

A sztochasztika alapjai

Előadásvázlat

Viharos László

Tartalomjegyzék

1. A valószínűségszámítás alapjai	4
1.1. Műveletek eseményekkel	4
1.2. Valószínűség	5
1.3. Diszkrét valószínűségi mező	6
1.4. Klasszikus valószínűségi mező	6
1.5. Geometriai valószínűségi mező	7
1.6. Buffon-féle tűprobléma (1777)	7
2. Feltételes valószínűség	10
3. Események függetlensége	13
4. Véletlen változók	15
4.1. Diszkrét véletlen változók	15
4.2. Folytonos véletlen változók	16
4.3. Véletlen vektorváltozók	17
4.4. Véletlen változók függetlensége	19
4.5. Független véletlen változók összegének eloszlása	21
5. Véletlen változók jellemzői	22
5.1. Várható érték	22
5.2. A várható érték tulajdonságai	22
5.3. Szórás, kovariancia, korreláció	23
5.4. Kvantilisek	28
6. Lineáris regresszió	30
7. Nevezetes valószínűségeloszlások	31
7.1. A Bernoulli-eloszlás	31
7.2. A binomiális eloszlás	31
7.3. A geometriai eloszlás	32
7.4. A Poisson-eloszlás	32
7.5. A hipergeometrikus eloszlás	33
7.6. A normális eloszlás (Gauss-eloszlás)	33
7.7. Az exponenciális eloszlás	35
7.8. Az egyenletes eloszlás	36
8. Feltételes eloszlás, feltételes várható érték	37
9. Véletlen változók konvergenciája	40

9.1. Markov és Csebisev egyenlőtlenségei	40
9.2. Nagy számok törvényei	40
9.3. Centrális határeloszlás-tétel	42
10. Statisztikai alapfogalmak	45
10.1. Alapstatisztikák	45
10.2. Paraméterbecslés	46
10.3. Torzítatlanság	46
10.4. Konzisztencia	47
10.5. Maximum likelihood módszer	47
10.6. Momentumok módszere	49
10.7. Lineáris regresszió	49
11. Konfidenciaintervallumok	51
11.1. Konfidenciaintervallum normális eloszlás várható értékére is- mert szórás esetén	51
11.2. Konfidenciaintervallum normális eloszlás várható értékére is- meretlen szórás esetén	51
12. Statisztikai próbák	53
12.1. u -próba	53
12.2. t -próba	53

1. A valószínűségszámítás alapjai

Véletlen (valószínűségi) kísérlet: azonos körülmények között tetszőlegesen sokszor megismételhető megfigyelés, melynek többféle kimenetele lehet, és a figyelembe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen a kimenetet.

Elemi esemény: a véletlen kísérlet egy lehetséges kimenetele, jele ω .

Eseménytér: a véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmaza, jele Ω .

Esemény: olyan a kísérlettel kapcsolatban tett állítás, melynek igaz vagy hamis volta eldönthető a kísérlet lefolytatása után. Minden esemény azonosítható az eseménytér valamely részhalmazával. Az eseményeket az $A, B, C, \dots$ betűkkel jelöljük.

1.1. Műveletek eseményekkel

Események összege: $A \cup B$; a két esemény közül legalább az egyik bekövetkezik (A vagy B).

Események szorzata: $A \cap B$; mindkét esemény bekövetkezik (A és B).

Események különbsége: $A - B$; A bekövetkezik de B nem.

Esemény komplementere: $A^c = \Omega - A$ az ellentett esemény.

A vizsgált események rendszerét $\mathcal{A}$ -val jelöljük. Ez Ω részhalmazainak egy olyan rendszere, melyre teljesülnek a következők:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- valahányszor $A \in \mathcal{A}$, mindannyiszor $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz a halmazrendszer zárt a komplementerképzésre);
- valahányszor $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, mindannyiszor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ (azaz a halmazrendszer zárt a megszámlálható unióképzésre).

Az $\mathcal{A}$ halmazrendszert σ -algebrának nevezzük.

Példa. Háromszor földobunk egy pénzérmét. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{(F, F, F), (F, F, I), (F, I, F), (F, I, I), \\ (I, F, F), (I, F, I), (I, I, F), (I, I, I)\},$$

azaz $|\Omega| = 2^3 = 8$ darab elemi esemény van, és $2^{|\Omega|} = 2^8 = 256$ az összes esemény száma.

Legyen $A_i = \{\text{az } i\text{-edik dobás fej}\}$, $i = 1, 2, 3$. Ekkor

$$A_1 = \{(F, F, F), (F, F, I), (F, I, F), (F, I, I)\}.$$

$$B = \{\text{csak az 1. fej}\} = \{(F, I, I)\} = A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c$$

$$C = \{\text{egyik sem fej}\} = \{(I, I, I)\} = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$$

1.2. Valószínűség

1.1. Definíció. Egy $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ függvény *valószínűség* az $\mathcal{A}$ eseményalgebrán, ha

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
- ha az $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ események (páronként) diszjunktak, akkor

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

A fenti tulajdonságokkal rendelkező $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ hármas **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

1.2. Állítás (A valószínűség tulajdonságai). *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ események.*

(i) Ha $A_i \cap A_j = \emptyset$, minden $i \neq j$ párra, akkor

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).$$

(ii) $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

(iii) $A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(B - A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$, és $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.

(iv) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

(v) *Szita formula:*

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

(vi) $\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

(vii) $\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n)$.

(viii) Ha A_n monoton növekvő eseménysorozat, azaz $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$.

(ix) Ha A_n monoton csökkenő eseménysorozat, azaz $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\cap_{k=1}^{\infty} A_k)$.

(x) $\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)$ (megszámlálható szubadditivitás).

1.3. Diszkrét valószínűségi mező

Egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező *diszkrét*, ha Ω véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz, és $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$. Legyenek $\omega_1, \omega_2, \dots$ a diszkrét valószínűségi mező elemi eseményei: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$. Mivel tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén

$$A = \bigcup_{i: \omega_i \in A} \{\omega_i\},$$

ezért diszkrét valószínűségi mezőben

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} \mathbf{P}(\{\omega_i\}).$$

Továbbá igaz, hogy az elemi események valószínűségeinek összege 1, hiszen

$$\sum_i \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_i \{\omega_i\}\right) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

1.4. Klasszikus valószínűségi mező

Egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező *klasszikus*, ha Ω véges halmaz, és minden elemi esemény egyformán valószínű.

Klasszikus valószínűségi mező esetén bármely A eseményre

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}.$$

Példa. *Születésnap probléma.* Mekkora a valószínűsége annak, hogy n ember között van két olyan, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapjuk?

Megoldás.

$$\begin{aligned} f(n) &= \mathbf{P}(n \text{ ember között van } 2, \text{ akiknek ugyanazon} \\ &\quad \text{a napon van a születésnapja}) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\text{mindenkinek különböző napon van a születésnapja}) \\ &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}. \end{aligned}$$

$$f(22) \approx 0,4757 < 1/2 < 0,5073 \approx f(23).$$

Példa. Egy szabályos pénzérmét feldobunk legalább kétszer. Mennyi annak a valószínűsége, hogy kapunk egy olyan fej-írás sorozatot, amely oda-vissza olvasva ugyanaz?

