\delta)$ nyílt gömb tartalmaz egy olyan $S(x,\delta')$, $\delta' \leq \delta$ gömböt, melynek $B(x,\delta')$ határa μ-nullmértékű. Ez azért igaz, mert $S(x,\delta) = \bigcup_{0\leq\delta'\leq\delta} B(x,\delta')$ a $B(x,\delta')$ Borel halmazok nemmegszámlálható diszjunkt uniója, és így ezek egy megszámlálható részhalmaztól eltekintve μ-nullmértékűek. Így mivel $\mathcal{A}_0$ ekvifolytonos család, minden $x \in X$ esetén létezik egy $\delta = \delta(x)$, hogy $S(x,\delta)$ μ-folytonossági halmaz, és $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ minden $y \in S(x,\delta)$ és $f \in \mathcal{A}_0$-ra. (x-hez létezik x körüli nyílt gömb, ebben pedig a fentiek miatt van olyan x körüli nyílt gömb, melynek határa μ-nullmértékű, azaz μ-folytonossági halmaz.) Az $\{S(x,\delta) : x \in X\}$ család nyílt lefedése X-nek. Mivel X szeparábilis, létezik egy olyan x_j sorozat, hogy $\{S(x_j,\delta(x_j)),\, j = 1,2,\ldots\}$ lefedése X-nek. Legyen $A_1 := S(x_1,\delta(x_1))$, $A_n := S(x_n,\delta(x_n)) \cap S(x_{n-1},\delta(x_{n-1}))' \cap \cdots \cap S(x_1,\delta(x_1))'$, $n = 2,3,\ldots$, ahol A' jelöli A komplementerét. Az A_n halmazok mind μ-folytonossági halmazok. Fennáll az is, hogy $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = X$ és páronként diszjunktak az unióban részvevő halmazok.. Tekintsünk a továbbiakban egy ilyen A_j sorozatot, s legyen $x_j \in A_j$ egy rögzített pontsorozat.

Tetszőleges λ, X-en értelmezett valószínűségi mérték esetén jelölje $\widetilde{\lambda}$ azt a diszkrét mértéket, mely az $\{x_j : j = 1,2\ldots\}$ halmazra koncentrálódik, oly módon, hogy x_j $\widetilde{\lambda}$

szerinti mértéke $\lambda(A_j)$. Felhasználva az $\{A_j\}$ sorozat tulajdonságait minden $f \in \mathcal{A}_0$ függvényre kapjuk, hogy

$$\Big|\int f\,d\lambda - \int f\,d\widetilde{\lambda}\Big| \leq \sum_{j=1}^{\infty}\Big|\Big(\int_{A_j} f\,d\lambda - \int_{A_j} f\,d\widetilde{\lambda}\Big)\Big| = \sum_{j=1}^{\infty}\Big|\int_{A_j}(f - f(x_j))\,d\lambda\Big| \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}\int_{A_j}|f(x) - f(x_j)|\,d\lambda \leq \epsilon.$$

Így bármilyen λ valószínűségi mértékre

$$\sup_{f\in\mathcal{A}_0}\Big|\int f\,d\lambda - \int f\,d\widetilde{\lambda}\Big| \leq \epsilon.$$

Mivel A_j-k folytonossági halmazok és $\mu_n \Rightarrow \mu$, $\mu_n(A_j) \to \mu(A_j)$ $j = 1, 2, \ldots$, amint $n \to \infty$. Következésképpen

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{A}_0}\Big|\int f\,d\widetilde{\mu}_n - \int f\,d\widetilde{\mu}\Big| = \limsup_{n\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{A}_0}\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\int_{A_j} f\,d\widetilde{\mu}_n - \int_{A_j} f\,d\widetilde{\mu}\Big| =$$
$$= \limsup_{n\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{A}_0}\Big|\sum_{j=1}^{\infty} f(x_j)\mu_n(A_j) - f(x_j)\mu(A_j)\Big| \leq M\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\big|\mu_n(A_j) - \mu(A_j)\big| \leq$$
$$\leq M\sum_{j=1}^{\infty}\limsup_{n\to\infty}\big|\mu_n(A_j) - \mu(A_j)\big| = 0.$$

Így

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{A}_0}\Big|\int f\,d\mu_n - \int f\,d\mu\Big| \leq \limsup_{n\to\infty}\Big\{\sup_{f\in\mathcal{A}_0}\Big|\int f\,d\mu_n - \int f\,d\widetilde{\mu}_n\Big| +$$
$$+ \sup_{f\in\mathcal{A}_0}\Big|\int f\,d\mu - \int f\,d\widetilde{\mu}\Big| + \sup_{f\in\mathcal{A}_0}\Big|\int f\,d\widetilde{\mu}_n - \int f\,d\widetilde{\mu}\Big|\Big\} \leq 2\epsilon.$$

Ezen összefüggésből $\epsilon \to 0$ határátmenettel kapjuk a bizonyítandó állítást.

2. Rész. Tegyük fel, hogy $\widehat{\mu}_n(y)$ egyenletesen konvergál egy $\varphi(y)$ függvényhez Y minden kompakt részhalmazán, amint $n \to \infty$. A 3.1. Tétel alapján $\widehat{\mu}_n(y)$ folytonos, és tudva azt, hogy kompakt halmazon folytonos függvények egyenletesen konvergens sorának határfüggvénye is folytonos, $\varphi(y)$ is folytonos. Mivel $\widehat{\mu}_n(e) = 1$ és $\widehat{\mu}_n(y)$ pozitív definit, $\varphi(e) = 1$ és $\varphi(y)$ is pozitív definit. Így a 3.2. Tétel alapján létezik egy olyan $\mu \in \mathcal{M}(X)$ mérték, hogy $\widehat{\mu}(y) = \varphi(y)$ minden $y \in Y$-ra.

Ha X véges dimenziós valós vektortér, akkor a 3.3. Tétel nem más, mint a jólismert Lévy-Cramér féle folytonossági tétel. (lásd pédául.: Cramér [1], 102. old.)

Ha X egy diszkrét csoport, akkor bármilyen $\mu \in \mathcal{M}(X)$ valószínűségi mértékre és $x \in X$-re,

$$\mu(\{x\}) = \int_Y \overline{\langle x, y\rangle} \widehat{\mu}(y)\, dy,$$

ahol dy a kompakt Y csoport normalizált Haar mértéke. Így az $\widehat{\mu}_n(y) \to \widehat{\mu}(y)$ egyenletes konvergencia alapján $\mu_n \Rightarrow \mu$. Ugyanis a fentiek miatt minden $x \in X$-re $\mu_n(\{x\}) \to \mu(\{x\})$, így az összes olyan halmazra is kapjuk a konvergenciát, melynek határa μ szerint nullmértékű, mert diszkrét csoportban minden halmaz ilyen, minden halmaz határa az üres halmaz. Diszkrét csoporton itt olyan topologikus csoportot értünk, melyben minden halmaz nyílt, s következésképpen zárt is.

Tegyük fel, hogy a 3.3. Tétel igaz X_1 és X_2 esetén, ahol X_1 és X_2 lokálisan kompakt, megszámlálható bázisú, Ábel-csoportok. Legyen μ_n valószínűségi mértékek sorozata az $X_1 \otimes X_2$ téren; $\mu_n^{(1)}$, ill. $\mu_n^{(2)}$ a μ_n mérték X_1-re, ill. X_2-re vonatkozó marginálisai (ezek az X_1, ill. X_2-re való projekciók által indukáltak). És tegyük fel, hogy $\widehat{\mu_n}(y)$ egyenletesen konvergál $\widehat{\mu}(y)$-hoz minden kompakt halmazon. Nyilvánvalóan $\widehat{\mu_n^{(1)}}$, ill. $\widehat{\mu_n^{(2)}}$ is egyenletesen konvergál $\widehat{\mu^{(1)}}$, ill. $\widehat{\mu^{(2)}}$-höz minden kompakt részhalmazon, ahol $\widehat{\mu^{(1)}}$, ill $\widehat{\mu^{(2)}}$ a μ mérték X_1, ill. X_2-re vonatkozó marginálisai. Mivel a tétel igaz az X_1 és X_2 terek esetében, $\mu_n^{(1)} \Rightarrow \mu^{(1)}$ és $\mu_n^{(2)} \Rightarrow \mu^{(2)}$. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges és $K_1 \subset X_1$ és $K_2 \subset X_2$ olyan kompakt részhalmazok, hogy $\mu_n^{(1)}(K_1) > 1 - \frac{\epsilon}{2}$, $\mu_n^{(2)}(K_2) > 1 - \frac{\epsilon}{2}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ilyen K_1, ill. K_2 halmazok a Prohorov tétel alapján léteznek, ugyanis pl. $\{\mu_n^{(1)} : n \in \mathbb{N}\}$ kompakt, hiszen a $\{\mu_n^{(1)}, n \in \mathbb{N}, \mu^{(1)}\}$ halmaz minden konvergens részsorozatának a határértéke $\mu^{(1)}$. Legyen $K := K_1 \otimes K_2$. Ekkor K kompakt részhalmaza $X_1 \otimes X_2$-nek. Továbbá $\mu_n(K) = 1 - \mu_n(K') \geq 1 - \mu_n^{(1)}(K_1') - \mu_n^{(2)}(K_2') \geq 1 - \epsilon$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, ugyanis $\mu_n(K') = \mu_n(K_1' \otimes K_2 \cup K_1 \otimes K_2' \cup K_1' \otimes K_2') \leq \mu_n(K_1') + \mu_n(K_2')$. Újra a Prohorov tételt használva $\{\mu_n\}$ feltételesen kompakt. Így létezik olyan n' részsorozat, és $\nu \in \mathcal{M}(X)$, hogy $\mu_{n'} \Rightarrow \nu$. A `I.`-ben bizonyítottaknak megfelelően $\widehat{\mu}_{n'}(y) \to \widehat{\nu}(y)$ és a feltétel alapján $\widehat{\mu}_{n'}(y) \to \widehat{\mu}(y)$ minden $y \in Y$ esetén, így $\widehat{\mu}(y) = \widehat{\nu}(y)$ minden $y \in Y$-ra, amiből a 3.1. Tétel (2) része alapján $\nu = \mu$. Azaz a $\{\mu_n\}$ halmaz minden torlódási pontja μ. Így a tétel igaz az $X_1 \otimes X_2$ téren is.

Tegyük fel, hogy $H \subset X$ kompakt részcsoport és az állítás igaz az X/H faktorcsoportra. Belátjuk, hogy ekkor igaz X-en is. Legyen $\mu_n \in \mathcal{M}(X)$ és tegyük fel, hogy $\widehat{\mu_n}(y)$ egyenletesen konvergál $\widehat{\mu}(y)$-hoz Y kompakt részhalmazain. Legyen τ a kanonikus homomorfizmus X-ből X/H-ba. Mivel X/H karaktercsoportja Y-nak egy Z zárt részcsoportja és $\widehat{\nu}(y \circ \tau) = \widehat{\nu\tau^{-1}}(y)$ minden $y \in Z$, $\nu \in \mathcal{M}(X)$ esetén; kapjuk, hogy $\widehat{\mu_n\tau^{-1}}$ egyenletesen konvergál $\widehat{\mu\tau^{-1}}$-hez Z minden kompakt részhalmazán. A $\widehat{\nu}(y \circ \tau) = \widehat{\nu\tau^{-1}}(y)$ minden $y \in Z$, $\nu \in \mathcal{M}(X)$ esetén összefüggést a következőképpen láthatjuk be: minden $y \in \widehat{(X/H)} = Z$ esetén

$$\widehat{\mu\tau^{-1}}(y) = \int_{X/H} \langle x, y\rangle\, d\,(\mu\tau^{-1})(y) = \int_X \langle z, y \circ \tau\rangle\, d\,\mu(z) = \widehat{\mu}(y \circ \tau).$$

(Röviden, ha $y \in \widehat{(X/H)}$, akkor X-en úgy csinálhatunk karaktert, hogy egy osztály minden elemén legyen ugyanaz az 1 abszolút értékű komplex szám, melyet y az adott osztályhoz rendel.) Felhasználva, hogy X/H-ra igaz az állítás $\mu_n\tau^{-1} \Rightarrow \mu\tau^{-1}$. Így a Prohorov tétel alapján bármilyen $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan $K \subset X/H$ kompakt halmaz, hogy $(\mu_n\tau^{-1})(K) > 1-\epsilon$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Mivel H kompakt, $\tau^{-1}(K)$ is kompakt X-ben, így újra a Prohorov tétel miatt $\{\mu_n\}$ relatív kompakt $\mathcal{M}(X)$-ben. Egy korábbi gondolatmenet mintájára, a 3.1. Tétel (2) része miatt $\mu_n \Rightarrow \mu$.

