ALGEBRÁK, CSP ÉS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDHATÓSÁGA

(ALGEBRAS, CONSTRAINT SATISFACTION AND SOLVABILITY OF SYSTEMS OF EQUATIONS)

A DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

Zádori László

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet
2008

1. Bevezetés

A doktori értekezés a szerző [28], [30] és [49] publikációira épül. Ezek közül az első kettő a szerző Benoit Larose-zal írt közös munkája. Az értekezés Bevezetése áttekintést ad a matematika azon területeiről, amelyeken a szerző az értekezésével kapcsolatos kutatásait folytatja. Az értekezés 1. Fejezete az alapvető algebrai definíciókat tartalmazza. A 2., 3. és 4. Fejezet rendre a [28], [30] és [49] cikkekben szereplő eredmények részletes leírását adja. A három fent említett cikk az értekezés szerves részét képezi, másolatuk az Appendixben található.

Az elmúlt néhány évben a constraint satisfaction problémák ($\mathcal{CSP}$) témakörében a véges algebrák elmélete fontos alkalmazásokra talált. A jelen bevezetésben röviden vázoljuk a matematika e két területének kapcsolatát. A jelen összefoglaló 2., 3. és 4. pontjában a doktori értekezésben szereplő eredményeink áttekintését adjuk.

A $\mathcal{CSP}$ fogalma a mai matematikai definicíójához hasonló formában először a mesterséges intelligencia területén jelent meg az 1960-as években. Az azóta eltelt időszakban a $\mathcal{CSP}$-hez kapcsolódó kutatások gyors ütemben fejlődtek. Napjainkban ezek a kutatások az algebra, a kombinatorika és a logika kölcsönhatásának egyik fő területét képezik. A $\mathcal{CSP}$-n alapuló algoritmusok gyakorlati jelentősége igen nagy, ezeket ma már az élet számos területén rutinszerűen alkalmazzák.

A $\mathcal{CSP}$ következő definíciója T. Feder és M. Vardi [17] cikkében található. Egy T fix véges típusú véges relációs struktúrára a T fölötti $\mathcal{CSP}$ probléma a következő döntési probléma, jele $\mathcal{CSP}(T)$: *döntsük el, hogy vajon létezik-e adott, T-hez hasonló véges S struktúrából homomorfizmus T-be.*

A $\mathcal{CSP}$ problémaosztály, azaz a $\mathcal{CSP}(T)$ alakú problémák osztálya, ahol T véges típusú véges relációs struktúra, egy bő részosztálya $\mathcal{NP}$-nek. Például, tartalmazza a (Boole-) kielégíthetőségi, az egyenletrendszer megoldhatósági, a gráfszínezési és az ütemezési problémákat.

Bár a $\mathcal{CSP}$ irodalma korábban is jelentős volt, T. Feder és M. Vardi 1993-as [17] cikke tekinthető az első igazán olyan műnek, mely a $\mathcal{CSP}$ osztályt bonyolultságelméleti szempontból nem-triviális módon tárgyalja. A szerzők cikkükben több sejtést is megfogalmaztak. A legfontosabbak egyike a $\mathcal{CSP}$-re vonatkozó dichotómiasejtés:

1.1. Sejtés. *Minden $\mathcal{CSP}$-beli probléma $\mathcal{P}$-beli vagy $\mathcal{NP}$-teljes.*

Ugyanezen cikkükben T. Feder and M. Vardi bevezették a korlátos szélességű problémák osztályát, amely $\mathcal{CSP}$ egy speciális részosztálya. Ebbe az osztályba azon problémák tartoznak, melyek bizonyos polinom idejű lokális konzisztencia algoritmus segítségével oldhatók meg, vagy ami ezzel ekvivalens, kifejezhetők a Datalog nevű logikai programozási nyelven. A cikkben bevezették a számolási képességgel rendelkező problémák fogalmát is, és bizonyították, hogy ezek nem korlátos szélességűek. Egy másik fontos sejtésük a következő:

1.2. Sejtés. *Egy $\mathcal{CSP}$-beli probléma pontosan akkor korlátos szélességű, ha nem szimulál olyan a problémát, amely rendelkezik a számolási képességgel.*

Később kiderült, hogy T. Feder és M. Vardi mindkét fenti sejtése egy-egy jól viselkedő algebraosztályhoz kapcsolódik. Létezik egy természetes kapcsolat a $\mathcal{CSP}$-beli problémák és a véges algebrák között, melyet először 1998-ban P. Jeavons írt le [22]-ben. Legyen T véges relációs struktúra, és jelölje $\mathbf{A}(T)$ azt az algebrát, melynek alaphalmaza megegyezik T alaphalmazával, és amely alapműveletei éppen a T relációit megőrző műveletek. P. Jeavons eredménye azt állítja, hogy ha T és T' hasonló véges típusú véges relációs struktúrák esetén az $\mathbf{A}(T)$ és az $\mathbf{A}(T')$ algebrák termekvivalensek, akkor a $\mathcal{CSP}(T)$ és a $\mathcal{CSP}(T')$ problémák polinom időben ekvivalensek. Más szóval, az $\mathbf{A}(T)$ algebra termműveleteinek klónja, vagy ezzel ekvivalens módon az $\mathbf{A}(T)$ által generált varietás meghatározza a $\mathcal{CSP}(T)$ probléma bonyolultságát, polinom időtől eltekintve.