Megoldás. Ha a k . dobásnál következik be először a kívánt sorozat, akkor az csak a következő kettő valamelyike lehet:

1. $IFF \dots FI$ (az első írás, utána $k - 2$ db fej, a végén ismét egy írás),
2. $FII \dots IF$.

Jelölje A_k azt az eseményt, hogy a k . dobásnál ezek közül valamelyiket megkapjuk. A k hosszúságú dobássorozatokat előállító kísérlet leírható klasszikus valószínűségi mezővel. Így

$$\mathbf{P}(A_k) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{2}{2^k}.$$

$A_2, A_3, A_4, \dots$ egymást páronként kizáró események. A keresett valószínűség

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots) &= \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) + \mathbf{P}(A_4) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (1/2)} = 1. \end{aligned}$$

1.5. Geometriai valószínűségi mező

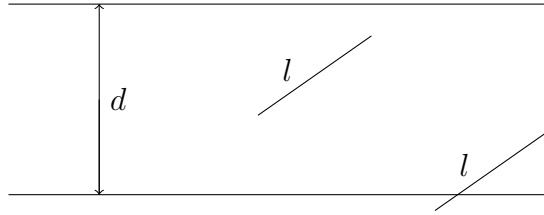
Geometriai valószínűségi mező esetén a kísérlettel kapcsolatos események egy H geometriai alakzat részhalmazainak feleltethetők meg. Ekkor a lehetséges kimenetek halmaza $\Omega = H \subset \mathbb{R}^n$, aminek a mértéke (hossza, területe, térfogata) pozitív és véges. Feltesszük, hogy egy $A \subset H$ esemény valószínűsége arányos a halmaz mértékével, azaz

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(H)},$$

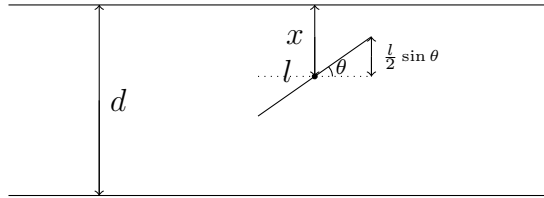
ahol λ az n -dimenziós mérték (hossz, terület, térfogat).

1.6. Buffon-féle tűprobléma (1777)

Egy síklapon egymástól egyenlő d távolságra párhuzamos egyeneseket húzunk. Leejtünk a síkra egy l hosszúságú tűt. Feltesszük, hogy $l < d$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a tű átmetsz egy egyenest?



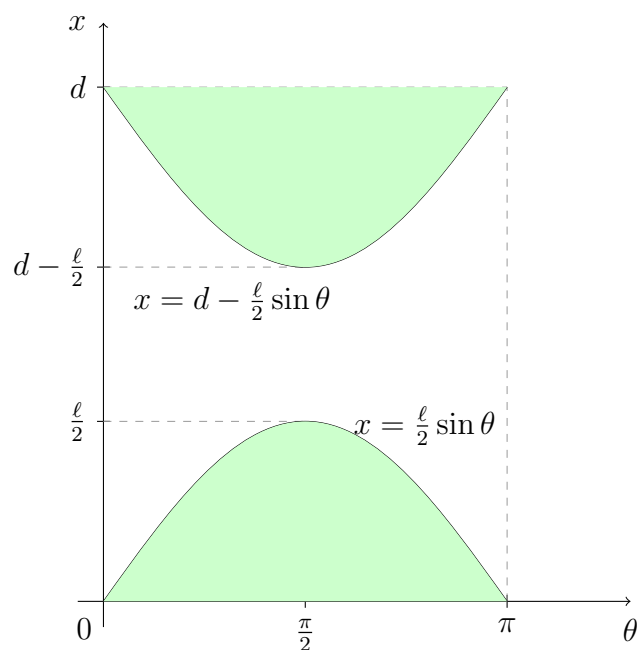
Megoldás. Legyen x a tű felezőpontjának és a hozzá legközelebb eső, felette levő egyenesnek a távolsága ($0 \leq x \leq d$). Jelölje θ a tű vízszintessel bezárt szögét ($0 \leq \theta \leq \pi$). A tű nem metszi a felette levő egyenest, ha $\frac{l}{2} \sin \theta < x$, ellenkező esetben metszi azt. Az alsó egyenest pedig akkor nem metszi a tű, ha $\frac{l}{2} \sin \theta < d - x$.



Ezek alapján a tű akkor metszi a felette vagy az alatta levő egyenest, ha $0 \leq x \leq \frac{l}{2} \sin \theta$, vagy $0 \leq d - x \leq \frac{l}{2} \sin \theta$.

A leejtett tű helyzete megadható a $[0, d] \times [0, \pi]$ téglalap megfelelő (x, θ) pontjával. Feltesszük, hogy a tű véletlen leejtésekor a téglalapnak egy olyan véletlen pontját kapjuk meg, melyre teljesül az egyenletességi hipotézis.

A kedvező, metszéshez tartozó terület a Buffon-féle problémánál:



A metszés valószínűsége

$$p = \frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}} = \frac{2 \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \theta d\theta}{\pi d} = \frac{l[-\cos \theta]_0^\pi}{\pi d} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Ejtsük le n -szer a tűt, legyen K_n a metszések száma az n kísérletből. A $p \approx \frac{K_n}{n}$ közelítés alapján π -re a következő becslés adható:

$$\pi \approx \frac{2l}{\frac{K_n}{n}d}.$$

2. Feltételes valószínűség

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, és ezen A, B események, és tegyük föl, hogy $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor az A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Ha annyi információnk van a véletlen kísérletről, hogy a B esemény bekövetkezett, akkor az A esemény valószínűsége $\mathbf{P}(A|B)$ (más jelöléssel: $\mathbf{P}_B(A)$).

A feltételes valószínűségre érvényesek a valószínűség alaptulajdonságai:

- $0 \leq \mathbf{P}_B(A) \leq 1$,
- $\mathbf{P}_B(\Omega) = 1$,
- Ha $A_1, A_2, \dots$ diszjunkt események, akkor $\mathbf{P}_B(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}_B(A_i)$.

2.1. Tétel (Bayes-formula). *Legyenek A és B olyan események, hogy $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor*

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

2.2. Definíció. A $B_1, B_2, \dots$ események **teljes eseményrendszert** alkotnak, ha

- minden $i \neq j$ párra $B_i \cap B_j = \emptyset$;
- $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$.

2.3. Tétel (Teljes valószínűség tétele). *Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden n -re. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n).$$

2.4. Tétel (Bayes-tétel). *Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden n -re. Ekkor tetszőleges pozitív valószínűségű $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, tetszőleges k -ra*

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n)}.$$

2.5. Tétel (Szorzási szabály). *Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ tetszőleges olyan események, melyekre $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Ekkor*

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Példa. Egy családban van két gyerek. Tudjuk, hogy az egyik gyerek fiú. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a másik gyerek lány?

1. *Megoldás.* Jelölje F azt, hogy egy adott gyerek fiú, L pedig azt, hogy lány. A születési sorrendnek megfelelően az összes eset: FL, LF, FF (a feltétel figyelembevételével). Kedvező esetek: FL, LF. A keresett valószínűség: $\frac{2}{3}$.

