

Valószínűesszámitás feladatok fizikai motivációval

Barczy Mátyás

HUN-REN–SZTE Analízis és Alkalmazásai Kutatócsoport
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

64. Rátz László Vándorgyűlés

Miskolc

2025. július 5.

A TKP2021-NVA-09 számú projekt támogatásával valósult meg.

Előadásom kivonata

- motiváció a mindennapokból $\rightsquigarrow$ véletlenített hajítási fizika feladatok.
- egy ilyen feladat részletes bemutatása.
- a feladat (i) részének megoldása "direkt" módon, melynek során felidézzük a (fizikából és) valószínűségszámításból felhasznált eredményeket is.
- a feladat lehetséges variánsai.
- a feladat (i) részéből az egyik kérdés megoldása *diszkrét közelítéssel*.
- (a diszkrét közelítéses megoldás háttérében álló valószínűségszámítási eredmények.)
- a diszkrét közelítéses megoldás gyakorlása a feladat (i) része egy másik kérdésénél.
- egy további feladat bemutatása.

Motiváció (az 1. Feladathoz)

2022.09.09.-én jelent meg az alábbi hír a HAON hírportálon:

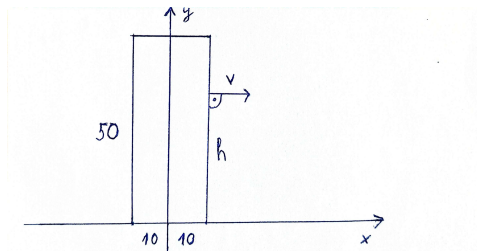
"Székesfehérváron, a Sarló utca 12. számú tízemeletesben gyakorlatilag hetek óta "vadásznak" a lakók az elkövetőre, aki feltehetően a hatodik-hetedik-nyolcadik emelet környékén lakik, s nem tudni mikor, de rendszeresen lepisil az erkélyéről. A tevékenysége már "nyomot is hagyott" az épület külsején egy vékony csík formájában."

1. Feladat

Tekintsünk egy vízszintes talajon álló, henger alakú, 10 méter sugarú és 50 méter magas erdei kilátót. Tamás a kilátó aljáról a csigalépcsőn elindul felfelé, és egy, a $[0 \text{ m}, 50 \text{ m}]$ intervallumon egyenletes eloszlás szerint választott h magasságban megáll, majd a kilátó széléről kidob egy golyót v sebességgel, melynek nagysága egyenletes eloszlású az $[5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}]$ intervallumon, iránya pedig merőleges a kilátó falára. Feltételezzük, hogy h és v függetlenek.

1. Feladat

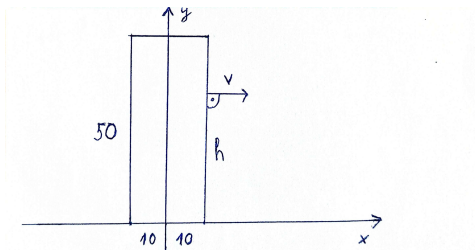
Tekintsünk egy vízszintes talajon álló, henger alakú, 10 méter sugarú és 50 méter magas erdei kilátót. Tamás a kilátó aljáról a csigalépcsőn elindul felfelé, és egy, a $[0 \text{ m}, 50 \text{ m}]$ intervallumon egyenletes eloszlás szerint választott h magasságban megáll, majd a kilátó széléről kidob egy golyót v sebességgel, melynek nagysága egyenletes eloszlású az $[5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}]$ intervallumon, iránya pedig merőleges a kilátó falára. Feltételezzük, hogy h és v függetlenek.



1. Feladat

Tekintsünk egy vízszintes talajon álló, henger alakú, 10 méter sugarú és 50 méter magas erdei kilátót. Tamás a kilátó aljáról a csigalépcsőn elindul felfelé, és egy, a $[0 \text{ m}, 50 \text{ m}]$ intervallumon egyenletes eloszlás szerint választott h magasságban megáll, majd a kilátó széléről kidob egy golyót v sebességgel, melynek nagysága egyenletes eloszlású az $[5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}]$ intervallumon, iránya pedig merőleges a kilátó falára. Feltételezzük, hogy h és v függetlenek.

Ha egy véges intervallumra úgy dobunk le egy pontot, hogy az intervallum bármely részintervallumára annak hosszával arányos valószínűséggel esik, akkor azt mondjuk, hogy a pont (helye) egyenletes eloszlású az adott intervallumon.

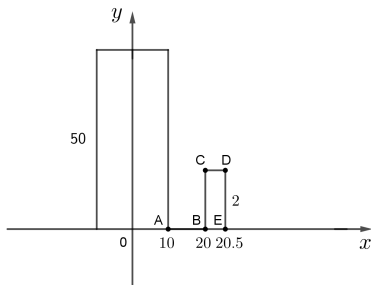


1. Feladat

- (i) Határozzuk meg, hogy a golyó a kilátó falától számítva várhatóan milyen távol ér földet, illetve ezen távolság szórásnégyzetét és relatív standard szórását is!

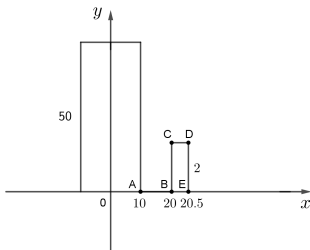
1. Feladat

- (i) Határozzuk meg, hogy a golyó a kilátó falától számítva várhatóan milyen távol ér földet, illetve ezen távolság szórásnégyzetét és relatív standard szórását is!
- (ii) Tegyük fel, hogy a kilátót egy körgyűrű alakú, vízszintes tetejű kerítés veszi körül. A kerítés két fala 10 méter, illetve 10.5 méter távolságra van a kilátó falától. A kerítés 2 méter magas. Mi a valószínűsége, hogy a golyó először a kerítést találja el (azaz a lenti ábrán található BC és CD szakaszok valamelyikét)?



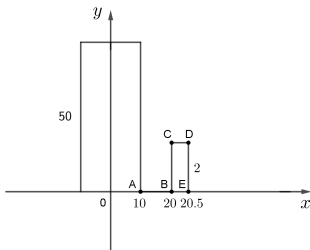
1. Feladat

- (iii) Tegyük fel, hogy a kilátót a (ii) részben megadott körgyűrű alakú kerítés veszi körül. Továbbá, feltételezzük, hogy a golyó először a kerítés előtt ér földet el nem találva a kerítést (azaz a lenti ábrán található AB szakaszt találja el először). Mi a valószínűsége, hogy Tamás a golyót 10 méternél alacsonyabbról dobta ki?



1. Feladat

- (iii) Tegyük fel, hogy a kilátót a (ii) részben megadott körgyűrű alakú kerítés veszi körül. Továbbá, feltételezzük, hogy a golyó először a kerítés előtt ér földet el nem találva a kerítést (azaz a lenti ábrán található AB szakaszt találja el először). Mi a valószínűsége, hogy Tamás a golyót 10 méternél alacsonyabbról dobta ki?



Csak az (i) részt oldjuk meg, de két különböző módon is "direkt" módon és diszkrét közelítéssel.

Az 1. Feladat (ii) és (iii) részének megoldásai, további véletlenített hajításos, illetve [statika](#) példák megtalálhatóak részletes megoldással az alábbi cikkben:

MÁTYÁS BARCZY, IMRE KOCSIS and CSABA GÁBOR KÉZI:

A stochastic approach in physics exercises of mathematics education.
[arXiv](#) 2410.04076, (2024).

A véletlenített hajításos feladatoknak nem nagyon találtam szakirodalmát (mindössze néhány cikket), a véletlenített statika feladatoknak viszont nagy szakirodalma van (kutatási kérdések is).

