

1. Tíz pénzérmét megvizsgálunk, hogy szabályosak-e vagy ferdek. Legyen A_i az az esemény, hogy a i -edik pénzérme szabályos ($i = 1, \dots, 10$). Mit jelentenek az alábbi események?
 - (a) $A_1 \cup \dots \cup A_{10}$
 - (b) $A_1 \cap \dots \cap A_{10}$
 - (c) $\overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_{10}}$
 - (d) $\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{10}}$
 - (e) $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_{10}}$
 - (f) $\overline{A_1 \cap \dots \cap A_{10}}$
 - (g) $A_1 \cup \overline{A_2} \cup A_3$
 - (h) $(A_8 \cup \overline{A_9}) \cap A_{10}$
 - (i) $A_1 \cup (A_9 \cap A_{10})$
 - (j) $A_1 \cap (\overline{A_9 \cap A_{10}})$
2. Egy kockát ötször egymás után feldobunk. Jelölje B_j azt az eseményt, hogy a j -edik dobás 6-os. Fejezzük ki $B_1, \dots, B_6$ segítségével a következő eseményeket:
 - (a) az ötödik dobáskor kapunk először 6-ost;
 - (b) legalább egyszer 6-ost dobunk;
 - (c) pontosan négyszer dobunk 6-ost;
 - (d) az első és a negyedik dobás 6-os, a többi közül az egyik biztosan nem 6-os!
3. Igazoljuk, hogy $P(A) = 1 - P(\overline{A})$!
4. Igazoljuk, hogy $P(\emptyset) = 0$!
5. Igazoljuk, hogy tetszőleges A eseményre $0 \leq P(A) \leq 1$!
6. Bizonyítsuk be, hogy ha $P(A) \geq 0,8$ és $P(B) \geq 0,8$, akkor $P(A \cap B) \geq 0,6$!
7. A fiúk és a lányok születési valószínűségeit $1/2$ -nek tekintve mennyi annak a valószínűsége, hogy egy hatgyermekes családban három fiú és három lány van? Adjuk meg a Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt!

8. Egy dobozban 998 fehér és két kék golyó van. Kettőt húzunk visszatevéssel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két fehéret húzunk?
9. Bizonyítsuk be, hogy a biztos esemény független önmagától!
10. Bizonyítsuk be, hogy a lehetetlen esemény független önmagától!
11. 25 vizsgatétel között 5 „jó” van. Két tanuló egymás után húz egy-egy tételt visszatevés nélkül. Független-e a következő két esemény: A : az első tanuló jó tételt húzott; B : a második tanuló jó tételt húzott.
12. Két szabályos érmét feldobunk. Ha az egyik dobás fej, mennyi a valószínűsége, hogy a másik írás?
13. Bizonyítsa be a Poincaré-formulát az $n = 2$ és $n = 3$ speciális esetekben!
14. Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

$$(a) F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctg x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(b) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{1+x}, & \text{ha } 0 < x, \end{cases}$$

$$(c) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{[x]}{2}, & \text{ha } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{ha } 2 < x, \end{cases}$$

$$(d) F(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(e) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x^2-1}{x^2+1}, & \text{ha } 0 < x. \end{cases}$$

15. Az alábbi számsorozatok közül melyek alkotnak valószínűségeloszlást?

$$(a) p^k(1-p)^2, \quad \text{ahol } 0 < p < 1, k = 1, 2, \dots,$$

$$(b) \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$(c) p^3, \quad 3p^2(1-p), \quad 3p(1-p)^2, \quad (1-p)^3, \quad \text{ahol } 0 < p < 1.$$

16. Feldobunk egy szabályos kockát. Határozzuk meg a dobott szám eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

17. Két szabályos érme egyik oldalára 0, a másikra 1 van írva. Feldobjuk az érméket. Határozzuk meg a dobott számok összegének eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását! Ábrázoljuk az eloszlásfüggvényt!
18. Két dobókockával dobunk. Legyen ξ a dobott számok különbsége (a nagyobbikból vonjuk ki a kisebbet). Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét és várható értékét!
19. Egy egység hosszú szakaszt felosztjuk két részre egy taláломra kiválasztott pontjával. Legyen ξ a keletkezett nagyobbik rész hossza. Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!
20. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^3}, & \text{ha } 2 < x, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg az a konstans értékét, majd írjuk fel az eloszlásfüggvényt! Számítsuk ki, hogy milyen x érték esetén adódik az $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \geq x\}$ esemény valószínűségére $1/2$!

21. Sűrűségfüggvények-e a következő függvények?

$$(a) \ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$(b) \ f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(c) \ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } 1 < x, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

$$(d) \ f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

22. Létezik-e az $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & \text{ha } 1 < x, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változónak szórása?