2. *Megoldás.* Jelölje A azt az eseményt, hogy az egyik gyerek fiú, és B azt az eseményt, hogy a másik gyerek lány. Összes eset: FL, LF, FF, LL (a feltételt nem vesszük figyelembe). $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{2}{4}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{4}$,

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

Példa. (Forrás: Schultz János, Tarcsay Tamás: Matematika 11-12. - emelt szint, Maxim, 2012)

Ádám, Beáta és Zille egy repülőgéppel érkeznek. Ádám 3, Beáta 4, Zille 5 csomagot adott fel. Most sorban állnak a csomagokért. Mennyi annak a valószínűsége, hogy elsőnek Ádám, Másodiknak Beáta, Harmadiknak Zille csomagja érkezik meg a futószalagon?

Megoldás. Legyenek A_1, A_2, A_3 a következő események:

A_1 : Elsőnek Ádám csomagja érkezik meg a futószalagon.

A_2 : Másodiknak Beáta csomagja érkezik meg a futószalagon.

A_3 : Harmadiknak Zille csomagja érkezik meg a futószalagon.

Alkalmazzuk a szorzási szabályt:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_1) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{22}.$$

Példa. (Forrás: Schultz János, Tarcsay Tamás: Matematika 11-12. - emelt szint, Maxim, 2012)

Egy őrző-védő cég három tagja 24 órás váltásban látja el egy raktárbázis folyamatos őrzését. Lehel 3 napot, Norbert és Róbert 2-2 napot dolgozik hetente. Lehel az esetek 90 százalékában, elfogja a betörőket, Norbert ezt 95 százalékban tudja produkálni, míg Róbert „elfogási százaléka” 92.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott időpontban érkező betörőt nem sikerül elkapni?

b) Tegnap történt egy elfogás. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Lehel volt eredményes?

Megoldás. Jelölje B_1 , B_2 , illetve B_3 azt az eseményt, hogy egy betörés esetén Lehel, Norbert illetve Róbert van szolgálatban. Jelölje továbbá A azt az eseményt, hogy egy betörőt elkapnak.

a) $\mathbf{P}(B_1) = 3/7$, $\mathbf{P}(B_2) = 2/7$, $\mathbf{P}(B_3) = 2/7$. A teljes valószínűség tétele szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A^c) &= \mathbf{P}(A^c|B_1)\mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(A^c|B_2)\mathbf{P}(B_2) + \mathbf{P}(A^c|B_3)\mathbf{P}(B_3) \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{7} + \frac{8}{100} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{25}\end{aligned}$$

b) A Bayes-formula alapján adódik, hogy

$$\mathbf{P}(B_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_1)\mathbf{P}(B_1)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\frac{9}{10} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{23}{25}} = 0,419.$$

3. Események függetlensége

Két esemény hétköznapi értelemben független, ha az egyik esemény bekövetkezése nem befolyásolja a másik esemény bekövetkezését. Az A és B események matematikailag függetlenek, ha $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_B(A)$, $\mathbf{P}(B) > 0$, azaz a B esemény nem befolyásolja az A esemény valószínűségét. Ebből adódik, hogy $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

3.1. Definíció. Az A és B események **függetlenek**, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

3.2. Definíció (Több esemény függetlensége). Az $A_1, A_2, \dots$ események **páronként függetlenek**, ha közülük kiválasztva tetszőleges két különböző A_i és A_j eseményt azok függetlenek egymástól. Az $A_1, A_2, \dots$ események **teljesen függetlenek**, ha közülük kiválasztva tetszőleges sok különböző $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ eseményt azokra

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \dots \mathbf{P}(A_{i_r}).$$

Példa. (Forrás: Denkinger Géza: valószínűségszámítási gyakorlatok) Az ötöslottón kitöltünk két szelvényt egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy nyerünk?

Megoldás. Annak a valószínűsége, hogy egy szelvénnel nem nyerünk

$$p = \frac{\binom{85}{5} + \binom{5}{1} \binom{85}{4}}{\binom{90}{5}}.$$

Annak a valószínűsége, hogy két szelvénnel nem nyerünk p^2 . Hogy legalább az egyiket nyerünk, annak a valószínűsége $1 - p^2$.

Példa. Feldobunk egy szabályos kockát n -szer.

- (a) Mennyi annak az esélye, hogy az első k dobás hatos, a többi dobás nem hatos?
- (b) Mennyi annak az esélye, hogy pontosan k -szor dobunk hatost?
- (c) Mennyi annak az esélye, hogy az első dobás hatos és pontosan k -szor dobunk hatost?
- (d) Feltéve, hogy pontosan k -szor dobtunk hatost, mennyi annak az esélye, hogy az első dobás hatos?
- (e) Mikor lesznek függetlenek az A és B események?

Megoldás.

- (a) Az egyes dobások függetlenek egymástól, ezért a hatos és nem hatos dobások valószínűségeit összeszorozzuk.

$$\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

- (b) Legyen B az az esemény, hogy pontosan k -szor dobunk hatost. $\binom{n}{k}$ féleképpen választhatjuk ki a hatosok helyét az n hosszú dobássorozatból.

$$\mathbf{P}(B) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

- (c) Legyen A az az esemény, hogy az első dobás hatos. $\binom{n-1}{k-1}$ féleképpen választhatjuk ki $k-1$ db hatos helyét a $2, 3, \dots, n-1$ dobáspozíciókból.

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

- (d)

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}}{\binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}} = \frac{k}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

- (e)

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B),$$

$$\binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} = \frac{1}{6} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}.$$

Innen kapjuk, hogy $k/n = 1/6$ esetén lesznek függetlenek az A és B események.

4. Véletlen változók

Tekintsünk egy kísérletet, melyet az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezővel írunk le. Tekintsünk egy $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ leképezést és legyen

$$A_x = \{ \omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x \}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.1. Definíció. Az

$$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

leképezést **véletlen változónak** nevezzük, ha A_x esemény $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén ($A_x \in \mathcal{A}, x \in \mathbb{R}$).

Ha a kísérlet elvégzésekor bekövetkezik egy ω elemi esemény, akkor a ξ leképezés produkál egy $\xi(\omega)$ **véletlen számot**.

4.2. Definíció. Egy ξ véletlen változó eloszlásfüggvénye az

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) := \mathbf{P}(A_x), \quad x \in \mathbb{R},$$

függvény.

A definícióból adódik, hogy $a < b$ esetén $\mathbf{P}(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

4.3. Tétel (Az eloszlásfüggvény tulajdonságai).

1. Az eloszlásfüggvény az egész számegyenesen monoton nemcsökkenő.
2. Az eloszlásfüggvény a számegyenes minden pontjában balról folytonos.
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

4.1. Diszkrét véletlen változók

4.4. Definíció. A ξ véletlen változó **diszkrét eloszlású**, ha értékkészlete megszámlálható.

Ha $x_1, x_2, \dots$ egy diszkrét változó lehetséges értékei, akkor a $p_i = \mathbf{P}(\xi = x_i)$, $i = 1, 2, \dots$ valószínűségek összessége a változó valószínűségeloszlása. A $\{p_i\}$ valószínűségeloszlásra igaz, hogy $p_1 + p_2 + \dots = 1$.