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, konvenciók

- Vízszintes hajítás: pontszerű testnek homogén (2-dimenziós) gravitációs térben való mozgása, hogy a test kezdősebességének a függőleges irányú komponense 0 (azaz csak a vízszintes irányú komponense nem 0).
- A légellenállást figyelmen kívül hagyjuk.
- Ez a mozgás a szuperpozíciója egy vízszintes irányú egyenes vonalú egyenletes mozgásnak és egy függőleges irányú egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásnak (ún. szabadesésnek).
- A pontszerű testre csak a gravitációs erő hat ($m \cdot g$), és a mozgás egyenlete egy parabola.

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, konvenciók

- Vízszintes hajítás: pontszerű testnek homogén (2-dimenziós) gravitációs térben való mozgása, hogy a test kezdősebességének a függőleges irányú komponense 0 (azaz csak a vízszintes irányú komponense nem 0).
- A légellenállást figyelmen kívül hagyjuk.
- Ez a mozgás a szuperpozíciója egy vízszintes irányú egyenes vonalú egyenletes mozgásnak és egy függőleges irányú egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásnak (ún. szabadesésnek).
- A pontszerű testre csak a gravitációs erő hat ($m \cdot g$), és a mozgás egyenlete egy parabola.
- A számítások során az eredményeket 4 értékes jegyig szerepeltetjük. Például, 0.023456 helyett azt írjuk, hogy 0.02346.
- A fizikai mennyiségeket SI mértékegységrendszerben adjuk meg, de a megoldásokban az egységet nem tüntetjük fel.
- A gravitációs gyorsulás nagyságát a Föld felszínének a közelében $g = 9.810 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ -nek tekintjük.

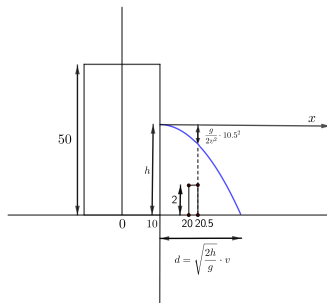
Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

Fizikából ismert, hogy

- ha egy pontszerű testet vízszintesen elhajítunk h magasságból, v sebességgel, akkor a hajítás távolsága, azaz a földet érésig vízszintesen összesen megtett út:

$$d := \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v,$$

- ha a test vízszintesen x utat tesz meg, akkor függőlegesen $\frac{g}{2v^2} \cdot x^2$ utat tesz meg.



Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

Hogyan lehet ezen képleteket levezetni?

A mozgás leírásához vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert:

- melynek az origója a test kiindulási ($t = 0$ időpontbeli) helyzete,
- az x -tengely a kezdősebesség irányába mutasson,
- az y -tengely pedig függőlegesen lefelé.

Mivel a test vízszintesen nem gyorsul, a gravitációs gyorsulás pedig lefelé mutat, a test gyorsulásvektora $(0, g)$.

A test vízszintesen állandó v sebességgel mozog (ahol v a kezdősebesség), függőlegesen pedig g gyorsulással szabadon esik.

Így a test sebességvektora a $t \geq 0$ időpontban: (v, gt) .

Ezért a test t idő alatti elmozdulása

- vízszintesen: vt ,
- függőlegesen: $g\frac{t^2}{2}$.

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

Emiatt, ha a test vízszintesen x utat tesz meg (azaz $x = vt$), akkor az ehhez szükséges idő $t = \frac{x}{v}$, és így ezen idő alatt a függőlegesen megtett út:

$$g \frac{\left(\frac{x}{v}\right)^2}{2} = \frac{g}{2v^2} \cdot x^2.$$

Mivel a testet h magasságból hajítjuk el, így a földet érésig a függőleges irányú elmozdulása h . Felhasználva, hogy a földet érésig vízszintesen megtett út nem más, mint a hajítás távolsága, azaz d , az előző képlet alapján kapjuk, hogy

$$h = \frac{g}{2v^2} \cdot d^2, \quad \text{amiből} \quad d = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v.$$

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

Az alábbiakban felidézünk néhány eredményt valószínűségszámításból.

Véletlen változó, eloszlásfüggvény

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező. Azt mondjuk, hogy egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés **véletlen változó**, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{\xi < x\} := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$.

Továbbá, az $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\xi(x) := \mathbb{P}(\{\xi < x\}) = \mathbb{P}(\xi < x), \quad x \in \mathbb{R},$$

függvényt ξ **(kumulatív) eloszlásfüggvényének** nevezzük.

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

Az alábbiakban felidézünk néhány eredményt valószínűségszámításból.

Véletlen változó, eloszlásfüggvény

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező. Azt mondjuk, hogy egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés **véletlen változó**, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{\xi < x\} := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$.

Továbbá, az $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\xi(x) := \mathbb{P}(\{\xi < x\}) = \mathbb{P}(\xi < x), \quad x \in \mathbb{R},$$

függvényt ξ **(kumulatív) eloszlásfüggvényének** nevezzük.

Véletlen változó sűrűségfüggvénye

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező és $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy véletlen változó. Ha létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

akkor az f_ξ függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük, és azt mondjuk, hogy ξ eloszlása **abszolút folytonos**.

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

Egyenletes eloszlás az $[a, b]$ intervallumon

Ha az $[a, b]$ intervallumon úgy választunk véletlenszerűen egy ξ pontot, hogy egy $A \subset [a, b]$ részhalmazba esés valószínűsége az illető részhalmaz hosszával arányos, akkor ξ eloszlásfüggvénye:

$$F_{\xi}(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a, \\ \frac{x - a}{b - a} & \text{ha } a \leq x < b, \\ 1 & \text{ha } x \geq b. \end{cases}$$

Ekkor a ξ véletlen változót **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük az $[a, b]$ intervallumon.

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

Egyenletes eloszlás az $[a, b]$ intervallumon

Ha az $[a, b]$ intervallumon úgy választunk véletlenszerűen egy ξ pontot, hogy egy $A \subset [a, b]$ részhalmazba esés valószínűsége az illető részhalmaz hosszával arányos, akkor ξ eloszlásfüggvénye:

$$F_{\xi}(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a \leq x < b, \\ 1 & \text{ha } x \geq b. \end{cases}$$

Ekkor a ξ véletlen változót **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük az $[a, b]$ intervallumon.

Továbbá az

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvénye ξ -nek.

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

Abszolút folytonos véletlen változó várható értéke

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy abszolút folytonos véletlen változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, akkor az

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty$.

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

Abszolút folytonos véletlen változó várható értéke

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy abszolút folytonos véletlen változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, akkor az

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty$.

Abszolút folytonos véletlen változó függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Ha ξ abszolút folytonos véletlen változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_\xi(x) dx,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \cdot f_\xi(x) dx < \infty$.

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

Két véletlen változó függetlensége

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változók. Azt mondjuk, hogy ξ és η függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(\{\xi < x\} \cap \{\eta < y\}) = \mathbb{P}(\{\xi < x\}) \cdot \mathbb{P}(\{\eta < y\}), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

azaz, tömörebben írva,

$$\mathbb{P}(\xi < x, \eta < y) = \mathbb{P}(\xi < x) \cdot \mathbb{P}(\eta < y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

Két véletlen változó függetlensége

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ véletlen változók. Azt mondjuk, hogy ξ és η függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(\{\xi < x\} \cap \{\eta < y\}) = \mathbb{P}(\{\xi < x\}) \cdot \mathbb{P}(\{\eta < y\}), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

azaz, tömörebben írva,

$$\mathbb{P}(\xi < x, \eta < y) = \mathbb{P}(\xi < x) \cdot \mathbb{P}(\eta < y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Két diszkrét véletlen változó függetlensége

Legyenek ξ és η diszkrét véletlen változók $x_1, x_2, \dots$, illetve $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel (ahol $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$). Ekkor ξ és η akkor és csak akkor függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = \mathbb{P}(\xi = x_i) \mathbb{P}(\eta = y_j), \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

A várható érték tulajdonságai

Legyenek ξ és η (diszkrét vagy abszolút folytonos) véletlen változók, hogy a várható értékük létezik és véges, és $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- (1) $\mathbb{E}(a\xi) = a \mathbb{E}(\xi)$ (homogenitás),
- (2) $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$ (additivitás),
- (3) $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a \mathbb{E}\xi + b \mathbb{E}\eta$ (linearitás).
- (4) Továbbá, ha ξ és η függetlenek, akkor

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta).$$

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

A várható érték tulajdonságai

Legyenek ξ és η (diszkrét vagy abszolút folytonos) véletlen változók, hogy a várható értékük létezik és véges, és $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- (1) $\mathbb{E}(a\xi) = a \mathbb{E}(\xi)$ (homogenitás),
- (2) $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$ (additivitás),
- (3) $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a \mathbb{E}\xi + b \mathbb{E}\eta$ (linearitás).
- (4) Továbbá, ha ξ és η függetlenek, akkor

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta).$$

Megjegyzés. A (4)-es tulajdonság megfordítása nem igaz, azaz ha $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta)$, akkor ξ és η nem biztos, hogy függetlenek.

