Algebrák, CSP és egyenletrendszerek megoldhatósága

Zádori László

Szegedi Tudományegyetem

Constraint satisfaction probléma

$\mathcal{T}$ véges relációs struktúra

CSP($\mathcal{T}$)

Input: *Egy véges $\mathcal{I}$ struktúra, amely hasonló $\mathcal{T}$-hez.*

Kérdés: *Létezik-e homomorfizmus $\mathcal{I}$-ből $\mathcal{T}$-be?*

Példák CSP-re

- Háromszinezési probléma
- Boole-kielégíthetőségi problémák
- Egyenletrendszer megoldhatósági problémák

Dichotómiasejtés

CSP($\mathcal{T}$) probléma **NP**-beli tetszőleges $\mathcal{T}$ esetén.

Schaefer (1978)

Ha $\mathcal{T}$ alaphalmaza kételemű, akkor CSP($\mathcal{T}$) polinomidőben megoldható, vagy **NP***-teljes.*

Dichotómiasejtés (Feder, Vardi (1993))

Bármely $\mathcal{T}$-re CSP($\mathcal{T}$) polinomidőben megoldható, vagy **NP***-teljes.*

CSP és algebrák

- Tetszőleges $\mathcal{T}$ struktúrára $\mathbf{A}(\mathcal{T})$ jelöli azt az algebrát, melynek alaphalmaza megegyezik $\mathcal{T}$ alaphalmazával, műveletei pedig a $\mathcal{T}$ relációit megőrző műveletek.
- Jeavons (1998): CSP($\mathcal{T}$) probléma komplexitását teljesen meghatározza $\mathbf{A}(\mathcal{T})$ algebra.
- Bulatov, Jeavons és Krokhin: a Feder-Vardi sejtés algebrai formája

Hobby-McKenzie féle típusok

- Hobby és McKenzie: szelíd kongruenciák elmélete
- Minden véges algebrához *típushalmaz* tartozik, amely részhalmaza az $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ halmaznak.

  $\mathbf{1}$: unér típus
  $\mathbf{2}$: vektortér típus
  $\mathbf{3}$: Boole-algebra típus
  $\mathbf{4}$: háló típus
  $\mathbf{5}$: félháló típus

A dichotómiasejtés algebrai változata

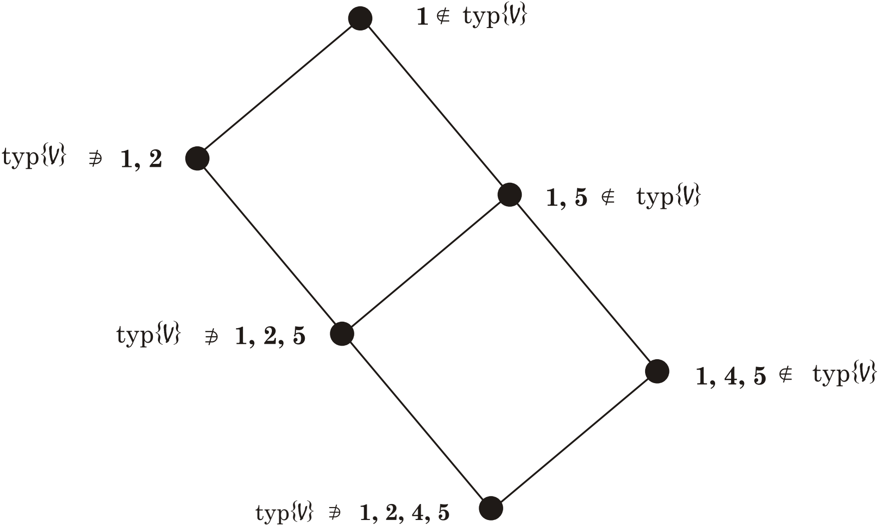
- *Varietás*: azonosságokkal definiált algebraosztály.
- *Varietás típushalmaza*: a benne szereplő véges algebrák típushalmazainak uniója.

