**MBN411: ABSZTRAKT ALGEBRA GYAKORLAT** (2012.05.10)

## 1. Ismétlés, alapfogalmak

*Alapfeladatok*

**1.1. Feladat.** Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve?

(1) $(\mathbb{Z}_2; \cdot)$,
(2) $(\mathbb{Z}_2; +)$,
(3) $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}; \circ)$, ahol $a \circ b = a + b + ab$ tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$-re,
(4) $(\mathbb{R}; \circ)$, ahol $x \circ y = x + 2y$ tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$-re,
(5) $(P(H); \cup)$, ahol $H$ nemüres halmaz,
(6) $(P(H); \triangle)$, ahol $H$ nemüres halmaz,
(7) $G = (\{a, b, c, 1, 2, 3\}; \cdot)$, ahol a (jelen esetben asszociatív) szorzást az alábbi művelettáblázat adja meg:

| $\cdot$ | $a$ | $b$ | $c$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 2 | 3 | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | 2 | 3 | 1 | $b$ | $c$ | $a$ |
| $c$ | 3 | 1 | 2 | $c$ | $a$ | $b$ |
| 1 | $a$ | $b$ | $c$ | 1 | 2 | 3 |
| 2 | $b$ | $c$ | $a$ | 2 | 3 | 1 |
| 3 | $c$ | $a$ | $b$ | 3 | 1 | 2 |

**1.2. Feladat.** Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve?

(1) $(\{k \in \mathbb{Z} : 2 \mid k\}; +)$,
(2) $(\mathbb{N}; +)$,
(3) $(\mathbb{Z}_6; +)$,
(4) $(\mathbb{Z}_6; \cdot)$,
(5) $(\mathbb{Z}_{12}^*; \cdot)$,
(6) $(\mathbb{Z}_{15}^*; +)$,
(7) $(\{q \in \mathbb{Q} : q = \frac{a}{b}$, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$ relatív prímek és $2 \nmid b\};+)$,
(8) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; +)$,
(9) $(\{\varepsilon \in \mathbb{C} :$ létezik olyan $n \in \mathbb{N},$ amelyre $\varepsilon^n = 1\}; \cdot)$.

**1.3. Feladat.** Adja meg a $G$ csoport azon elemeit, amelyek előállnak az $a$ elem pozitív egész kitevős hatványaiként, illetve egész kitevős hatványaiként.

(1) $G = (\mathbb{Z}; +),\ a = 1$,
(2) $G = (\mathbb{Z}; +),\ a = 4$,
(3) $G = D_6$, $a$ pedig a középpont körüli $\frac{\pi}{3}$ szöggel való forgatás,
(4) $G = (P(\{1, 2, 3\}; \triangle),\ a = \{1, 2\}$,
(5) $G = (\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 3), \cdot),\ a = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(6) $G = (\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$, $a = \overline{-5}$,
(7) $G = (\mathbb{Z}_{24}^*, \cdot)$, $a = \overline{19}$.

**1.4. Feladat.** Legyen a $D_4$ csoportban $a$ a középpont körüli $\frac{\pi}{2}$ szöggel való forgatás, $t$ pedig valamely szimmetriatengelyre vonatkozó tükrözés. Mutassa meg, hogy ekkor $at = ta^{-1}$.

**1.5. Feladat.** Az alábbi következtetések közül melyek érvényesek minden csoportban tetszőleges $a, b, c, x, y$ elemekre?

(1) $axb = ayb \Rightarrow x = y$,
(2) $xc = cy \Rightarrow x = y$.

A helyes következtetést igazolja, a hamisra adjon ellenpéldát.

*Szorgalmi feladatok*

**1.6. Feladat.** (1 pont)
Tekintsük az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon az $x * y = |x|\, y$ műveletet. Döntse el, hogy a fenti művelet rendelkezik-e az alábbi tulajdonságokkal:

- asszociatív,
- kommutatív,
- van bal, illetve jobb oldali egységeleme.

Csoportot alkot-e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a fenti műveletre nézve?

**1.7. Feladat.** (1 pont)
Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve?

(1) $(\{\pi_{ab} \in \mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}_p} : a, b \in \mathbb{Z}_p \text{ és } x\pi_{ab} = xa + b\,(x \in \mathbb{Z}_p)\}, \cdot)$,
(2) $(\{\pi_{ab} \in \mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}_p} : a \in \mathbb{Z}_p^*, b \in \mathbb{Z}_p \text{ és } x\pi_{ab} = xa + b\,(x \in \mathbb{Z}_p)\}, \cdot)$

ahol $p$ prím, $\cdot$ pedig a szokásos leképezésszorzás.

**1.8. Feladat.** (1 pont)
Csoportot alkot-e az alábbi halmaz a megadott műveletre nézve?

$$(\{r \in \mathbb{R} : |r| < c\}, *), \text{ ahol } r * s = \frac{r+s}{1+\frac{rs}{c^2}}, \ c \in \mathbb{R}^+ \text{ rögzített.}$$

**1.9. Feladat.** (1 pont)
Milyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén lesz az alábbi halmaz a megadott műveletre nézve csoport?

$$(\mathbb{R}, \circ), \text{ ahol } x \circ y = ax + by + c \text{ tetszőleges } x, y \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

**1.10. Feladat.** (2 pont)

(1) Mutassa meg, hogy a $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ halmazon egyetlen olyan asszociatív szorzás létezik, amelyre teljesülnek a következők:
  - az $\{1, -1, i, -i\}$ részhalmazban ugyanúgy szorzunk, mintha a felsorolt elemek komplex számok lennének,
  - az $\{1, -1, j, -j\}$ és $\{1, -1, k, -k\}$ részhalmazban ugyanígy számolunk, csak $i$ helyett $j$-vel és $k$-val,
  - $ij = k, jk = i, ki = j$.

(2) Továbbá igazolja, hogy $Q$ csoportot alkot erre a szorzásra nézve.

Ezt a csoportot *kvaterniócsoportnak* nevezik.

**1.11. Feladat.** (3 pont)
Egészítse ki az alábbi művelettáblázatot úgy, hogy csoport művelettáblázatát kapja:

| $\cdot$ | $e$ | $a$ | $b$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | | | | | |
| $a$ | | $b$ | | $y$ | | |
| $b$ | | $e$ | | | | |
| $x$ | | $z$ | | | | |
| $y$ | | | | | | |
| $z$ | | | | | | |

Választásait minden esetben indokolja.

**1.12. Feladat.** (2 pont)
A $D_n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ $n$-edfokú diédercsoportban jelölje $a$ a középpont körüli $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatást, $t$ pedig az egyik tengelyes tükrözést.

(1) Igazolja, hogy $at = ta^{-1}$.
(2) Bizonyítsa be, hogy $D_n = \{\mathrm{id}, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, t, at, a^2t, \ldots, a^{n-1}t\}$.
(3) Határozza meg, hogy a fent felsorolt elemek közül melyikkel egyenlők a következő elemek: $ta$, $ta^2$, $\ldots$, $ta^{n-1}$, $ta^{-2}$, $(ata)^{2008}$, $(ta^{-1}t)^{n-1}$, $(ata^3t^{-5}a^{-1})^{10n-50}$.

**1.13. Feladat.** (1 pont)
Adjon meg olyan alakzatot a síkban, melynek szimmetriacsoportja $1, 2, 3$, illetve 4 elemű. Adjon meg olyan alakzatot a síkban, melynek szimmetria- és mozgáscsoportja is 4 elemű.

**1.14. Feladat.** (2 pont)
Írja le a kör mozgás- és szimmetriacsoportját.

**1.15. Feladat.** (2 pont)
Hány eleme van a szabályos tetraéder mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

**1.16. Feladat.** (3 pont)
Hány eleme van a kocka mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

**1.17. Feladat.** (1 pont)
Az alábbi következtetések közül melyek érvényesek minden csoportban tetszőleges $a, b, c, x$ elemekre?

(1) $xab = c \Rightarrow x = cb^{-1}a^{-1}$,
(2) $xab = a \Rightarrow x = b^{-1}$.