Az 1. Feladat (i) részének megoldása, előkészületek

A várható érték tulajdonságai

Legyenek ξ és η (diszkrét vagy abszolút folytonos) véletlen változók, hogy a várható értékük létezik és véges, és $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

- (1) $\mathbb{E}(a\xi) = a \mathbb{E}(\xi)$ (homogenitás),
- (2) $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$ (additivitás),
- (3) $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a \mathbb{E}\xi + b \mathbb{E}\eta$ (linearitás).
- (4) Továbbá, ha ξ és η függetlenek, akkor

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta).$$

Megjegyzés. A (4)-es tulajdonság megfordítása nem igaz, azaz ha $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta)$, akkor ξ és η nem biztos, hogy függetlenek.

Kérdések. A (4)-es tulajdonságot hogyan tudnánk igazolni *véges sok értéket felvevő* diszkrét ξ és η véletlen változók esetén?

Ellenpélda arra, hogy a (4)-es tulajdonság megfordítása nem igaz?

Diszkrét véletlen vektor függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény.

Ha ξ és η diszkrét véletlen változók $x_1, \dots, x_n$, illetve $y_1, \dots, y_m$ lehetséges értékekkel, ahol $n, m \in \mathbb{N}$, akkor

$$\mathbb{E}(g(\xi, \eta)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(x_i, y_j) \cdot \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j).$$

Diszkrét véletlen vektor függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény.

Ha ξ és η diszkrét véletlen változók $x_1, \dots, x_n$, illetve $y_1, \dots, y_m$ lehetséges értékekkel, ahol $n, m \in \mathbb{N}$, akkor

$$\mathbb{E}(g(\xi, \eta)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(x_i, y_j) \cdot \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j).$$

Válasz az előző kérdésre:

Legyen ξ diszkrét véletlen változó $x_1, \dots, x_n$ lehetséges értékekkel, és η diszkrét véletlen változó $y_1, \dots, y_m$ lehetséges értékekkel, ahol $n, m \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy ξ és η függetlenek.

Ekkor az előző állítást alkalmazva a $g(x, y) := xy$ függvényre,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi\eta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \mathbb{P}(\xi = x_i) \mathbb{P}(\eta = y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(\xi = x_i) \cdot \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{P}(\eta = y_j) = \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta). \end{aligned}$$

Ellenpélda: $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) \not\Rightarrow \xi$ és η függetlenek

Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlása az alábbi kontingencia táblázattal megadva:

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1	
-1	0	0.25	0	0.25
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0	0.25
	0.25	0.5	0.25	1

Ellenpélda: $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) \nRightarrow \xi$ és η függetlenek

Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlása az alábbi kontingencia táblázattal megadva:

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1	
-1	0	0.25	0	0.25
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0	0.25
	0.25	0.5	0.25	1

Ekkor

$$\mathbb{P}(\xi = -1) = 0.25 = \mathbb{P}(\eta = -1), \quad \mathbb{P}(\xi = 0) = 0.5 = \mathbb{P}(\eta = 0),$$

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = 0.25 = \mathbb{P}(\eta = 1),$$

és $\mathbb{P}(\xi\eta = 0) = 1$. Ezért $\mathbb{E}(\xi\eta) = 0$ és

$$\mathbb{E}(\xi) = (-1) \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25 = 0,$$

$$\mathbb{E}(\eta) = (-1) \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25 = 0.$$

Így $\mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta) = 0 = \mathbb{E}(\xi\eta)$.

Azonban, ξ és η nem függetlenek, hiszen például

$$\mathbb{P}(\xi = 0, \eta = 0) = 0, \text{ de } \mathbb{P}(\xi = 0)\mathbb{P}(\eta = 0) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 \neq 0.$$

Az 1. Feladat (i) részének megoldása

A feltételek miatt h egyenletes eloszlású véletlen változó a $[0, 50]$ intervallumon, v egyenletes eloszlású véletlen változó az $[5, 15]$ intervallumon, továbbá h és v függetlenek.

Ekkor $\sqrt{h}$ és v is függetlenek, várható értékeik végesek, és így várható érték (1)-es és (4)-es tulajdonságai alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(d) = \mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v\right) = \mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{h} \cdot v\right) =$$

Az 1. Feladat (i) részének megoldása

A feltételek miatt h egyenletes eloszlású véletlen változó a $[0, 50]$ intervallumon, v egyenletes eloszlású véletlen változó az $[5, 15]$ intervallumon, továbbá h és v függetlenek.

Ekkor $\sqrt{h}$ és v is függetlenek, várható értékeik végesek, és így várható érték (1)-es és (4)-es tulajdonságai alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(d) = \mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v\right) = \mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{h} \cdot v\right) = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \mathbb{E}(\sqrt{h}) \cdot \mathbb{E}(v)$$

Az 1. Feladat (i) részének megoldása

A feltételek miatt h egyenletes eloszlású véletlen változó a $[0, 50]$ intervallumon, v egyenletes eloszlású véletlen változó az $[5, 15]$ intervallumon, továbbá h és v függetlenek.

Ekkor $\sqrt{h}$ és v is függetlenek, várható értékeik végesek, és így várható érték (1)-es és (4)-es tulajdonságai alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(d) &= \mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v\right) = \mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{h} \cdot v\right) = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \mathbb{E}(\sqrt{h}) \cdot \mathbb{E}(v) \\&= \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \int_0^{50} \sqrt{p} \cdot \frac{1}{50} dp \cdot \int_5^{15} r \cdot \frac{1}{10} dr \\&= \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{50^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{15^2 - 5^2}{2} \\&= \frac{200}{3\sqrt{g}} \approx 21.29.\end{aligned}$$

Az 1. Feladat (i) részének megoldása

Mivel h és v^2 is függetlenek, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(d^2) &= \mathbb{E} \left(\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left(\frac{2}{g} \cdot h \cdot v^2 \right) = \frac{2}{g} \cdot \mathbb{E}(h) \cdot \mathbb{E}(v^2) \\ &= \frac{2}{g} \cdot \int_0^{50} p \cdot \frac{1}{50} dp \cdot \int_5^{15} r^2 \cdot \frac{1}{10} dr \\ &= \frac{2}{g} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{2500}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3375 - 125}{3} = \frac{16250}{3g}.\end{aligned}$$

Az 1. Feladat (i) részének megoldása

Mivel h és v^2 is függetlenek, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(d^2) &= \mathbb{E} \left(\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left(\frac{2}{g} \cdot h \cdot v^2 \right) = \frac{2}{g} \cdot \mathbb{E}(h) \cdot \mathbb{E}(v^2) \\ &= \frac{2}{g} \cdot \int_0^{50} p \cdot \frac{1}{50} dp \cdot \int_5^{15} r^2 \cdot \frac{1}{10} dr \\ &= \frac{2}{g} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{2500}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3375 - 125}{3} = \frac{16250}{3g}.\end{aligned}$$

