Algebra és alkalmazásai vizsga

Minden feladat teljes megoldása 5+5 pontot ér. Az elégségeshez legalább 20 pont elérése szükséges a vizsgán, függetlenül a gyakorlaton szerzett pontszámtól. A feladatokra adott válaszaiban minden állítását indokolja.

1.

(i) Mondja ki és bizonyítsa a spektráltételt unitér terekre.

(ii) Van-e olyan diagonális komplex mátrix, amely hasonló a következő mátrixhoz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Ha van, akkor adjon meg egyet.

2.

(i) Mondja ki a főideálgyűrű feletti végesen generált szabad modulusok részmodulusainak generátorrendszerére vonatkozó tételt.

(ii) Tekintsük $\mathbb{Z}^3$ szabad $\mathbb{Z}$-modulust és a

$$\{(1,2,3),\ (-1,0,3),\ (2,2,0)\}$$

által generált H részmodulusát. Adja meg $\mathbb{Z}^3/H$ faktormodulust izomorfia erejéig ciklikus $\mathbb{Z}$-modulusok szorzataként.

3.

(i) Definiálja a Jordan-blokk fogalmát.

(ii) Legyen V egy 4-dimenziós $\mathbb{R}$ feletti vektortér és legyen φ egy V-n értelmezett lineáris transzformáció, melynek minimálpolinomja $(x-2)^4$. Legyen u olyan eleme V-nek, melynek rendje $(x-2)^4$ a φ-hez tartozó - V-n a szokásos módon értelmezett - $\mathbb{R}[x]$-modulusban. Adja meg φ Jordan-mátrixát. Adjon meg V-nek olyan bázisát u és φ segítségével, melyben φ-mátrixa a megadott Jordan-mátrix.

4.

(i) Mondja ki és bizonyítsa a véges testek létezésére vonatkozó tételt.

(ii) Mely ismert csoporttal izomorf $\mathbf{GF}(7^{12})$ automorfizmus csoportja, és hány részteste van $\mathbf{GF}(7^{12})$ testnek?

5.

(i) Definiálja a BCH-kódokat.

(ii) Legalább mekkora a definiált kód minimális súlya, és mely tétel alapján?

A kurzus értékelése, ponthatárok:
Feltéve, hogy a vizsgán elért pontszám legalább 20:
2: 40-52
3: 53-64
4: 65-79
5: 80-100