**1.18. Feladat.** (1 pont)
Igazolja, hogy ha egy csoportnak csak véges sok eleme van, akkor bármely elemére a pozitív egész kitevős hatványok halmaza ugyanaz, mint a negatív egész kitevős hatványok halmaza.

**1.19. Feladat.** (1 pont)
Adjon meg olyan elemet a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2)$ csoportban, amelyben nem szerepel 0, azonban csak véges sok különböző hatványa van.

**1.20. Feladat.** (2 pont)
Adja meg az $n$-edik komplex egységgyökök $E_n$ csoportjának elemeit, és mindegyik esetén azt is, hogy hány különböző hatványa van.

## 2. Véges halmaz permutációi

*Alapfeladatok*

**2.1. Feladat.** Számítsa ki a permutációk megadott szorzatait közvetlenül a definíció alapján:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

**2.2. Feladat.** Adja meg az alábbi permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$,

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}^{6}$,

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{1433}$,

(6) a 2.1. Feladatban szereplő két — szorzatként megadott — permutáció,
(7) $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 5)$,
(8) $(4\ 3\ 2\ 5)(1\ 2\ 4\ 6)(2\ 4\ 6)$,
(9) $(2\ 4\ 5)(1\ 3\ 5)^{-1}(1\ 2)$,
(10) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 3\ 7\ 10)^3$,
(11) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 3\ 7\ 10)^4$,
(12) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 3\ 7\ 10)^5$.

**2.3. Feladat.** Határozza meg az alábbi permutációk paritását:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,

(3) $(4\ 3\ 2\ 5)(1\ 3\ 2)(2\ 4\ 6)$,

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 & 8 & 7 & 9 & 13 & 10 & 16 & 15 & 12 & 17 & 14 & 11 \end{pmatrix}^4$.

**2.4. Feladat.** Adja meg az alábbi tulajdonságú $\pi$ permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban:

(1) $((1\ 2\ 3)(2\ 1))^{-1}\pi = (2\ 4)$,
(2) $((1\ 2\ 3)(2\ 3))^{-1}\pi(2\ 3\ 1) = (3\ 1)$.

**2.5. Feladat.** Oldja meg $S_4$-ben alábbi egyenleteket:

(1) $\pi^2 = (1\ 2\ 3)$,
(2) $\pi^2 = (1\ 2)$,
(3) $\pi^3 = \mathrm{id}$.

*Szorgalmi feladatok*

**2.6. Feladat.** (1 pont)
Oldja meg $S_6$-ban az alábbi egyenleteket:

(1) $\pi^2 = (1\ 2\ 3)$,
(2) $\pi^2 = (1\ 2)(3\ 4)$.
(3) $\pi^3 = (1\ 2\ 3)$,

**2.7. Feladat.** (2 pont)
Milyen lehet a szerkezete

(1) egy 2 és egy $n > 2$ hosszúságú,
(2) egy 3 és egy $n > 3$ hosszúságú

ciklus szorzatának (ebben, illetve a fordított sorrendben)?

**2.8. Feladat.** (1 pont)
Legyen $\pi$ az $A$ halmaz egy permutációja. Adott $a \in A$ esetén az $a$ elem *pályája* az $\{a\pi^k : k \in \mathbb{Z}\}$ halmaz.

(1) Igazolja, hogy a pályák halmaza osztályozása $A$-nak.
(2) Adja meg a $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto -k$ és a $\varrho\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto k-1$ permutációk pályáit.

**2.9. Feladat.** (1 pont)
Véges $A$ halmaz esetén mi a kapcsolat a $\pi \in S_A$ permutáció pályái és $\pi$ páronként idegen ciklusokra bontott alakja között?

**2.10. Feladat.** (2 pont)
A páronként idegen ciklusokra bontott alak segítségével adjon meg szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy permutáció előálljon valamely permutáció négyzeteként (azaz második hatványaként).

**2.11. Feladat.** (3 pont)
A páronként idegen cikusokra bontott alak segítségével tetszőlegesen rögzített ($k \in \mathbb{N}$) esetén adjon meg szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy permutáció előálljon valamely permutáció $k$-adik hatványaként.

**2.12. Feladat.** (1 pont)
Igazolja, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

(1) tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációhoz létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\pi^k = \mathrm{id}$,
(2) létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\pi^k = \mathrm{id}$ teljesül minden $\pi \in S_n$ permutáció esetén.

**2.13. Feladat.** (1 pont)
Bizonyítsa be, hogy $S_n$ minden permutációja felírható legfeljebb $n-1$ transzpozíció szorzataként.

**2.14. Feladat.** (3 pont)
Igazolja, hogy egy $n$ hosszúságú ciklus nem írható fel $n-1$-nél kevesebb transzpozíció szorzataként.

**2.15. Feladat.** (2 pont)
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Igazolja, hogy minden $S_n$-beli permutáció előáll

(1) az $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)$ transzpozíciók,

(2) az $(1\ 2)$ és $(1\ 2\ \ldots\ n)$ ciklusok

szorzataként.

**2.16. Feladat.** (3 pont)
Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Igazolja, hogy minden $A_n$-beli permutáció előáll

(1) az összes 3 hosszúságú ciklus,
(2) az $(1\,2\,3), (1\,2\,4), \ldots, (1\,2\,n)$ ciklusok,
(3) az $(1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4), \ldots, (n-2\ n-1\ n)$ ciklusok

szorzataként.

**2.17. Feladat.** (2 pont)
Legyen $n$ rögzített, 1-nél nagyobb természetes szám. Bizonyítsa be, hogy ha két $S_n$-beli ciklus felcserélhető egymással, akkor mozgatott elemeik halmaza vagy diszjunkt, vagy egybeesik.

## 3. Csoportelem rendje

*Alapfeladatok*

**3.1. Feladat.** Határozza meg a megadott elemek rendjét a megadott $G$ csoportban:

(1) $G = S_6$; $(1\ 2\ 5\ 4)(2\ 3\ 6)(1\ 4\ 6)^{-1}$,
(2) $G = \mathbb{Z}_{12}$; $\overline{5}, \overline{9}, \overline{11}$,
(3) $G = \{\varepsilon \in \mathbb{C} : \varepsilon^{12} = 1\}$; $\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}, \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}, \cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}$,
(4) $G = \mathbb{Z}_{18}^*$; $\overline{5}, \overline{7}$,
(5) $G = \mathbb{Q}$; $\frac{5}{9}$.

**3.2. Feladat.** Adjon meg a $G$ csoportban $k$ rendű elemet:

(1) $G = S_9,\ k = 8, 15, 21$,
(2) $G = D_{18},\ k = 4, 6$,
(3) $G = \mathbb{C},\ k = 12$.

**3.3. Feladat.** Határozza meg az alábbi csoportok véges rendű elemeit:

(1) $\mathbb{Q}$,
(2) $\mathbb{Q}^*$,
(3) $\mathbb{C}^*$,
(4) a kör szimmetriacsoportja.

**3.4. Feladat.** Bizonyítsa be az alábbi, véges fokú permutációkra vonatkozó állításokat, vagy adjon rájuk ellenpéldát:

(1) Minden páros rendű permutáció páros.
(2) Minden páros permutáció rendje páros.
(3) Minden páratlan rendű permutáció páros.
(4) Minden páratlan permutáció páros rendű.

**3.5. Feladat.** Igazolja, hogy ha $a, b$ egy csoport tetszőleges véges rendű elemei, akkor

(1) $o(a) = o(b^{-1}ab)$,
(2) $o(ab) = o(ba)$.

*Szorgalmi feladatok*

**3.6. Feladat.** (1 pont)
Határozza meg a $G = \{f \in S_{\mathbb{R}}, xf = ax + b : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ csoport véges rendű elemeit.

**3.7. Feladat.** (1 pont)
Adjon meg olyan végtelen csoportot, amelynek minden eleme véges rendű, valamint olyan végtelen csoportot, melyben csak véges sok véges rendű elem van. Van-e olyan csoport, amelynek véges sok végtelen rendű eleme van?