Így d szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(d) := \mathbb{E}((d - \mathbb{E}(d))^2)$:

$$\mathbb{D}^2(d) = \mathbb{E}(d^2) - (\mathbb{E}(d))^2 = \frac{16250}{3g} - \frac{40000}{9g} = \frac{8750}{9g} \approx 99.11.$$

Az 1. Feladat (i) részének megoldása

Mivel h és v^2 is függetlenek, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(d^2) &= \mathbb{E} \left(\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left(\frac{2}{g} \cdot h \cdot v^2 \right) = \frac{2}{g} \cdot \mathbb{E}(h) \cdot \mathbb{E}(v^2) \\&= \frac{2}{g} \cdot \int_0^{50} p \cdot \frac{1}{50} dp \cdot \int_5^{15} r^2 \cdot \frac{1}{10} dr \\&= \frac{2}{g} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{2500}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3375 - 125}{3} = \frac{16250}{3g}.\end{aligned}$$

Így d szórásnégyzete $\mathbb{D}^2(d) := \mathbb{E}((d - \mathbb{E}(d))^2)$:

$$\mathbb{D}^2(d) = \mathbb{E}(d^2) - (\mathbb{E}(d))^2 = \frac{16250}{3g} - \frac{40000}{9g} = \frac{8750}{9g} \approx 99.11.$$

Továbbá, d szórása és relatív standard szórása:

$$\mathbb{D}(d) = \frac{25\sqrt{14}}{3\sqrt{g}} \approx 9.955 \text{ és } \text{RSD}(d) = \frac{\mathbb{D}(d)}{\mathbb{E}(d)} = \frac{\frac{25\sqrt{14}}{3\sqrt{g}}}{\frac{200}{3\sqrt{g}}} = \frac{\sqrt{14}}{8} \approx 0.4677.$$

Az 1. Feladat (i) része megoldásának az összevetése egy determinisztikus esettel

Megjegyzés.

- Egy determinisztikus eset: Tamás 25 m magasan áll meg, és $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú sebességgel dobja ki vízszintesen a golyót.

Itt a 25 és 10 értékek nem mások, mint az 1. Feladat (i) részében tekintett egyenletes eloszlású véletlen változók várható értékei.

Ekkor a földet érésig $\sqrt{\frac{2 \cdot 25}{g}} \cdot 10 \approx 22.58$ métert tesz meg vízszintesen a golyó.

Az 1. Feladat (i) része megoldásának az összevetése egy determinisztikus esettel

Megjegyzés.

- Egy determinisztikus eset: Tamás 25 m magasan áll meg, és $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú sebességgel dobja ki vízszintesen a golyót.

Itt a 25 és 10 értékek nem mások, mint az 1. Feladat (i) részében tekintett egyenletes eloszlású véletlen változók várható értékei.

Ekkor a földet érésig $\sqrt{\frac{2 \cdot 25}{g}} \cdot 10 \approx 22.58$ métert tesz meg vízszintesen a golyó.

- Felhívjuk a figyelmet, hogy az (i) rész megoldásában meghatározott $\mathbb{E}(d) = \frac{200}{3\sqrt{g}} \approx 21.29$ **nem egyenlő** $\sqrt{\frac{50}{g}} \cdot 10$ -zel. Mi lehet ennek az oka?

Az 1. Feladat (i) része megoldásának az összevetése egy determinisztikus esettel

A véletlenített és a "várható értékben determinisztikussá tett" feladatok megoldása akkor és csak akkor egyezne meg, ha

$$\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \mathbb{E}(\sqrt{h}) \cdot \mathbb{E}(v) = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(h)} \cdot \mathbb{E}(v),$$

mely azzal ekvivalens, hogy

$$\mathbb{E}(\sqrt{h}) = \sqrt{\mathbb{E}(h)}.$$

Ez azonban **általában nem teljesül.**

Az 1. Feladat (i) része megoldásának az összevetése egy determinisztikus esettel

A véletlenített és a "várható értékben determinisztikussá tett" feladatok megoldása akkor és csak akkor egyezne meg, ha

$$\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \mathbb{E}(\sqrt{h}) \cdot \mathbb{E}(v) = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{\mathbb{E}(h)} \cdot \mathbb{E}(v),$$

mely azzal ekvivalens, hogy

$$\mathbb{E}(\sqrt{h}) = \sqrt{\mathbb{E}(h)}.$$

Ez azonban **általában nem teljesül**.

Mivel az $[0, \infty) \ni x \mapsto \sqrt{x}$ függvény konkáv, a *Jensen-egyenlőtlenség* alapján annak viszont teljesülnie kell, hogy

$$\mathbb{E}(\sqrt{h}) \leq \sqrt{\mathbb{E}(h)}.$$

Ez valóban fennáll, ugyanis

$$\mathbb{E}(\sqrt{h}) \approx 4.714 \leq 5 = \sqrt{\mathbb{E}(h)}.$$

Az 1. Feladat lehetséges variánsai

Megjegyzés.

- A h véletlen változót (ahol Tamás megáll) tekinthetjük diszkrét egyenletes eloszlásúnak is, például az $\{1 \text{ m}, 2 \text{ m}, \dots, 49 \text{ m}, 50 \text{ m}\}$ véges halmazon.

Az 1. Feladat lehetséges variánsai

Megjegyzés.

- A h véletlen változót (ahol Tamás megáll) tekinthetjük diszkrét egyenletes eloszlásúnak is, például az $\{1 \text{ m}, 2 \text{ m}, \dots, 49 \text{ m}, 50 \text{ m}\}$ véges halmazon.
- Tekinthetünk egyéb olyan diszkrét vagy abszolút folytonos eloszlású véletlen változókat is, melyek értékkészlete $[0, 50]$ -beli.

Például, ha Tamásnak tériszonya van, akkor tekinthetjük a $\{10 \text{ m}, 20 \text{ m}, 30 \text{ m}, 40 \text{ m}, 50 \text{ m}\}$ halmazon a

$$\frac{40}{100}, \frac{30}{100}, \frac{20}{100}, \frac{9}{100}, \frac{1}{100}$$

diszkrét valószínűség eloszlást.

Az 1. Feladat lehetséges variánsai

Megjegyzés.

- A h véletlen változót (ahol Tamás megáll) tekinthetjük diszkrét egyenletes eloszlásúnak is, például az $\{1 \text{ m}, 2 \text{ m}, \dots, 49 \text{ m}, 50 \text{ m}\}$ véges halmazon.
- Tekintheünk egyéb olyan diszkrét vagy abszolút folytonos eloszlású véletlen változókat is, melyek értékkészlete $[0, 50]$ -beli.

Például, ha Tamásnak tériszonya van, akkor tekinthetjük a $\{10 \text{ m}, 20 \text{ m}, 30 \text{ m}, 40 \text{ m}, 50 \text{ m}\}$ halmazon a

$$\frac{40}{100}, \frac{30}{100}, \frac{20}{100}, \frac{9}{100}, \frac{1}{100}$$

diszkrét valószínűség eloszlást.

- Olyan variánst is tekinthetünk, hogy h és v közül csak az egyiket véletlenítjük.

Az 1. Feladat (i) részének megoldása diszkrét közelítéssel

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen h_n egyenletes eloszlású véletlen változó az

$$\left\{ i \cdot \frac{50}{n} : i = 0, 1, \dots, n \right\} \quad \text{halmazon,}$$

azaz a $[0, 50]$ intervallumot $n - 1$ darab osztóponttal n darab $\frac{50}{n}$ hosszúságú részre osztjuk, és $\mathbb{P}(h_n = i \cdot \frac{50}{n}) = \frac{1}{n+1}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén legyen v_m egyenletes eloszlású véletlen változó az

$$\left\{ 5 + j \cdot \frac{10}{m} : j = 0, 1, \dots, m \right\} \quad \text{halmazon,}$$

azaz az $[5, 15]$ intervallumot $m - 1$ darab osztóponttal m darab $\frac{10}{m}$ hosszúságú részre osztjuk, és $\mathbb{P}(v_m = 5 + j \cdot \frac{10}{m}) = \frac{1}{m+1}$, $j = 0, 1, \dots, m$.