Egy diszkrét véletlen változó eloszlásfüggvénye tiszta ugró függvény, az ugrás helyei a véletlen változó lehetséges értékeinél vannak, az ugrás nagysága az adott érték valószínűsége:

$$F(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i.$$

Példa. Egy pénzérmét dobálunk addig, amíg egy fej (F) és egy írás (I) egymás után be nem következik. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ez a k -adik dobásnál következik be először?

Legyen ξ a dobások száma. ξ lehetséges értékei: $2, 3, \dots$. A $\mathbf{P}(\xi = k)$, $k = 2, 3, \dots$ valószínűségeket kell meghatározni.

Kedvező k hosszúságú dobássorozatok: $I \dots IF \dots FI$.

Másképpen: $I^j F^{k-j-1} I$, $j = 0, 1, 2, \dots, k-2$.

Így

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{k-1}{2^k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Belátható, hogy $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{2^k} = 1$, azaz 1 annak a valószínűsége, hogy valamikor kapunk egy FI „szót”.

4.2. Folytonos véletlen változók

4.5. Definíció. A ξ véletlen változó *folytonos eloszlású*, ha létezik olyan f függvény, melyre

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Az f függvényt sűrűségfüggvénynek nevezzük. Egy folytonos ξ véletlen változó értékkészlete a következő halmaz: $R_\xi = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$. A definíció alapján adódik, hogy tetszőleges $a < b$ valós számok esetén

$$\mathbf{P}(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

4.6. Tétel (A sűrűségfüggvény tulajdonságai).

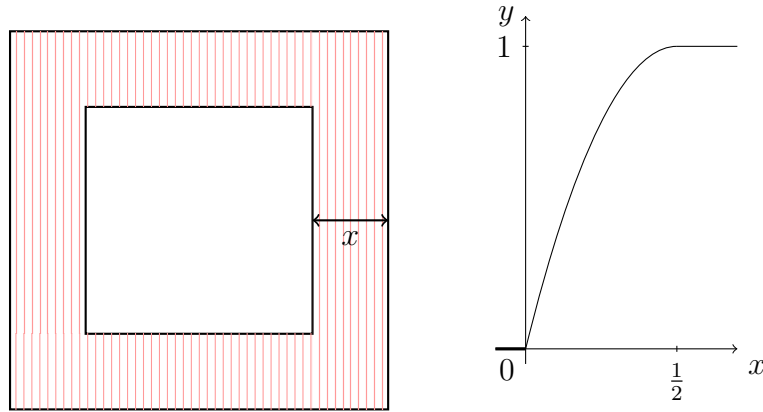
- $f \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$.

Példa. Egységnégyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot. Adjuk meg a pont a négyzet határától vett távolságának eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

Jelölje ξ a távolságot. Ekkor geometriai valószínűségi mezőn vagyunk, $\Omega = [0, 1]^2$, és $\mathbf{P}(A) = \lambda(A)$, ahol λ a terület.

Az ábra alapján kapjuk, hogy az $A_x = \{\xi \leq x\}$ ($0 \leq x \leq 1/2$) eseményhez tartozó kedvező terület $4x(1-x)$. Így

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 4x(1-x), & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1, & \text{ha } x > 1/2. \end{cases}$$



1. ábra. A jó terület és az eloszlásfüggvény

A megfelelő sűrűségfüggvény

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 4 - 8x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

4.3. Véletlen vektorváltozók

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ valamely közös $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett véletlen változók. Ekkor a $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ vektort *véletlen vektorváltozónak* nevezzük. A $\underline{\xi}$ vektorváltozó eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= \mathbf{P}(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) \\ &:= \mathbf{P}(\{\xi_1 < x_1\} \cap \{\xi_2 < x_2\} \cap \dots \cap \{\xi_n < x_n\}), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

A ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, változók eloszlásait a $\underline{\xi}$ vektorváltozó marginális- vagy peremeloszlásainak nevezzük.

4.7. Tétel. A ξ_i változó eloszlásfüggvénye

$$F_i(x) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty, \dots, x_{i-1} \rightarrow \infty, x_{i+1} \rightarrow \infty, \dots, x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

A ξ véletlen vektorváltozó *diszkrét eloszlású*, ha értékkészlete megszámlálható.

A ξ véletlen vektorváltozó *folytonos eloszlású*, ha létezik olyan $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n.$$

Itt az integrálást először y_n szerint végezzük el, utána y_2 szerint, végül y_1 szerint integrálunk:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{-\infty}^{x_2} \left(\dots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_n \dots \right) dy_2 \right) dy_1.$$

Az $x_1 \rightarrow \infty, \dots, x_n \rightarrow \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = 1.$$

Az egyváltozós eset analógiájára a sűrűségfüggvényt az eloszlásfüggvény deriválásával kapjuk meg:

$$\frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n).$$

Mivel F minden változójában monoton nemcsökkenő, ezért $f \geq 0$. Tetszőleges $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$, valós számok esetén

$$\mathbf{P}(a_1 \leq \xi_1 < b_1, \dots, a_n \leq \xi_n < b_n) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_n \dots dy_1.$$

Tetszőleges $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel halmaz esetén

$$\mathbf{P}((\xi_1, \dots, \xi_n) \in B) = \int \dots \int_B f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n.$$

4.8. Tétel. Legyen $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ folytonos eloszlású vektorváltozó f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor az ξ_i , $i = 1, \dots$, változók is folytonos eloszlásúak, és ξ_i sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi_i}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_{i-1} dy_{i+1} \dots dy_n.$$

Speciális esetként vizsgáljuk a kétdimenziós vektorváltozókat.
 Legyen (ξ, η) eloszlásfüggvénye $F(x, y)$. Ekkor ξ eloszlásfüggvénye
 $F_\xi(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$, továbbá η eloszlásfüggvénye $F_\eta(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$.
 Tetszőleges $a_1 < b_1, a_2 < b_2$, valós számok esetén

$$\mathbf{P}(a_1 \leq \xi < b_1, a_2 \leq \eta < b_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2).$$

Ha ξ és η diszkrét véletlen változók $x_1, x_2, \dots$, illetve $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor a

$$\mathbf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j), \quad i, j = 1, 2, \dots$$

valószínűségek összessége a (ξ, η) vektor eloszlása. Ennek felhasználásával ξ és η eloszlása az alábbi formulákkal írható fel:

$$\mathbf{P}(\xi = x_i) = \sum_j \mathbf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j), \quad \mathbf{P}(\eta = y_j) = \sum_i \mathbf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j).$$

Ha (ξ, η) folytonos eloszlású vektorváltozó $f(x, y)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor ξ és η is folytonos eloszlásúak

$$f_\xi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) dv$$

illetve

$$f_\eta(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) du$$

sűrűségfüggvényekkel.

4.4. Véletlen változók függetlensége

Feltesszük, hogy a fejezetben szereplő összes véletlen változó egy közös $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn van értelmezve.