**3.8. Feladat.** (1 pont)
Igazolja, hogy ha egy csoportban az egységelemtől különböző összes elem rendje ugyanaz, akkor az végtelen vagy prímszám.

**3.9. Feladat.** (1 pont)
Igazolja, hogy ha egy csoport minden elemének rendje legfeljebb 2, akkor a csoport kommutatív.

**3.10. Feladat.** (2 pont)
Mutassa meg, hogy ha egy véges csoport elemszáma páros, akkor a csoportban van másodrendű elem.

**3.11. Feladat.** (2 pont)
Mutassa meg, hogy ha egy csoport valamely $a, b$ elemeire és valamely $m, n \in \mathbb{Z}$ kitevőkre $ba = a^m b^n$, akkor az $a^m b^{n-2}$, $a^{m-2} b^n$ és $ab^{-1}$ elemek rendje azonos.

**3.12. Feladat.** (2 pont)
Bizonyítsa be, hogy minden $S_n$-beli permutáció rendje egyenlő a páronként idegen ciklusok szorzataként történő előállításában fellépő ciklusok hosszainak legkisebb közös többszörösével.

**3.13. Feladat.** (2 pont)
Mutassa meg, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ esetén van olyan csoport és abban két olyan másodrendű elem, amelyek szorzatának rendje $k$.

**3.14. Feladat.** (2 pont)
Tetszőleges $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ esetén adjon meg az $\mathrm{SL}(\mathbb{R}, 2)$ csoportban $k$ rendű elemet.

**3.15. Feladat.** (3 pont)
Igazolja, hogy ha $n$-nek van két különböző páratlan prímosztója, akkor a $\mathbb{Z}_n^*$ csoport minden elemének rendje kisebb $\varphi(n)$-nél.

**3.16. Feladat.** (3 pont)
A 2.8. Feladatban szereplő pálya fogalmának segítségével határozza meg az $S_{\mathbb{Z}}$ szimmetrikus csoport véges rendű elemeit.

## 4. Részcsoportok

*Alapfeladatok*

**4.1. Feladat.** Döntse el, hogy részcsoportot alkotnak-e az alábbi $H$ halmazok a megadott $G$ csoportban:

(1) $G = \mathbb{Z},\ H = \{k \in \mathbb{Z} : 6 \mid k\}$;
(2) $G = \mathbb{Z},\ H = \{k \in \mathbb{Z} : 2 \mid k \text{ vagy } 3 \mid k\}$;
(3) $G = \mathbb{C}^*,\ H = \{c \in \mathbb{C}^* : c^n = 1 \text{ valamely } n \in \mathbb{N}\text{-re}\}$;
(4) $G = S_4,\ H$ az összes transzpozíciók halmaza $S_4$-ben;
(5) $G = \mathbb{Z}_9,\ H = \mathbb{Z}_9^*$.

**4.2. Feladat.** Határozza meg a $G$ csoport $A$ részhalmaza által generált részcsoportját:

(1) $G = \mathbb{Z}_{18},\ A = \{\overline{4}\}$,
(2) $G = \{\varepsilon : \varepsilon^{18} = 1\},\ A = \{\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\}$,
(3) $G = \mathbb{Z},\ A = \{6, 10, 15\}$,
(4) $G = \mathbb{Z}_{30},\ A = \{\overline{6}, \overline{10}\}$,
(5) $G = D_{12},\ A = \{a^2, at\}$,
(6) $G = S_4,\ A = \{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}$,
(7) $G = S_4,\ A = \{(1\ 2\ 3), (1\ 2)(3\ 4)\}$.

**4.3. Feladat.** Döntse el, hogy ciklikusak-e az alábbi csoportok vagy sem:

(1) $S_3$,
(2) $\mathbb{Z}_{13}^*$,
(3) $\mathbb{Z}_{15}^*$.

**4.4. Feladat.** Adjon meg $1, 2$, illetve $3$ elemű minimális generátorrendszert az alábbi csoportokban (ha létezik).

(1) $\mathbb{Z}_{18}$,
(2) $S_3$.

**4.5. Feladat.** Határozza meg az alábbi csoportok összes részcsoportját, valamint rajzolja fel annak a részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját, amelyet a részcsoportok halmaza alkot a szokásos tartalmazásra nézve.

(1) $\mathbb{Z}_{18}$,
(2) $V$,
(3) $\mathbb{Z}_{15}^*$,
(4) $D_4$.

*Szorgalmi feladatok*

**4.6. Feladat.** (1 pont)
Mutassa meg, hogy a $\mathbb{C}^*$ csoportban részcsoportot alkot a következő halmaz:

$$E_{p^\infty} = \{\, u \in \mathbb{C}^* : \text{van olyan } k \in \mathbb{N}_0,\ \text{amelyre } u^{p^k} = 1 \,\} \quad (p \text{ prímszám}).$$

**4.7. Feladat.** (2 pont)
Határozza meg a $G$ csoport $A$ részhalmaza által generált részcsoportját:

(1) $G = S_5,\ A = \{(1\ 2\ 3), (3\ 4\ 5)\}$,
(2) $G = \mathbb{Q},\ A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$.

**4.8. Feladat.** (1 pont)
Döntse el, hogy ciklikusak-e az alábbi csoportok vagy sem:

(1) $A_3$,
(2) $\mathbb{Z}_{18}^*$,
(3) $D_3$.

**4.9. Feladat.** (1 pont)
Adjon meg $1, 2$, illetve 3 elemű minimális generátorrendszert az alábbi csoportokban (ha létezik).

(1) $D_6$,
(2) $Q$.

**4.10. Feladat.** (1 pont)
Határozza meg az alábbi csoportok összes részcsoportját, valamint rajzolja fel annak a részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját, amelyet a részcsoportok halmaza alkot a szokásos tartalmazásra nézve.

(1) $A_4$,
(2) $Q$.

**4.11. Feladat.** (1 pont)
Igazolja, hogy $S_n$ minden részcsoportjában vagy minden permutáció páros, vagy a permutációknak pontosan a fele páros.

**4.12. Feladat.** (1 pont)
Mutassa meg, hogy minden Abel-csoport

(1) véges rendű elemeinek halmaza,
(2) legfeljebb másodrendű elemeinek halmaza

részcsoportot alkot. Adjon példát olyan Abel-csoportra, melyben a legfeljebb harmadrendű elemek nem alkotnak részcsoportot.

**4.13. Feladat.** (1 pont)
Igazolja, hogy bármely $G$ csoportra és bármely $H, K \leq G$-re $H \cup K$ pontosan akkor részcsoport, ha $H \subseteq K$ vagy $K \subseteq H$.

**4.14. Feladat.** (1 pont)
Adjon példát olyan $G$ csoportra és annak olyan $H, K$ részcsoportjára, amelyekre $HK$ nem részcsoportja $G$-nek.

**4.15. Feladat.** (2 pont)
Mely $n \geq 3$ természetes számok esetén generátorrendszere az

$$\{(1\ 2\ 3), (1\ 2\ \ldots n)\}$$

halmaz az $S_n$ csoportnak?

**4.16. Feladat.** (2 pont)
Mutassa meg, hogy ha egy $G$ csoport generátorelemei felcserélhetők egymással, akkor $G$ Abel-féle.

**4.17. Feladat.** (2 pont)
Igazolja, hogy egy csoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részcsoportja van.

**4.18. Feladat.** (3 pont)
Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoport minden végesen generált részcsoportja ciklikus, és adjon meg olyan valódi részcsoportját, amely nem ciklikus.

**4.19. Feladat.** (3 pont)
Bizonyítsa be, hogy az $E_{p^\infty}$ ($p$ prímszám) csoport minden valódi részcsoportja ciklikus.

**4.20. Feladat.** (3 pont)
Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoportnak, valamint az $E_{p^\infty}$ ($p$ prímszám) csoportoknak nincs minimális generátorrendszere.