A lokálisan kompakt Ábel-csoportok struktúra tétele miatt mindig létezik egy olyan $H \subset X$ kompakt részcsoport, hogy X/H felbontható $V \oplus D$ alakban, ahol V egy valós vektortér, D pedig egy diszkrét csoport. A fent elmondottak miatt így következik a tétel állítása tetszőleges X lokálisan kompakt Ábel-csoportra.

□

III. 4. Korlátlanul osztható eloszlások.

Eloszláson a továbbiakban valószínűségi mértéket értünk. Bevezetjük ebben a fejezetben a korlátlanul osztható eloszlások fogalmát és néhány alapvető tulajdonságukat tárgyaljuk.

4.1. Definíció. Egy μ eloszlást korlátlanul oszthatónak nevezünk, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $x_n \in X$ és $\lambda_n \in \mathcal{M}(X)$, hogy $\mu = \lambda_n^n * x_n$.

Ez a definíció egy kicsit különbözik a valós számegyenesen adott korlátlanul osztható eloszlások klasszikus definíciójától. Ez a módosítás szükséges, ha el akarjuk kerülni a csoportbeli elemekkel való oszthatóság kérdését. A következőre gondolok itt, például $(\mathbb{R},+)$-ban minden elem korlátlanul osztható, hiszen $a = (\frac{a}{n})^{*n}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Egyenlőre még nem világos, hogy létezik-e olyan $x \in X$ elem, hogy $\mu = \lambda_n^n * x$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Egy későbbi fejezetből választ kapunk majd erre.

4.1. Tétel. A korlátlanul osztható eloszlások zárt részcsoportot alkotnak $\mathcal{M}(X)$-ben.

Bizonyítás. Ha λ és μ korlátlanul oszthatók, akkor nyilván $\lambda*\mu$ is korlátlanul osztható. Ez világos a korlátlanul osztható eloszlások definíciójából, valamint abból, hogy kommutatív metrikus csoport esetén a konvolúció kommutatív. Legyen μ_k, $k = 1, 2, \cdots$ korlátlanul osztható eloszlások olyan sorozata, mely gyengén konvergál μ-höz. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén μ_k felírható $\mu_k = \lambda_{kn}^n * x_{kn}$ alakban. Így az előző fejezet 4.1. Tétele alapján λ_{kn}-nek létezik olyan részsorozata, melynek egy alkalmas shift-sorozata gyengén konvergál egy λ_n eloszláshoz, amint $k \to \infty$. ($\{\mu_k\}$ shift kompakt, mert $\mu_k \Rightarrow \mu$.) Felhasználva azt, hogy $\mu_k \Rightarrow \mu$ megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik egy olyan x_n elem, hogy $\mu = \lambda_n^n * x_n$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített, és $x_k \in X$ olyan, hogy $\widetilde{\lambda}_{kn} := \lambda_{kn} * x_k \Rightarrow \lambda_n$, amint $k \to \infty$. Így $\mu_k = \widetilde{\lambda}_{kn}^n * (x_k^{-1})^n * x_{kn}$. És a 3. fejezet 2.1. Tétele miatt, mivel $\mu_k \Rightarrow \mu$ és $\widetilde{\lambda}_{kn} \Rightarrow \lambda_n$, amint $k \to \infty$ kapjuk, hogy $\{(x_k^{-1})^n * x_{kn} \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ feltételesen kompakt, így van konvergens részsorozata, s az előbbi összefüggést csak erre a részsorozatra felírva, és $k \to \infty$ határátmenetet véve kapjuk az egyenlőséget. Így a bizonyítás teljes.

□

Korlátlanul osztható eloszlásra egyszerű példa X kompakt részcsoportjainak normalizált Haar mértéke, ugyanis az ilyen mértékek idempotensek, így $\mu = \mu^n * e$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Belátjuk, hogy egy idempotens faktorok nélküli korlátlanul osztható eloszlás karakterisztikus függvényének nincs zérushelye.

4.2. Tétel. Legyen $\widehat{\mu}(y)$ a karakterisztikus függvénye egy μ korlátlanul osztható eloszlásnak. Ha $\widehat{\mu}(y_0) = 0$ valamilyen y_0 karakterre, akkor μ-nek van idempotens faktora.

Bizonyítás. A korlátlanul osztható eloszlások definíciójából következően minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik egy $x_n \in X$ pont és egy λ_n eloszlás, hogy $\mu = \lambda_n^n * x_n$. Mivel $\widehat{\mu}(y_0) = 0$, és a karakterek értékkészlete részhalmaza az 1 abszolút értékű komplex számok halmazának kapjuk, hogy $\widehat{\lambda_n}(y_0) = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A 3. fejezet 4.1. Tétele alapján $\{\lambda_n\}$ shift kompakt. Legyen λ egy torlódási pontja $\{\lambda_n\}$ egy megfelelő shift sorozatának. Így valamilyen $\{x_{n_k}\} \in X$ sorozatra $\lambda_{n_k} * x_{n_k} \Rightarrow \lambda$, amint $k \to \infty$, s a 3.3. folytonossági tétel alapján $\widehat{\lambda}_{n_k}(y_0) y_0(x_{n_k}) \to \widehat{\lambda}(y_0)$, ami alapján $\widehat{\lambda}(y_0) = 0$. Ezt felhasználva λ egy nemdegenerált eloszlás, mert ellenkező esetben $\widehat{\lambda}(y_0) = y_0(z)$ lenne valamilyen $z \in X$-re, és ez nem lehet 0. Mivel $\mu = \lambda_n^n * x_n$ és λ_n egy alkalmas shift részsorozata konvergens, $\lambda^n \prec \mu$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Így az előző fejezet 4.3. Tétele alapján létezik egy olyan $x'_n \in X$ sorozat, melyre $\lambda^n * x'_n \Rightarrow \lambda_0$. Ekkor $\widehat{\lambda}_0(y_0) = 0$, hiszen $\widehat{\lambda}_0(y_0) = \lim_{n\to\infty} \left(\widehat{\lambda}(y_0)\right)^n y_0(x'_n)$. Továbbá létezik egy olyan $x_0 \in X$ pont, melyre $\lambda_0^2 = \lambda_0 * x_0$. Ugyanis $\lambda^n * x'_n \Rightarrow \lambda_0$ miatt $\lambda^{2n} * (x'_n)^2 \Rightarrow {\lambda_0}^2$, és felhasználva, hogy $\lambda^{2n} * x'_{2n} * (x'_{2n})^{-1} * (x'_n)^2 = \lambda^{2n} * (x'_n)^2$, ill. $\lambda^{2n} * x'_{2n} \Rightarrow \lambda_0$, az előző fejezet 2.1. Tétele alapján (egy korábbihoz hasonló gondolatmenettel) kapjuk a $\lambda_0^2 = \lambda_0 * x_0$ egyenlőséget. Ekkor $\lambda_0 * (-x_0)$ idempotens, hiszen $\lambda_0 * (-x_0) * \lambda_0 * (-x_0) = \lambda_0^2 * (-2x_0) = \lambda_0 * x_0 * (-2x_0) = \lambda_0 * (-x_0)$. Nyilván $\lambda_0 * (-x_0)$ nemdegenerált faktora μ-nek. Röviden összefoglalva, μ-nek van nemdegenerált, idempotens faktora.

Megfordítva, tegyük fel, hogy μ-nek van nemdegenerált idempotens faktora λ. Ekkor $\left(\widehat{\lambda}(y)\right)^2 = \widehat{\lambda}(y)$. Ezért $\widehat{\lambda}(y)$ csak a 0 és 1 értékeket veheti fel. Ha $\widehat{\lambda}(y) \equiv 1$, akkor $\widehat{\lambda}(y) = 1 = \widehat{e}(y) = y(e)$, és a 3.1. Tétel alapján $\lambda = e$, azaz λ degenerált. Így létezik olyan y_0 pont, hogy $\widehat{\lambda}(y_0) = 0$. Mivel $\widehat{\lambda}$ folytonos, $\widehat{\mu}(y_0) = 0$. (Az is fennáll, hogy $\widehat{\mu} \equiv 0$.)

□

4.2. Definíció. Ha F egy korlátos mérték X-en, akkor F-hez hozzárendelünk egy $e(F)$-el jelölt eloszlást, mely a következőképpen értelmezett:

$$e(F) = e^{-F(X)}[1 + F + \frac{F^2}{2!} + \cdots + \frac{F^n}{n!} + \cdots],$$

ahol 1 az egységelemre koncentrálódó valószínűségi mértéket jelöli.

Megjegyzés. Az $e(F)$ eloszlást az F-hez tartozó általánosított Poisson mértékként is említjük.

Az $e(F)$ eloszlás karakterisztikus függvényét könnyen meghatározhatjuk:

$$\widehat{e(F)}(y) = \int_X \langle x, y \rangle \, d\, e(F)(x) = e^{-F(X)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_X \langle x, y \rangle \, d\, F^k(x) = e^{-F(X)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{F^k}(y) =$$

$$= e^{-F(X)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\widehat{F}(y)\right)^k}{k!} = e^{-F(X)} e^{\widehat{F}(y)} = e^{-F(X)} e^{\int_X \langle x,y \rangle \, d\, F(x)},$$

azaz

$$\widehat{e(F)}(y) = \exp\{\int [\langle x, y\rangle - 1]\, d\,F(x)\} \quad \text{minden } \ y \in Y \ \text{ esetén.}$$

Ezen egyenlet alapján, tetszőleges két korlátos mértékre, F-re és G-re

$$e(F) * e(G) = e(F+G), \quad \text{ugyanis} \quad \widehat{e(F+G)}(y) = \widehat{e(F)}(y)\widehat{e(G)}(y).$$

Speciálisan $e(F) = (e(F/n))^n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Így $e(F)$ korlátlanul osztható. Az $e(F)$ típusú eloszlásokat elemi korlátlanul osztható eloszlásoknak is nevezzük. A 4.1. Tétel alapján elemi korlátlanul osztható eloszlások shiftjeinek határértéke is korlátlanul osztható, hiszen ha μ_k korlátlanul osztható, akkor felírható $\mu_k = \lambda_{k_n}^n * x_k$ alakban, így $\mu_k * y_k$ is felírható a megfelelő alakban. Később bizonyítandó tételek alapján kiderül, hogy ez az egyetlen módja korlátlanul osztható eloszlások konstrukciójának.

Legyen F_n korlátos mértékek sorozata, s képezzük az $e(F_n)$ sorozatot. Bebizonyítunk egy szükséges feltételt az $e(F_n)$ sorozat shift kompaktságára vonatkozóan, melyről később majd kiderül, hogy elégséges is.