4.9. Definíció. A $\xi_1, \dots, \xi_n$ véletlen változók *teljesen függetlenek*, ha tetszőleges $x_1, \dots, x_n$ valós számokra

$$\mathbf{P}(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = \mathbf{P}(\xi_1 < x_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(\xi_n < x_n).$$

A függetlenség a következőképpen írható fel az eloszlásfüggvények segítségével:

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n).$$

Belátható, hogy $\xi_1, \dots, \xi_n$ pontosan akkor teljesen függetlenek, ha tetszőleges $B_1, \dots, B_n$ szép halmazok (pl. intervallumok) esetén

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = \mathbf{P}(\xi_1 \in B_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(\xi_n \in B_n).$$

4.10. Tétel. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ teljesen független véletlen változók. Ha közülük tetszőleges módon kiválasztunk $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_r}$ ($r \geq 2$) különböző változókat, akkor ezek is teljesen függetlenek.

Megmutatható, hogy ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ teljesen függetlenek és $h_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, „jó tulajdonságú” függvények (pl. folytonosak), akkor $h_1(\xi_1), \dots, h_n(\xi_n)$ is teljesen függetlenek.

4.11. Definíció. Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots$ véletlen változók végtelen sorozata. A $\xi_1, \xi_2, \dots$ változók teljesen függetlenek, ha $\forall n \geq 2$ -re $\xi_1, \dots, \xi_n$ teljesen függetlenek.

4.12. Definíció. A $\xi_1, \xi_2, \dots$ véletlen változók (véges vagy végtelen sok) páronként függetlenek, ha tetszőleges két ξ_i, ξ_j , $i \neq j$, változó független.

4.13. Tétel. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ diszkrét véletlen változók, és legyenek $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots$, a ξ_i változó lehetséges értékei, $i = 1, 2, \dots$. Ekkor a $\xi_1, \dots, \xi_n$ változók akkor és csak akkor teljesen függetlenek, ha

$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \dots, \xi_n = x_{i_n}^{(n)}) = \mathbf{P}(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(\xi_n = x_{i_n}^{(n)}).$$

tetszőleges $i_1, \dots, i_n$ indexek esetén.

4.14. Tétel. Legyen $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ folytonos eloszlású véletlen vektorváltozó $f(x_1, \dots, x_n)$ sűrűségfüggvénnyel. Legyen továbbá f_{ξ_i} a ξ_i változó sűrűségfüggvénye. Ekkor $\xi_1, \dots, \xi_n$ pontosan akkor függetlenek, ha

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{\xi_n}(x_n) \quad (1)$$

tetszőleges $x_1, \dots, x_n$ valós számok esetén.

A 4.14. Tétel $n = 2$ esetén a következőképpen igazolható. Ha fennáll (1), akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2) &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{-\infty}^{x_2} f_{\xi_1}(t_1) f_{\xi_2}(t_2) dt_2 \right) dt_1 \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} f_{\xi_1}(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} f_{\xi_2}(t_2) dt_2 = \mathbf{P}(\xi_1 < x_1) \mathbf{P}(\xi_2 < x_2). \end{aligned}$$

Fordítva: tegyük fel, hogy ξ_1 és ξ_2 függetlenek. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2) &= \mathbf{P}(\xi_1 < x_1) \mathbf{P}(\xi_2 < x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} f_{\xi_1}(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} f_{\xi_2}(t_2) dt_2 \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{\xi_1}(t_1) f_{\xi_2}(t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

tehát $f_{\xi_1}(t_1) f_{\xi_2}(t_2)$ a (ξ_1, ξ_2) vektorváltozó sűrűségfüggvénye.

4.15. Tétel. A $\xi \equiv c$ konstans véletlen változó minden véletlen változótól független.

4.5. Független véletlen változók összegének eloszlása

Ha ξ és η nemnegatív egész értékű független véletlen változók, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\xi + \eta = k) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=0}^k \{\xi = i, \eta = k - i\}\right) \\ &= \sum_{i=0}^k \mathbf{P}(\xi = i, \eta = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k \mathbf{P}(\xi = i) \mathbf{P}(\eta = k - i), \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Azt mondjuk, hogy a $\xi + \eta$ véletlen változó eloszlása a ξ és η véletlen változók eloszlásainak konvolúciója.

Ha ξ és η független, folytonos eloszlású véletlen változók $f_\xi(x)$ illetve $f_\eta(y)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor $\xi + \eta$ is folytonos eloszlású

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(y) f_\eta(x - y) dy$$

sűrűségfüggvénnyel. Az $f_{\xi+\eta}$ függvényt az f_ξ és f_η sűrűségfüggvények konvolúciójának nevezzük.

5. Véletlen változók jellemzői

5.1. Várható érték

5.1. Definíció. Legyen ξ diszkrét eloszlású véletlen változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel. Ekkor ξ *várható értékén* az $\mathbf{E}(\xi) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i)$ összeget értjük, feltéve hogy $\sum_i |x_i| \mathbf{P}(\xi = x_i) < \infty$.

5.2. Definíció. Ha ξ folytonos eloszlású $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor ξ *várható értékén* az $\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ mennyiséget értjük, feltéve, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$.

Figyeljük meg a ξ véletlen változó értékét n -szer egymástól függetlenül, a kapott minta legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$. Sok megfigyelés esetén az átlaguk a várható érték körül stabilizálódik:

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \approx \mathbf{E}(\xi).$$

5.2. A várható érték tulajdonságai

Tekintsünk $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezéseket, és legyenek ξ és η véletlen változók, melyekre az alábbi állításokban szereplő várható értékek léteznek.

5.3. Állítás. Legyen ξ diszkrét eloszlású véletlen változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, és legyen η diszkrét eloszlású véletlen változó $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel. Ekkor

$$\mathbf{E}(g(\xi)) = \sum_i g(x_i) \mathbf{P}(\xi = x_i)$$

és

$$\mathbf{E}(h(\xi, \eta)) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) \mathbf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j).$$

5.4. Állítás. Legyen ξ folytonos eloszlású véletlen változó $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

$$\mathbf{E}(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

Ha (ξ, η) folytonos eloszlású véletlen vektorváltozó $f(x, y)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathbf{E}(h(\xi, \eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f(x, y) dx dy.$$

5.5. Állítás.

- Ha $\xi \equiv c$ (konstans véletlen változó), akkor $\mathbf{E}(\xi) = c$.
- Ha ξ várható értéke létezik és c egy konstans, akkor $c\xi$ várható értéke is létezik és $\mathbf{E}(c\xi) = c\mathbf{E}(\xi)$.
- Ha a $\xi_1, \dots, \xi_n$ véletlen változóknak létezik a várható értéke, akkor a $\xi_1 + \dots + \xi_n$ változónak is létezik a várható értéke és

$$\mathbf{E}(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \mathbf{E}(\xi_1) + \dots + \mathbf{E}(\xi_n).$$

- Ha a $\xi_1, \dots, \xi_n$ változóknak létezik a várható értéke és $\xi_1, \dots, \xi_n$ teljesen függetlenek, akkor a $\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n$ változónak is létezik a várható értéke és

$$\mathbf{E}(\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n) = \mathbf{E}(\xi_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{E}(\xi_n).$$

- Ha ξ és η várható értéke létezik és $\xi \geq \eta$, akkor $\mathbf{E}(\xi) \geq \mathbf{E}(\eta)$.
- Ha $m \leq \xi \leq M$, ahol $m < M$ konstansok, akkor $m \leq \mathbf{E}(\xi) \leq M$.
- Ha $\mathbf{E}(\xi)$ létezik, akkor $|\mathbf{E}(\xi)| \leq \mathbf{E}(|\xi|)$.
- (Bunyakovszkij - Schwarz egyenlőtlenség) Ha $\mathbf{E}(\xi^2)$ és $\mathbf{E}(\eta^2)$ léteznek, akkor $\mathbf{E}(\xi\eta)$ is létezik, és

$$|\mathbf{E}(\xi\eta)| \leq \sqrt{\mathbf{E}(\xi^2) \mathbf{E}(\eta^2)}.$$

5.3. Szórás, kovariancia, korreláció

5.6. Definíció. Az ξ véletlen változó k -adik momentuma $\mathbf{E}(\xi^k)$, és k -adik centrális momentuma $\mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}(\xi))^k]$, $k = 1, 2, \dots$

5.7. Definíció. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{E}(\xi)$ és $\mathbf{E}((\xi - \mathbf{E}(\xi))^2)$ várható értékek léteznek. Ekkor ξ szórásán a

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathbf{E}((\xi - \mathbf{E}(\xi))^2)}$$

menynységet értjük.