**4.21. Feladat.** (3 pont)
Tetszőleges $n \geq 3$ esetén határozza meg a $D_n$ csoport összes részcsoportját.

## 5. Izomorfia, mellékosztályozás, normálosztó, faktorcsoport

*Alapfeladatok*

**5.1. Feladat.** Döntse el, hogy izomorfak-e egymással az alábbi csoportok:

(1) $\mathbb{Z}_6^*$ és $\mathbb{Z}_4^*$,
(2) $\mathbb{Z}_{15}^*$ és $\mathbb{Z}_8$,
(3) $D_4$ és $Q$,
(4) a kör szimmetriacsoportja és $\mathbb{C}^*$,
(5) a kör mozgáscsoportja és az 1 abszolút értékű komplex számok multiplikatív csoportja,
(6) $\mathrm{GL}(K, n)$ és $\mathrm{GL}(V)$, ahol $V$ $n$-dimenziós vektortér a $K$ test felett.

**5.2. Feladat.** Határozza meg a megadott $G$ csoport $H$ részcsoportja szerinti bal, illetve jobb oldali mellékosztályozást, és döntse el, hogy $H$ normálosztó-e:

(1) $G = [a],\ H = [a^d]$, ahol $o(a) = n \in \mathbb{N},\ d \mid n$,
(2) $G = D_n,\ H = [at]$, ahol $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$,
(3) $G = D_{2n},\ H = [a^n]$, ahol $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$,
(4) $G = S_4,\ H = V$,
(5) $G = S_4$, $H$ az $\{1, 2\}$ halmazt önmagába képező permutációk részcsoportja.

**5.3. Feladat.** Bizonyítsa be, hogy ha $H, K \leq G$ olyan véges részcsoportok, amelyek rendje egymáshoz relatív prím, akkor $H \cap K = \{1\}$.

**5.4. Feladat.** A Lagrange-tétel alkalmazásával határozza meg a $D_6$ és $Q$ csoport összes részcsoportját. Továbbá döntse el, hogy a részcsoportok közül melyek normálosztók, és adja meg a normálosztók részbenrendezett halmazának Hasse-diagramját is.

**5.5. Feladat.** Határozza meg a $G$ csoport $A$ részhalmaza által generált normálosztóját:

(1) $G = S_4,\ A = \{(1\ 3)(2\ 4)\}$,
(2) $G = D_6,\ A = \{a\}$,
(3) $G = D_6,\ A = \{a^2\}$,
(4) $G = D_6,\ A = \{at\}$,
(5) $G = Q,\ A = \{i\}$.

**5.6. Feladat.** Igazolja, hogy a $G$ csoportban megadott $N$ részcsoport normálosztó, valamint adja meg a $G/N$ faktorcsoport elemeit. Milyen „ismert” csoporttal izomorf $G/N$?

(1) $G = S_7,\ N = A_7$,
(2) $G = S_4,\ N = V$,
(3) $G = \mathbb{Z}_{15}^*,\ N = \{\overline{1}, \overline{14}\}$,
(4) $G = \mathbb{Q}^*,\ N = \{1, -1\}$.

**5.7. Feladat.** Határozza meg a $D_6$ és $Q$ csoport összes faktorcsoportját (lásd az 5.4. Feladatot), és minden esetben határozza meg, hogy a faktorcsoport milyen „ismert” csoporttal izomorf.

*Szorgalmi feladatok*

**5.8. Feladat.** (1 pont)
Jelölje $D_\infty$ az alábbi alakzat szimmetriacsoportját:

$$\cdots \text{ TTTTTTTTTTTTT } \cdots$$

Döntse el, hogy izomorfak-e egymással a következő csoportok:

(1) a kör szimmetriacsoportja és $D_\infty$,
(2) $D_\infty$ és az alábbi részcsoport $\mathrm{GL}(\mathbb{Q}, 2)$-ben:

$$\left\{ \begin{pmatrix} u & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \{-1, 1\}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**5.9. Feladat.** (3 pont)
Döntse el, hogy izomorfak-e egymással az alábbi csoportok:

(1) $\mathbb{Q}^+$ és $(\mathbb{Z}[x]; +)$,
(2) $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q}^+$.

**5.10. Feladat.** (3 pont)
Adjon meg olyan részcsoportot a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2)$ csoportban, mely izomorf az alábbi csoporttal:

(1) $D_4$,
(2) $S_3$,
(3) $\mathbb{C}^*$.

**5.11. Feladat.** (1 pont)
Igazolja, hogy ha a $G$ csoport $A$ részhalmaza valamely részcsoport szerinti bal oldali mellékosztály, akkor $G$-nek van olyan részcsoportja is, amely szerint $A$ jobb oldali mellékosztály.

**5.12. Feladat.** (2 pont)
Igazolja, hogy ha $H, K$ részcsoportja a $G$ véges csoportnak, akkor $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

**5.13. Feladat.** (1 pont)
Bizonyítsa be, hogy minden $2n$ rendű Abel-csoport, ahol $n$ páratlan szám, pontosan egy másodrendű elemet tartalmaz. (Lásd a 3.10. Feladatot.)

**5.14. Feladat.** (3 pont)
Izomorfia erejéig határozza meg az összes legfeljebb hatodrendű csoportot.

**5.15. Feladat.** (2 pont)
Igazolja, hogy tetszőleges $G$ csoport esetén $\mathrm{Inn}G \triangleleft \mathrm{Aut}G$.

**5.16. Feladat.** (1 pont)
Keressen (minél kisebb elemszámú) olyan $G$ csoportot, amelyben vannak olyan $M, N$ részcsoportok, amelyekre $M \triangleleft N$, $N \triangleleft G$, de $M$ nem normálosztó $G$-ben.

**5.17. Feladat.** (2 pont)

(1) Bizonyítsa be, hogy ha a $H$ részcsoport indexe a $G$ csoportban 2, akkor $G \setminus H$ minden eleme páros rendű.
(2) Mutassa meg, hogy az $A_4$ csoportban nincsen hatodrendű részcsoport.

**5.18. Feladat.** (1 pont)
Határozza meg az $S_4$ csoport összes normálosztóját és összes faktorcsoportját, és minden esetben határozza meg, hogy milyen „ismert” csoporttal izomorf a szerinte vett faktorcsoport.

**5.19. Feladat.** (2 pont)
Igazolja, hogy a $G$ csoportban megadott $N$ részcsoport normálosztó. Milyen „ismert” csoporttal izomorf $G/N$?

(1) $G = \mathrm{GL}(K, n)$, $N = \mathrm{SL}(K, n)$, ahol $K$ test és $n > 1$ pozitív egész,
(2) $G = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{Z}$.

**5.20. Feladat.** (3 pont)
Keresse meg a $D_n$ ($n \geq 3$) csoport összes valódi nemtriviális normálosztóját, és minden esetben határozza meg, hogy milyen „ismert” csoporttal izomorf a szerinte vett faktorcsoport.

## 6. Cayley-tétel, homomorfiatétel, izomorfiatételek

*Alapfeladatok*

**6.1. Feladat.** Adja meg az alábbi $G$ csoportok $g$ elemének képét a csoport Cayley-féle ábrázolásánál:

(1) $G = \mathbb{Z}_8,\ g = \overline{4}$,
(2) $G = S_3,\ g = (1\ 2)$,
(3) $G = D_6,\ g = a^3t$,
(4) $G = \mathbb{Z},\ g = -2$.

**6.2. Feladat.** Döntse el, hogy létezik-e olyan $\varphi$ homomorfizmus, amely teljesíti a megadott feltételt:

(1) $\varphi\colon \mathbb{Z} \to S_3,\ 3\varphi = (1\ 2\ 3)$,
(2) $\varphi\colon \mathbb{Z} \to S_3,\ 5\varphi = (1\ 2\ 3)$,
(3) $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_4,\ \overline{2}\varphi = \overline{2}$,
(4) $\varphi\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_8,\ \overline{3}\varphi = \overline{2}$,
(5) $\varphi\colon Q \to V,\ i\varphi = (1\ 3)(2\ 4)$.