Elegendő azokat a struktúrákat vizsgálni, amelyekhez idempotens algebrák tartoznak. Nem túl nehéz belátni ugyanis, hogy minden véges T struktúrához létezik egy véges T' struktúra úgy, hogy $\mathcal{CSP}(T)$ és $\mathcal{CSP}(T')$ polinom időben ekvivalensek, és az $\mathbf{A}(T')$ algebra idempotens.

Minden edig bizonyított eredmény, amely azt állítja, hogy $\mathcal{CSP}(T)$ polinom idejű a következő alakú: az $\mathbf{A}(T)$ algebra bizonyos típusú termműveleteinek létezése garantálja, hogy a $\mathcal{CSP}(T)$ probléma $\mathcal{P}$-beli. Más szóval, bizonyos termekre vonatkozó azonossághalmazok algebrák (varietások) olyan osztályát határozzák meg, hogy ha $\mathbf{A}(T)$ ebbe az osztályba esik, akkor $\mathcal{CSP}(T)$ polinom idejű probléma. Ez a tény azt sugallja, hogy az ilyen algebraosztályok (varietásosztályok), melyeket egyébként *Malcev-osztályoknak* neveznek, fontos szerepet játszhatnak a $\mathcal{CSP}$-beli problémák bonyolultságának jellemzésében.

A véges algebrák tanulmányozására kifejlesztett szelíd kongruenciák elmélete az univerzális algebrából, kommutátorelméletből és hálóelméletből alakult ki. Az elmélet alapjait D. Hobby and R. McKenzie nevezetes [20] monográfiájukban dolgozták ki. Könyvük 9. fejezetében a nem-triviális idempotens Malcev-feltétellel rendelkező lokálisan véges varietások jellemzéseit adják. Szintén ebben a fejezetben szerepel ezen varietásosztály öt további részosztályának jellemzése is. A hat osztály mindegyike természetes módon, úgynevezett *típushalmazok* segítségével definált. Monográfiájukban D. Hobby és R. McKenzie bevezették a véges algebrák és varietások típushalmazainak fogalmát. A típushalmaz, amely részhalmaza az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak az algebra, illetve a varietás egy jellemző paramétereként fogható fel. Elemeit típusoknak hívjuk. A típusok felfedezése a varietások tanulmányozásának szempontjából igen nagy jelentőségű. Például az 1-es típus kizárásával jellemezhetők azok a lokálisan véges varietások, melyek eleget tesznek egy nem-triviális idempotens Malcev-feltételnek, azaz rendelkeznek Taylor-termmel.

Egy n-változós f műveletet *Taylor-műveletnek* hívunk, ha idempotens, és minden $1 \le i \le n$ esetén teljesít egy

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \dots, y_n),$$

alakú azonosságot, ahol $x_j, y_j \in \{x, y\}, 1 \le j \le n$. Például, egy kétváltozós művelet Taylor-művelet, ha idempotens és kommutatív. Tehát egy félhálóművelet Taylor-művelet. Másik tipikus példa Taylor-műveletre csoport $xy^{-1}z$ alakú termművelete. Azt mondjuk, hogy egy varietás $\mathcal{V}$ *rendelkezik Taylor-termmel*, ha van olyan term $\mathcal{V}$ nyelvében, amelynek interpretációja $\mathcal{V}$ két elem által szabadon generált szabad algebrájában Taylor-művelet.

A következő három pontban rövid összefoglalását adjuk a doktori értekezés 2., 3. és 4. Fejezetében szereplő eredményeknek.

2. Véges részbenrendezett halmazok és topologikus terek lokálisan véges varietásokban

Az értekezés 2. Fejezetében a [28] cikkben közölt eredmények áttekintését adjuk. Ebben a cikkben egy lokálisan véges varietás kompatibilis véges részbenrendezett halmazait tanulmányoztuk. Meglepő módon ezen részbenrendezett halmazok alakja szoros kapcsolatban áll bizonyos típuskizárási tételekkel.

Legyen $\mathcal{V}$ egy varietás. Egy $\mathbf{G}$ csoportot $\mathcal{V}$ *kompatibilis csoportjának* hívunk, ha létezik egy $\mathbf{A}$ algebra $\mathcal{V}$-ben úgy, hogy $\mathbf{A}$ alaphalmaza megegyezik $\mathbf{G}$ alaphalmazával és $\mathbf{A}$ alapműveletei felcserélhetők $\mathbf{G}$ műveleteivel. Egy P részbenrendezett halmazt $\mathcal{V}$ *kompatibilis részbenrendezett halmazának* hívunk, ha létezik egy $\mathbf{A}$ algebra $\mathcal{V}$-ben úgy, hogy P és $\mathbf{A}$ alaphalmazai megegyeznek, és $\mathbf{A}$ alapműveletei megőrzik P részbenrendezését.