A szórás változónak a várható értékétől való átlagos eltérését méri.

5.8. Tétel.

- $\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{E}(\xi^2) - \mathbf{E}^2(\xi)$.

- $\mathbf{D}(\xi) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\xi = \mathbf{E}(\xi)$, azaz ξ a konstans véletlen változó.
- Tetszőleges a és b konstansok esetén $\mathbf{D}(a\xi + b) = |a| \mathbf{D}(\xi)$.

Ha ξ diszkrét eloszlású véletlen változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \sum_i x_i^2 \mathbf{P}(\xi = x_i) - \left(\sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i) \right)^2.$$

Ha ξ folytonos eloszlású véletlen változó $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \right)^2.$$

5.9. Tétel. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ páronként független véletlen változók, melyeknek létezik a szórása. Ekkor a $\xi_1 + \dots + \xi_n$ változónak is létezik a szórása és

$$\mathbf{D}^2(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \mathbf{D}^2(\xi_1) + \dots + \mathbf{D}^2(\xi_n).$$

Példa. Anna két mozijegyet kap egy vetítésre, ezért egymás után felhívja a három barátnőjét, hogy kísérőt szerezzen maga mellé. Egészen addig hívja fel őket egymás után, míg valaki bele nem egyezik, hogy elkíséri, vagy míg el nem fogynak a barátnők. A három barátnője egymástól függetlenül 0,4 valószínűséggel mond igent Anna meghívására. Adjuk meg a lefolytatott telefonhívások számának valószínűségeloszlását várható értékét és szórását! Mennyi annak az esélye, hogy Annának legfeljebb két barátnőt kell felhívnia? Írjuk fel formulával és ábrázoljuk a ξ változó eloszlásfüggvényét!

Megoldás. Legyen ξ a lefolytatott telefonhívások száma. A ξ változó lehetséges értékei 1,2,3.

Valószínűségeloszlás:

$$\mathbf{P}(\xi = 1) = \mathbf{P}(\text{az 1. barátnő igent mond}) = 0,4,$$

$$\mathbf{P}(\xi = 2) = \mathbf{P}(\text{az 1. barátnő nemet mond, a 2. igent mond}) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi = 3) &= \mathbf{P}(1. \text{ nem, } 2. \text{ nem, } 3. \text{ igen}) + \mathbf{P}(1. \text{ nem, } 2. \text{ nem, } 3. \text{ nem}) \\ &= 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,36. \end{aligned}$$

Annak az esélye, hogy Annának legfeljebb két barátnőt kell felhívnia

$$\mathbf{P}(\xi \leq 2) = \mathbf{P}(\xi = 1) + \mathbf{P}(\xi = 2) = 0,4 + 0,24 = 0,64.$$

Várható érték:

$$\mathbf{E}(\xi) = 1 \cdot \mathbf{P}(\xi = 1) + 2 \cdot \mathbf{P}(\xi = 2) + 3 \cdot \mathbf{P}(\xi = 3) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,24 + 3 \cdot 0,36 = 1,96.$$

Második momentum:

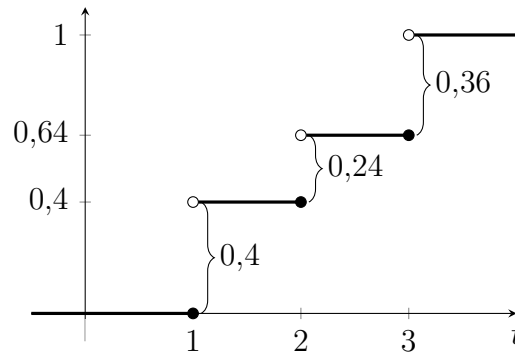
$$E(\xi^2) = 1^2 \cdot \mathbf{P}(\xi = 1) + 2^2 \cdot \mathbf{P}(\xi = 2) + 3^2 \cdot \mathbf{P}(\xi = 3) = 1 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,24 + 9 \cdot 0,36 = 4,6.$$

Szórásnégyzet: $\text{Var}(\xi) = \mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2 = 4,6 - (1,96)^2 = 0,76.$

Szórás: $\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\text{Var}(\xi)} = \sqrt{0,76} = 0,87.$

Eloszlásfüggvény:

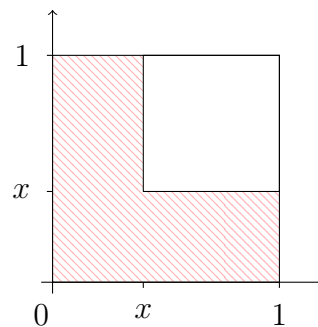
$$F_{\xi}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1, \\ 0,4, & 1 < t \leq 2, \\ 0,64, & 2 < t \leq 3, \\ 1, & 3 < t. \end{cases}$$



Példa. Két esemény egymástól függetlenül és véletlenszerűen következik be a $[0,1]$ időintervallumban. Legyen ξ az első bekövetkezés ideje. Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

A két esemény bekövetkezési ideje megfeleltethető a $[0,1]^2$ négyzet egy pontjának.

A $\xi < x$ eseményhez tartozó kedvező területet a következő ábra szemlélteti $0 < x < 1$ esetén:



A kedvező terület $2x - x^2$, tehát $\mathbf{P}(\xi < x) = 2x - x^2$, és így ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} x(2-x), & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{ha } x \geq 1, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

ξ várható értéke

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x(2-2x) dx = \frac{1}{3}.$$

A szórás meghatározása:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2(2-2x) dx = \frac{1}{6}, \\ \mathbf{D}^2(\xi) &= \mathbf{E}(\xi^2) - \mathbf{E}^2(\xi) = \frac{1}{6} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{18}, \\ \mathbf{D}(\xi) &= \frac{1}{3\sqrt{2}} = 0,236. \end{aligned}$$

5.10. Definíció. Tegyük fel, hogy $D(\xi)$ és $D(\eta)$ léteznek. A ξ és η változók *kovarianciája*

$$\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = \mathbf{E}((\xi - \mathbf{E}(\xi))(\eta - \mathbf{E}(\eta))) = \mathbf{E}(\xi\eta) - \mathbf{E}(\xi)\mathbf{E}(\eta),$$

korrelációs együtthatója

$$\rho(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{\mathbf{Cov}(\xi, \eta)}{\mathbf{D}(\xi)\mathbf{D}(\eta)}, & \text{ha } \mathbf{D}(\xi)\mathbf{D}(\eta) \neq 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