Feltételezzük, hogy h_n és v_m függetlenek tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén.

Jelölje $d_{n,m}$, hogy h_n magasságból vízszintesen v_m sebességgel kilőve egy golyót mennyi utat tesz meg vízszintesen földetérésig. Ekkor

$$d_{n,m} = \sqrt{\frac{2h_n}{g}} \cdot v_m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Célunk $\mathbb{E}(d_{n,m})$ meghatározása.

Mivel $\sqrt{h_n}$ és v_m is függetlenek, a várható érték (1)-es és (4)-es tulajdonsága alapján

$$\mathbb{E}(d_{n,m}) = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \mathbb{E}(\sqrt{h_n}) \cdot \mathbb{E}(v_m), \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Jelölje $d_{n,m}$, hogy h_n magasságból vízszintesen v_m sebességgel kilőve egy golyót mennyi utat tesz meg vízszintesen földetérésig. Ekkor

$$d_{n,m} = \sqrt{\frac{2h_n}{g}} \cdot v_m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Célunk $\mathbb{E}(d_{n,m})$ meghatározása.

Mivel $\sqrt{h_n}$ és v_m is függetlenek, a várható érték (1)-es és (4)-es tulajdonsága alapján

$$\mathbb{E}(d_{n,m}) = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \mathbb{E}(\sqrt{h_n}) \cdot \mathbb{E}(v_m), \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Továbbá, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sqrt{h_n}) &= \sum_{i=0}^n \sqrt{i \cdot \frac{50}{n}} \mathbb{P}\left(h_n = i \cdot \frac{50}{n}\right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{i \cdot \frac{50}{n}} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{n}(n+1)} \sum_{i=0}^n \sqrt{i}. \end{aligned}$$

Hasonlóan, tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(v_m) &= \sum_{j=0}^m \left(5 + j \cdot \frac{10}{m}\right) \mathbb{P}\left(v_m = 5 + j \cdot \frac{10}{m}\right) \\&= \sum_{j=0}^m \left(5 + j \cdot \frac{10}{m}\right) \cdot \frac{1}{m+1} \\&= \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \left(5 + j \cdot \frac{10}{m}\right)\end{aligned}$$

Hasonlóan, tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(v_m) &= \sum_{j=0}^m \left(5 + j \cdot \frac{10}{m}\right) \mathbb{P}\left(v_m = 5 + j \cdot \frac{10}{m}\right) \\&= \sum_{j=0}^m \left(5 + j \cdot \frac{10}{m}\right) \cdot \frac{1}{m+1} \\&= \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \left(5 + j \cdot \frac{10}{m}\right) \\&= \frac{1}{m+1} \left(5(m+1) + \frac{10}{m} \sum_{j=0}^m j\right) \\&= \frac{1}{m+1} \left(5(m+1) + \frac{10}{m} \cdot \frac{m(m+1)}{2}\right) \\&= \frac{1}{m+1} \cdot 10(m+1) = 10.\end{aligned}$$

Hasonlóan, tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(v_m) &= \sum_{j=0}^m \left(5 + j \cdot \frac{10}{m}\right) \mathbb{P}\left(v_m = 5 + j \cdot \frac{10}{m}\right) \\&= \sum_{j=0}^m \left(5 + j \cdot \frac{10}{m}\right) \cdot \frac{1}{m+1} \\&= \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \left(5 + j \cdot \frac{10}{m}\right) \\&= \frac{1}{m+1} \left(5(m+1) + \frac{10}{m} \sum_{j=0}^m j\right) \\&= \frac{1}{m+1} \left(5(m+1) + \frac{10}{m} \cdot \frac{m(m+1)}{2}\right) \\&= \frac{1}{m+1} \cdot 10(m+1) = 10.\end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy $\mathbb{E}(v_m)$ értéke nem függ m -től, de v_m eloszlása persze függ m -től is.

Ezért

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(d_{n,m}) &= \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \mathbb{E}(\sqrt{h_n}) \cdot \mathbb{E}(v_m) \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{n(n+1)}} \sum_{i=0}^n \sqrt{i} \cdot 10 \\ &= \frac{100}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \sum_{i=0}^n \sqrt{i}, \quad n, m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(d_{n,m}) &= \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \mathbb{E}(\sqrt{h_n}) \cdot \mathbb{E}(v_m) \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{n(n+1)}} \sum_{i=0}^n \sqrt{i} \cdot 10 \\ &= \frac{100}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \sum_{i=0}^n \sqrt{i}, \quad n, m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Azt vár(hat)juk, hogy

$$\lim_{(n,m) \rightarrow (\infty, \infty)} \mathbb{E}(d_{n,m}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(d_{n,1})$$

megegyezik az eredeti (abszolút folytonos egyenletes eloszlásos) probléma esetén meghatározott $\mathbb{E}(d)$ értékével.

Ezért

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(d_{n,m}) &= \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \mathbb{E}(\sqrt{h_n}) \cdot \mathbb{E}(v_m) \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{n(n+1)}} \sum_{i=0}^n \sqrt{i} \cdot 10 \\ &= \frac{100}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \sum_{i=0}^n \sqrt{i}, \quad n, m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Azt vár(hat)juk, hogy

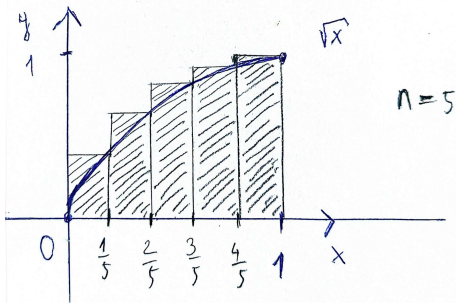
$$\lim_{(n,m) \rightarrow (\infty, \infty)} \mathbb{E}(d_{n,m}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(d_{n,1})$$

megegyezik az eredeti (abszolút folytonos egyenletes eloszlásos) probléma esetén meghatározott $\mathbb{E}(d)$ értékével.

Milyen gyorsan tart $\sum_{i=0}^n \sqrt{i}$ tart végtelenbe, amint $n \rightarrow \infty$?

1. módszer: Osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot $n - 1$ darab osztóponttal n darab $\frac{1}{n}$ hosszúságú részre, és tekintsük az $[0, 1] \ni x \mapsto \sqrt{x}$ függvénynek egy ezen beosztáshoz tartozó (felső) integrálközelítő összegét:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} \cdot \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^n \sqrt{i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$



Mivel az $[0, 1] \ni x \mapsto \sqrt{x}$ függvény folytonos és korlátos, a Riemann-integrál definíciója miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} \cdot \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx,$$

Mivel az $[0, 1] \ni x \mapsto \sqrt{x}$ függvény folytonos és korlátos, a Riemann-integrál definíciója miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} \cdot \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx,$$

ahol a Newton-Leibniz formula alapján

$$\int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=0}^n \sqrt{i} = \frac{2}{3}.$$

2. módszer:

Diszkrét $\mathcal{L}'$ Hospital szabály

Legyenek $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós sorozatok és $c \in \mathbb{R}$.

Legyen továbbá $\beta_n := b_n - b_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, ahol $b_0 := 0$.

Tegyük fel, hogy

- $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szigorúan monoton növekvő és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\beta_n} = c$.

Ekkor

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{b_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n \beta_i} \rightarrow c \quad \text{amint } n \rightarrow \infty.$$

Ez az eredmény a *Kronecker lemma* speciális esete, és hívják *Stolz-Cesàro lemmának* is.