A [45] cikkben Taylor bizonyította, hogy ha $\mathcal{V}$ olyan varietás, amely rendelkezik Taylor-termmel, akkor $\mathcal{V}$ minden kompatibilis csoportja Abel-féle. Egy részbenrendezett halmazt ideáltopológiájával topologikus térnek tekintünk. Így egy részbenrendezett halmaz homotópiacsoportjai a szokásos módon definiálhatók, ld. [39]. Egy $\mathcal{V}$ varietás véges kompatibilis részbenrendezett halmazának homotópiacsoportjai kompatibilis csoportjai a varietásnak. Ezért, ha $\mathcal{V}$ rendelkezik Taylor-termmel, akkor a $\mathcal{V}$ tetszőleges kompatibilis részbenrendezett halmazának homotópiacsoportjai Abel-félék. Több is igaz, ahogy azt a [28]-ban bizonyított következő alapvető fontosságú eredmény mutatja.

2.1. Tétel [28]**.** *Tetszőleges Taylor-termmel rendelkező $\mathcal{V}$ varietás minden véges összefüggő kompatibilis részbenrendezett halmazának homotópiacsoportjai egyeleműek.*

Egy P véges részbenrendezett halmaz *fixponttulajdonságú*, ha az alaphalmazán értelmezett minden egyváltozós műveletnek, amely megőrzi P részbenrendezését, van fixpontja. K. Baclawski és A. Björner egyik [1]-beli eredménye alapján a fenti tétel alábbi érdekes következménye adódik.

2.2. Következmény [28]**.** *Ha egy véges részbenrendezett halmaznak van monoton Taylor-művelete, akkor fixponttulajdonságú.*

A 2.1. Tétel, a [20] és [26]-beli eredmények alapján [28] cikkünkben a következő három típuskizárási tételt bizonyítottuk lokálisan véges idempotens varietásokra.

2.3. Tétel [28]**.** *Legyen $\mathcal{V}$ lokálisan véges idempotens varietás. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) $1 \notin \mathrm{typ}\{\mathcal{V}\}$.
(2) *$\mathcal{V}$ minden véges összefüggő kompatibilis részbenrendezett halmazának homotópiacsoportjai egyeleműek.*

2.4. Tétel [28]**.** *Legyen $\mathcal{V}$ lokálisan véges idempotens varietás. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) $\mathrm{typ}\{\mathcal{V}\} \cap \{1, 5\} = \emptyset$.
(2) *$\mathcal{V}$ minden véges összefüggő kompatibilis részbenrendezett halmaza lebontható.*

2.5. Tétel [28]**.** *Legyen $\mathcal{V}$ lokálisan véges idempotens varietás. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) $\mathrm{typ}\{\mathcal{V}\} \cap \{1, 4, 5\} = \emptyset$.
(2) *$\mathcal{V}$ minden véges összefüggő kompatibilis részbenrendezett halmaza egyelemű.*

A [20] monográfia 9. Fejezetében hat természetes módon adódó típuskizárási feltétel jellemzése szerepel lokálisan véges varietásokra. Ezek közül három feltételre az előző három tételben adtunk újabb jellemzéseket a kompatibilis részbenrendezett halmazok fogalmát használva. A kompatibilis csoportok és kompatibilis részbenrendezett halmazok fogalmát felhasználva, az alábbiakban a másik három feltételre adunk jellemzést.

2.6. Tétel. *Legyen $\mathcal{V}$ lokálisan véges idempotens varietás. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) $\mathrm{typ}\{\mathcal{V}\} \cap \{1, 2\} = \emptyset$.
(2) *$\mathcal{V}$ minden kompatibilis csoportja egyelemű.*

2.7. Tétel. *Legyen $\mathcal{V}$ lokálisan véges idempotens varietás. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) $\mathrm{typ}\{\mathcal{V}\} \cap \{1, 2, 5\} = \emptyset$.
(2) *$\mathcal{V}$ minden kompatibilis csoportja egyelemű, és $\mathcal{V}$ minden véges összefüggő kompatibilis részbenrendezett halmaza lebontható.*

2.8. Tétel. *Legyen $\mathcal{V}$ lokálisan véges idempotens varietás. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) $\mathrm{typ}\{\mathcal{V}\} \cap \{1, 2, 4, 5\} = \emptyset$.
(2) *$\mathcal{V}$ minden kompatibilis csoportja és minden összefüggő kompatibilis részbenrendezett halmaza egyelemű.*

Egy X topologikus teret *H-térnek* nevezünk, ha van olyan folytonos $h : X^2 \longrightarrow X$ művelet és $e \in X$, melyekre az $x \mapsto h(x, e)$ és $x \mapsto h(e, x)$ leképezések homotópok X identikus leképezésével. Taylor a [46] és [47] cikkeiben azt a kérdést vetette föl, hogy vajon egy olyan folytonos művelet létezéséből, amely kielégít nem-triviális azonosságokat, következik-e, hogy a topologikus tér H-tér. A [28] cikkünkben a 2.4. Tétel bizonyításában szereplő kontrukciót felhasználva megadtunk egy véges részbenrendezett halmazt, amely nem H-tér, de van rajta monoton félhálóművelet. Ezzel negatív választ adtunk Taylor kérdésére.

