Az oszthatóság, a legnagyobb közös osztó és a modulo m kongruencia tulajdonságai

1. Tétel. Tetszőleges a, b, c, d egész számokra érvényesek az alábbiak:

(1) $a \mid a$;
(2) ha $a \mid b$ és $b \mid a$, akkor $a = \pm b$;
(3) ha $a \mid b$ és $b \mid c$, akkor $a \mid c$;
(4) $1 \mid a$;
(5) $a \mid 0$;
(6) $a \mid b$ akkor és csak akkor, ha $|a| \mid |b|$;
(7) ha $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid b + c$;
(8) ha $a \mid b$, akkor $a \mid bc$;
(9) ha $a \mid b$ és $c \mid d$, akkor $ac \mid bd$;
(10) ha $ac \mid bc$ és $c \neq 0$, akkor $a \mid b$.

2. Tétel. Jelölje $\mathrm{lnko}(m, n)$ az m és n egész számok nem negatív legnagyobb közös osztóját, és $\mathrm{lkkt}(m, n)$ az m és n egészek nem negatív legkisebb közös többszörösét. Tetszőleges a, b, c egész számokra érvényesek az alábbiak:

(1) $a \mid b$ akkor és csak akkor, ha $\mathrm{lnko}(a, b) = |a|$;
(2) $\mathrm{lnko}(0, a) = \mathrm{lnko}(a, a) = |a|$;
(3) $\mathrm{lnko}(1, a) = 1$;
(4) $\mathrm{lnko}(a, b) = \mathrm{lnko}(b, a)$;
(5) $\mathrm{lnko}(\mathrm{lnko}(a, b), c) = \mathrm{lnko}(a, \mathrm{lnko}(b, c))$;
(6) $\mathrm{lnko}(a + bc, b) = \mathrm{lnko}(a, b)$;
(7) $|c| \,\mathrm{lnko}(a, b) = \mathrm{lnko}(ca, cb)$;
(8) ha $a \neq 0$ vagy $b \neq 0$, akkor $\mathrm{lnko}(\frac{a}{\mathrm{lnko}(a,b)}, \frac{b}{\mathrm{lnko}(a,b)}) = 1$;
(9) ha $\mathrm{lnko}(a, c) = 1$, akkor $\mathrm{lnko}(a, cb) = \mathrm{lnko}(a, b)$;
(10) ha $\mathrm{lnko}(a, c) = 1$ és $a \mid cb$, akkor $a \mid b$;
(11) $\mathrm{lkkt}(a, b) \,\mathrm{lnko}(a, b) = |ab|$;
(12) ha $\mathrm{lnko}(a, b) = 1$, akkor $\mathrm{lkkt}(a, b) = |ab|$.

3. Tétel. Tetszőleges a, b, c, d, m, n egész számokra érvényesek az alábbiak:

(1) $a \equiv a \pmod{m}$;
(2) ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $b \equiv a \pmod{m}$;
(3) ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $b \equiv c \pmod{m}$, akkor $a \equiv c \pmod{m}$;
(4) ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $c \equiv d \pmod{m}$, akkor $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$;
(5) ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $c \equiv d \pmod{m}$, akkor $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$;
(6) $ca \equiv cb \pmod{m}$ akkor és csak akkor, ha $a \equiv b \pmod{\frac{m}{\mathrm{lnko}(c,m)}}$, feltéve hogy $\mathrm{lnko}(c, m) \neq 0$;
(7) ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $a \equiv b \pmod{n}$ akkor és csak akkor, ha $a \equiv b \pmod{\mathrm{lkkt}(m, n)}$;
(8) ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $\mathrm{lnko}(a, m) = \mathrm{lnko}(b, m)$.