5.11. Definíció. ξ és η *korrelálatlanok*, ha $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = 0$.

5.12. Állítás. *Tetszőleges $\xi, \xi_1, \dots, \xi_n, \eta, \eta_1, \dots, \eta_m$ véletlen változók és a, b valós számok esetén igazak az alábbiak.*

$$(i) \quad \mathbf{Cov}(\xi, \xi) = \mathbf{D}^2(\xi);$$

$$(ii) \quad \mathbf{Cov}(\xi, \eta) = \mathbf{Cov}(\eta, \xi);$$

(iii) $\mathbf{Cov}(a\xi, b\eta) = ab\mathbf{Cov}(\xi, \eta)$;

(iv) $\mathbf{Cov}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i, \sum_{j=1}^m \eta_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{Cov}(\xi_i, \eta_j)$;

(v) ha ξ és η függetlenek, akkor korrelálatlanok is.

5.13. Következmény. Tetszőleges a és b valós számok esetén

$$D^2(a\xi + b\eta) = a^2 D^2(\xi) + b^2 D^2(\eta) + 2ab D(\xi) D(\eta) \rho(\xi, \eta).$$

5.14. Következmény. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ páronként független véletlen változók. Ekkor

$$\mathbf{D}^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}^2(\xi_i).$$

A kovariancia kiszámítása a diszkrét illetve folytonos esetben:

$$\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = \sum_i \sum_j x_i y_j \mathbf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) - \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i) \sum_i y_i \mathbf{P}(\eta = y_i),$$

$$\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\eta}(y) dy,$$

ahol $f(x, y)$ a (ξ, η) vektorváltozó sűrűségfüggvénye, továbbá

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

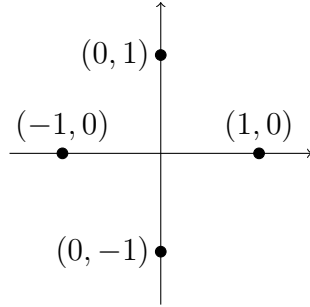
Itt $f_{\xi}(x), f_{\eta}(y)$ a ξ illetve az η változó sűrűségfüggvénye.

5.15. Tétel.

(i) $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$.

(ii) $|\rho(\xi, \eta)| = 1$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{P}(\eta = a\xi + b) = 1$ valamely $a \neq 0$ és b konstansok esetén. Ekkor $\rho(\xi, \eta) = 1$ esetén $a > 0$, $\rho(\xi, \eta) = -1$ esetén $a < 0$.

Példa. (Forrás: Prékopa András: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal) A sík $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ és $(1, 0)$ rácspontjai közül egyforma valószínűséggel kiválasztunk egyet, a kapott véletlen pontot jelölje (ξ, η) .



Látható, hogy a ξ, η változók csak a $-1, 0, 1$ értékeket vehetik fel és

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\xi = 0) &= \mathbf{P}(\eta = 0) = \frac{1}{2}, \\ \mathbf{P}(\xi = \pm 1) &= \mathbf{P}(\eta = \pm 1) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Innen adódik, hogy $\mathbf{E}(\xi) = \mathbf{E}(\eta) = 0$. Vegyük észre, hogy $\xi \cdot \eta = 0$. Ezekből következik, hogy $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = 0$ és $r(\xi, \eta) = 0$, tehát ξ és η korrelálatlanok. Viszont ξ és η nem függetlenek, mert

$$0 = \mathbf{P}(\xi = 1, \eta = 1) \neq \mathbf{P}(\xi = 1)\mathbf{P}(\eta = 1) = \frac{1}{16}.$$

Példa. Két esemény egymástól függetlenül és véletlenszerűen következik be a $[0, 1]$ időintervallumban. A bekövetkezési időket jelölje α illetve β . Legyen ξ az első bekövetkezés ideje, η a másodiké, azaz $\xi = \min(\alpha, \beta)$, $\eta = \max(\alpha, \beta)$. Láttuk, hogy $\mathbf{E}(\xi) = 1/3$ és $\mathbf{D}(\xi) = 1/(3\sqrt{2})$. Hasonlóan kapható, hogy $\mathbf{E}(\eta) = 2/3$ és $\mathbf{D}(\eta) = 1/(3\sqrt{2})$. Az α és β változók függetlenségét felhasználva adódik, hogy $\mathbf{E}(\xi\eta) = \mathbf{E}(\alpha\beta) = \mathbf{E}(\alpha)\mathbf{E}(\beta) = (1/2) \cdot (1/2) = 1/4$. Így

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(\xi, \eta) &= \mathbf{E}(\xi\eta) - \mathbf{E}(\xi)\mathbf{E}(\eta) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{36}, \\ \rho(\xi, \eta) &= \frac{\mathbf{Cov}(\xi, \eta)}{\mathbf{D}(\xi)\mathbf{D}(\eta)} = \frac{1/36}{(1/(3\sqrt{2}))^2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5.4. Kvantilisek

5.16. Definíció. Legyen $\alpha \in (0, 1)$. A q_α valós szám a ξ változó α -kvantilise, ha $\mathbf{P}(\xi < q_\alpha) = \alpha$.

A kvantilis nem mindig létezik, ha létezik, nem feltétlenül egyértelmű.

Nevezetes kvantilisok: a medián az 50%-os kvantilis ($q_{50\%}$), alsó és felső kvantilisok: $q_{25\%}, q_{75\%}$.

Az α -kvantilist az eloszlásfüggvény segítségével határozzuk meg: $F(q_\alpha) = \alpha$.

Példa. Legyen ξ olyan véletlen változó, melynek eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

ahol $\lambda > 0$ (ez az exponenciális eloszlás). Az $1 - e^{-\lambda q_\alpha} = \alpha$ egyenlet megoldása

$$q_\alpha = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha) = -\mathbf{E}(\xi) \ln(1 - \alpha).$$

A változó mediánja $q_{50\%} = \mathbf{E}(\xi) \ln(2)$.

6. Lineáris regresszió

Legyenek ξ és η véletlen változók. Az η változót szeretnénk közelíteni a ξ változó függvényével minél kisebb négyzetes hibával. Mi csak a legjobb lineáris közelítéssel foglalkozunk: Melyek azok az a és b konstansok, melyekre a

$$E(a, b) = \mathbf{E}[(\eta - (a\xi + b))^2]$$

négyzetes hiba a legkisebb? Az

$$\mathbf{E}[(\eta - (a\xi + b))^2] = \mathbf{E}[(\eta - a\xi - \mathbf{E}(\eta - a\xi))^2] + [\mathbf{E}(\eta - a\xi) - b]^2$$

és a

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2(\eta - a\xi) &= \mathbf{Cov}(\eta - a\xi, \eta - a\xi) \\ &= \mathbf{D}^2(\eta) + a^2\mathbf{D}^2(\xi) - 2a\mathbf{Cov}(\eta, \xi)\end{aligned}$$

összefüggések alapján adódik, hogy az $E(a, b)$ négyzetes hiba a minimumát a $b = \mathbf{E}(\eta) - a\mathbf{E}(\xi)$ és az

$$a = \frac{2\mathbf{Cov}(\eta, \xi)}{2\mathbf{D}^2(\xi)} = \frac{\mathbf{Cov}(\eta, \xi)}{\mathbf{D}^2(\xi)}$$

értékeknél veszi fel. A legjobb közelítést adó lineáris függvény tehát

$$g(x) = \frac{\mathbf{Cov}(\eta, \xi)}{\mathbf{D}^2(\xi)}(x - \mathbf{E}(\xi)) + \mathbf{E}(\eta).$$

7. Nevezetes valószínűségeloszlások

7.1. A Bernoulli-eloszlás

A ξ véletlen változó p paraméterű Bernoulli-eloszlású, $0 < p < 1$, ha lehetséges értékei $0, 1$, és $\mathbf{P}(\xi = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi = 0)$. Várható értéke $\mathbf{E}(\xi) = p$, szórásnégyzete $\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.