4.3. Tétel. Legyen $\mu_n = e(F_n)$, ahol F_n korlátos mértékek sorozata. Ahhoz, hogy az

(a) μ_n shift kompakt legyen,

(b) ha μ egy torlódási pontja $\{\mu_n\}$ valamilyen shift sorozatának, akkor μ-nek ne legyen idempotens faktora,

feltételek fennálljanak az alábbi két feltétel szükséges:

(i) az egységelem bármely N környezetére az $\{F_n\}$ család megszorítása $X \setminus N$-re legyen feltételesen kompakt (a mértékek gyenge konvergenciájára vonatkozóan),

(ii) bármilyen $y \in Y$-ra

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int [1 - \mathrm{R}\,\langle x, y\rangle\,]\, d\,F_n(x) < \infty.$$

Bizonyítás. Legyen N az egységelem tetszőleges nyílt, szimmetrikus környezete. Először megmutatjuk, hogy az $F_n(N')$ sorozat korlátos. Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor létezik olyan $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ részsorozat, melyre $F_{n_k}(N') \geq 2k$, $k = 1, 2, \ldots$. Definiáljuk az L_k, $k = 1, 2, \ldots$ mértékeket az alábbi módon:

$$L_k(A) \leq \frac{1}{k} F_{n_k}(A) \quad \text{minden } A \text{ Borel halmazra}, \quad L_k(N) = 0, \quad L_k(N') = 1.$$

Ekkor a $\lambda_k := e(L_k)$ eloszlás az $e(F_{n_k})$ eloszlás faktora (gondoljunk itt arra, hogy független Poissonok összege is Poisson), és az előző fejezet 4.1. Tétele alapján, az $e(F_n)$ sorozat shift kompaktsága miatt a $\{\lambda_k\}$ sorozat is shift kompakt. Legyen λ a λ_k shiftjeinek egy torlódási pontja. A fenti egyenletek alapján λ minden hatványa μ faktora. Így az előző fejezet 4.2. Következménye alapján a $\{\lambda^n\}$ sorozat is shift kompakt. Hasonlóan, mint a 4.2. Tétel bizonyításában a $\{\lambda^n\}$ sorozat tetszőleges shift sorozatának bármely torlódási pontja egy idempotens eloszlás shiftje. Mivel ez a torlódási pont is faktora μ-nek, felhasználva, hogy a feltétel alapján μ-nek nincs idempotens faktora, λ^n tetszőleges shift sorozatának bármely torlódási pontja degenerált. Mivel λ^n növekedő (a $\prec$ relációban), λ is degenerált. Így a $|\lambda_k|^2$ sorozat az egységelembe degenerált eloszláshoz konvergál, hiszen $|\lambda_k|^2 = \lambda_k * \overline{\lambda_k}$, és felhasználva, hogy $\{\lambda_k\}$ egy shift sorozata gyengén tart λ-hoz kapjuk, hogy

$$\widehat{|\lambda_k|^2} = \widehat{\lambda_k}\,\widehat{\overline{\lambda}_k} = \widehat{\lambda_k}\,\overline{\widehat{\lambda}_k} \to \widehat{\lambda}\,\overline{\widehat{\lambda}}.$$

Így $\widehat{|\lambda_k|^2}(y) \to \widehat{\lambda}(y)\overline{\widehat{\lambda}}(y) = y(x_0)\overline{y(x_0)} = |y(x_0)|^2 = 1 = y(e) = \widehat{e}(y)$ valamilyen $x_0 \in X$-re minden $y \in Y$ esetén (ilyen x_0 λ degeneráltsága miatt létezik), amiből a folytonossági tétel alapján $|\lambda_k|^2 \Rightarrow e$. Így $\lim_{k\to\infty} e(L_k + \overline{L}_k)(N') = 0$, hiszen N' zárt halmaz, mert N nyílt, és $e(L_k + \overline{L_k}) = e(L_k) * e(\overline{L}_k) = e(L_k) * \overline{e(L_k)} = \lambda_k * \overline{\lambda}_k \Rightarrow e$ alapján, $0 = e(N') \geq \limsup_{k\to\infty}(\lambda_k * \overline{\lambda}_k)(N')$. De

$$\begin{aligned} e(L_k + \overline{L}_k)(N') &= \exp[-(L_k + \overline{L}_k)(X)]\,[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(L_k + \overline{L}_k)^r}{r!}(N')] \geq \\ &\geq e^{-2}(L_k + \overline{L}_k)(N') \geq e^{-2}(L_k)(N') = e^{-2}, \end{aligned}$$

ami ellentmondás. Így $\sup_n F_n(N') < \infty$. Mivel e minden környezete tartalmaz egy szimmetrikus, nyílt környezetet kapjuk, hogy e minden N környezetére $\sup_n F_n(N') < \infty$.

Legyen $k := \sup_n F_n(N')$, ahol N az e egy rögzített környezete. Jelölje G_n az F_n N'-re való leszűkítését, azaz minden A Borel halmazra $G_n(A) := F_n(A \cap N')$. Ekkor $e(G_n)$ $e(F_n)$ faktora. Mivel $e(F_n)$ shift kompakt, ezért $e(G_n)$ is shift kompakt és így $e(H_n)$ feltételesen kompakt, ahol $H_n = G_n + \overline{G}_n$. Így a Prohorov tétel alapján bármilyen $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan C kompakt halmaz, hogy $e(H_n)(C') < \epsilon$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Mivel $e(H_n) = e^{-H_n(X)}[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{H_n^r}{r!}]$, kapjuk, hogy

$$\epsilon > e(H_n)(C') \geq e^{-H_n(X)} H_n(C') \geq e^{-2k} G_n(C') \quad \text{minden } n \in \mathbb{N}\text{-re},$$

hiszen $H_n(X) = G_n(X) + \overline{G}_n(X) = F_n(X \cap N') + \overline{F}_n(X \cap N') \leq 2k$. Mivel a k konstans nem függ n-től, ϵ tetszőleges kapjuk, hogy a G_n sorozat egyenletesen feszes. A Prohorov tétel egyszerű módosításával kapjuk, hogy G_n feltételesen kompakt a gyenge topológiában. Ezzel beláttuk, hogy az (i) feltétel szükséges.

Megmutatjuk, hogy a (ii) feltétel is szükséges. Az $e(F_n + \overline{F}_n) = |e(F_n)|^2$ sorozat kompakt, ugyanis mivel $e(F_n)$ shift kompakt, $e(F_n)$ tetszőleges részsorozatára, melyet továbbra is $e(F_n)$-nel fogunk jelölni léteznek olyan $x_n \in X$-ek, hogy $e(F_n) * x_n$-nek van konvergens részsorozata, így $e(F_n) * x_n$ szimmetrizáltjának is van konvergens részsorozata, viszont $\overline{e(F_n) * x_n}(A) = e(F_n) * x_n(-A) = e(F_n)(-A - x_n) = \overline{e(F_n)}(A + x_n) = \overline{e(F_n)} * (-x_n)(A)$, minden A Borel halmazra, azaz $e(F_n) * x_n$ szimmetrizáltja $\overline{e(F_n)} * (-x_n)$. A kommutativitás miatt $e(F_n) * x_n * \overline{e(F_n)} * (-x_n) = |e(F_n)|^2$. Így $|e(F_n)|^2$ tetszőleges részsorozatának van konvergens részsorozata, azaz szekvenciálisan kompakt, ami ekvivalens a kompaktsággal. Az $|e(F_n)|^2$ eloszlás korlátlanul osztható, s megmutatjuk, hogy $|e(F_n)|^2$ tetszőleges torlódási pontjának karakterisztikus függvénye seholsem zérus. Ugyanis ha valamilyen y_0-ra és n_k részsorozatra $\lim_{k\to\infty} |\widehat{e(F_{n_k})}|^2(y_0) = 0$, akkor az (a) feltétel miatt $e(F_{n_k})$-nak van olyan shift részsorozata, mely gyengén konvergens, így a (b) feltétel miatt ennek a határértéknek nincs idempotens faktora, viszont a 4.1. Tétel alapján ez a határérték korlátlanul osztható, és ha feltételezésünk fennállna, akkor a 4.2. Tétel miatt lenne idempotens faktora, ami ellentmondás. Így minden $y \in Y$-ra

$$0 \neq \lim_{n\to\infty} |\widehat{e(F_n)}|^2(y) = \lim_{n\to\infty} \widehat{e(F_n)}(y)\widehat{e(\overline{F}_n)}(y) = \lim_{n\to\infty} \exp\Big\{ \int [\, \langle x, y\rangle - 1]\, d\, F_n(x) +$$
$$+ \int [\, \langle x, y\rangle - 1]\, d\,\overline{F_n}(x)\Big\} = \lim_{n\to\infty} \exp\{\int [\, \langle x, y\rangle - 1]\, d\,(F_n + \overline{F}_n)(x)\},$$

ami alapján, felhasználva azt, hogy

$$\int_X \langle x, y\rangle\, d\,\overline{F}(x) = \int_X \langle -x, y\rangle\, d\,F(x) = \int_X \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{|\langle x, y\rangle|^2}\, d\,F(x) = \int_X \overline{\langle x, y\rangle}\, d\,F(x)$$

kapjuk a (ii) feltételt.

□

III. 5. Infinitézimális rendszerek, határérték-tételek.

Ezen fejezet célja bevezetni csoportokon az infinitézimalitás fogalmát, s a Hincsintől származó, a valós egyenesre vonatkozó klasszikus határérték-tételek csoportokra való általánosításait bizonyítani.

5.1. Definició. Valószínűség-eloszlások $\{\alpha_{nj}\}$, $j = 1, 2, \ldots, k_n$ háromszögrendszerét egyenletesen infinitézimálisnak nevezzük, ha

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\le j\le k_n} \sup_{y\in K} |\widehat{\alpha_{nj}}(y) - 1| = 0$$

minden $K \subset Y$ kompakt részhalmazra.
(A későbbiekben feltételezzük, hogy $k_n \to \infty$, amint $n \to \infty$.)

Megjegyzés. Felhasználva, hogy a karakterisztikus függvények és a valószínűség eloszlások közötti kapcsolat egyértelmű és folytonos (3.1. Tétel, 3.3. Tétel) az $\{\alpha_{nj}\}$ háromszögrendszer akkor és csak akkor egyenletesen infinitézimális, ha az egységelem bármilyen N környezetére

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\le j\le k_n} |\alpha_{nj}(N')| = 0.$$

Mielőtt kimondanánk és bizonyítanánk ezen fejezet fő eredményét számos lemmára van szükségünk.

5.1. Lemma. Bármilyen $C \subset Y$ kompakt részhalmaz esetén létezik az egységelemnek olyan N_C környezete X-ben, és egy olyan $E \subset C$ véges részhalmaz, hogy

$$\sup_{y\in C} [1 - \mathrm{R}\,\langle x, y\rangle\,] \le M \sup_{y\in E} [1 - \mathrm{R}\,\langle x, y\rangle\,]$$

minden $x \in N_C$ estén, ahol M egy C-től függő, véges konstans.

Bizonyítás. Megmutatjuk először, hogy

$$1 - \cos(\alpha+\beta) \leq 2\,[(1-\cos\alpha) + (1-\cos\beta)], \quad \text{ahol } 0 \leq \alpha,\, \beta \leq 2\pi.$$

Felhasználva, hogy $1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2)$ azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\sin^2(x+y) \leq 2(\sin^2(x) + \sin^2(y)), \quad \text{ahol } 0 \leq x, y \leq \pi.$$

Az egységsugarú körben véve az α, β, ill. $\alpha+\beta$ középponti szögekhez tarozó húrokat, ezek rendre $a := 2\sin(\alpha/2)$, $b := 2\sin(\beta/2)$, $c := 2\sin((\alpha+\beta)/2)$ hosszúak. Ezen jelöléseket használva, azt kell bizonyítanunk, hogy $c^2 \leq 2(a^2+b^2)$. Ezen húrokra felírt koszinusz-tétel alapján kapjuk, hogy azt kell belátni, hogy $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \leq 2(a^2+b^2)$, ami azzal ekvivalens, hogy $0 \leq a^2 + b^2 + 2ab\cos(\gamma) = (a-b)^2 + 2ab(\cos(\gamma)+1)$, ahol γ jelöli a és b szögét. Ez utóbbi összefüggés pedig egy azonosság.
A koszinuszokra vonatkozó egyenlőtlenség alapján, mivel $|y(x)| = 1$ minden $y \in Y$-ra

$$1 - \mathrm{R}\,\langle x_1 + x_2, y\rangle \leq 2\,[(1 - \mathrm{R}\,\langle x_1, y\rangle) + (1 - \mathrm{R}\,\langle x_2, y\rangle)\,], \tag{5.0}$$

ahol $\mathrm{R}\,\langle x,y\rangle$ $\langle x,y\rangle$ valós részét jelöli. Ez azt mutatja, hogy ha a lemma érvényes az X_1 és X_2 csoportokban, akkor ezek $X_1 \oplus X_2$ direkt összegében is érvényes. Jelölje Y' a C által generált zárt részcsoportot, Φ ennek annihilátorát X-ben, azaz $\Phi = \{x : \langle x,y\rangle = 1 \text{ minden } y \in Y'\text{-re}\}$. Ha τ jelöli a kanonikus homomorfizmust X-ből $X' = X/\Phi$-re, akkor $\mathrm{R}\langle x,y\rangle = \mathrm{R}\langle \tau(x), y\rangle$ minden $x \in X$, $y \in Y$ esetén. Ugyanis $\tau(x) = x + \Phi$, így $y(\tau(x)) = y(x+\Phi) = y(x)y(\Phi) = y(x)\cdot 1 = \langle x,y\rangle$. Így elegendő a lemmát arra az esetre bizonyítani, amikor X, ill. Y helyett X'-t, ill. Y'-t tekintjük. Mivel Y' az e egységelem kompakt környezete által generált, felírható $V \oplus C \oplus Z_0^r$ alakban, ahol V egy véges dimenziós vektortér, C egy kompakt csoport, Z_0^r pedig az egész számok additív csoportjának r számú példányának szorzata. Így X' felírható $V \oplus D \oplus K^r$ alakban, ahol D egy diszkrét csoport, K^r pedig az 1 abszolút értékű komplex számok halmazának r számú példányának szorzata. Ha megmutatjuk, hogy a lemma állítása igaz a valós egyenes, diszkrét csoportok, ill. kompakt csoportok esetében, akkor a fentiek miatt igaz lesz X esetében is.