Legyen T egy véges típusú véges struktúra. A [27] cikkben bizonyítottuk, hogy ha $\mathbf{A}(T)$ idempotens, és eleget tesz egy nem-triviális idempotens Malcev-feltételnek, azaz az $\mathbf{A}(T)$ által generált varietás típushalmazában megjelenik az 1-es típus, akkor a $\mathcal{CSP}(T)$ probléma $\mathcal{NP}$-teljes. A [8]-ban Bulatov, Jeavons és Krokhin hasonló eredményt bizonyítottak, és T. Feder és M. Vardi dichotómiasejtésének következő erősebb formáját fogalmazták meg.

2.9. Sejtés. *Legyen T egy véges típusú véges relációs struktúra, melyre az $\mathbf{A}(T)$ algebra idempotens. Ekkor a $\mathcal{CSP}(T)$ probléma $\mathcal{P}$-beli, ha az $\mathbf{A}(T)$ által generált varietás típushalmaza nem tartalmazza az 1-es típust, és a $\mathcal{CSP}(T)$ probléma $\mathcal{NP}$-teljes különben .*

Számos korábbi eredmény azt mutatja, hogy a sejtés teljesül. Például abban az esetben, ha T kételemű [38], ha T irányításnélküli gráf [19], vagy ha az $\mathbf{A}(T)$ algebra konzervatív [6], a sejtést igazolták. További eredmények, amelyek megerősítik a sejtést: [17], ha az $\mathbf{A}(T)$ algebrának van többségi művelete, [7], ha az $\mathbf{A}(T)$ algebrának van Malcev-termművelete, [3] és [21], ha $\mathbf{A}(T)$ egy olyan algebra, melynek kevés részhatványa van.

A [17] cikkben T. Feder és M. Vardi megnutatták, hogy bármely $\mathcal{CSP}(T)$ problémához létezik egy olyan véges részbenrendezett halmaz, amelyhez tartozó retrakcióprobléma polinom időben ekvivalens a $\mathcal{CSP}(T)$ problémával. Ebből az következik, ld. [29], hogy T. Feder és M. Vardi dichotómiasejtését elegendő olyan véges relációs struktúrákra bizonyítani, melyek relációi az alaphalmaz egyelemű részhalmazai és egy részbenrendezés. Így reményeink szerint az első típuskizárási tételünk szerepet játszhat a dichotómiasejtés igazolásában, míg a további öt típuskizárási tételünk a dichotómiasejtés speciális eseteinek igazolásában lehet hasznos segédeszköz.

3. Korlátos szélességű problémák és algebrák

Az értekezés 3. Fejezetében a [30] cikkben közölt eredmények áttekintését adjuk. Ebben a cikkben a korlátos szélességű problémák struktúráját tanulmányoztuk, és egy olyan tételt bizonyítottunk, amely kapcsolatot teremt a korlátos szélességű problémákhoz tartozó algebrák és a bevezetésben említett egyik Malcev-osztály között. A [30] cikkünkben T. Feder és M. Vardi [17]-et követve definiáltuk a korlátos szélességű problémákat egy kétszemélyes játék segítségével. Megmutattuk, hogy ezek a $\mathcal{CSP}$-beli problémák polinom időben megoldhatóak egy speciális lokális konzisztencia algoritmus segítségével.

A [30] cikkben algoritmusunkat a korlátos szélességű problémákhoz tartozó algebrák tulajdonságainak vizsgálatára használtuk. Bevezettük a következő természetes definíciót. Egy véges $\mathbf{A}$ algebra *korlátos szélességű*, ha minden A véges típusú relációs struktúrára, amelynek az alaphalmaza megegyezik $\mathbf{A}$ alaphalmazával és melynek relációi $\mathbf{A}$ véges részhatványai, a $\mathcal{CSP}(A)$ probléma korlátos szélességű.

A [30] cikkünkben a következő két megőrzési tételt bizonyítottuk korlátos szélességű algebrákra.

3.1. Lemma [30]. *Korlátos szélességű véges algebra által generált varietásban minden véges algebra korlátos szélességű.*

3.2. Tétel [30]. *Ha* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *olyan véges algebrák, melyekre az* $\mathbf{A}$ *által generált varietás interpretálható a* $\mathbf{B}$ *által generált varietásban, és* $\mathbf{A}$ *korlátos szélességű, akkor* $\mathbf{B}$ *is korlátos szélességű.*

A [30] cikk fő eredményének bizonyításához a következő lemmát használtuk, melynek bizonyítása a [20] és [44]-ben szereplő eredményekből rakható össze.

Egy algebra *affin*, ha az alaphalmazán létezik egy modulus úgy, hogy az algebra és a modulus polinomműveleteinek klónjai megegyeznek.

3.3. Lemma [30]. *Egy* $\mathcal{V}$ *lokálisan véges idempotens varietásra ekvivalensek a következő feltételek:*

(1) $\mathcal{V}$ *típushalmaza nem tartalmazza az 1-es és 2-es típusokat.*
(2) $\mathcal{V}$ *nem interpretálható egyetlen legalább kételemű affin algebra által generált varietásban sem.*

A lemma és a megőrzési tételek segítségével adódik a következő eredmény, mely a [30] cikk fő eredménye.