**6.3. Feladat.** Döntse el, hogy létezik-e

(1) $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$,
(2) $V \to \mathbb{Z}_2$,
(3) $D_4 \to S_4$

nemtriviális, szürjektív, illetve injektív homomorfizmus.

**6.4. Feladat.** A homomorfiatétel alkalmazásával mutassa meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{SL}(\mathbb{R}, n)$ normálosztót alkot a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, n)$ csoportban, valamint adja meg, milyen „ismert” csoporttal izomorf a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, n)/\mathrm{SL}(\mathbb{R}, n)$ faktorcsoport.

**6.5. Feladat.** Adja meg az összes

(1) $V \to \mathbb{Z}_4$,
(2) $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{18}$,
(3) $D_4 \to \mathbb{Z}_4$,
(4) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

homomorfizmust.

**6.6. Feladat.** Határozza meg, hogy a megadott $G$ csoport $N$ normálosztója és $H$ részcsoportja esetén mely csoportok izomorfiáját állítja az 1. izomorfiatétel. A két csoportot elemeikkel adja meg.

(1) $G = Q, N = \{1, -1\}, H = \{1, i, -1, -i\}$,
(2) $G = S_6, N = A_6, H = [(1\ 2\ 3)]$,
(3) $G = \mathbf{Z}_{12}, N = [\overline{6}], H = [\overline{4}]$,
(4) $G = D_4, H = [at], N = [a]$.

**6.7. Feladat.** Határozza meg, hogy a megadott $G$ csoport és $K \supseteq N$ normálosztói esetén mely két csoport izomorfiáját állítja a 2. izomorfiatétel. A két csoportot elemeikkel adja meg.

(1) $G = S_4,\ K = A_4,\ N = V$,
(2) $G = \mathbb{Q}^*,\ K = \{\frac{p}{q} : p, q \text{ páratlan egész}\},\ N = \{1, -1\}$.

*Szorgalmi feladatok*

**6.8. Feladat.** (1 pont)
Legyen $G$ tetszőleges csoport, és jelölje $\varphi\colon G \to S_G$ a $G$ csoport Cayley-ábrázolását. Mutassa meg, hogy a $G\varphi$ permutációcsoport rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(1) tetszőleges $\pi \in G\varphi \setminus \{\mathrm{id}\}$ permutáció mozgatja $G$ összes elemét, azaz $g\pi \neq g$ az összes $g \in G$ elem esetén,
(2) tetszőleges $g, h \in G$ elemekhez létezik olyan $\pi \in G\varphi$ permutáció, amelyre $g\pi = h$.

**6.9. Feladat.** (1 pont)
Adjon meg két különböző $n$ pozitív egészre olyan $n$-edfokú permutációcsoportot, amely izomorf $D_4$-gyel, és amelyben tetszőleges $k, l \in \{1, \ldots, n\}$-hez van olyan permutáció, amely $k$-t $l$-be viszi.

**6.10. Feladat.** (1 pont)
A homomorfiatétel alkalmazásával mutassa meg, hogy az 5.6. Feladatbeli $G$ csoportokban a megadott $N$ részhalmaz normálosztót alkot, valamint adja meg, milyen „ismert” csoporttal izomorf a $G/N$ faktorcsoport.

**6.11. Feladat.** (1 pont)
Határozza meg az összes $S_3 \to S_4$ injektív homomorfizmust.

**6.12. Feladat.** (1 pont)
Tetszőleges $n \geq 3$ egész esetén adjon meg szürjektív $D_\infty \to D_n$ homomorfizmust. (A $D_\infty$ csoport definícióját lásd az 5.8. Feladatban.)

**6.13. Feladat.** (2 pont)
Adja meg az összes

(1) $D_4 \to S_4$,
(2) $Q \to S_4$

homomorfizmust.

**6.14. Feladat.** (3 pont)
Legyenek $m, n, r, s$ tetszőleges pozitív egészek, ahol $m, n \geq 3$.

(1) Adja meg az összes $\mathbb{Z}_r \to \mathbb{Z}_s$ homomorfizmust.
(2) Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy létezzen $\mathbb{Z}_r \to \mathbb{Z}_s$ nemtriviális, injektív, illetve szürjektív homomorfizmus?
(3) Adja meg az összes $D_m \to D_n$ homomorfizmust.
(4) Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy létezzen $D_m \to D_n$ nemtriviális, injektív, illetve szürjektív homomorfizmus?

**6.15. Feladat.** (3 pont)
Legyen $p$ prímszám. Adjon meg végtelen sok szürjektív, de nem injektív endomorfizmust az $E_{p^\infty}$ csoporton (azaz olyan $E_{p^\infty} \to E_{p^\infty}$ homomorfizmusokat, melyek szürjektívek, de nem injektívek).

**6.16. Feladat.** (3 pont)
Milyen $m, n \geq 3$ egészekre tartalmaz $S_m$ a $\mathbb{Z}_n$, illetve $D_n$ csoporttal izomorf részcsoportot?

**6.17. Feladat.** (2 pont)
Legyen $\varphi\colon G \to H$ homomorfizmus, $N$ pedig normálosztó $G$-ben. Mi annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy létezzen olyan $\psi\colon G/N \to H$ homomorfizmus, amelyre $\varphi = \nu\psi$. (Itt $\nu$ a $G \to G/N$ természetes homomorfizmust jelöli.)

**6.18. Feladat.** (2 pont)
Legyen $\varphi\colon G \to H$ és $\psi\colon H \to L$ szürjektív homomorfizmus. Hogyan lehetne ebben a helyzetben alkalmazni a 2. izomorfiatételt, és az mit állítana?

**6.19. Feladat.** (2 pont)
Igazolja, hogy ha $M, N$ két különböző maximális normálosztó a $G$ csoportban, akkor $M \cap N$ maximális normálosztó $M$-ben és $N$-ben.

**6.20. Feladat.** (2 pont)
Határozza meg, melyik „ismert” csoporttal izomorf

(1) $\operatorname{Inn} Q$,
(2) $\operatorname{Inn} S_n$ $(n \in \mathbb{N})$,
(3) $\operatorname{Inn} D_n$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 3)$.

**6.21. Feladat.** (3 pont)
Legyen $G$ csoport, $N$ pedig olyan normálosztója, amelyre $G/N$ kommutatív. Mutassa meg, hogy ekkor $G$ bármely, $N$-nél bővebb részcsoportja egyben normálosztó is $G$-ben.

**6.22. Feladat.** (3 pont)
Tegyük fel, hogy a $G$ csoport teljesíti a következő feltételeket:

(a) $|G| = 720$,
(b) $G$-nek nincsen nemtriviális ciklikus normálosztója,
(c) $G$-nek van olyan $A_5$-tel izomorf $N$ normálosztója, amelyre $G/N$ ciklikus.

Igazolja, hogy $G$-nek pontosan 7 normálosztója van.

## 7. Csoportok direkt szorzata

*Alapfeladatok*

**7.1. Feladat.** Igazolja, hogy ha $A$ $n$-elemű halmaz, akkor a $(P(A); \triangle)$ csoport izomorf $\mathbb{Z}_2^n$-nel. [Itt $\mathbb{Z}_2^n$ az $n$-tényezős $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$ direkt szorzatot jelenti.]

**7.2. Feladat.** Döntse el, hogy igazak-e vagy sem a következő izomorfiák:

(1) $D_3 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$,
(2) $\mathbb{Z}_{15}^* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$,
(3) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$,
(4) $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$,
(5) $S_4 \cong V \times S_3$,
(6) $D_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times D_3$.

Ha az izomorfia igaz, akkor adjon meg a bal oldalon álló csoportnak olyan előállítását normálosztói direkt szorzataként [additív esetben részcsoportjai direkt összegeként], ahol a normálosztók [részcsoportok] rendre izomorfak a jobb oldalon álló direkt tényezőkkel.