Felhasználva, hogy a valós számok halmazának karaktercsoportja önmaga, a valós egyenesre vonatkozóan elegendő azt bizonyítanunk, hogy amennyiben a C kompakt halmaz az origó középpontú, R sugarú zárt gömb, akkor létezik olyan $\epsilon > 0$ szám és $E \subset C$ véges részhalmaz, hogy

$$\sup_{|y| \leq R}\,[1 - \cos(xy)] \leq \mathrm{M}\sup_{y \in E}[1 - \cos(xy)],$$

minden $|x| < \epsilon$ esetén, ahol M egy R-től függő konstans. A *cos* függvény tulajdonságait felhasználva könnyen ellenőrizhető, hogy

$$1 - \cos\alpha \leq \frac{\alpha^2}{2} \quad \text{minden} \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ esetén,}$$
$$1 - \cos\alpha \geq \frac{\alpha^2}{4} \quad \text{elegendően kicsi } \alpha \text{ esetén.}$$

Ez alapján, ha x elegendően kicsi

$$\sup_{|y|\leq R}[1-\cos(xy)] \leq \sup_{|y|\leq R}\{\frac{(xy)^2}{2}\},$$
$$\sup_{y\in E}\{\frac{(xy)^2}{4}\} \leq \sup_{y\in E}[1-\cos(xy)].$$

Így elegendő azt belátni, hogy létezik olyan $\epsilon > 0$ és $E \subset C$ véges halmaz, hogy

$$\sup_{|y|\leq R}\{(xy)^2\} \leq \mathrm{M}\sup_{y\in E}\{(xy)^2\}$$

minden $|x| < \epsilon$ esetén, ahol M egy R-től függő konstans. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy $R^2 \leq \mathrm{M}\sup_{y\in E}\{\,|y|^2\}$. Az $\mathrm{M} := 1$ és $E := \{y_0\}$, ahol $|y_0| = R$ választás megfelelő számunkra.

Ha X diszkrét csoport, akkor mivel bármely halmaz nyílt és zárt, az egységelemet tartalmazó halmaz is nyílt, így legyen $N_C := \{e\}$ bármilyen $C \subset Y$ kompakt részhalmazra. Felhasználva azt, hogy minden $y \in Y$ esetén $y(e) = 1$ kapjuk, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalán nulla áll, így triviálisan igaz.

Ha X kompakt csoport, akkor a dualitás elmélet alapján a karaktercsoportja diszkrét, így bármilyen $C \subset Y$ kompakt részhalmaz véges, ezért $C := E$ választással triviálisan adódik az állítás.

□

5.2. Lemma. Bármilyen $y \in Y$ esetén létezik olyan $h_y(x)$ folytonos függvény X-en, hogy

(1) $|h_y(x)| \leq \pi \quad \forall\, x \in X$, és $h_y(-x) = -h_y(x)$;

(2) $\langle x, y\rangle = \exp\{ih_y(x)\}$ minden $x \in N_y$ esetén, ahol

$$N_y = \{x : |\langle x, y\rangle - 1| \leq \frac{1}{2}\}.$$

Bizonyítás. Legyen $\langle x, y\rangle = \exp\{i\varphi(x))$, ahol $-\pi \leq \varphi(x) < \pi$. Nem nehéz belátni, hogy φ folytonos az N_y zárt halmazon. Terjesszük ki φ-t folytonosan X-re, hogy az első feltétel teljesüljön. Ilyen kiterjesztés létezik a Tietze-tétel alapján (lásd Kelley [4]). Ez a kiterjesztés jó lesz számunkra.

□

5.3. Lemma. Létezik olyan g, az $X \times Y$ szorzattéren értelmezett függvény, melyre

(1) $g(x, y)$ mindkét változójában folytonos,

(2) $\sup_{x\in X}\sup_{y\in C}|g(x, y)| < \infty$ minden $C \subset Y$ kompakt részhalmazra,

(3) $g(x, y_1 + y_2) = g(x, y_1) + g(x, y_2)$ minden $x \in X,\ y_1, y_2 \in Y$ esetén és $g(-x, y) = -g(x, y)$,

(4) Bármilyen $C \subset Y$ kompakt részhalmazhoz létezik az X-beli egységnek olyan N_C környezete, melyre $\langle x, y\rangle = \exp\{ig(x, y)\}$ minden $x \in N_C$ és $y \in C$ esetén,

(5) Bármilyen $C \subset Y$ kompakt részhalmaz esetén $g(x,y)$ egyenletesen tart 0-hoz $y \in C$-n, amint x a X csoport egységeleméhez konvergál.

Bizonyítás. A lokálisan kompakt Ábel-csoportok struktúra elmélete alapján az állítás bizonyítását bizonyos egyszerűbb csoportokra vezethetjük vissza.
Tegyük fel, hogy az állítás igaz egy $G \subset X$ nyílt részcsoportra. Legyen H, ill. Y a G, ill. X csoportok karaktercsoportja. Mivel H-t megkaphatjuk Y olyan faktorcsoportjaként, hogy G-nek Y-beli annihilátora szerint képezzük a faktorcsoportot, létezik egy τ Y-t H-ba képező kanonikus homomorfizmus. Tegyük fel, hogy $g(x,h)$ definiálva van $x \in G$, $h \in H$ esetén a kívánt tulajdonságokkal. A következőképpen terjesztjük ki g definícióját. Legyen $x \in G$, $y \in Y$ esetén $g(x,y) = g(x,\tau(y))$, ill. $x \notin G$ esetén $g(x,y) = 0$ minden $y \in Y$-ra. Mivel egy nyílt részcsoport zárt is (2.1. Állítás), $g(x,y)$ folytonossága azonnal következik. A többi tulajdonsága $g(x,y)$-nak a $G \times H$-n való érvényességéből következik.

Általában, ha X tetszőleges lokálisan kompakt, kommutatív Ábel-csoport, akkor legyen G az egységelem egy kompakt körenyezete által generált csoport, ez nyílt is és zárt is. Ez a G csoport felírható $V \oplus C \oplus Z_0^r$ alakban, ahol V egy véges dimenziós vektorcsoport, C egy kompakt csoport, Z_0^r pedig az egész számok önmagával vett r-tényezős Descartes-szorzata. Amennyiben $g_1(x,y)$ és $g_2(u,v)$ a lemmabeli tulajdonságokkal bíró függvények az X, ill. U csoportok esetében, melyek karaktercsoportjai Y, ill. V, akkor létezik egy ugyanilyen tulajdonságokkal bíró $g(\xi,\eta)$ függvény $X \oplus U$ esetében, ahol $\xi \in X \oplus U$ és $\eta \in Y \oplus V$. Legyen ugyanis

$$g(\xi,\eta) := g_1(x,y) + g_2(u,v),$$

ahol x, ill. u ξ-nek a projekciói X-re, ill. U-ra, és y, ill. v η-nak a projekciói Y-ra, ill. V-re. Így elég $g(x,y)$-t megkonstruálnunk a valós egyenes, kompakt csoportok és az egész számok additív csoportja esetén, hiszen a véges dimenziós valós vektorterek izomorfak $\mathbb{R}^n$-el, valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re. Az egész számok csoportja esetében $g(x,y)$ legyen az azonosan nulla függvény, hiszen a (4) feltétel is fennáll $N_C := \{e\}$ választással. A valós egyenes esetében pedig legyen $g(x,y) = \Theta(x)y$, ahol

$$\Theta(x) := \begin{cases} x & , \text{ha } x \in [-1,1], \\ 1 & , \text{ha } x > 1, \\ -1 & , \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

(A valós egyenes karaktercsoportja önmaga.) Így a bizonyítás teljessé tételéhez elegendő csak a kompakt csoportok esetével foglalkozni.

Legyen tehát X egy kompakt Ábel-csoport, Y a karaktercsoportja. Legyen X_0 az egységelem (összefüggő) komponense X-ben, Y_1 X_0 annihilátora Y-ban, $X_1 = X/X_0$ és $Y_0 = Y/Y_1$. A dualitás miatt X_0 karatercsoportja Y_0, X_1 karaktercsoportja pedig Y_1. Mivel X_0 összefüggő és kompakt, Y_0 diszkrét csoport, melyben minden elem rendje végtelen. A Zorn lemmát felhasználva ki tudjuk választani maximális családját olyan $\{d_\alpha\}$ elemeknek, mely rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha $\sum_{i=1}^r n_{\alpha_i} d_{\alpha_i} = 0$ valamilyen pozitív egész r-re, $n_{\alpha_1}, \ldots, n_{\alpha_r}$ egészekre és $d_{\alpha_1}, \ldots, d_{\alpha_r}$ elemekre ebből a családból, akkor $n_{\alpha_i} = 0$ minden $i = 1, 2, \ldots, r$-re. (A fent említett tulajdonságú $\{d_{\alpha_1}, \ldots, d_{\alpha_n}\}$ halmazok között a tartalmazási relációt tekintjük a Zorn lemmában .) Mivel ez egy maximálisan lineárisan független elemcsalád, minden $d \in Y_0$ elemhez léteznek ebből a családból való $d_{\alpha_1}, \dots, d_{\alpha_k}$ elemek és $n, n_1, n_2, \dots, n_k$ $(n > 0)$ egészek, melyre

$$nd = n_1 d_{\alpha_1} + \cdots + n_k d_{\alpha_k}, \tag{5.1}$$

ugyanis a $\{d, d_{\alpha_1}, \dots, d_{\alpha_k}\}$ család már lineárisan függő, és az is elérhető, hogy $n > 0$ legyen. Ez a felírás egyértelmű, eltekintve a két oldal egész számmal való szorzásától.

A bevezetett jelölések alapján Y_0 minden eleme Y_1-nek egy mellékosztálya Y-ban. Tekintsük a d_α mellékosztályokat és vegyünk ki mindegyikből egy $y_\alpha \in Y$ elemet. Rögzítsük az y_α elemeket. Legyen

$$g(x, y_\alpha) := h_{y_\alpha}(x)$$

minden α-ra, ahol $h_{y_\alpha}(x)$ az 5.2. Lemmában definiált. Legyen $y \in Y$ tetszőleges. Ekkor y Y_1 valamely mellékosztályában benne van, mely mellékosztály Y_0 eleme. Ha ezt az Y_0-beli elemet d-vel jeöljük, akkor léteznek olyan $n, n_1, \dots, n_k$ $(n > 0)$ egész számok és a $\{d_\alpha\}$ családból való $d_{\alpha_1}, \dots, d_{\alpha_k}$ elemek, hogy (5.1.) fennáll. Legyen

$$g(x, y) := \frac{n_1}{n} g(x, y_{\alpha_1}) + \cdots + \frac{n_k}{n} g(x, y_{\alpha_k}).$$

Megmutatjuk, hogy a megkonstruált g kielégíti a kívánalmakat.

Mivel $h_y(x)$ folytonos X-en, $g(x, y)$ folytonos x-ben minden rögzített $y \in Y$ esetén, s mivel X kompakt Y diszkrét, így $g(x, y)$ mindkét változójában folytonos. (Ugyanis egy, az Y diszkrét csoportban konvergens sorozat egy idő után konstans.) A (2) és (3) tulajdonság a konstrukció alapján világos, (2) például abból következik, hogy $|h_y(x)| \le \pi$ minden $x \in X$, $y \in Y$-ra.

Mivel az Y-beli kompakt halmazok véges halmazok, a (4)-beli tulajdonságot elegendő minden $y \in Y$-ra bizonyítani. Legyen $y \in Y$, és jelölje $[y]$ Y_1-nek azt a mellékosztályát, melyhez y tartozik. Ekkor $[y] \in Y_0$. Ha d helyére $[y]$-t, d_α helyére $[y_\alpha]$-t írunk (5.1)-ben, akkor az a következő alakot ölti

$$n[y] = n_1[y_{\alpha_1}] + \cdots + n_k[y_{\alpha_k}]. \tag{5.2}$$

Tetszőleges két $y_1, y_2 \in [y]$ elemre $y_1 - y_2 \in Y_1$. (Itt $y_1 - y_2 = y_1 {y_2}^{-1}$.) Mivel Y_1 a teljesen széteső X/X_0 csoport karaktercsoportja, Y_1 minden eleme véges rendű. Így ha $y \in Y_1$, akkor létezik az egységelemnek olyan környezete X-ben, hogy $\langle x, y \rangle = 1$ ebben a környezetben. Ezért tetszőleges $y_1, y_2 \in [y]$ esetén létezik az egységelemnek olyan környezete X-ben, hogy $\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$, ugyanis ekkor $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 1$.