2. módszer:

Diszkrét $\mathcal{L}'$ Hospital szabály

Legyenek $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós sorozatok és $c \in \mathbb{R}$.

Legyen továbbá $\beta_n := b_n - b_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, ahol $b_0 := 0$.

Tegyük fel, hogy

- $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ szigorúan monoton növekvő és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\beta_n} = c$.

Ekkor

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{b_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n \beta_i} \rightarrow c \quad \text{amint } n \rightarrow \infty.$$

Ez az eredmény a *Kronecker lemma* speciális esete, és hívják *Stolz-Cesàro lemmának* is.

Alkalmazzuk a diszkrét $\mathcal{L}'$ Hospital szabályt az alábbi választásokkal:

- $b_n := n^{\frac{3}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$,
- $x_n := \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$,
- $c := \frac{2}{3}$.

A feltételek teljesülése:

- azonnal látható, hogy $n^{\frac{3}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$, olyan pozitív számokból álló szigorúan monoton növekvő sorozat, mely végtelenbe tart.
- $\beta_n = n^{\frac{3}{2}} - (n-1)^{\frac{3}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$.
-

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{\beta_n} &= \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}} - (n-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{n}(n^{\frac{3}{2}} + (n-1)^{\frac{3}{2}})}{(n^{\frac{3}{2}} - (n-1)^{\frac{3}{2}})(n^{\frac{3}{2}} + (n-1)^{\frac{3}{2}})} \\&= \frac{n^2 + \sqrt{n}(n-1)^{\frac{3}{2}}}{n^3 - (n-1)^3} = \frac{n^2 + \sqrt{n}(n-1)^{\frac{3}{2}}}{n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1)} \\&= \frac{n^2 + \sqrt{n}(n-1)^{\frac{3}{2}}}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{1 + (1 - \frac{1}{n})^{\frac{3}{2}}}{3 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} \\&\rightarrow \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{amint } n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Így a diszkrét $\mathcal{L}'$ Hospital szabály alapján

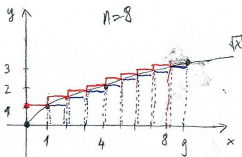
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^n \sqrt{i} = \frac{2}{3}.$$

3. módszer: Mivel az $[0, \infty) \ni x \mapsto \sqrt{x}$ függvény szigorúan monoton növekvő és folytonos, kapjuk, hogy tetszőleges $i \in \mathbb{N}$ esetén

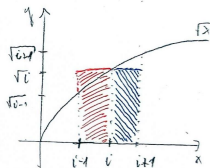
$$\int_{i-1}^i \sqrt{x} \, dx < \sqrt{i} < \int_i^{i+1} \sqrt{x} \, dx.$$

Összegezve ezt az egyenlőtlenséget $i \in \{1, \dots, n\}$ -re, ahol $n \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy

$$\int_0^n \sqrt{x} \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i \sqrt{x} \, dx < \sum_{i=1}^n \sqrt{i} < \sum_{i=1}^n \int_i^{i+1} \sqrt{x} \, dx = \int_1^{n+1} \sqrt{x} \, dx.$$



A **piros** négyzet tartozó téglalapok területét $\sum_{i=1}^8 \sqrt{i}$, mely nagyobb, mint $\int_0^8 \sqrt{x} \, dx$.



A **kék** négyzet tartozó téglalapok területét $\sum_{i=0}^9 \sqrt{i}$, mely kisebbsé, mint $\int_1^{10} \sqrt{x} \, dx$.

A Newton-Leibniz formula alapján, a bal- és jobb oldalon szereplő integrálok értékei:

$$\int_0^n \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^n = \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}},$$

$$\int_1^{n+1} \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^{n+1} = \frac{2}{3} ((n+1)^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Így

$$\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} < \sum_{i=1}^n \sqrt{i} < \frac{2}{3} ((n+1)^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Osztva minden oldalt $n^{\frac{3}{2}}$ -el, adódik, hogy

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^n \sqrt{i} < \frac{2}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right).$$

A jobb oldalon szereplő sorozat határértéke $\frac{2}{3}$, amint $n \rightarrow \infty$, így a rendőr szabály alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^n \sqrt{i} = \frac{2}{3}$.

A diszkrét $\mathcal{L}$ 'Hospital szabály használatára egy másik példa.

Feladat.

Tekintsük az alábbi rekurzívan definiált sorozatot

$$y_{n+1} := y_n + \frac{1}{y_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{ahol } y_0 > 0.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n^2}{n} = 2.$$

A diszkrét $\mathcal{L}'$ Hospital szabály használatára egy másik példa.

Feladat.

Tekintsük az alábbi rekurzívan definiált sorozatot

$$y_{n+1} := y_n + \frac{1}{y_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{ahol } y_0 > 0.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n^2}{n} = 2.$$

Ez a feladat speciális esete a 2006. évi 67-edik William Lowell Putnam Matematikaverseny egyik feladatának:

$$y_{n+1} := y_n + \frac{1}{\sqrt[k]{y_n}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{ahol } k \in \mathbb{N} \text{ adott.}$$

Megoldás. Alkalmazzuk a diszkrét $\mathcal{L}$ 'Hospital szabályt az alábbi választásokkal:

- $b_n := n, n \in \mathbb{N},$
- $x_n := y_n^2 - y_{n-1}^2, n \in \mathbb{N},$
- $c := 2.$

Mivel

- $n, n \in \mathbb{N},$ olyan pozitív számokból álló szigorúan monoton növekvő sorozat, mely végtelenbe tart,
- $\beta_n = n - (n - 1) = 1, n \in \mathbb{N},$

a diszkrét $\mathcal{L}$ 'Hospital szabály alkalmazhatóságához elég ellenőriznünk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n^2 - y_{n-1}^2) = 2.$$

Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned}y_i^2 - y_{i-1}^2 &= \left(y_{i-1} + \frac{1}{y_{i-1}}\right)^2 - y_{i-1}^2 = \left(y_{i-1}^2 + 2 + \frac{1}{y_{i-1}^2}\right) - y_{i-1}^2 \\&= 2 + \frac{1}{y_{i-1}^2} \geq 2, \quad i \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

kapjuk, hogy

$$y_n^2 = (y_n^2 - y_{n-1}^2) + (y_{n-1}^2 - y_{n-2}^2) + \cdots + (y_1^2 - y_0^2) + y_0^2 \geq 2n + y_0^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^2 = \infty \quad \text{és} \quad \frac{y_n^2}{n} \geq 2 + \frac{y_0^2}{n} \geq 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Továbbá,

$$|(y_n^2 - y_{n-1}^2) - 2| = \left| \left(2 + \frac{1}{y_{n-1}^2}\right) - 2 \right| = \frac{1}{y_{n-1}^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ahol a jobboldal 0-hoz tart, hiszen $y_{n-1}^2 \rightarrow \infty$, amint $n \rightarrow \infty$.

Így a baloldal is 0-hoz tart, és ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n^2 - y_{n-1}^2) = 2$.