3.4. Tétel [30]. *Tetszőleges korlátos szélességű véges idempotens* $\mathbf{A}$ *algebrára az* $\mathbf{A}$ *által generált varietás típushalmazában nincs 1-es és 2-es típus.*

Tételünk alkalmazható annak bizonyítására, hogy konkrét $\mathcal{CSP}$-beli problémák nem korlátos szélességűek. A [30] cikkben a tétel három alkalmazását mutattuk be. Tegyük fel, hogy adott egy $\mathcal{NP}$-teljes $\mathcal{CSP}$-beli probléma, amiről azt szeretnénk bizonyítani, hogy korlátos szélességű. Ez természetesen következik, hogyha feltesszük, hogy $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, mivel a korlátos szélességű problémák $\mathcal{P}$-beliek. Érdekes lehet egy olyan bizonyítás is, amely nem használja a $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ feltevést. Első két alkalmazásunkban ilyen bizonyításokra mutattunk példát.

Legyen H egy irreflexív, szimmetrikus irányított gráf. A [19] cikkben P. Hell éa J. Nešetřil bebizonyították, hogy a $\mathcal{CSP}(H)$ probléma $\mathcal{P}$-beli, ha H páros gráf, és a $\mathcal{CSP}(H)$ probléma $\mathcal{NP}$-teljes különben. A 3.4. Tétel első alkalmazásaként P. Hell és J. Nešetřil bizonyítását analizálva a [30]-ban megmutattuk, hogy $\mathcal{CSP}(H)$ nem korlátos szélességű, ha H nem páros gráf. A [35] cikkben J. Nešetřil és X. Zhu ugyanezt az eredményt más módszerekkel bizonyították.

Cikkükben a következő kérdést is felvetették: vajon létezik-e direkt bizonyítás a $\mathcal{P} \neq \mathcal{N}P$ feltevés nélkül arra, hogy $\mathcal{CSP}(H)$ nem korlátos szélességű abban az esetben, amikor H egy olyan kör, melynek minden éle valahogy irányítva van, és a $\mathcal{CSP}(H)$ probléma $\mathcal{NP}$-teljes. A 3.4. Tétel segítségével sikerült pozitív választ adnunk a J. Nešetřil és X. Zhu által felvetett kérdésre. Eredményünk T. Feder azon bizonyítására támaszkodik, amelyben megmutatja, hogy bármely H körre, melynek minden éle valahogy irányítva van a $\mathcal{CSP}(H)$ probléma $\mathcal{P}$-beli, vagy $\mathcal{NP}$-teljes, ld. [15].

Harmadik alkalmazásunkban példát mutattunk olyan rendezésprimál algebrára, mely által generált varietás típushalmaza nem tartalmazza az 1-es típust, de tartalmazza a 2-es típust. Ilyen példa eddig nem volt ismert. Különös módon ennek az eredménynek a bizonyításához szükségünk volt a $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ feltevésre.

A [30] cikkben a következő sejtést fogalmaztuk meg.

3.5. Sejtés [30]**.** *Legyen T egy olyan véges típusú véges struktúra, melyre az $\mathbf{A}(T)$ algebra idempotens. Ekkor $\mathcal{CSP}(T)$ pontosan akkor korlátos szélességű, ha az $\mathbf{A}(T)$ által generált varietás típushalmaza nem tartalmazza az 1-es és 2-es típusokat.*

Nemrégiben bizonyítottuk a [31] cikkben, hogy az idempotens esetben sejtésünk ekvivalens T. Feder és M. Vardi korlátos szélességű problémákra vonatkozó sejtésével. Sejtésünk bizonyítására részeredmények születtek a kongruenciadisztributív esetben E. W. Kiss és M. Valeriote [24] cikkében, valamint C. Carvalho, V. Dalmau, P. Marković és M. Maróti [11] cikkében.

4. Véges algebrák feletti polinomegyenlet-rendszerek megoldhatósága

Az értekezés 4. Fejezetében a [49] cikkben közölt eredmények áttekintését adjuk. A [49] cikkben véges algebrák feletti polinomegyenlet-rendszerek megoldhatóságát tanulmányoztuk. Egy véges típusú véges $\mathbf{A}$ algebra esetén az $\mathbf{A}$ feletti polinomegyenlet-rendszerek megoldhatósági problémája a következő döntési probléma, jele $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$: *döntsük el, hogy vajon adott, $\mathbf{A}$ feletti, véges sok egyenletből álló S polinomegyenlet-rendszernek létezik-e megoldása $\mathbf{A}$ felett.*

Jelölje $\mathcal{S}ysPol$ a $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ alakú problémák osztályát, ahol $\mathbf{A}$ véges típusú véges algebra. Számos dichotómiatételt sikerült bizonyítani $\mathcal{S}ysPol$ problémaosztályra speciális algebraosztályok felett. Például M. Goldmann és A. Russell [18]-ban dichotómiatételt bizonyítanak $\mathcal{S}ysPol$-ra csoportok felett. O. Klíma, P. Tesson és D. Thérien [25]-ban igazolják a dichotómiát $\mathcal{S}ysPol$-ra monoidok és más véges félcsoportosztályok felett. Azt is bizonyítják, hogy minden véges típusú véges T struktúra esetén létezik olyan $\mathbf{A}$ algebra, hogy $\mathcal{CSP}(T)$ polinom időben ekvivalens a $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ problémával.

A [29] cikkben bizonyítottuk a következő eredményt, amely lehetővé teszi $\mathcal{S}ysPol$ tanulmányozását a $\mathcal{CSP}$ segítségével.