Felhasználva $g(x, y)$ konstrukcióját és az 5.2. Lemmát kapjuk, hogy minden y_α-ra létezik az egységelemnek olyan környezete X-ben, ahol $e^{ig(x, y_\alpha)} = \langle x, y_\alpha \rangle$. Legyen most $y \in Y$ tetszőleges. Ekkor (5.2.) alapján léteznek $y_{\alpha_j 1}, \dots, y_{\alpha_j n_j}$ elemek $[y_{\alpha_j}]$-ben $j = 1, 2, \dots, k$-ra, hogy

$$ny = \sum_{j=1}^{k} (y_{\alpha_j 1} + \cdots + y_{\alpha_j n_j}). \tag{5.3}$$

(Itt $y_1 + y_2$ a két karakter szorzatát jelöli!) Az előző bekezdésben tett megjegyzések alapján létezik az egységelemnek X-ben olyan környezete (mely függ $y_{\alpha_j r}$-től és y_{α_j}-től), ahol $\langle x, y_{\alpha_j r}\rangle = \langle x, y_{\alpha_j}\rangle$. Jelölje N az összes $y_{\alpha_j r}$-hez ($r = 1, 2, \ldots, n_j$; $j = 1, 2, \ldots, k$) tartozó környezet metszetét, így

$$\langle x, y_{\alpha_j r}\rangle = \langle x, y_{\alpha_j}\rangle \quad \text{minden } x \in N, \quad r = 1, \ldots, n_j, \quad j = 1, \ldots, k \quad \text{esetén.} \tag{5.4}$$

Így (5.3) és (5.4) alapján

$$\langle x, y\rangle^n = \prod_{j=1}^{k} \langle x, y_{\alpha_j}\rangle^{n_j} \quad \text{minden } x \in N\text{-re.}$$

Mivel léteznek az egységelemnek olyan környezetei, ahol $\langle x, y_{\alpha_j}\rangle = \exp\{ig(x, y_{\alpha_j})\}$, létezik az egységelemnek egy olyan környezete, ahol $\langle x, y\rangle^n = e^{ing(x,y)}$. Mivel $\langle x, y\rangle$ és $e^{ig(x,y)}$ folytonosak és X egységelemében nem tünnek el, létezik az egységelemnek olyan környezete, ahol $\langle x, y\rangle = e^{ig(x,y)}$. (Gondoljunk itt arra, hogy az n-edik gyök-képzés visszavezethető logaritmus képzésre, s ehhez kellenek az említett feltételek.)

Az (5) tulajdonságot kapjuk (1)-ből és felhasználva azt, az 5.2. Lemma alapján következő tényt, hogy $g(x, y)$ eltűnik, ha x vagy y a megfelelő csoport egységeleme.

□

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy mi a g függvény konkrét alakja néhány speciális csoport esetében. Mind a négy példa esetében az 5.3. Lemma feltételeit leellenőrizve győződhetünk meg a g függvény helyes voltáról.

1. Példa. Legyen $X = Y = \mathbb{R}^n$. Ha $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ és $y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y$, akkor

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) y_i,$$

ahol $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) olyan korlátos, folytonos függvény a valós egyenesen, melyre $\varphi_i(t) = t$ a 0 egy környezetében és $\varphi_i(-t) = -\varphi_i(t)$.

2. Példa. Legyen $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $X = K^n$ és $Y = Z_0^n$, ahol Z_0 az egész számok csoportja. Legyen továbbá $X = \{(x_1, \ldots, x_n) : -1 < x_i \leq 1 \text{ minden } i = 1, \ldots, n\text{-re}\}$, ahol az összeadást modulo 2 vesszük. Ha $y = (y_1, \ldots, y_n) \in Z_0^n$, akkor $g(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) y_i$, ahol φ_i az 1. Példában definiált.

3. Példa. Legyen Y a racionális számok additív csoportja és legyen X a karatercsoportja. Legyen továbbá $\varphi(x)$ egy olyan korlátos, folytonos függvény X-en, melyre $\exp\{i\varphi(x)\} = \langle x, y_0\rangle$ az egységelem egy X-beli környezetén, ahol y_0 Y-nak az egységelemtől különböző, rögzített eleme. Ekkor $g(x, y) = \varphi(x)\frac{y}{y_0}$.

4. Példa. Ha X teljesen széteső, akkor minden Y-t a valós egyenesbe képező homomorfizmus triviális, így ebben az esetben $g(x, y) = 0$ minden $x \in X$, $y \in Y$ esetén.

5.4. Lemma. Legyen $\mu_n = \prod_{j=1}^{k_n} \alpha_{nj}$, ahol $\{\alpha_{nj}\}$ az egyenletes kicsiség feltételét teljesítő valószínűség eloszlások háromszögrendszere X-en. Ha μ torlódási pontja μ_n valamely shift sorozatának, akkor az $\{y : \widehat{\mu}(y) \neq 0\}$ feltételt teljesítő karakterek halmaza nyílt részcsoportja Y-nak, és következésképpen ezen részcsoport X-beli annihilátorának normalizált Haar mértéke faktora μ-nek.

Bizonyítás. Mivel μ $\{\mu_n\}$ egy shift sorozatának torlódási pontja, létezik egy olyan részsorozat (amit továbbra is μ_n-nel fogunk jelölni), melyre $|\mu_n|^2 \Rightarrow |\mu|^2$, hiszen a konvolúció folytonos, és így

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{k_n} |\widehat{\alpha_{nj}}(y)|^2 = |\widehat{\mu}(y)|^2.$$

Ha $\widehat{\mu}(y) \neq 0$, akkor $\widehat{\mu}(-y) \neq 0$. A fenti egyenlőséget felhasználva megmutatjuk, hogy $\widehat{\mu}(y) \neq 0$ akkor és csak akkor, ha

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k_n} (1 - |\widehat{\alpha_{nj}}(y)|^2) < +\infty.$$

Jólismert, ha $|z| < 1$, akkor $\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \cdots$, így ha z elegendően kicsi nemnegatív szám, akkor $-2z \leq \log(1-z) \leq -z$. A fenti egyenlőség alapján következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \log\left[1 - (1 - |\widehat{\alpha_{nj}}(y)|^2)\right] = \log|\widehat{\mu}(y)|^2.$$

Az egyenletes kicsiség feltétele miatt elegendően nagy n-re, $1 - |\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2$ tetszőlegesen kicsivé tehető (ezek mind nemnegatív mennyiségek, mert egy karakterisztikus függvény abszolút értéke mindig kisebb egyenlő, mint egy), így a logaritmusra vonatkozó egyenlőtlenségek majd alkalmazhatók. Ha $\widehat{\mu}(y) \neq 0$, akkor $\log|\widehat{\mu}(y)|^2 > -\infty$, ezért

$$-\sup_{n} \sum_{j=1}^{k_n} \log\left[1 - (1 - |\widehat{\alpha_{nj}}(y)|^2)\right] < \infty,$$

így $z \leq -\log(1-z)$ (elegendően kicsi z-re) alapján

$$\sup_{n} \sum_{j=1}^{k_n} (1 - |\widehat{\alpha_{nj}}(y)|^2) < \infty.$$

Ha pedig $\sup_n \sum_{j=1}^{k_n} (1 - |\widehat{\alpha_{nj}}(y)|^2) < \infty$, akkor $-\frac{1}{2}\log(1-z) \leq z$ (elegendően kicsi nemnegatív z-re) alapján

$$-\frac{1}{2} \sup_{n} \sum_{j=1}^{k_n} \log\left[1 - (1 - |\widehat{\alpha_{nj}}(y)|^2)\right] < \infty,$$

így $\widehat{\mu}(y) \neq 0$. Az 5.1. Lemma bizonyításában használt egyenlőtlenség alapján,

$$1 - \varphi(y_1 + y_2) \leq 2[(1 - \varphi(y_1)) + (1 - \varphi(y_2))]$$

minden valós értékű φ karakterisztikus függvényre, ugyanis ha $\varphi(t) \in \mathbb{R}$, akkor $\varphi(t) = \mathbb{E}[\cos(t\xi)\,]$. Speciálisan mivel $|\widehat{\alpha_{nj}}(y)|^2$ valós értékű karakterisztikus függvény,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k_n}(1 - |\widehat{\alpha_{nj}}(y_1 + y_2)|^2) \leq & 2\,[\sum_{j=1}^{k_n}(1 - |\widehat{\alpha_{nj}}(y_1)|^2) + \\ & + \sum_{j=1}^{k_n}(1 - |\widehat{\alpha_{nj}}(y_2)|^2)\,].\end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség korábbi észrevételünk alapján adja, hogy $\widehat{\mu}(y_1 + y_2) \neq 0$, ha $\widehat{\mu}(y_1) \neq 0$ és $\widehat{\mu}(y_2) \neq 0$. Felhasználva $\widehat{\mu}(y)$ folytonosságát kapjuk, hogy $\{y : \widehat{\mu}(y) \neq 0\}$ Y nyílt részcsoportja.

Az maradt még hátra, hogy megmutassuk, hogy a $H := \{y : \widehat{\mu}(y) \neq 0\}$ részcsoport X-beli annihilátorának normalizált Haar mértéke faktora μ-nek. Jelölje C ezt az annihilátort, azaz

$$C := \big\{x \in X : \langle x, y\rangle = 1 \quad \text{minden } y \in H \text{ esetén}\big\}.$$

Jelölje ω_C ezen X-beli kompakt részcsoport normalizált Haar mértékét. Azt kell bizonyítanunk, hogy létezik olyan η valószínűségi mérték, melyre $\mu = \omega_C * \eta$. Ez azzal ekvivalens, hogy $\widehat{\mu}(y) = \widehat{\omega}_C(y)\,\widehat{\eta}(y)$ minden $y \in Y$-ra. Felhasználva, hogy minden $y \in H$-ra

$$\widehat{\omega}_C(y) = \int_X \langle x, y\rangle \, d\,\omega_C(x) = \int_C \langle x, y\rangle \, d\,\omega_C(x) = \int_C 1 \, d\,\omega_C(x) = \omega_C(C) = 1,$$

legyen η az a valószínűségi mérték, melynek karakterisztikus függvénye

$$\widehat{\eta}(y) := \begin{cases} \widehat{\mu}(y) & \text{, ha } y \in H \\ 0 & \text{, ha egyebként.} \end{cases}$$

Mivel H nyílt részcsoport, a később szereplő 5.5 Lemma és a 3.2. Tétel alapján tényleg létezik olyan valószínűségi mérték, melynek $\widehat{\eta}$ a karakterisztikus függvénye (s ezt jelöltük η-val). Mivel $\widehat{\omega}_C(y) = 1$ $y \in H$ esetén, kapjuk, hogy η faktora μ-nek.

□

Válasszunk és rögzítsünk egy olyan $g(x, y)$ $X \times Y$-n definiált függvényt, mely kielégíti az 5.3. Lemmában említett tulajdonságokat. (A g függvényt lokákis belső szorzásnak is nevezzük, egyértelműségéről azonban nincs szó. Ezt a korábbi példák is mutatják.) Ezen fejezet fő eredménye a következő:

5.1. Tétel. Legyen $\{\alpha_{nj}\}$ $j = 1, 2, \ldots, k_n$ az egyenletes kicsiség feltételét teljesítő eloszlások háromszögrendszere, legyen továbbá

$$\mu_n = \prod_{j=1}^{k_n} \alpha_{nj}.$$

Legyen $\beta_{nj} = e(\alpha_{nj} * x_{nj})$, ahol x_{nj} az X csoportnak az az eleme, melyre

$$\langle x_{nj}, y\rangle = \exp\{-i\int g(x,y)\,d\,\alpha_{nj}(x)\}.$$

(β_{nj} nem más, mint az $\alpha_{nj} * x_{nj}$ eloszláshoz tartozó általánosított Poisson mérték.)
Legyen $\lambda_n = (\prod_{j=1}^{k_n}\beta_{nj}) * x_n$, ahol $x_n = -\sum_{j=1}^{k_n} x_{nj}$. Amennyiben a $\{\lambda_n\}$ vagy $\{\mu_n\}$ sorozatok valamelyike shift kompakt és ezen shift sorozat egyetlen torlódási pontjának sincs idempotens faktora, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in K}|\widehat{\lambda}_n(y) - \widehat{\mu}_n(y)| = 0$$

minden $K \subset Y$ kompakt részhalmazra.