**7.3. Feladat.** Döntse el, hogy az alábbi csoportok direkt felbonthatók-e, valamint állítsa elő a direkt felbonthatókat nemtriviális normálosztóik direkt szorzataként (illetve additív csoport esetén direkt összegeként):

(1) $\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{11}$,
(2) $\mathbb{Z}_{25}^*$,
(3) $Q$,
(4) $S_n$,
(5) $\mathbb{Z}$.

**7.4. Feladat.** Határozza meg, hogy izomorfiától eltekintve hány olyan Abel-csoport van, amelynek rendje

(1) 70,
(2) 160,
(3) 720.

*Szorgalmi feladatok*

**7.5. Feladat.** (1 pont)
Döntse el, hogy mely $n$ pozitív egészekre direkt felbonthatató a $\mathbb{Z}_n$ csoport, valamint állítsa elő a direkt felbonthatókat nemtriviális részcsoportjaik direkt összegeként.

**7.6. Feladat.** (2 pont)
Határozza meg, hogy mely $n \geq 3$ egész számok esetén direkt felbontható a $D_n$ csoport.

**7.7. Feladat.** (2 pont)
Legyen a $H$ csoportnak $h$, a $K$ csoportnak pedig $k$ db részcsoportja. Igazolja, hogy

(1) a $H \times K$ csoportnak legalább $hk$ db részcsoportja van,
(2) ha $H$ és $K$ rendje relatív prím, akkor $H \times K$-nak éppen $hk$ db részcsoportja van.

Továbbá adjon példát olyan $H$ és $K$ csoportokra, amelyekre a $H \times K$ direkt szorzat részcsoportjainak száma több, mint $hk$.

**7.8. Feladat.** (2 pont)
Döntse el, hogy az alábbi csoportok direkt felbonthatók-e, valamint állítsa elő a direkt felbonthatókat nemtriviális normálosztóik direkt szorzataként (illetve additív csoport esetén direkt összegeként):

(1) $\mathbb{Q}$,
(2) $\mathbb{Q}^+$,
(3) $E_{p^\infty}$ ($p$ prímszám).

**7.9. Feladat.** (2 pont)
Igazolja, hogy ha $G$ csoport, $H$ pedig részcsoportja $G$-nek, akkor $H$ pontosan akkor normálosztó $G$-ben, ha a $\{(h,k) \in G \times G : hk^{-1} \in H\}$ halmaz részcsoportja $G \times G$-nek.

**7.10. Feladat.** (2 pont)
Mutassa meg, hogy a $G$ csoport pontosan akkor direkt felbontható, ha van olyan $N$ valódi nemtriviális normálosztó $G$-ben és olyan $\alpha \colon G \to N$ homomorfizmus, amelyre $a\alpha = a$ minden $a \in N$ esetén.

**7.11. Feladat.** (1 pont)
Legyenek $G, H$ és $K$ véges Abel-csoportok. Igaz-e, hogy ha $G \times K \cong H \times K$, akkor $G \cong H$? Ha igen, bizonyítsa be, ha nem, adjon ellenpéldát.

**7.12. Feladat.** (3 pont)
Oldja meg az előző feladatot tetszőleges Abel-csoportok esetén.

**7.13. Feladat.** (2 pont)
Mutassa meg, hogy a véges Abel-csoportok körében érvényes a Lagrange-tétel megfordítása: Ha $G$ véges Abel-csoport, $n \in \mathbb{N}$ pedig osztja $|G|$-t, akkor $G$-ben van $n$ rendű részcsoport.

**7.14. Feladat.** (3 pont)
Igazolja, hogy ha $G$ véges csoport és $N_1, \ldots, N_k$ normálosztók $G$-ben, akkor pontosan akkor teljesül $G = N_1 \times \cdots \times N_k$, ha

(1) $|G| = |N_1| \cdots |N_k|$, és
(2) tetszőleges $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén $N_i \cap N_1 \cdots N_{i-1} N_{i+1} \cdots N_k$ triviális.

**7.15. Feladat.** (3 pont)
Bizonyítsa be a véges Abel-csoportok alaptételének felhasználása nélkül, hogy ha valamely $p$ prímszámra a $G$ véges Abel-csoportban az egységelemtől különböző összes elem rendje $p$, akkor $G$ előáll $p$ rendű (ciklikus) részcsoportjainak direkt szorzataként.

## 8. Gyűrű, részgyűrű, ideál, homomorfizmus

**A 2012. ápr. 17-i gyakorlatra a lentieken kívül át kell átnézni a 7.2.(3) és 7.4. Feladatokat, illetve beadhatók a 7.6., 7.8., 7.11.–7.15. Feladatok. Ajánlatos egy-egy szorgalmi feladatot beadni a 7. és 8. témából!**

*Alapfeladatok*

**8.1. Feladat.** Mutassa meg, hogy tetszőleges $A$ halmaz esetén $(P(A); \triangle, \cap)$ gyűrű.

**8.2. Feladat.** Igazolja, hogy tetszőleges $A$ Abel-csoport esetén $A$ endomorfizmusainak (azaz önmagába menő homomorfizmusainak) halmaza gyűrűt alkot a következő összeadásra és a szokásos leképezésszorzásra nézve:

$$a(\varphi + \psi) = a\varphi + a\psi \quad (a \in A).$$

Ez a gyűrű az $A$ Abel-csoport *endomorfizmusgyűrűje.*

**8.3. Feladat.** Döntse el, hogy a megadott $R$ gyűrűben az $I$ halmaz részgyűrűt, illetve ideált alkot-e.

(1) $R = \mathbb{Z},\ I$ a páratlan egész számok halmaza,
(2) $R = \mathbb{Z},\ I$ a pozitív egész számok halmaza,
(3) $R = \mathbb{Z}[i],\ I = \mathbb{Z}$,
(4) $R = \mathbb{Z}[i],\ I = \{a + bi : a, b \in 2\mathbb{Z}\}$,
(5) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) = 0\}$,
(6) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(0) = 1\}$,
(7) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : 2 \mid f(0)\}$,
(8) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(0) \neq 1\}$.

**8.4. Feladat.** Döntse el az alábbi leképezésekről, hogy gyűrűhomomorfizmusok-e.

(1) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto 4k$,
(2) $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2, \overline{k} \mapsto \overline{k}$,
(3) $\mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}, f \mapsto f(0)$,
(4) $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_n, f \mapsto \overline{f(1)}$,
(5) $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, M \mapsto |M|$.

**8.5. Feladat.** Mutassa meg, hogy az alábbi gyűrűk nem izomorfak egymással:

(1) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ és $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$,
(2) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$.

*Szorgalmi feladatok*

**8.6. Feladat.** (1 pont)
Legyen $R$ olyan kommutatív, egységelemes gyűrű, melyben az egységelem additív rendje a $p$ prímszám. Igazolja, hogy ekkor bármely $a, b \in R$ esetén

$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

**8.7. Feladat.** (1 pont)
Megadható-e a $\mathbb{Z}$ gyűrűben olyan részhalmaz, amely zárt az összeadásra és a kivonásra, azonban a szorzásra nem?

**8.8. Feladat.** (1 pont)
Határozza meg a $\mathbb{Z}[x]$ gyűrűben

(1) az $x-1$ polinom által generált részgyűrűt (azaz a legszűkebb olyan részgyűrűt, amely tartalmazza $x-1$-et);
(2) az $x$ és $x-1$ polinom által generált részgyűrűt;
(3) az $x-1$ polinom által generált ideált (azaz a legszűkebb olyan ideált, amely tartalmazza $x-1$-et).

**8.9. Feladat.** (2 pont)
Adjon meg két különböző valódi nemtriviális balideált és két különböző valódi nemtriviális jobbideált az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gyűrűben.

**8.10. Feladat.** (2 pont)
Egy $(R;+,\cdot)$ egységelemes gyűrű alaphalmazán definiáljuk a következő műveleteket: $a\oplus b=a+b-1$ és $a\circ b=a+b-ab$ $(a,b\in R)$. Bizonyítsa be, hogy $(R;\oplus,\circ)$ is gyűrű, és izomorf az $(R;+,\cdot)$ gyűrűvel.