23. Az alább adott eloszlásfüggvényekhez tartozó véletlen változónak adjuk meg a várható értékét és szórását, ha létezik!

$$(a) F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{1}{\pi}, & -2 < x \leq 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$$

$$(b) F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

24. Vezessük le és számoljuk ki a $p = 0,2$ paraméterű Bernoulli eloszlású valószínűségi változó szórását!
25. Egy augusztusi éjszaka alatt megfigyelhető csillaghullások száma Poisson-eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy éjszaka egyetlen hullócsillagot sem látunk, 0,1. Várhatóan hány hullócsillag figyelhető meg egy éjszaka?
26. Egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értéke 3, szórása 2. Adjuk meg az eloszlás- és sűrűségfüggvényt! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a változó értéke nagyobb, mint 5?
27. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású, átlagosan 2 évig működik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte? És egy fél éve működő? Mekkora életkort nem ér meg a villanykörték 10%-a?
28. Legyen ξ egy $N(0, \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változó. Mennyi annak a valószínűsége, hogy $\xi < 0$?
29. Egy mérés hibája normális eloszlású, várható értéke 0, szórása 1/2. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hiba -1 és 1 közé esik? Adjuk meg azt az x értéket, amelyre igaz, hogy 1/10 valószínűséggel legalább x a hiba! Adjuk meg azt az y értéket, amelyre igaz, hogy 9/10 valószínűséggel legalább y a hiba!
30. Egy szabályos dobókockát 600-szor feldobunk. Írjuk fel annak a pontos valószínűségét, hogy a dobott 6-osok száma 100 és 105 közé¹ esik, és

¹a határokat is beleértve

közelítsük ezt a valószínűséget a de Moivre-Laplace tétel segítségével! Adjuk meg azt az x értéket, amelyre igaz, hogy $1/4$ valószínűséggel legalább x lesz a dobott 6-osok száma!

31. Legyen $\xi_1, \xi_2 \dots$ egy szabályos kocka független, egymás utáni feldobásával kapott számsorozat. Igazoljuk, hogy a sorozatra érvényes a nagy számok erős törvénye! Mondjuk ki a nagy számok erős törvényét erre a sorozatra!
32. Legyen $\xi_1, \xi_2 \dots$ egy szabályos kocka független, egymás utáni feldobásával kapott számsorozat. Igazoljuk, hogy a sorozatra érvényes a centrális határeloszlástétel! Mondjuk ki a centrális határeloszlástételt erre a sorozatra!
33. Határozzuk meg a Poisson-eloszlás paraméterének maximum-likelihood becslését!
34. Határozzuk meg az exponenciális eloszlás paraméterének maximum-likelihood becslését!
35. Egy kalapban az $1, \dots, N-1, N$ sorszámokkal ellátott golyók vannak (N ismeretlen). Kiválasztunk taláломra n db golyót visszatevéssel; a kapott sorszámok legyenek $x_1, \dots, x_n$. Ezek alapján adjunk maximum-likelihood becslést N -re!
36. Egy céllövő p valószínűséggel talál el egy célpontot egy lövésből. Adjunk maximum-likelihood becslést p -re, ha az első találat a k -adik próbálkozásra következett be!
37. Legyen $F(x) = 1 - (2/x)^\alpha$, $x \geq 2$, ahol $\alpha > 0$ rögzített paraméter. Tekintsünk egy $x_1, \dots, x_n$ mintát, mely az $F(x)$ eloszlásfüggvényhez tartozik. Adjunk maximum-likelihood becslést α -ra! *Útmutató:* Először határozzuk meg a sűrűségfüggvényt!
38. Egy gyermek játékszer fizikai terhelhetőségére elvégzett próbatesztek a következő mérési eredményekre vezettek: 40, 45, 40, 42, 36 (kg). Az adatok szórása ismeretlen.
 - (a) Adjuk meg a terhelhetőség empirikus eloszlásfüggvényét!
 - (b) Adjunk becslést a terhelhetőség várható értékére és szórására!

- (c) Tudjuk, hogy a terhelhetőség normális eloszlást mutat. Adjunk meg egy olyan intervallumot, amely a várható értéket 0,95 valószínűséggel tartalmazza.
- (d) 10%-os szignifikancia szinten teszteljük azt a nullhipotézist, hogy a terhelhetőség várható értéke 40 kg!
39. Két független populációban a következő testsúlyokat mérték: 1. 62, 56, 67, 67; 2. 61, 57, 64, 68, 68. Adjunk meg egy olyan intervallumot, amely a két populációból vett testsúlyok várható különbségét 99% valószínűséggel tartalmazza! 5%-os szignifikancia szinten teszteljük azt a nullhipotézist, hogy a várható értékek megegyeznek a két populációban!
40. Diákok egy csoportjának megmérték a testsúlyát és magasságát:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
testsúly (kg)	90	45	70	45	40	54	60	53	53	58	56	78
magasság (cm)	175	160	180	160	157	165	168	161	157	175	158	187

Jellemezzük a testsúly és a magasság kapcsolatának szorosságát!