Bizonyítás. A bizonyítás során a következő megállapodásokkal élünk. A $c_1, c_2, \ldots$ módon jelölt konstansok csak a K kompakt halmaztól függenek, n-től nem. Az összes állítás elegendően nagy n-re vonatkozik, és N-el jelöljük az X-beli egységelem tetszőlegesen kicsiny környezetét.
Az x_{nj} elemek jóldefiniáltak, mivel $g(x,y)$ tulajdonságai folytán $\exp\{-i\int g(x,y)\,d\,\alpha(x)\}$ karakter Y-n tetszőleges α eloszlás esetén, és $\widehat{Y} = X$, illetve a Pontrjagin-féle dualitás tétel miatt csak az egypont-kiértékelések a karakterek Y-n. Továbbá az X-beli egységelem tetszőleges N környezetére az x_{nj} pontok mind N-ben vannak elegendően nagy n-re. Hiszen $\exp\{-i\int g(x,y)\,d\,\alpha_{nj}(x)\}$ az x_{nj} pontba koncentrálódó Dirac mérték Fourier - transzformáltja (ui. egyenlő $\langle x_{nj}, y\rangle$-al), és $\{\alpha_{nj}\}$ egyenletes kicsisége révén $\{\delta_{x_{nj}}\}$ is egyenletesen kicsi, így mindezeket egybevetve az 5.1. Definíciót követő megjegyzés alapján $\lim_{n\to\infty}\sup_{1\leq j\leq k_n}|\delta_{x_{nj}}(N')| = 0$, ami azzal ekvivalens, hogy az x_{nj} pontok mind N-ben vannak elegendően nagy n-re. Ezért $\{\alpha_{nj}\}$ egyenletes kicsisége alapján kapjuk a $\{\beta_{nj}\}$ háromszögrendszer egyenletes kicsiségét is. Így $\widehat{\lambda}_n(y)$ és $\widehat{\mu}_n(y)$ nem tünnek el K-ban , tehát szabad a logaritmusukat vennünk. Mivel μ_n egyetlen shift sorozata sem bír olyan torlódási ponttal, melynek idempotens faktora lenne, az 5.4. Lemma alapján kapjuk, hogy $\widehat{\mu}_n(y)$ egyenletesen elválasztható a 0-tól minden $y \in K$-ra. Így elég azt bizonyítanunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in K}|\log\widehat{\lambda}_n(y) - \log\widehat{\mu}_n(y)| = 0.$$

A bevezetett jelölések felhasználásával

$$\log\widehat{\lambda}_n(y) = \sum_{j=1}^{k_n}\log\widehat{\beta}_{nj}(y) + \sum_{j=1}^{k_n}\log\langle -x_{nj}, y\rangle = \sum_{j=1}^{k_n}\log\widehat{\beta}_{nj}(y) + \sum_{j=1}^{k_n}\log\frac{1}{\langle x_{nj}, y\rangle} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_n}\log\widehat{\beta}_{nj}(y) - \sum_{j=1}^{k_n}\log\langle x_{nj}, y\rangle = \sum_{j=1}^{k_n}\log\exp\{\int[\langle x,y\rangle - 1]\,d\,(\alpha_{nj} * x_{nj})(x)\} +$$

$$+ i\sum_{j=1}^{k_n}\int g(x,y)\,d\,\alpha_{nj}(x) = \sum_{j=1}^{k_n}[(\widehat{\alpha_{nj} * x_{nj}})(y) - 1] + i\sum_{j=1}^{k_n}\int g(x,y)\,d\,\alpha_{nj}(x),$$

és $\log \widehat{\mu}_n(y) = \sum_{j=1}^{k_n} \log \widehat{\alpha}_{nj}(y)$.
Legyen $\Theta_{nj} := \alpha_{nj} * x_{nj}$ és felhasználva, hogy $|\log(1-z)+z| \leq |z|^2$, ha $|z| \leq \frac{1}{2}$ (hiszen $|\log(1-z)+z| \leq \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{3} + \cdots \leq \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{2} + \cdots = \frac{|z|^2}{2(1-|z|)} \leq |z|^2$, ha $|z| \leq \frac{1}{2}$), illetve x_{nj} definícióját az $A := |\log \widehat{\lambda}_n(y) - \log \widehat{\mu}_n(y)|$ abszolút értéket a következőképpen becsülhetjük

$$\begin{aligned}
A &= \Big|\sum_{j=1}^{k_n}(\widehat{\Theta}_{nj}(y)-1) + i\sum_{j=1}^{k_n}\int g(x,y)\,d\,\alpha_{nj} - \sum_{j=1}^{k_n}\log(\,\widehat{\alpha_{nj} * x}_{nj}(y)\widehat{(-x_{nj})}(y))\Big| = \\
&= \Big|\sum_{j=1}^{k_n}(\widehat{\Theta}_{nj}(y)-1) + i\sum_{j=1}^{k_n}\int g(x,y)\,d\,\alpha_{nj} - \sum_{j=1}^{k_n}\log\widehat{\Theta}_{nj}(y) + \sum_{j=1}^{k_n}\log\langle x_{nj},y\rangle\Big| = \\
&= \Big|\sum_{j=1}^{k_n}(\widehat{\Theta}_{nj}(y)-1) - \sum_{j=1}^{k_n}\log\widehat{\Theta}_{nj}(y)\Big| \leq c_1\sum_{j=1}^{k_n}|1-\widehat{\Theta}_{nj}(y)|^2 \leq \\
&\leq c_1\sum_{j=1}^{k_n}|1-\widehat{\Theta}_{nj}(y)|\sup_j|1-\widehat{\Theta}_{nj}(y)|.
\end{aligned}$$

Mivel $\{\Theta_{nj}\}$ infinitézimálisan kicsiny, a fenti egyenlőség alapján kapjuk, hogy elegendő azt bizonyítani, hogy

$$\sup_n \sup_{y\in K}\Big[\sum_{j=1}^{k_n}|1-\widehat{\Theta}_{nj}(y)|\Big] < \infty. \tag{5.5}$$

(Gondoljunk az infinitézimálisan kicsiség 5.1. Definíció után említett ekvivalens átfogalmazására.) Az X-beli egység tetszőleges N környezetére

$$\begin{aligned}
|1-\widehat{\Theta}_{nj}(y)| &\leq \Big|\int_N [1-\langle x,y\rangle]\,d\,\Theta_{nj}\Big| + \Big|\int_{N'}[1-\langle x,y\rangle]\,d\,\Theta_{nj}\Big| \\
&\leq \Big|\int_N [1-\langle x,y\rangle]\,d\,\Theta_{nj}\Big| + 2\Theta_{nj}(N').
\end{aligned} \tag{5.6}$$

A $g(x,y)$ függvény 5.3. Lemmabeli (4) tulajdonsága alapján létezik az X-beli egységnek olyan környezete, ahol

$$\langle x,y\rangle = e^{ig(x,y)} \quad \text{minden } y \in K\text{-ra.}$$

Egy ilyen környezetben, minden $y \in K$-ra kapjuk, hogy

$$|1-\langle x,y\rangle + ig(x,y)| = |1-\langle x,y\rangle + \log\langle x,y\rangle| \leq c_2|1-\langle x,y\rangle|^2 \leq c_2 g^2(x,y), \tag{5.7}$$

hiszen $\langle x,y\rangle = \cos[g(x,y)] + i\sin[g(x,y)]$, s így

$$|1-\langle x,y\rangle|^2 = (1-\cos[g(x,y)])^2 + (\sin[g(x,y)])^2 = 2 - 2\cos[g(x,y)] \leq g^2(x,y)$$

a koszinuszokra vonatkozó 5.1. Lemmabeli egyenlőtlenség alapján. Az (5.6) és (5.7) egyenletek alapján

$$|1-\widehat{\Theta}_{nj}(y)| \leq \Big|\int_N g(x,y)\,d\,\Theta_{nj}\Big| + c_2\int_N g^2(x,y)\,d\,\Theta_{nj} + 2\Theta_{nj}(N') \tag{5.8}$$

minden $y \in K$-ra. A $g(x,y)$ függvény 5.3. Lemmabeli (2) tulajdonsága alapján

$$\begin{aligned}\Big|\int_X g(x,y)\,d\,\Theta_{nj}\Big| &= \Big|\int_X g(x,y)\,d\,(\alpha_{nj} * x_{nj})\Big| = \Big|\int_X g(x+x_{nj},y)\,d\,\alpha_{nj}\Big| \\ &\leq \Big|\int_N g(x+x_{nj},y)\,d\,\alpha_{nj}\Big| + c_3\alpha_{nj}(N'). \end{aligned}\tag{5.9}$$

Mivel elegendően nagy n-re az összes x_{nj} az egységelem tetszőlegesen kicsiny környezetében van, és mivel $e^{ig(x,y)} = \langle x,y\rangle$ minden $x \in N$ és $y \in K$ esetén, felhasználva a $g(x,y)$ függvény 5.3. Lemmabeli (5) tulajdonságát kapjuk, hogy

$$g(x+x_{nj},y) = g(x,y) + g(x_{nj},y), \tag{5.10}$$

minden $x \in N$ és $y \in K$ esetén. Ugyanis $e^{ig(x_{nj}+x,y)} = \langle x+x_{nj},y\rangle = y(x)y(x_{nj}) = e^{ig(x_{nj},y)}e^{ig(x,y)}$. Továbbá $e^{ig(x_{nj},y)} = \langle x_{nj},y\rangle = \exp\{-i\int g(x,y)\,d\,\alpha_{nj}(x)\}$ minden $y \in K$ esetén elegendően nagy n-re. A $g(x,y)$ függvény 5.3. Lemmabeli (5) tulajdonsága miatt,

$$g(x_{nj},y) = -\int g(x,y)\,d\,\alpha_{nj}. \tag{5.11}$$

Az (5.10) és (5.11) egyenletek felhasználásával minden $y \in K$-ra

$$\begin{aligned}\Big|\int_N g(x+x_{nj},y)\,d\,\alpha_{nj}(x)\Big| &= \Big|\int_N [\,g(x,y) + g(x_{nj},y)\,]\,d\,\alpha_{nj}(x)\Big| = \\ &= \Big|\int_N g(x,y)\,d\,\alpha_{nj} - \alpha_{nj}(N)\int g(x,y)\,d\,\alpha_{nj}\Big| = \\ &= \Big|\alpha_{nj}(N')\int_N g(x,y)\,d\,\alpha_{nj} - \alpha_{nj}(N)\int_{N'} g(x,y)\,d\,\alpha_{nj}\Big| \leq \\ &\leq c_4\alpha_{nj}(N'),\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk az 5.3. Lemma (2)-t is. A fenti egyenlőtlenség és (5.9) alapján

$$\Big|\int g(x,y)\,d\,\Theta_{nj}\Big| \leq c_5\alpha_{nj}(N') \tag{5.12}$$

minden $y \in K$-ra. Felhasználva az (5.8), (5.12) egyenleteket és az 5.3. Lemma (2)-t,

$$\begin{aligned}|1-\widehat{\Theta}_{nj}(y)| &\leq c_2\int_N g^2(x,y)\,d\,\Theta_{nj} + 2\Theta_{nj}(N') + \Big|\int_X g(x,y)\,d\,\Theta_{nj} - \int_{N'} g(x,y)\,d\,\Theta_{nj}\Big| \\ &\leq c_2\int_N g^2(x,y)\,d\,\Theta_{nj} + c_6\Theta_{nj}(N') + c_7\alpha_{nj}(N'),\end{aligned}$$

minden $y \in K$-ra. Így a bizonyítás befejezéséhez elegendő megmutatnunk az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$\limsup_{n} \sum_{j=1}^{k_n} \Theta_{nj}(N') < \infty, \tag{5.13}$$

$$\limsup_{n} \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{nj}(N') < \infty, \tag{5.14}$$

$$\limsup_{n} \sup_{y\in K} \sum_{j=1}^{k_n} \int_N g^2(x,y)\, d\,\Theta_{nj}(x) < \infty. \tag{5.15}$$

Tekintsük a $|\mu_n|^2 = \prod_{j=1}^{k_n} |\alpha_{nj}|^2$ eloszlást. Mivel $\{\mu_n\}$ shift kompakt, ugyanúgy mint a 4.3. Tétel bizonyításának utolsó részében kapjuk, hogy $|\mu_n|^2$ relatív kompakt és $|\mu_n|^2$ egyetlen torlódási pontjának sincs idempotens faktora, így az 5.4. Lemma alapján $|\widehat{\mu}_n(y)|^2$ elválasztható a 0-tól $y \in K$-ban és $n \in N$-ben is egyenletesen. Így hasonlóan az 5.4. Lemma bizonyításában látottakhoz kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in K} \sum_{j=1}^{k_n} (1 - |\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2) < \infty.$$