**8.11. Feladat.** (2 pont)
Legyen $A$ az $R$ gyűrű tetszőleges részhalmaza. Mutassa meg, hogy az $A$ halmaz által generált részgyűrű (azaz az $A$-t tartalmazó legszűkebb részgyűrű) a következő:

$$\Big\{ \textstyle\sum_{i=1}^{n} \pm a_{i1}a_{i2}\dots a_{ik_i} \ :\ n\in\mathbb{N}_0,\ k_i\in\mathbb{N}\ (1\le i\le n),\\ a_{ij}\in A\ (1\le i\le n,\ 1\le j\le k_i)\Big\}.$$

**8.12. Feladat.** (2 pont)
Legyen $A$ az $R$ gyűrű tetszőleges részhalmaza. Igazolja, hogy az $A$ halmaz által generált ideál (azaz az $A$-t tartalmazó legszűkebb ideál) megegyezik az $A\cup RA\cup AR\cup RAR$ halmaz által generált részgyűrűvel (lásd a 8.11. Feladatot).

**8.13. Feladat.** (3 pont)
Milyen „ismert” gyűrűvel izomorf a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, illetve $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ csoportok endomorfizmusgyűrűje (lásd a 8.2. Feladatot)?

**8.14. Feladat.** (2 pont)
Tetszőleges $p$ prímszám esetén igazolja, hogy

(1) bármely két $p$ elemű zérógyűrű izomorf egymással, és
(2) minden $p$ elemű gyűrű vagy zérógyűrű, vagy izomorf $\mathbb{Z}_p$-vel.

**8.15. Feladat.** (3 pont)
Legyen $R$ olyan végtelen gyűrű, amelynek additív csoportja ciklikus. Igazolja, hogy ha $R$ nem zérógyűrű, akkor $R$ a $d\mathbb{Z}$ $(d\in\mathbb{N})$ gyűrűk közül pontosan eggyel izomorf.

**8.16. Feladat.** (3 pont)
Legyen $R$ az $n\times n$-es felső trianguláris valós mátrixok halmaza, $T$ pedig az alsó triangulárisoké.

(1) Igazolja, hogy $R$ és $T$ részgyűrűje $\mathbb{R}^{n\times n}$-nek, és ez a két részgyűrű anti-izomorf egymással, azaz létezik olyan $\varphi\colon R\to T$ bijekció, amelyre bármely $A,B\in R$ esetén $(A+B)\varphi=A\varphi+B\varphi$, valamint $(AB)\varphi=B\varphi\cdot A\varphi$.
(2) Izomorf-e $R$ és $T$?

## 9. Homomorfiatétel, izomorfiatételek, direkt felbontás gyűrűkre

*Alapfeladatok*

**9.1. Feladat.** A 8.3. Feladatban megadott $R$ gyűrűk esetében, ahol a megadott $I$ részhalmaz ideál, adja meg az $R/I$ faktorgyűrű elemeit és műveleteit (művelettáblázattal vagy más módon).

**9.2. Feladat.** Adja meg a következő homomorfizmusok magját, és fogalmazza meg, mi adódik a homomorfiatétel alkalmazásával:

(1) a 8.4. Feladatbeli homomorfizmusok,
(2) $\varphi\colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[y],\ f\varphi = f(2y)$,
(3) $\psi\colon \mathbb{Z}_2[x] \to {\mathbb{Z}_2}^{\mathbb{Z}_2}$, ahol $f\psi$ az $f$ polinomhoz tartozó polinomfüggvény. (Itt ${\mathbb{Z}_2}^{\mathbb{Z}_2}$ az a gyűrű, amelynek alaphalmaza az összes $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ leképezésből áll, a műveletek pedig a pontonkénti összeadás és szorzás.)

**9.3. Feladat.** Bizonyítsa be az alábbi izomorfiákat:

(1) $\mathbb{Z}_n/\left\langle \overline{d} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_d$, ha $d \mid n$,
(2) $\mathbb{Z}[x]/\left\langle n \right\rangle \cong \mathbb{Z}_n[x]$,
(3) $\mathbb{R}[x,y]/\left\langle x-y \right\rangle \cong \mathbb{R}[x]$.

**9.4. Feladat.** Alkalmazza az 1. izomorfiatételt a következő $R$ gyűrű $S$ részgyűrűjére és $I$ ideáljára:

(1) $R = \mathbb{Z},\ I = \left\langle 6 \right\rangle,\ S = \left\langle 4 \right\rangle$,
(2) $R = \mathbb{R}[x,y],\ I = \left\langle x^2 \right\rangle,\ S = \mathbb{R}[x]$.

**9.5. Feladat.** Alkalmazza a 2. izomorfiatételt a következő $R$ gyűrű $I$ és $K$ ideáljára, ahol $I \subseteq K$:

(1) $R = \mathbb{Z}, I = \left\langle 10 \right\rangle, K = \left\langle 2 \right\rangle$,
(2) $R = \mathbb{Z}[x], I = \left\langle 3 \right\rangle, K = \{f \in \mathbb{Z}[x] : 3 \mid f(0)\}$.

**9.6. Feladat.** Döntse el, hogy direkt felbonthatók-e a következő gyűrűk:

(1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{30}$,
(2) $\mathbb{R}[x]$,
(3) az a zérógyűrű, amelynek additív csoportja a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ csoport,
(4) ${\mathbb{Z}_2}^{\mathbb{Z}_2}$ (lásd a 9.2. Feladatot).

A direkt felbontható gyűrűket állítsa elő két nemtriviális ideáljuk direkt összegeként.

*Szorgalmi feladatok*

**9.7. Feladat.** (1 pont)
Legyen $I$ az $R$ egységelemes gyűrű egy ideálja. Bizonyítsa be, hogy

(1) $I[x]$ ideál $R[x]$-ben, $R[x]/I[x] \cong (R/I)[x]$ és $R[x]/(I[x] + \langle x \rangle) \cong R/I$;
(2) ha $S$ olyan részgyűrű $R$-ben, amelyre $S \cap I = \{0\}$, akkor $(S+I)/I \cong S$.

**9.8. Feladat.** (2 pont)
Izomorf-e egymással a $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-1 \rangle$, $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-2 \rangle$, illetve $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-4 \rangle$ gyűrű?

**9.9. Feladat.** (2 pont)
Igazolja, hogy tetszőleges $p$ prímszám esetén az ${\mathbb{Z}_p}^{\mathbb{Z}_p}$ gyűrű (azaz az összes $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ leképezésből álló halmaz a pontonkénti összeadással és szorzással) izomorf a $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrű valamely faktorgyűrűjével.

**9.10. Feladat.** (1 pont)
Adja meg a $\mathbb{Z}_{120}$ gyűrű összes előállítását nemtriviális ideáljainak direkt összegeként.

**9.11. Feladat.** (2 pont)
Mely $A$ halmazok esetén direkt felbonthatatlan a $(P(A); \triangle, \cap)$ gyűrű?

**9.12. Feladat.** (2 pont)
Direkt felbontható-e a

(1) $\mathbb{Z}[i]$,
(2) $\mathbb{R}[x]/\langle (x-1)(x-2)\rangle$

gyűrű?

**9.13. Feladat.** (3 pont)
Bármely $R$ egységelemes gyűrű esetén mutassa meg a következőket:

(1) Legyenek $e_1, e_2, \dots, e_n$ olyan elemek $R$-ben, amelyek felcserélhetők minden $R$-beli elemmel, amelyekre $\sum_{i=1}^n e_i = 1$, valamint amelyekre $e_i^2 = e_i$ és $e_i e_j = 0$ tetszőleges $1 \le i < j \le n$ esetén. Ekkor $e_i R$ a legszűkebb $e_i$-t tartalmazó ideál $R$-ben minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$-re, és $R = e_1 R \oplus e_2 R \oplus \dots \oplus e_n R$.
(2) Az $R$ gyűrű minden felbontása véges sok ideáljának direkt összegére ilyen alakú.