Alapvető logikai ekvivalenciák

4. Tétel. Teljesülnek az alábbi ítéletkalkulusbeli logikai ekvivalenciák

$$
\begin{array}{ccr}
A \wedge A \equiv A, & A \vee A \equiv A, & \text{(idempotencia)} \\
A \wedge B \equiv B \wedge A, & A \vee B \equiv B \vee A, & \text{(kommutativitás)} \\
(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), & (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C), & \text{(asszociativitás)} \\
A \wedge (A \vee B) \equiv A, & A \vee (A \wedge B) \equiv A, & \text{(abszorptivitás)} \\
A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C), & A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), & \text{(disztibutivitás)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccr}
 & \neg(\neg A) \equiv A, & \text{(dupla tagadás)} \\
\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B), & \neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B), & \text{(De Morgan szabályok)}
\end{array}
$$

$$A \to B \equiv (\neg A) \vee B, \qquad A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A),$$
$$A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A), \qquad A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A,$$
$$A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C, \qquad (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C),$$
$$A \to (B \wedge C) \equiv (A \to B) \wedge (A \to C), \qquad (A \vee B) \to C \equiv (A \to C) \wedge (B \to C).$$

5. Tétel. Legyenek **i** és **h** a konstans igaz és a konstans hamis ítéletek. Ekkor teljesülnek az alábbi ítéletkalkulusbeli logikai ekvivalenciák

$$A \wedge (\neg A) \equiv \mathbf{h}, \qquad A \vee (\neg A) \equiv \mathbf{i},$$
$$A \wedge \mathbf{i} \equiv A, \qquad A \vee \mathbf{i} \equiv \mathbf{i},$$
$$A \wedge \mathbf{h} \equiv \mathbf{h}, \qquad A \vee \mathbf{h} \equiv A,$$
$$\mathbf{i} \to A \equiv A, \qquad \mathbf{h} \to A \equiv \mathbf{i},$$
$$A \to \mathbf{i} \equiv \mathbf{i}, \qquad A \to \mathbf{h} \equiv \neg A.$$

6. Tétel. Legyenek F, G tetszőleges predikátumkalkulusbeli formulák, H pedig olyan predikátumkalkulusbeli formula, melynek x nem szabad változója. Ekkor teljesülnek az alábbi logikai ekvivalenciák

$$(\forall x)(\forall y)F \equiv (\forall y)(\forall x)F, \qquad (\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F,$$
$$\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)(\neg F), \qquad \neg(\exists x)F \equiv (\forall x)(\neg F),$$
$$(\forall x)(F \wedge G) \equiv (\forall x)F \wedge (\forall x)G, \qquad (\exists x)(F \vee G) \equiv (\exists x)F \vee (\exists x)G,$$
$$(\forall x)H \equiv H, \qquad (\exists x)H \equiv H.$$

Halmazokra vonatkozó alapvető összefüggések

7. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra

$$\emptyset \subseteq A,$$
$$A \subseteq A, \qquad \text{(reflexivitás)}$$
$$\text{ha } A \subseteq B \text{ és } B \subseteq A, \text{ akkor } A = B, \qquad \text{(antiszimmetria)}$$
$$\text{ha } A \subseteq B \text{ és } B \subseteq C, \text{ akkor } A \subseteq C. \qquad \text{(tranzitivitás)}$$

8. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra

$$A \cup \emptyset = A, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset,$$
$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A, \qquad \text{(idempotencia)}$$
$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A, \qquad \text{(kommutativitás)}$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \qquad \text{(asszociativitás)}$$
$$(A \cup B) \cap A = A, \qquad (A \cap B) \cup A = A, \qquad \text{(abszorptivitás)}$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \qquad \text{(disztibutivitás)}$$

9. Tétel. Tetszőleges A, B halmazokra ekvivalensek a követező feltételek:
(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$.

10. Tétel. Tetszőleges $A, B \subseteq U$ halmazokra

$$\overline{\overline{A}} = A, \qquad \text{(dupla komplementer)}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \text{(De Morgan szabályok)}$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset, \qquad A \cup \overline{A} = U,$$
$$A \cap U = A, \qquad A \cup U = U.$$