Ez ugyanaz, mint (5.5) Θ_{nj} helyébe $|\alpha_{nj}|^2$-t írva, ugyanis $\limsup_{n\to\infty}$ helyett $\sup_{n\in\mathbb{N}}$ írható. Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in K} \Big| \exp\Big\{ \sum_{j=1}^{k_n} (|\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2) - 1) \Big\} - |\widehat{\mu}_n(y)|^2 \Big| = 0.$$

Mivel $|\widehat{\mu}_n(y)|^2 = \prod_{j=1}^{k_n} |\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2 = \exp\big\{ \sum_{j=1}^{k_n} \log |\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2 \big\}$ kapjuk, hogy

$$\Big| \exp\Big[\sum_{j=1}^{k_n} (|\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2 - 1) \Big] - \exp\Big[\sum_{j=1}^{k_n} \log |\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2 \Big] \Big| =$$

$$= \Big| \exp\Big[\sum_{j=1}^{k_n} (|\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2 - 1) \Big] \Big(1 - \exp\Big[\sum_{j=1}^{k_n} (\log |\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2 - |\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2 + 1) \Big] \Big) \Big| \leq$$

$$\leq \Big| 1 - \exp\Big[\sum_{j=1}^{k_n} (\log |\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2 - |\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2 + 1) \Big] \Big) \Big| \leq \sum_{j=1}^{k_n} \big(|\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2 - 1 - \log |\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2 \big) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k_n} |1 - |\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2|^2 \leq \max_{1\leq j\leq k_n} |1 - |\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2| \sum_{j=1}^{k_n} |1 - |\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2|$$

elég nagy n-re, ahol felhasználtuk, hogy egy karakterisztikus függvény abszolút értéke kisebb egyenlő, mint egy; $1 - e^z \leq z$, ha $z > 0$; illetve azt is, hogy az $\{\alpha_{nj}\}$ rendszer infinitézimális. Újra kihasználva az $\{\alpha_{nj}\}$ rendszer infinitezimalitását kapjuk, hogy a legutóbb becsült kifejezés K halmazon vett szuprémumának $n \to \infty$ esetén nulla a határértéke. Így a $e\big(\sum_{j=1}^{k_n} |\alpha_{nj}|^2\big)$ sorozat kompakt. Ugyanis tetszőleges részsorozat esetén térjünk át arra a $|\mu_n|^2$ relatív kompaktsága miatt létező részsorozatra (melyet továbbra is az eredeti módon jelölünk), melyre $|\mu_n|^2$ már konvergens. Felhasználva, hogy $e\big(\sum_{j=1}^{k_n} |\alpha_{nj}|^2\big)$ karakterisztikus függvénye $\exp\big\{\sum_{j=1}^{k_n}(|\widehat{\alpha}_{nj}(y)|^2) - 1)\big\}$ az előbb bizonyított (határátmenetre vonatkozó) egyenlőség és a 3.3. folytonossági tétel alapján erre a részsorozatra $e\big(\sum_{j=1}^{k_n} |\alpha_{nj}|^2\big)$ tart gyengén $|\mu_n|^2$-hez. Felhasználva a 4.3. Tételt, az e pont tetszőleges N X-beli környezetére

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} |\alpha_{nj}|^2(N') < \infty, \tag{5.16}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \int (1 - \mathrm{R}\,\langle x, y\rangle)\, d\,|\alpha_{nj}|^2 < \infty. \tag{5.17}$$

(A 4.3. Tétel (b) feltétele azért teljesül, mert $|\mu_n|^2$ egyetlen torlódási pontjának sincs idempotens faktora. Az (5.16) feltétel következtetéséhez a II. 1.0. Prohorov tételt is fel kell használnunk.)

Válasszunk az egységelemnek egy olyan V környezetét, melyre $V + V \subset N$ (ilyen a lokális kompaktság miatt létezik). Ekkor mivel $(V+V)' \subset (V+x)'$ minden $x \in V$-re

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k_n}\alpha_{nj}(N') &\le \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{nj}((V+V)') \le \sum_{j=1}^{k_n} \inf_{x\in X} \alpha_{nj}((V+x)') = \sum_{j=1}^{k_n} \inf_{x\in X} \alpha_{nj}(V'+x) = \\
&= \sum_{j=1}^{k_n} \int_V \inf_{x\in X} \alpha_{nj}(V'+x)\, d\,\alpha_{nj}\, [\alpha_{nj}(V)]^{-1} \le \sum_{j=1}^{k_n} [\alpha_{nj}(V)]^{-1} \int_V \alpha_{nj}(V'+x)\, d\,\alpha_{nj} \le \\
&\le \sum_{j=1}^{k_n} [\alpha_{nj}(V)]^{-1} \int_X \alpha_{nj}(V'+x)\, d\,\alpha_{nj} \le \sup_j\, [\alpha_{nj}(V)\,]^{-1} \sum_{j=1}^{k_n} |\alpha_{nj}|^2(V'),
\end{aligned}$$

ugyanis $\alpha_{nj} * \overline{\alpha}_{nj}(V') = \int_X \alpha_{nj}(V' - x)\, d\,\overline{\alpha}_{nj}(x) = \int_X \alpha_{nj}(V' + x)\, d\,\alpha_{nj}(x)$. Az 5.1. Definíciót követő megjegyzés alapján bármilyen $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \ge n_0$ esetén $\sup_j\, [\alpha_{nj}(V)\,]^{-1} < 1 + \epsilon$, ugyanis bármilyen $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \ge n_0$ esetén $\sup_j |\alpha_{nj}(V')| < \epsilon$, így $\epsilon > 1 - \inf_j \alpha_{nj}(V)$, ami alapján $(1-\epsilon)^{-1} > \sup_j\, [\alpha_{nj}(V)\,]^{-1}$. Felhasználva ezen egyenlőtlenséget, ill. azt, hogy $\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{nj}(N') \le \sup_j\, [\alpha_{nj}(V)\,]^{-1} \sum_{j=1}^{k_n} |\alpha_{nj}|^2(V')$ (5.16) alapján kapjuk (5.14)-et. Mivel $|\alpha_{nj}|^2 = \alpha_{nj} * \overline{\alpha}_{nj} = \alpha_{nj} * x_{nj} * (-x_{nj}) * \alpha_{nj} = \Theta_{nj} * \overline{\Theta}_{nj} = |\Theta_{nj}|^2$ és $\{\Theta_{nj}\}$ egyenletesen infinitézimális ugyanez a gondolatmenet vezet (5.13)-hoz is.

Az 5.1. Lemma alapján, felhasználva (5.17)-et kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in K} \sum_{j=1}^{k_n} \int [1 - \mathrm{R}\,\langle x, y\rangle\,]\, d\,|\Theta_{nj}|^2 < \infty,$$

hiszen a K feletti szuprémum kicserélhető egy véges $E \subset K$ részhalmaz feletti szuprémumra. A fenti egyenlőtlenség és (5.16) alapján

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in K} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{V\times V} [1 - \mathrm{R}\langle x_1 - x_2, y\rangle\,]\, d\,\Theta_{nj}(x_1)\, d\,\Theta_{nj}(x_2) < \infty, \tag{5.18}$$

az egységelem minden V környezetére. Hiszen $\sum_{j=1}^{k_n} \int [1 - \mathrm{R}\langle x, y\rangle\,]\, d\,|\Theta_{nj}(x)|^2 =$

$$= \sum_{j=1}^{k_n} \int_V [1 - \mathrm{R}\langle x, y\rangle\,]\, d\,|\Theta_{nj}(x)|^2 + \sum_{j=1}^{k_n} \int_{V'} [1 - \mathrm{R}\langle x, y\rangle\,]\, d\,|\Theta_{nj}(x)|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_n} \int_{V\times V} [1 - \mathrm{R}\langle x_1 + x_2, y\rangle\,]\, d\,\Theta_{nj}(x_1)\overline{\Theta}_{nj}(x_2) + \sum_{j=1}^{k_n} \int_{V'} [1 - \mathrm{R}\langle x, y\rangle\,]\, d\,|\Theta_{nj}(x)|^2$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k_n} \int_{V\times V} [1 - \mathrm{R}\langle x_1 - x_2, y\rangle\,]\, d\,\Theta_{nj}(x_1)\Theta_{nj}(x_2) + \sum_{j=1}^{k_n} |\alpha_{nj}|^2(V'),$$

mert $|\alpha_{nj}|^2 = |\Theta_{nj}|^2$ és $1 - \mathrm{R}\langle x, y\rangle \leq 1$. Felhasználva, hogy $N' \subset (V + V)$, és (5.16)-at kapjuk (5.18)-at.

Válasszuk most V-t úgy, hogy $V - V \subset N$. Ekkor $\mathrm{R}\langle x_1 - x_2, y\rangle = \mathrm{R}(e^{ig(x_1 - x_2, y)}) = \cos(g(x_1 - x_2, y))$, ahol $x_1,\, x_2 \in V$, hiszen $x_1 - x_2 \in N$ és $\langle x, y\rangle = e^{ig(x,y)}$ minden $y \in K$, $x \in N$ esetén. Mivel $1 - \cos z > z^2/4$ elegendően kicsi z-re, a $g(x, y)$ függvény 5.3. Lemmabeli (5) tulajdonsága alapján $1 - \mathrm{R}\langle x_1 - x_2, y\rangle \geq \frac{1}{4} g^2(x_1 - x_2, y)$ minden $y \in K$-ra. Mivel $\langle x, y\rangle = e^{ig(x,y)}$ minden $y \in K,\ x \in N$ esetén kapjuk, hogy

$$g(x_1 - x_2, y) = g(x_1, y) - g(x_2, y) \quad \text{minden } x_1,\, x_2 \in V,\ \ y \in K \text{ esetén.}$$

(Felhasználva itt újra az 5.3. Lemma (5)-t.) Így minden $x_1,\, x_2 \in V$, $y \in K$ esetén,

$$1 - \mathrm{R}\langle x_1 - x_2, y\rangle \geq \frac{1}{4}\,[g^2(x_1, y) + g^2(x_2, y) - 2g(x_1, y)g(x_2, y)\,]. \tag{5.19}$$

Az (5.18) és (5.19) egyenlőtlenségek alapján

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in K} \Big\{ \sum_{j=1}^{k_n} \Big[\int_V g^2(x, y)\, d\,\Theta_{nj}(x) - \Big(\int_V g(x, y)\, d\,\Theta_{nj}(x)\Big)^2 \Big] \Big\} < \infty. \tag{5.20}$$

Az (5.12), (5.14), (5.20) összefüggések felhasználásával kapjuk (5.15)-t.

Tegyük fel most, hogy $\{\lambda_n\}$ shift kompakt és tetszőleges shift sorozata egyetlen-torlódási pontjának sincs idempotens faktora. Ekkor a 4.3. Tétel és az 5.1. Lemma alapján az egységelem tetszőleges N környezetére és minden $K \subset Y$ kompakt részhalmazra

$$\sup_n \sum_{j=1}^{k_n} \Theta_{nj}(N') < \infty, \tag{5.21}$$

$$\sup_n \sup_{y\in K} \sum_{j=1}^{k_n} \int [1 - \mathrm{R}\langle x, y\rangle\,]\, d\,\Theta_{nj} < \infty, \tag{5.22}$$

ugyanis a 4.3. Tétel alkalmazásához legyen $F_n := \sum_{j=1}^{k_n} \Theta_{nj}$, így $\lambda_n = e(F_n) * x_{nj}$, és (5.22) azért igaz egyenletesen K-ban, mert az 5.1. Lemma alapján át tudunk menni véges halmazra, s erre a 4.3. Lemma alapján már fennáll a megkívánt egyenlőtlenség.