A diszkrét $\mathcal{L}'$ Hospital szabály alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n^2}{n} = 2.$$

Vegyük észre, hogy a jelen feladatban a diszkrét $\mathcal{L}'$ Hospital szabálynak csak azt a speciális esetét használtuk fel, miszerint egy konvergens sorozathoz tartozó *számtani közepek sorozata* is konvergens ugyanazzal a határértékkel. □

A diszkrét $\mathcal{L}'$ Hospital szabály alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n^2}{n} = 2.$$

Vegyük észre, hogy a jelen feladatban a diszkrét $\mathcal{L}'$ Hospital szabálynak csak azt a speciális esetét használtuk fel, miszerint egy konvergens sorozathoz tartozó *számtani közepek sorozata* is konvergens ugyanazzal a határértékkel. □

Feladat. (Undergraduate Problem U542, Problem corner, Mathematical Reflections, Issue 1, 2021)

Határozzuk meg az alábbi határértéket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{2}} \right).$$

Visszatérve az eredeti problémához, az előzőek alapján

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(d_{n,1}) &= \frac{100}{\sqrt{g}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \sum_{i=0}^n \sqrt{i} \right) \\&= \frac{100}{\sqrt{g}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=0}^n \sqrt{i} \right) \\&= \frac{100}{\sqrt{g}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=0}^n \sqrt{i} \\&= \frac{100}{\sqrt{g}} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{200}{3\sqrt{g}}.\end{aligned}$$

Ez az érték egybeesik az eredeti (abszolút folytonos egyenletes eloszlásos) probléma esetén $\mathbb{E}(d)$ "direkt" módon kiszámolt értékével.

Felmerülhet a kérdés, hogy ez csak véletlen egybeesés vagy valamilyen általánosabb eredmény áll a háttérben?

1. Állítás. Belátható (például karakterisztikus függvények segítségével), hogy

$$(h_n, v_m) \xrightarrow{\mathcal{D}} (h, v) \quad \text{amint } n \rightarrow \infty \text{ és } m \rightarrow \infty,$$

ahol

- h egyenletes eloszlású a $[0, 50]$ intervallumon,
- v egyenletes eloszlású az $[5, 15]$ intervallumon,
- h és v függetlenek,
- $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ az eloszlásbeli konvergenciát jelöli.

2. Állítás. (Portmanteau tétel) Legyenek $X_n, n \in \mathbb{N}$, és X véletlen változók és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos, folytonos függvény.

Ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, akkor $\mathbb{E}(f(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(X))$.

Alkalmazva a 2. Állítást az

$$X_n := h_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad X := h, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \sqrt{x} & \text{ha } x \in [0, 50], \\ \sqrt{50} & \text{ha } x > 50, \end{cases}$$

választásokkal, és felhasználva, hogy h_n és h értékkészlete $[0, 50]$ -beli, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\sqrt{h_n}) = \mathbb{E}(f(h_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(h)) = \mathbb{E}(\sqrt{h}) \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Hasonlóan, alkalmazva a 2. Állítást az

$$X_m := v_m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad X := v, \quad f(x) := \begin{cases} 5 & \text{ha } x < 5, \\ x & \text{ha } x \in [5, 15], \\ 15 & \text{ha } x > 15, \end{cases}$$

választásokkal, és felhasználva, hogy v_m és v értékkészlete $[5, 15]$ -beli, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(v_m) = \mathbb{E}(f(v_m)) \rightarrow \mathbb{E}(f(v)) = \mathbb{E}(v) \quad \text{ha } m \rightarrow \infty.$$

Ezért, felhasználva, hogy h_n és v_m függetlensége maga után vonja $\sqrt{h_n}$ és v_m függetlenségét, és azt, hogy $\sqrt{h_n}$ és v_m várható értékeik végesek, a várható érték (4)-es tulajdonsága szerint

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(d_{n,m}) &= \sqrt{\frac{2}{g}} \mathbb{E}(\sqrt{h_n} v_m) = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \mathbb{E}(\sqrt{h_n}) \cdot \mathbb{E}(v_m) \\ &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \mathbb{E}(\sqrt{h}) \cdot \mathbb{E}(v) \quad \text{ha } n \rightarrow \infty \text{ és } m \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

ahol a korábbiak szerint

$$\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \mathbb{E}(\sqrt{h}) \cdot \mathbb{E}(v) = \mathbb{E}(d).$$

Ezért

$$\mathbb{E}(d_{n,m}) \rightarrow \mathbb{E}(d) \quad \text{ha } n \rightarrow \infty \text{ és } m \rightarrow \infty.$$

Feladat.

Az előzőekben látott *diszkrét közelítés módszerével* határozzuk meg a d távolság (a kilátó falától milyen távol ér földet a golyó) második momentumát is, azaz $\mathbb{E}(d^2)$ értékét!

Feladat.

Az előzőekben látott *diszkrét közelítés módszerével* határozzuk meg a d távolság (a kilátó falától milyen távol ér földet a golyó) második momentumát is, azaz $\mathbb{E}(d^2)$ értékét!

Megoldás. Először meghatározzuk $\mathbb{E}(d_{n,m}^2)$ értékét, ahol

$$d_{n,m} = \sqrt{\frac{2h_n}{g}} \cdot v_m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Feladat.

Az előzőekben látott *diszkrét közelítés módszerével* határozzuk meg a d távolság (a kilátó falától milyen távol ér földet a golyó) második momentumát is, azaz $\mathbb{E}(d^2)$ értékét!

Megoldás. Először meghatározzuk $\mathbb{E}(d_{n,m}^2)$ értékét, ahol

$$d_{n,m} = \sqrt{\frac{2h_n}{g}} \cdot v_m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Felhasználva, hogy h_n és v_m függetlensége maga után vonja h_n és v_m^2 függetlenségét és azt, hogy h_n és v_m^2 várható értékeik végesek, a várható érték (1)-es és (4)-es tulajdonságai alapján

$$\mathbb{E}(d_{n,m}^2) = \mathbb{E}\left(\frac{2}{g} h_n v_m^2\right) = \frac{2}{g} \cdot \mathbb{E}(h_n) \cdot \mathbb{E}(v_m^2), \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Feladat.

Az előzőekben látott *diszkrét közelítés módszerével* határozzuk meg a d távolság (a kilátó falától milyen távol ér földet a golyó) második momentumát is, azaz $\mathbb{E}(d^2)$ értékét!

Megoldás. Először meghatározzuk $\mathbb{E}(d_{n,m}^2)$ értékét, ahol

$$d_{n,m} = \sqrt{\frac{2h_n}{g}} \cdot v_m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Felhasználva, hogy h_n és v_m függetlensége maga után vonja h_n és v_m^2 függetlenségét és azt, hogy h_n és v_m^2 várható értékeik végesek, a várható érték (1)-es és (4)-es tulajdonságai alapján

$$\mathbb{E}(d_{n,m}^2) = \mathbb{E}\left(\frac{2}{g} h_n v_m^2\right) = \frac{2}{g} \cdot \mathbb{E}(h_n) \cdot \mathbb{E}(v_m^2), \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Itt tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{E}(h_n) = \sum_{i=0}^n i \cdot \frac{50}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{50}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i = \frac{50}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 25.$$

Így $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(h_n) = 25$.

Továbbá, tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(v_m^2) &= \sum_{j=0}^m \left(5 + j \cdot \frac{10}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{m+1} \\&= \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \left(25 + \frac{100}{m} \cdot j + \frac{100}{m^2} \cdot j^2\right) \\&= \frac{1}{m+1} \left(25 \sum_{j=0}^m 1 + \frac{100}{m} \sum_{j=1}^m j + \frac{100}{m^2} \sum_{j=1}^m j^2\right)\end{aligned}$$

Továbbá, tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(v_m^2) &= \sum_{j=0}^m \left(5 + j \cdot \frac{10}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{m+1} \\&= \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \left(25 + \frac{100}{m} \cdot j + \frac{100}{m^2} \cdot j^2\right) \\&= \frac{1}{m+1} \left(25 \sum_{j=0}^m 1 + \frac{100}{m} \sum_{j=1}^m j + \frac{100}{m^2} \sum_{j=1}^m j^2\right) \\&= \frac{1}{m+1} \left(25(m+1) + \frac{100}{m} \cdot \frac{m(m+1)}{2} + \frac{100}{m^2} \cdot \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\right) \\&= 75 + \frac{50}{3} \cdot \frac{2m+1}{m}.\end{aligned}$$

Továbbá, tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(v_m^2) &= \sum_{j=0}^m \left(5 + j \cdot \frac{10}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{m+1} \\&= \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \left(25 + \frac{100}{m} \cdot j + \frac{100}{m^2} \cdot j^2\right) \\&= \frac{1}{m+1} \left(25 \sum_{j=0}^m 1 + \frac{100}{m} \sum_{j=1}^m j + \frac{100}{m^2} \sum_{j=1}^m j^2\right) \\&= \frac{1}{m+1} \left(25(m+1) + \frac{100}{m} \cdot \frac{m(m+1)}{2} + \frac{100}{m^2} \cdot \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\right) \\&= 75 + \frac{50}{3} \cdot \frac{2m+1}{m}.\end{aligned}$$

Így

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(v_m^2) = 75 + \frac{50}{3} \cdot 2 = \frac{325}{3}.$$

Ezért

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(d_{n,m}^2) &= \frac{2}{g} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(h_n) \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(v_m^2) \\ &= \frac{2}{g} \cdot 25 \cdot \frac{325}{3} = \frac{16250}{3g}.\end{aligned}$$

Ez az érték egybeesik az eredeti (abszolút folytonos egyenletes eloszlásos) probléma esetén $\mathbb{E}(d^2)$ "direkt" módon kiszámolt értékével.