4.1. Tétel. *Legyen $\mathbf{A}$ véges típusú véges algebra. Ekkor $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ polinom időben ekvivalens a $\mathcal{CSP}(T)$ problémával, ahol a T struktúra alaphalmaza megegyezik az $\mathbf{A}$ alaphalmazával, és T relációi az $\mathbf{A}$ alapműveleteinek gráfjai és az alaphalmaz összes egyelemű részhalmaza.*

Az előző tétel alkalmazásaként a következő eredményt bizonyítottuk $\mathcal{S}ysPol$-ra [29]-ben.

4.2. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A}$ *véges típusú véges algebra. Ha* $\mathbf{A}$*-nak nincs kompatibilis Taylor-művelete, akkor a* $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ *probléma* $\mathcal{NP}$*-teljes.*

Ennek segítségével a 2.9. Sejtés átfogalmazható $\mathcal{S}ysPol$-ra a következőképpen.

4.3. Sejtés. *Legyen* $\mathbf{A}$ *véges típusú véges algebra. Ekkor a* $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ *probléma* $\mathcal{P}$*-beli, ha* $\mathbf{A}$*-nak van kompatibilis Taylor-művelete, és a* $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ *probléma* $\mathcal{NP}$*-teljes különben.*

Meglepő módon az $\mathbf{A}$ algebra vagy az $\mathbf{A}$ által generált varietás típushalmazára kirótt feltételek mellett dichotómiatételek bizonyíthatóak $\mathcal{S}ysPol$-ra. Az első ilyen jellegű dichotómiatételünket [29]-ben bizonyítottuk. A tétel a következő.

4.4. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A}$ *olyan véges típusú véges algebra, hogy* $\mathbf{A}$ *típushalmaza nem tartalmazza az 5-ös típust, és az* $\mathbf{A}$ *által generált varietás típushalmaza nem tartalmazza az 1-es típust. Ekkor a* $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ *probléma* $\mathcal{P}$*-beli, ha egy* $\mathbf{A}$ *affin algebra, és a* $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ *probléma* $\mathcal{NP}$*-teljes különben.*

A [49] cikkben egy hasonló, de bonyolultabb dichotómiatételt bizonyítottunk azon feltétel mellett, hogy az $\mathbf{A}$ által generált varietás típushalmaza nem tartalmazza az 1-es típust, azaz $\mathbf{A}$-nak van Taylor-termművelete. A 4.5. Tétel azt az alapvető eredményünket tartalmazza, amely az új dichotómiatételünk bizonyításához vezetett.

Egy $\mathbf{S}$ félcsoportot *Abel-csoportok félhálójának* nevezünk, ha $\mathbf{S}$-nek van egy olyan θ kongruenciája, hogy $\mathbf{S}/\theta$ félcsoport egy félháló, és a θ-blokkok Abel-féle részcsoportjai $\mathbf{S}$-nek. Megjegyezzük, hogy Abel-csoportok bármely véges $\mathbf{S}$ félhálójának van egy egyértelműen meghatározott idempotens $xy^{n-1}z$, $n > 1$, alakú háromváltozós termművelete.

4.5. Tétel [49]**.** *Legyen* M *véges halmaz. Legyen* xy *egységelemes kétváltozós művelet,* t *pedig Taylor-művelet* M*-en, és tegyük fel, hogy* xy *felcserélhető* t*-vel. Ekkor a következők teljesülnek:*

(1) xy *Abel-csoportok félhálójának művelete.*
(2) *A* t *által generált klón tartalmaz egy háromváltozós* $xy^{n-1}z$ *alakú idempotens műveletet.*

Egy algebrát, melynek van Taylor-termművelete, *Taylor-algebrának* nevezünk. Egy olyan Taylor-algebrát, melynek van kompatibilis Taylor-művelete *duplán Taylor-algebrának* nevezünk. A duplán Taylor-algebrák a [49]-ban bizonyított következő jellemzése főszerepet játszik dichotómiatételünk bizonyításában.

4.6. Tétel [49]**.** *Egy véges Taylor-algebra pontosan akkor duplán Taylor-algebra, ha van olyan kompatibilis idempotens háromváltozós művelete, amely kiterjeszthető véges Abel-csoportok félhálójának* $xy^{n-1}z$ *alakú termműveletévé.*

A bizonyítás másik fő összetevője a V. Dalmau, R.Gavaldà, P. Tesson és D. Thérien [12]-ban leírt speciális $\mathcal{CSP}$-beli problémák megoldására vonatkozó polinom idejű algoritmusán alapszik.

4.7. Tétel [49]**.** *Legyen* $\mathbf{M}$ *véges Abel-csoportok félhálója, és* T *véges típusú véges relációs struktúra, melynek alaphalmaza részhalmaza* $\mathbf{M}$ *alaphalmazának. Ha* $\mathbf{M}$ *idempotens* $xy^{n-1}z$ *alakú termművelete megőrzi* T *alaphalmazát és relációit, akkor létezik egy polinom idejű algoritmus a* $\mathcal{CSP}(T)$ *probléma megoldására.*

Ezek után a 4.2., 4.6. és 4.7. Tételeket felhasználva kapjuk [49]-ban szereplő fő tételünket.