Legyen N az X-beli egységelem tetszőleges környezete, V pedig egy olyan környezete az egységelemnek, melyre $V - V \subset N$. Mivel elegendően nagy n-re az összes x_{nj} pont V-hez tartozik kapjuk, hogy $V' - x_{nj} \supset N'$ és $\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{nj}(N') \leq \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{nj}(V' - x_{nj}) = \sum_{j=1}^{k_n} \Theta_{nj}(V')$, hiszen $\Theta_{nj} = \alpha_{nj} * x_{nj}$, s ezért $\sup_n \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{nj}(N') < \infty$. Mivel $1 - \cos z > z^2/4$ elegendően kicsi z-re, minden $K \subset Y$ kompakt részhalmaz esetén létezik egy elegendően kicsiny környezete az egységelemnek X-ben, hogy

$$1 - \mathrm{R}\,\langle x, y\rangle \geq \frac{1}{4} g^2(x,y), \quad \text{minden } x \in N,\ y \in K \text{ esetén},$$

így

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in K} \sum_{j=1}^{k_n} \int_N g^2(x,y)\, d\,\Theta_{nj}(x) < \infty.$$

Ezért az (5.13)-(5.15) egyenlőtlenségek igazak. Így (5.5) is fennáll, ami alapján

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in K} |\widehat{\lambda}_n(y) - \widehat{\mu}_n(y)| = 0.$$

□

5.5. Lemma. Legyen $H \subset Y$ nyílt részcsoportja Y-nak és $\varphi(y)$, $y \in H$ egy folytonos, pozitív definit függvény H-n. Legyen

$$\widetilde{\varphi}(y) = \begin{cases} \varphi(y) & , \text{ha } y \in H \\ 0 & , \text{ha } y \notin H. \end{cases}$$

Ekkor $\widetilde{\varphi}$ folytonos, pozitív definit függvény Y-n.

Bizonyítás. Mivel egy nyílt részcsoport egyben zárt is, következik $\widetilde{\varphi}$ folytonossága. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ komplex számok, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ karakterek, $n \in \mathbb{N}$. Legyenek $H_1, \ldots, H_k$ azon különböző mellékosztályok, melyekhez $y_1, \ldots, y_n$ tartozik. Válasszunk a $H_1, \ldots, H_k$ mellékosztályokból $w_1, \ldots, w_n$ elemeket. Ekkor

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} a_i\, \overline{a}_j\, \widetilde{\varphi}(y_i - y_j) &= \sum_i \Big\{ \sum_{(r,s)\,:\, y_r, y_s \in H_i} a_r\, \overline{a}_s\, \widetilde{\varphi}(y_r - y_s) \Big\} \\ &= \sum_i \Big\{ \sum_{(r,s)\,:\, y_r, y_s \in H_i} a_r\, \overline{a}_s\, \widetilde{\varphi}\,[(y_r - w_i) - (y_s - w_i)\,]) \Big\},\end{aligned}$$

ugyanis ha $y_r \in H_r$, $y_s \in H_s$ és $H_r \neq H_s$, akkor $y_r - y_s \notin H$, s így $\widetilde{\varphi}(y_r - y_s) = 0$. Mivel $y_r - w_i \in H$ minden olyan r-re, melyre $y_r \in H_i$ és mivel $\widetilde{\varphi} = \varphi$ H-n kapjuk, hogy a fenti egyenlet jobboldalán álló szumma minden (kapcsos zárójelek közötti) tagja nemnegatív. Így $\widetilde{\varphi}$ pozitív definit.

$\square$

5.2. Tétel. Ha $\{\alpha_{nj}\}$ $j = 1, \ldots, k_n$ az egyenletes kicsiség feltételét teljesítő háromszögrendszer, $\mu_n = \prod_{j=1}^{k_n} \alpha_{nj}$ és $\mu_n \Rightarrow \mu$, akkor μ korlátlanul osztható.

Bizonyítás. Ha μ-nek nincs idempotens faktora, akkor $\lambda_n \Rightarrow \mu$ is fennáll, ahol λ_n az 5.1. Tételben konstruált. A 4.1. Tétel alapján μ korlátlanul osztható.

Tekintsük most az általános μ esetét. Az 5.4. Lemma alapján a $H := \{y : \widehat{\mu}(y) \neq 0\}$ nyílt részcsoportja Y-nak. Ha G ezen részcsoport X-beli annihilátora, akkor ezen G kompakt részcsoport normalizált Haar mértéke μ faktora. Legyen τ a kanonikus homomorfizmus X-ből X/G-be. Ekkor $\{\alpha_{nj}\tau^{-1}\}$ teljesíti az egyenletes kicsiség feltételét X/G-ben és $\mu_n\tau^{-1} \Rightarrow \mu\tau^{-1}$. A konstrukció alapján $\mu\tau^{-1}$-nek nincs idempotens faktora, s így a bizonyítás első részét felhasználva $\mu\tau^{-1}$ korlátlanul osztható. A 3.3. Tétel bizonyításához hasonlóan $\widehat{\mu}(y) = \widehat{\mu\tau^{-1}}(y)$ minden $y \in H$-ra, illetve H definíciója miatt minden $y \notin H$-ra $\widehat{\mu}(y) = 0$. Legyen k tetszőleges pozitív egész, ekkor létezik olyan ν mérték X/G-n, hogy $\mu\tau^{-1} = \nu^k * z$, ahol $z \in X/G$. Mivel $\widehat{\nu}$ folytonos, pozitív definit $\widehat{X/G} = H$-n, az 5.5. Lemma alapján kiterjeszthető Y-ra folytonos, pozitív definit függvénnyé. Jelölje ezt a kiterjesztést $\widehat{\widehat{\nu}}$, az 5.5. Lemmabeli konstrukció miatt $\widehat{\widehat{\nu}}(y) = \widehat{\nu}(y)$ minden $y \in H$ esetén és $\widehat{\widehat{\nu}}(y) = 0$ minden $y \notin H$-ra. A 3.2. Tétel alapján $\widehat{\widehat{\nu}}$ karakterisztikus függvénye egy X-en értelmezett mértéknek, jelöljük ezt $\widetilde{\nu}$-al, ekkor $\widetilde{\nu}\tau^{-1} = \nu$. Ha x tetszőleges pont z-nek G szerinti mellékosztályában, akkor nyilván $\mu = \widetilde{\nu}^k * x$. Így μ korlátlanul osztható.

$\square$

Megjegyzés. Az 5.2. Tételben feltételeztük, hogy $\{\alpha_{nj}\}$ egyenletesen kicsi. Azonban elég azt feltételezni, hogy létezik egy olyan $\{x_{nj}\} \subset X$ sorozat, hogy $\{\alpha_{nj} * x_{nj}\}$ egyenletesen kicsi.

6. Gauss eloszlások.

Ebben a részben megadjuk a Gauss eloszlások definícióját, s reprezentációjukat is. Ez a definíció konzisztens a véges dimenziós vektorterekben definiált Gauss eloszlások klasszikus definíciójával.

A határérték-tételek szemszögéből nézve a Gauss eloszlások nagyon természetes módon merülnek fel. Tegyük fel, hogy F_n az X csoporton értelmezett véges mértékek sorozata, hogy (1) az egységelem tetszőleges környezetén kívül $F_n \to 0$, amint $n \to \infty$ és (2) $e(F_n)$ alkalmas shift sorozata konvergál. Ha $F_n(X)$ nem egyenletesen korlátos előfordulhat, hogy $e(F_n)$ egy nemdegenerált eloszláshoz konvergál. És az ilyen eloszlások pontosan a Gauss eloszlások.

6.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy μ eloszlás Gauss eloszlású, ha a következő feltételeket teljesíti:

(i) μ korlátlanul osztható,

(ii) ha $\mu = e(F) * \alpha$, ahol α korlátlanul osztható, akkor F az egységelemere koncentrálódó mérték.

(Ha $F = \delta_e$, akkor $e(F)$ nem más, mint a csoportra vett általánosított Poisson mérték.)

6.1. Tétel. Egy Y-n értelmezett függvény akkor és csak akkor karakterisztikus függvénye egy Gauss eloszlásnak, ha a következő alakú

$$\langle x, y \rangle \exp\{-\varphi(y)\},$$

ahol x X egy rögzített pontja, $\varphi(y)$ pedig egy folytonos, nemnegatív függvény Y-n, melyre

$$\varphi(y_1 + y_2) + \varphi(y_1 - y_2) = 2[\varphi(y_1) + \varphi(y_2)] \tag{6.1}$$

minden y_1, $y_2 \in Y$ esetén.

Bizonyítás. Lásd Parthasarthy [5] 97. -101. oldal.

□

Megjegyzés. Most pedig a 6.1. Tétel felhasználásával leellenőrizzük azt, a bevezetőben említett tényt, hogy lokálisan kompakt Ábel-csoporton Gauss mértékek konvolúciója Gauss mérték.
Legyenek μ_1, μ_2 Gauss mértékek X-en, a következő karakterisztikus függvénnyekkel:

$$\widehat{\mu}_1(y) = \langle x_1, y \rangle \exp\{-\varphi_1(y)\},$$
$$\widehat{\mu}_2(y) = \langle x_2, y \rangle \exp\{-\varphi_2(y)\},$$

ahol x_1, $x_2 \in X$ rögzített elemek, φ_1, φ_2 nemnegatív, folytonos függvények, melyekre

$$\varphi_1(y_1 + y_2) + \varphi_1(y_1 - y_2) = 2[\varphi_1(y_1) + \varphi_1(y_2)],$$
$$\varphi_2(y_1 + y_2) + \varphi_2(y_1 - y_2) = 2[\varphi_2(y_1) + \varphi_2(y_2)].$$

Ekkor $\widehat{\mu_1 * \mu_2}(y) = \widehat{\mu}_1(y)\widehat{\mu}_2(y) = \langle x_1, y \rangle \langle x_2, y \rangle \exp\{-\varphi_1(y) - \varphi_2(y)\} =$

$$= \langle x_1 + x_2, y \rangle \exp\{-(\varphi_1 + \varphi_2)(y)\},$$

ahol $x_1 + x_2 \in X$ rögzített elem, $\varphi_1 + \varphi_2$ nemnegatív, folytonos függvény, és elemi számolás mutatja, hogy a (6.1) feltétel is tejesül, így a 6.1. Tétel alapján a $\mu_1 * \mu_2$ konvolúció is Gauss mérték. (Amennyiben x_0-t és φ-t paraméternek tekintjük, akkor a paraméterek is összeadódnak. A paraméterek egyértelműségéről nincs szó.)

7. Korlátlanul osztható eloszlások reprezentációja.

Itt mindössze a reprezentációs tételt közlöm.

7.1. Tétel. Ha μ idempotens faktorok nélküli korlátlanul osztható eloszlás, akkor $\widehat{\mu}(y)$ karakterisztikus függvénye a következő alakú

$$\widehat{\mu}(y) = \langle x_0, y\rangle \exp\Big\{ \int [\, \langle x, y\rangle - 1 - ig(x,y)\,]\, d\,F(x) - \varphi(y)\,\Big\}, \tag{7.0}$$

ahol x_0 X egy rögzített pontja; $g(x,y)$ $X \times Y$-n értelmezett, μ-től független (azaz minden μ-re ugyanaz a g jó), az 5.3. Lemmabeli tulajdonságokkal bíró függvény; F olyan σ-véges mérték, mely X egységeleme tetszőleges környezetének komplementerén véges és teljesül rá, hogy

$$\int [1 - \mathrm{R}\,\langle x, y\rangle\,]\, d\,F(x) < \infty \quad \text{minden } \; y \in Y\text{-ra},$$

$\varphi(y)$ pedig egy olyan nemnegatív, folytonos függvény, melyre

$$\varphi(y_1 + y_2) + \varphi(y_1 - y_2) = 2\,[\varphi(y_1) + \varphi(y_2)\,]$$

minden y_1, $y_2 \in Y$ esetén. Megfordítva, minden, a (7.0) feltételt teljesítő függvény valamilyen idempotens faktorok nélküli korlátlanul osztható eloszlás karakterisztikus függvénye.

Bizonyítás. Lásd Parthasarathy [5] 103.-105. oldal.

□

Irodalomjegyzék

[1] Cramer, H. (1946). Mathematical methods of statistics. *Princeton University Press, Princeton, New Jersey.*

[2] Gnedenko, B. V.; Kolmogorov, A.N. (1954). Limit distributions for sums of independent random variables. *Addison-Wesley, Cambridge, Massachusetts.* (Traslated from Russian).

[3] Halmos, P. R. (1962). Measure theory. *Van Nostrand, Princeton, New Jersey.*

[4] Kelley, J. L. (1961). General topology. *Van Nostrand, New York.*

[6] Pontrjagin, L. S. (1946). Topological groups. *Princeton University Press, Princeton, New Jersey.* (Translated from Russian).

[5] Parthasarthy, K. R. (1967). Probability measures on metric spaces. *Academic Press, New Jork and London.*

[7] Rudin, W. (1962). Fourier analysis on groups. *Wiley (Interscience), New York.*

[8] Weil, A. (1940). L'integrations dans les groupes topologiques et ses applications. *Hermann and Co., Paris.*