Ezért

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(d_{n,m}^2) &= \frac{2}{g} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(h_n) \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(v_m^2) \\ &= \frac{2}{g} \cdot 25 \cdot \frac{325}{3} = \frac{16250}{3g}.\end{aligned}$$

Ez az érték egybeesik az eredeti (abszolút folytonos egyenletes eloszlásos) probléma esetén $\mathbb{E}(d^2)$ "direkt" módon kiszámolt értékével.

Ez most sem csak véletlen egybeesés, az 1. és 2. Állítások segítségével az alábbi módon ellenőrizhető le, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(d_{n,m}^2) = \mathbb{E}(d^2).$$

Az 1. Állítás alapján

$$(h_n, v_m) \xrightarrow{\mathcal{D}} (h, v) \quad \text{amint } n \rightarrow \infty \text{ és } m \rightarrow \infty.$$

Alkalmazva a 2. Állítást az

$$X_n := h_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad X := h, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ x & \text{ha } x \in [0, 50], \\ 50 & \text{ha } x > 50, \end{cases}$$

választásokkal, és felhasználva, hogy h_n és h értékészlete $[0, 50]$ -beli, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(h_n) = \mathbb{E}(f(h_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(h)) = \mathbb{E}(h) \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Hasonlóan, alkalmazva a 2. Állítást az

$$X_m := v_m^2, \quad m \in \mathbb{N}, \quad X := v^2, \quad f(x) := \begin{cases} 5^2 & \text{ha } x < 5, \\ x^2 & \text{ha } x \in [5, 15], \\ 15^2 & \text{ha } x > 15, \end{cases}$$

választásokkal, és felhasználva, hogy v_m és v értékészlete $[5, 15]$ -beli, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(v_m^2) = \mathbb{E}(f(v_m)) \rightarrow \mathbb{E}(f(v)) = \mathbb{E}(v^2) \quad \text{ha } m \rightarrow \infty.$$

Ezért

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(d_{n,m}^2) &= \frac{2}{g} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(h_n) \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(v_m^2) \\ &= \frac{2}{g} \cdot \mathbb{E}(h) \cdot \mathbb{E}(v^2),\end{aligned}$$

ahol a korábbiak szerint

$$\frac{2}{g} \cdot \mathbb{E}(h) \cdot \mathbb{E}(v^2) = \mathbb{E}(d^2).$$

Így

$$\mathbb{E}(d_{n,m}^2) \rightarrow \mathbb{E}(d^2) \quad \text{ha } n \rightarrow \infty \text{ és } m \rightarrow \infty.$$

□

2. Feladat

A következő feladatot a 42. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny (2023), I. Kategória (gimnázium 9. évfolyam), I. fordulójának 2. Feladata motiválta.

A Nemzetközi Tenisz Szövetség szerint a teniszlabdák akkor megfelelő minőségűek, ha 100 inch, azaz 254 cm magasságból betonra ejtve a visszapattanási magasság 135 cm és 147 cm közé esik. Egy 254 cm magasságból betonra ejtett teniszlabda ütközési számán a visszapattanási és beesési sebességek arányát értjük.

2. Feladat

A következő feladatot a 42. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny (2023), I. Kategória (gimnázium 9. évfolyam), I. fordulójának 2. Feladata motiválta.

A Nemzetközi Tenisz Szövetség szerint a teniszlabdák akkor megfelelő minőségűek, ha 100 inch, azaz 254 cm magasságból betonra ejtve a visszapattanási magasság 135 cm és 147 cm közé esik. Egy 254 cm magasságból betonra ejtett teniszlabda ütközési számán a visszapattanási és beesési sebességek arányát értjük.

Az A és B cégek teniszlabdákat gyártanak. Az A cég esetén az ütközési számot megadó *véletlen változó* egyenletes eloszlású a $[0.7, 0.8]$ intervallumon, a B cég esetén egy olyan abszolút folytonos eloszlású véletlen változó, melynek sűrűségfüggvénye:

$$f_B(x) = \begin{cases} 200x - 140 & \text{ha } x \in [0.7, 0.8], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- (i) Leejtünk 254 cm magasságból a betonra egy az A cég által gyártott teniszlabdát. Várhatóan milyen magasra pattan vissza? Válaszoljuk meg ezt a kérdést egy a B cég által gyártott teniszlabda esetén is!
- (ii) Mi a valószínűsége, hogy egy teniszlabda, melyet az A cég gyártott megfelelő minőségű? Válaszoljuk meg ezt a kérdést egy a B cég által gyártott teniszlabda esetén is!
- (iii) Az A cég 40, a B cég 60 teniszlabdát küldött nekünk promóciós ajándékként. Összekeverjük a 100 teniszlabdát, véletlenszerűen kiválasztunk egyet, majd 254 cm magasságból a betonra ejtve kiderül, hogy megfelelő minőségű. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztott teniszlabdát az A cég gyártotta?

A feladat megoldása megtalálható az alábbi cikkben:

MÁTYÁS BARCZY, IMRE KOCSIS and CSABA GÁBOR KÉZI:

A stochastic approach in physics exercises of mathematics education.
[arXiv](https://arxiv.org/abs/2410.04076) 2410.04076, (2024).

A ferde hajtítás [Ig Nobel-díjas](#) téma (ahol Ig az "ignoble" rövidítése):

2005-ben közösen kapta meg Victor Benno Meyer-Rochow és Gál József a hidrodinamika területén végzett alábbi kutatásaikért:

"for using basic principles of physics to calculate the pressure that builds up inside a penguin."

Magyarul:

a fizika alapelveinek a pingvinekben fellépő nyomás kiszámítása során való felhasználásáért.

Az Ig Nobel-díjas cikk:

Victor Benno Meyer-Rochow and József Gál: Pressures produced when penguins pooh—calculations on avian defaecation.

Polar Biology **(27)** 56–58 (2003).

Megjegyzés. A

MÁTYÁS BARCZY, IMRE KOCSIS and CSABA GÁBOR KÉZI:
A stochastic approach in physics exercises of mathematics education.
[arXiv](#) 2410.04076, (2024).

cikkben levő kidolgozott példákat, azok variánsait vagy új véletlenített fizika példákat matematika-, fizika szakkörön vagy fakultáción ki lehet próbálni a diákokkal közösen megoldva.

Megjegyzés. A

MÁTYÁS BARCZY, IMRE KOCSIS and CSABA GÁBOR KÉZI:
A stochastic approach in physics exercises of mathematics education.
[arXiv](#) 2410.04076, (2024).

cikkben levő kidolgozott példákat, azok variánsait vagy új véletlenített fizika példákat matematika-, fizika szakkörön vagy fakultáción ki lehet próbálni a diákokkal közösen megoldva.

Köszönöm a figyelmet!