Az algebrai dichotómiasejtés (Bulatov, Jeavons, Krokhin (1998))

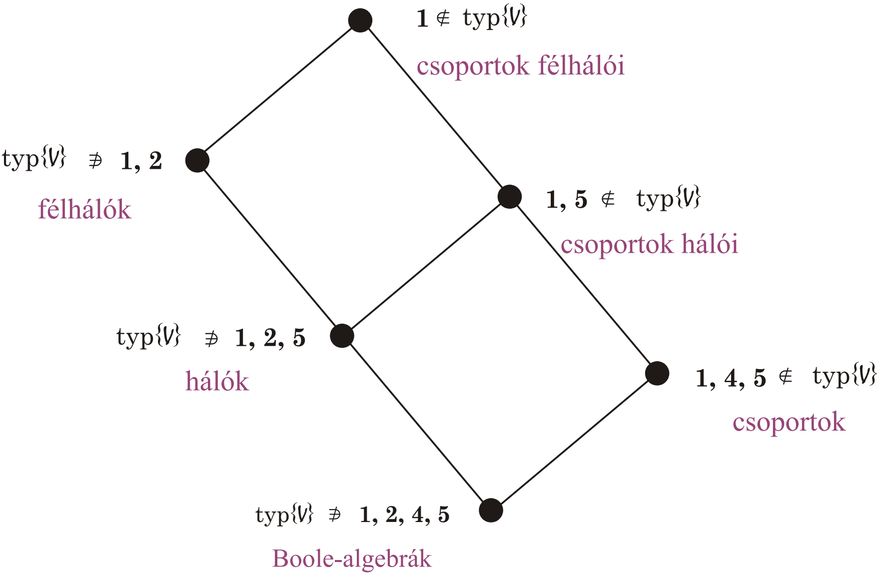
Legyen $\mathcal{T}$ olyan struktúrára, melyre $\mathbf{A}(\mathcal{T})$ algebra idempotens.

- *Ha az $\mathbf{A}(\mathcal{T})$ által generált varietás típushalmaza nem tartalmaz* **1***-es típust, CSP($\mathcal{T}$) polinomidőben megoldható,*
- *különben a CSP($\mathcal{T}$) probléma* **NP***-teljes.*

Hobby és McKenzie: 6 varietásosztály típuskizárással



Hobby és McKenzie: 6 varietásosztály típuskizárással



Larose, Zádori (2004): új típuskizárási tételek

- *Kompatibilis részbenrendezett halmaz varietásban*: egy varietásbeli algebra alaphalmazán értelmezett részbenrendezett halmaz, melynek részbenrendezését az algebra műveletei megőrzik.
- A következő tételekben $\mathcal{V}$ egy tetszőleges lokálisan véges idempotens varietás.

1.Tétel

A következők ekvivalensek:

(1) $\mathbf{1} \notin \mathrm{typ}\{\mathcal{V}\}$.

(2) $\mathcal{V}$ *minden véges összefüggő kompatibilis részbenrendezett halmazának homotópiacsoportjai egyeleműek.*

2.Tétel

A következők ekvivalensek:

(1) $\mathrm{typ}\{\mathcal{V}\} \cap \{\mathbf{1}, \mathbf{5}\} = \emptyset$.

(2) $\mathcal{V}$ *minden véges összefüggő kompatibilis részbenrendezett halmaza lebontható.*

3.Tétel

A következők ekvivalensek:

(1) $\mathrm{typ}\{\mathcal{V}\} \cap \{\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\} = \emptyset$.

(2) $\mathcal{V}$ *minden véges összefüggő kompatibilis részbenrendezett halmaza egyeleműű.*

Korlátos szélességű problémák

- CSP($\mathcal{T}$) *korlátos szélességű*, ha egy speciális, lokálisan működő algoritmus megoldja a problémat. Az algoritmus polinomidejű.

- **A** *algebra korlátos szélességű*, ha minden **A** alaphalmazán értelmezett $\mathcal{T}$ struktúrára, melynek relációit megőrzik **A** műveletei, CSP($\mathcal{T}$) korlátos szélességű.

Larose, Zádori (2006): korlátos szélességű problémák

Ha CSP($\mathcal{T}$) korlátos szélességű, akkor $\mathbf{A}(\mathcal{T})$ is az.