**9.14. Feladat.** (3 pont)
Bizonyítsa be, hogy egy egységelemes gyűrű minden olyan gyűrűnek direkt összeadandója, amelynek ideálja.

*Szorgalmi feladatok a Válogatott fejezetek az Absztrakt algebra tárgyhoz c. előadáson elhangzott témakörhöz*

**9.15. Feladat.** Állítsa elő a $\mathbb{Q}^*$ csoportot direkt felbonthatatlan részcsoportjainak direkt szorzataként.

**9.16. Feladat.** Legyen $G$ olyan Abel-csoport, amelyben nincsen részcsoportoknak végtelen leszálló lánca [azaz nincsenek olyan $H_n$ $(n \in \mathbb{N})$ részcsoportok, amelyekre $H_1 \supsetneqq H_2 \supsetneqq \dots \supsetneqq H_n \supsetneqq H_{n+1} \supsetneqq \dots$]. Bizonyítsa be, hogy $G$ izomorf véges sok prímhatványrendű ciklikus csoport és $E_{p^\infty}$ ($p$ prím) csoport direkt szorzatával.

**9.17. Feladat.** Legyen $p$ tetszőleges prímszám. Mutassa meg, hogy ha a $G$ Abel-csoportban az egységelemtől különböző összes elem rendje $p$, akkor $G$ előáll $p$ rendű (ciklikus) részcsoportjainak direkt szorzataként (lásd a 7.15. Feladatot).

## 10. Testbővítések, véges testek

*Alapfeladatok*

**10.1. Feladat.**

(1) Döntse el, hogy az alábbi faktorgyűrűk testek-e vagy sem:

$$\begin{array}{ll} R_1 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2+\bar{1}\rangle, & R_2 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3+x^2+\bar{1}\rangle, \\ R_3 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4+x+\bar{1}\rangle, & R_4 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4+x^2+\bar{1}\rangle, \\ R_5 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+\bar{1}\rangle, & R_6 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3+x^2+\bar{1}\rangle, \\ R_7 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3-x^2+\bar{1}\rangle, & R_8 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^4+\bar{1}\rangle, \\ R_9 = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2+\bar{2}\rangle, & R_{10} = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^4+\bar{1}\rangle. \end{array}$$

(2) Adja meg a megadott faktorgyűrű $r$ elemét $\overline{g}$ alakban, ahol $g$ fokszáma a lehető legkisebb a saját osztályában:

$$\begin{array}{ll} R_1 \ni r = \left(\overline{x+\bar{1}}\right)^4, & R_2 \ni r = \left(\overline{x^2+x}\right)^{-1}, \\ R_3 \ni r = \left(\overline{x^3+\bar{1}}\cdot\overline{x^3+x+\bar{1}}\right)^{-1}, & R_5 \ni r = \left(\overline{x-\bar{1}}\right)^{-3}, \\ R_7 \ni r = \left(\overline{x^2-\bar{1}}\right)^{-1}\cdot\overline{x^2+x-\bar{1}}, & R_9 \ni r = \left(\overline{-\bar{2}x-\bar{2}}\right)^{-1}. \end{array}$$

**10.2. Feladat.** Állítsa elő a racionális számtest alábbi egyszerű algebrai bővítéseiben megadott elemek multiplikatív inverzét az adjungált elem 'kis kitevős' hatványainak racionális együtthatós lineáris kombinációjaként:

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$; $\sqrt{3},\ 2+3\sqrt{3}$;
(2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$; $\sqrt[3]{16},\ 4+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$;
(3) $\mathbb{Q}(i)$; $i^2,\ 1+i$.

**10.3. Feladat.** Legyen $u$ a $p \in K[x]$ $n$-edfokú irreducibilis polinom gyöke. Adja meg az alábbi $a \in K(u)$ elemeket az $1, u, u^2, \dots, u^{n-1}$ elemek $K$-beli együtthatókkal képezett lineáris kombinációjaként:

(1) $K=\mathbb{Z}_2,\ p=x^2+x+1$; $(1+u)^{-1},\ u^3(1+u)^{-1}$;
(2) $K=\mathbb{Z}_3,\ p=x^2+1$; $(1+u)(1-u)^{-1},\ (1+u)^{-2}$;
(3) $K=\mathbb{Z}_5,\ p=x^3+x+1$; $u^{-2},\ (u^2+u)^{-3}$.

**10.4. Feladat.** Keresse meg az $i\sqrt{5}$, $3-\sqrt{4}$, $4-\sqrt{3}$ és $i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ számok minimálpolinomját $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, valamint $\mathbb{Q}$ fölött.

**10.5. Feladat.** Hány $n$-edrendű elem van a $K$ test multiplikatív csoportjában ($\mathrm{GF}(q)$ a $q$ elemű testet jelöli):

(1) $n=3$, $K=\mathrm{GF}(9)$;
(2) $n=15$, $K=\mathrm{GF}(16)$;
(3) $n=11$, $K=\mathrm{GF}(23)$;
(4) $n=12$, $K=\mathbb{C}$?

*Szorgalmi feladatok*

**10.6. Feladat.** (2 pont)
Határozza meg a $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ szám minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött.

**10.7. Feladat.** (3 pont)
Legyen $a, b \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $b$ algebrai $\mathbb{Q}(a)$ fölött, de transzcendens $\mathbb{Q}$ fölött. Bizonyítsa be, hogy $a$ algebrai $\mathbb{Q}(b)$ fölött.

**10.8. Feladat.** (1 pont)
Döntse el, hogy van-e gyöke a $\bar{3}x^2 - \bar{2}x - \bar{3} \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ polinomnak a 121 elemű testben.

**10.9. Feladat.** (2 pont)
Igazolja, hogy bármely 2-nél nagyobb elemszámú véges test elemeinek összege 0.

**10.10. Feladat.** (3 pont)
Legyen $\alpha$ és $\beta$ rendre az $x^3 + x^2 + \bar{1}$ és $x^3 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinom egy-egy gyöke. Adjon meg egy izomorfizmust a $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ és $\mathbb{Z}_2(\beta)$ testek között.

**10.11. Feladat.** (3 pont)
Bizonyítsa be, hogy minden $p^n$ elemű testnek pontosan egy $p^m$ elemű részteste van $n$ minden $m$ osztójára.

*Szorgalmi feladat a Válogatott fejezetek az Absztrakt algebra tárgyhoz c. előadáson elhangzott témakörhöz*

**10.12. Feladat.** (2 pont)
Állítsa elő a $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (additív) csoportot direkt felbonthatatlan részcsoportjainak direkt összegeként.

**10.13. Feladat.** (3 pont)
Legyen $G$ a gyengén multiplikatív számelméleti függvények csoportja. Mutassa meg, hogy $G$ izomorf $\mathbb{R}$-rel.
[Emlékeztető: Az $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nem azonosan 0 leképezést gyengén multiplikatív számelméleti függvénynek nevezzük, ha $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ teljesül minden relatív prím $m, n$ párra. A $G$-beli művelet a konvolúció: tetszőleges $f, g \in G$-re $f \circ g$ az a számelméleti függvény, amelyre $(f \circ g)(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g(\frac{n}{d})$.]

**10.14. Feladat.** (2 pont)
Egy $R$ gyűrű tetszőleges $I, J$ ideáljára igazolja, hogy
(1) $[IJ] \subseteq I \cap J$,
(2) az ideálokra ily módon definiált $(I, J) \mapsto [IJ]$ művelet — amit szokás az *ideálok szorzásának* is nevezni — asszociatív, valamint disztributív az ideálok összeadására nézve,
(3) ha $R$ kommutatív és $I = \langle a \rangle$, $J = \langle b \rangle$, akkor $[IJ] = \langle ab \rangle$,
(4) ha $R$ egységelemes kommutatív gyűrű, akkor $[IJ] = I \cap J$ érvényes minden olyan $R$-beli $I, J$ ideálra, amelyre $I + J = R$.