4.8. Tétel [49]**.** *Legyen* $\mathbf{A}$ *véges típusú véges algebra, amely által generált varietás típushalmazában nem szerepel az 1-es típus. Ekkor a* $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ *probléma* $\mathcal{P}$*-beli, ha van olyan kompatibilis idempotens háromváltozós művelete* $\mathbf{A}$*-nak, amely kiterjeszthető véges Abel-csoportok félhálójának* $xy^{n-1}z$ *alakú termműveletévé, és a* $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ *probléma* $\mathcal{NP}$*-teljes különben.*

A következő tétel általánosítása O. Klíma, P. Tesson és D. Thérien monoidokra vonatkozó tételének, és lefed bizonyos olyan eseteket, amikor az algebra, illetve az általa generált varietás típushalmazában szerepel az 1-es típus. Bizonyítása szintén a 4.5. Tételen alapul.

4.9. Tétel [49]**.** *Legyen* $\mathbf{A}$ *véges típusú véges algebra, amelynek* xy *egységelemes kétváltozós polinomművelete. Ekkor a* $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ *probléma* $\mathcal{P}$*-beli, ha* xy *Abel-csoportok félhálójának művelete és az idempotens háromváltozós* $xy^{n-1}z$ *művelet kompatibilis művelete* $\mathbf{A}$*-nak, és a* $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ *probléma* $\mathcal{NP}$*-teljes különben.*

Nemrégiben sikerült bizonyítani a 4.8. és 4.9. Tétel közös általánosítását. Azt mondjuk, hogy A-n értelmezett transzformációk egy F halmaza *szeparáló*, ha A bármely két különböző a és b elemére létezik egy $f \in F$ transzformáció, melyre $f(a) \neq f(b)$.

4.10. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A}$ *véges típusú véges algebra, amelynek* F *egy egyváltozós polinomműveletekből álló szeparáló transzformációhalmaza úgy, hogy minden* $f \in F$*-re létezik egy* g_f *kétváltozós polinomművelete* $\mathbf{A}$*-nak, melyet* $f(A)$*-ra megszorítva egy kétváltozós egységelemes műveletet kapunk. Ekkor a* $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ *probléma* $\mathcal{P}$*-beli, ha van olyan kompatibilis idempotens háromváltozós művelete* $\mathbf{A}$*-nak, amely kiterjeszthető véges Abel-csoportok félhálójának* $xy^{n-1}z$ *alakú termműveletévé, és a* $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ *probléma* $\mathcal{NP}$*-teljes különben.*

Ebből a tételből a 4.8. Tétel következő szép általánosítása adódik.

4.11. Következmény. *Legyen* $\mathbf{A}$ *véges típusú véges algebra, amely típushalmazában nem szerepel az 1-es típus. Ekkor a* $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ *probléma* $\mathcal{P}$*-beli, ha van olyan kompatibilis idempotens háromváltozós művelete* $\mathbf{A}$*-nak, amely kiterjeszthető véges Abel-csoportok félhálójának* $xy^{n-1}z$ *alakú termműveletévé, és a* $\mathcal{S}ysPol(\mathbf{A})$ *probléma* $\mathcal{NP}$*-teljes különben.*

Irodalomjegyzék

[1] K. Baclawski, A. Björner, Fixed points in partially ordered sets, Advances in Math. **31**, 263-287, 1979.

[2] L. Barto, M. Kozik, T. Niven, The CSP dichotomy holds for digraphs with no sources and no sinks (a positive answer to a conjecture of Bang-Jensen and Hell), submitted 2007.

[3] J. Berman, P. Idziak, P. Marković, R. McKenzie, M. Valeriote, R. Willard, Varieties with few subalgebras of powers, preprint 2006.

[4] A. Björner, Topological methods, in Handbook of combinatorics, **1, 2**, Elsevier, Amsterdam, 1819-1872, 1995.

[5] A. Bulatov, A graph of a relational structure and constraint satisfaction problems, LICS 2004, 448-457, 2004.

[6] A. Bulatov, Tractable conservative constraint satisfaction problems, submitted.

[7] A. Bulatov, V. Dalmau, Mal'tsev constraints are tractable, SIAM J. on Computing, **36**(1), 16-27, 2006.

[8] A. Bulatov, A. Krokhin, P. Jeavons, Constraint satisfaction problems and finite algebras, Automata, languages and programming (Geneva, 2000), Lecture Notes in Comput. Sci., **1853**, Springer, Berlin, 272-282, 2000.

[9] A. Bulatov, P. Jeavons, Algebraic structures in combinatorial problems, Technical report MATH AL-4-2001, Technische Universität Dresden, 2001.

[10] S. Burris and H. P. Sankappanavar, A course in universal algebra, Springer Verlag, New York, 1981.

[11] C. Carvalho, V. Dalmau, P. Marković and M. Maróti, CD(4) has bounded width, submitted 2007.

[12] V. Dalmau, R. Gavaldà, P. Tesson, D. Thérien, Tractable clones of polynomials over semigroups, Electronic Colloquium on Computational Complexity, Report No. **59**, 2005.

[13] D. Duffus, I. Rival, A structure theory for ordered sets, Discrete Math. **35**, 53-118, 1981.