Ha $\mathbf{A}$ algebra korlátos szélességű, akkor $\mathcal{V}(\mathbf{A})$-ban minden véges algebra is az.

Legyen $\mathcal{V}$ lokálisan véges idempotens varietás. Ekkor $\mathrm{typ}\{\mathcal{V}\} \cap \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} = \emptyset$, ha $\mathcal{V}$-ben minden olyan algebra, amelynek alapműveletei termműveletei egy modulusnak egyelemű.

Feder, Vardi:
A legalább kételemű véges modulusok nem korlátos szélességűek.

Fő eredmények korlátos szélességű problémákra

Larose, Zádori (2006)

Ha $\mathbf{A}$ *korlátos szélességű idempotens algebra, akkor* $\mathcal{V}(\mathbf{A})$ *típushalmaza nem tartalmaz sem* $\mathbf{1}$*-es, sem* $\mathbf{2}$*-es típust.*

Barto, Kozik (2008)

A megfordítás is teljesül.

Barto, Kozik (2008)

Legyen $\mathcal{T}$ *olyan struktúrára, melyre* $\mathbf{A}(\mathcal{T})$ *algebra idempotens. Ekkor, ha az* $\mathbf{A}(\mathcal{T})$ *által generált varietás típushalmaza nem tartalmaz sem* $\mathbf{1}$*-es, sem* $\mathbf{2}$*-es típust,* $CSP(\mathcal{T})$ *polinomidőben megoldható.*

Polinom-egyenletrendszer probléma

A véges algebra

SysPol(A)

Input: *S polinomegyenletekből álló egyenletrendszer* **A** *algebra felett.*

Kérdés: *Megoldható-e S az* **A** *algebra felett?*

Negatív eredmény SysPolra

Feder, Madelaine, Stewart (2004)

Minden $\mathcal{T}$ véges relációs struktúra esetén CSP($\mathcal{T}$) polinom időben ekvivalens egy SysPol($\mathbf{A}$) problémával, ahol $\mathbf{A}$ olyan unér algebra, melynek két darab egyváltozós művelete van.

Pozitív eredmények SysPolra

Goldmann, Russel (2002)

Legyen **A** *véges csoport. Ekkor SysPol*(**A**) *polinomidejű, ha* **A** *kommutatív csoport, és* **NP***-teljes egyébként.*

Klíma, Tesson, Thérien (2004)

Legyen **A** *véges monoid. Ekkor SysPol*(**A**) *polinomidejű, ha* **A** *kommutatív csoportok félhálója, és* **NP***-teljes egyébként.*

SysPol mint CSP

Larose, Zádori (2006)

Minden **A** *véges algebra esetén SysPol(***A***) polinom időben ekvivalens egy CSP($\mathcal{T}$) problémával.*

Larose, Zádori (2006)

Legyen **A** *véges algebra olyan, hogy az* **A** *az által generált varietás típushalmazában nincs* **1***-es és* **5***-ös. Ekkor SysPol(***A***) polinomidejű, ha* **A** *polinomiálisan ekvivalens egy modulussal, és* **NP***-teljes egyébként.*

SysPol-ra vonatkozó fő eredményeim (2008)

1. Tétel

Legyen **A** *véges algebra, melynek xy egységelemes kétváltozós polinomművelete. Ekkor SysPol(***A***) polinomidejű, ha*

- *xy kommutatív csoportok félhálójának szorzásművelete,*
- *és az $xy^{-1}z$ művelet kompatibilis* **A***-val.*

*A SysPol(***A***) probléma* **NP***-teljes egyébként.*

2. Tétel

Legyen **A** *véges algebra, melynek típushalmazában nincs* **1***-es. Ekkor SysPol(***A***) polinomidejű, ha*

- **A***-nak van egy háromváltozós kompatibilis művelete, mely kiterjeszthető kommutatív csoportok félhálójának $xy^{-1}z$ alakú műveletévé.*

*A SysPol(***A***) probléma* **NP***-teljes egyébként.*