[14] B. Eckmann, T. Ganea, P. Hilton, Generalized means, in: D. Gilbarg et al., eds., Studies in Mathematical Analysis (Stanford University Press), 82-92, 1963.

[15] T. Feder, Classification of homomorphisms to oriented cycles and of k-partite satisfiability, SIAM J. Discrete Math. **14**(4), 471-480, 2001.

[16] T. Feder, M. Vardi, Monotone monadic SNP and constraint satisfaction, in Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 612-622, 1993.

[17] T. Feder, M. Y. Vardi, The computational structure of monotone monadic SNP and constraint satisfaction: a study through datalog and group theory, SIAM Journal of Computing **28**, 57-104, 1998.

[18] M. Goldmann, A. Russell, The complexity of solving equations over finite groups. Inform. and Comput., **178**(1), 253-262, 2002.

[19] P. Hell, J. Nešetřil, On the complexity of H-colouring, J. Combin. Theory Ser. B **48**, 92-110, 1990.

[20] D. Hobby, R. McKenzie, The structure of finite algebras, Contemporary Mathematics **76**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[21] P. Idziak, P. Marković, R. McKenzie, M. Valeriote, R. Willard, Tractability and learnability arising from algebras with few subpowers, to appear in Proceedings of IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS '07).

[22] P. G. Jeavons, On the algebraic structure of combinatorial problems, Theoretical Computer Science **200**, 185-204, 1998.

[23] K. Kearnes, Á. Szendrei, Self-rectangulating varieties of type 5 Journal of Algebra and Computation **7**(4), 511-540, 1997.

[24] E. Kiss, M. Valeriote, On tractability and congruence distributivity, Logical Methods in Computer Science, **3**(2:6), 2007.

[25] O. Klíma, P. Tesson, D. Thérien, Dichotomies in the complexity of solving systems of equations over finite semigroups, preprint, Electronic Colloquium on Computational Complexity, Report No. **91**, 2004.

[26] B. Larose, L. Zádori, Algebraic properties and dismantlability of finite posets, Discrete Math. **163**, 89-99, 1997.

[27] B. Larose, L. Zádori, The complexity of the extendibility problem for finite posets, SIAM J. Discrete Math., **17**(1), 114-121, 2003.

[28] B. Larose, L. Zádori, Finite posets and topological spaces in locally finite varieties, Algebra Universalis, **52**(2-3), 119-136, 2004.

[29] B. Larose, L. Zádori, Taylor terms, constraint satisfaction and the complexity of polynomial equations over finite algebras, Internat. J. Algebra Comput. **16**(3), 563-581, 2006.

[30] B. Larose, L. Zádori, Bounded width problems and algebras, Algebra Universalis, **56**(3-4), 439-466, 2007.

[31] B. Larose, M. Valeriote, L. Zádori, Omitting types, bounded width and the ability to count, preprint 2007.

[32] M. Maróti, R. McKenzie, Existence theorems for weakly symmetric operations, submitted to Algebra Universalis 2006.

[33] M. C. McCord, Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces, Duke Math. J. **33**, 465-474, 1966.

[34] R. N. McKenzie, G. F. McNulty, W. F. Taylor, Algebras, lattices and varieties, Wadsworth and Brooks/Cole, Monterey California, 1987.

[35] J. Nešetřil, X. Zhu, On bounded treewidth duality of graphs, Journal of Graph Theory, **23**,151-162, 1996.
[36] P. P. Pálfy, Unary polynomials in algebras I, Algebra Universalis, **18** 262-273, 1984.
[37] C. H. Papadimitriou, Computational complexity, Addison-Wesley, 1994.
[38] T. J. Schaefer, The complexity of satisfiability problems, in Proceedings of the 10th annual ACM symposium on Theory of computing (STOC), San Diego, California, 216-226, 1978.
[39] E. Spanier, Algebraic topology, McGraw-Hill, New York, 1966.
[40] R. E. Stong, Finite topological spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **123**, 325-340, 1966.
[41] Á. Szendrei, On the idempotent reducts of modules I, Universal Algebra (Proc. Conf. Esztergom, 1977), Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, **29**, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 753-767, 1982.
[42] Á. Szendrei, On the idempotent reducts of modules II, Universal Algebra (Proc. Conf. Esztergom, 1977), Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, **29**, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 769-780, 1982.
[43] Á. Szendrei, Clones in universal algebra, Sém. de Mathématiques Supérieures, **99**, Séminaire Scientifique OTAN, les presses de l'Université de Montréal, 1986.
[44] Á. Szendrei, Idempotent algebras with restrictions on subalgebras, Acta Sci. Math. **51**, 251-268, 1987.
[45] W. Taylor, Varieties obeying homotopy laws, Canadian J. Math. **29**, 498-527, 1977.
[46] W. Taylor, Laws obeyed by topological algebras - extending results of Hopf and Adams, J. Pure and Applied Algebra **21**, 75-98, 1981.
[47] W. Taylor, Spaces and equations, Fundamenta Mathematicae **164**, 193-240, 2000.
[48] M. Valeriote, A subalgebra intersection property for congruence distributive varieties, accepted for publication in the Canadian Journal of Mathematics, 2006.
[49] L. Zádori, Solvability of systems of polynomial equations over finite algebras, Internat. J. Algebra Comput **17**(4), 821-835, 2007.