Jelölés: $\xi \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Kísérleti előállítás: Egy kísérlet elvégése során megfigyelünk egy p valószínűségű A eseményt. Legyen

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{ha } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0, & \text{ha } A \text{ nem következik be.} \end{cases}$$

7.2. A binomiális eloszlás

Az ξ véletlen változó (n, p) paraméterű binomiális eloszlású, $n = 1, 2, \dots$, $0 < p < 1$, ha lehetséges értékei $0, 1, \dots, n$, és $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Várható értéke $\mathbf{E}(\xi) = np$, szórása $\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Jelölés: $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$.

Kísérleti előállítás: Jelölje ξ egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek számát egy kísérlet n független ismétlése során. Annak a valószínűsége, hogy az A esemény k -szor következik be

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Példa. n -szer feldobunk egy szabályos kockát. Legyen ξ az 1-es dobások száma, η a 2-es dobások száma. Határozzuk meg ξ és η korrelációs együtthatóját!

Megoldás. $\xi, \eta \sim \text{Bin}(n, 1/6)$, $\xi + \eta \sim \text{Bin}(n, 2/6)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2(\xi + \eta) &= \mathbf{D}^2(\xi) + \mathbf{D}^2(\eta) + 2 \mathbf{Cov}(\xi, \eta), \\ n \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} &= n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + 2 \mathbf{Cov}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Ebből adódik, hogy

$$\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = -\frac{n}{36}$$

és

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{Cov}(\xi, \eta)}{\mathbf{D}(\xi)\mathbf{D}(\eta)} = -\frac{1}{5}.$$

7.3. A geometriai eloszlás

A ξ véletlen változó p paraméterű geometriai eloszlású, $0 < p < 1$, ha a lehetséges értékei $1, 2, \dots$ és

$$\mathbf{P}(\xi = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Kísérleti előállítás: Egy kísérletet addig ismételünk függetlenül, amíg egy p valószínűségű esemény be nem következik. Legyen ξ az ismétlések száma. Annak a valószínűsége, hogy k -adikra következik be először az A esemény $\mathbf{P}(\xi = k) = (1 - p)^{k-1}p$.

Példa. Egy program egy központi szerverhez próbál csatlakozni. Minden csatlakoztatási kísérlet egymástól függetlenül $0,7$ valószínűséggel lesz sikeres. Jelölje ξ azt, hogy hányadik próbálkozásra sikerül először csatlakozni a szerverhez. Adjuk meg ξ eloszlását, várható értékét és szórását! Mennyi annak a valószínűsége, hogy háromnál több próbálkozás kell ahhoz, hogy a program csatlakozni tudjon a szerverhez?

Megoldás. ξ geometriai eloszlású $p = 0,7$ paraméterrel. ξ eloszlása:

$$\mathbf{P}(\xi = k) = (1 - p)^{k-1}p = 0,3^{k-1} \cdot 0,7; \quad k = 1, 2, \dots$$

Várható érték és szórás:

$$E(\xi) = \frac{1}{p} = \frac{10}{7} = 1,429; \quad D(\xi) = \frac{\sqrt{1-p}}{p} = 0,7825.$$

Háromnál több próbálkozás pontosan akkor következik be, ha az első három csatlakozási kísérlet sikertelen. Ennek valószínűsége $(1 - p)^3 = 0,3^3 = 0,027$.

7.4. A Poisson-eloszlás

Az ξ véletlen változó λ paraméterű Poisson-eloszlású, $\lambda > 0$, ha ξ lehetséges értékei $0, 1, 2, \dots$, és

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Várható értéke $\mathbf{E}(\xi) = \lambda$, szórása $\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\lambda}$.

Jelölés: $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

A Poisson-eloszlás a binomiális eloszlás határértéke. Legyen A egy esemény, $p = \mathbf{P}(A)$, n -szeri független megfigyelésből ξ_n jelölje az A bekövetkezéseinek számát. Tegyük fel, hogy $p = p_n = \frac{\lambda}{n}$, ahol $\lambda > 0$ rögzített szám. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\xi_n = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Példa. Egy biztosítótársaság felmérte, hogy 0,0002 valószínűséggel következik be egy adott típusú káresemény. Poisson-közelítést alkalmazva mennyi annak a közelítő valószínűsége, hogy 15 000 esetből kevesebb mint 4-szer fog előfordulni a káresemény?

Megoldás. A káresemények száma binomiális eloszlású $n = 15\,000$ és $p = 0,0002$ paraméterekkel. A $k = 0, 1, 2, 3$ értékekre alkalmazzuk a $p_k \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$ közelítést.

$$np = 3 \implies p_k \approx \frac{3^k}{k!} e^{-3} \implies p_0 + p_1 + p_2 + p_3 \approx 0,6472 = 64,72\%$$

Közelítőleg 64,72 % eséllyel fog 15 000 esetből kevesebb mint 4-szer előfordulni a káresemény.

7.5. A hipergeometrikus eloszlás

Az ξ véletlen változó hipergeometrikus eloszlású (M, N, n) paraméterrel, $M < N$, $n \leq N$, ha lehetséges értékei $\max(0, n - N + M), \dots, \min(n, M)$, és

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = \max(0, n - N + M), \dots, \min(n, M).$$

A változó várható értéke $\mathbf{E}(\xi) = n \frac{M}{N}$, szórásnégyzete $\mathbf{D}^2(\xi) = n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$.

Példa. Egy urnában van N golyó, ebből M piros, a többi $N - M$ fehér színű. Találomra kiveszünk n db golyót visszatevés nélkül. Legyen ξ a kivett piros golyók száma. Annak a valószínűsége, hogy k darab piros golyót húzunk ki

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

7.6. A normális eloszlás (Gauss-eloszlás)

A ξ véletlen változó *normális eloszlású* μ és σ^2 paraméterekkel, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Jelölés: $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$. Megmutatjuk, hogy $f_{\mu, \sigma^2}(x)$ sűrűségfüggvény. Az $y = (x - \mu)/\sigma$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Legyen $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$. Azt kell megmutatni, hogy $I = \sqrt{2\pi}$.

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy.$$

Az $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}} d\theta dr = \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 2\pi \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{\infty} = 2\pi.$$

Felhasználtuk, hogy az integrál transzformáció Jacobi mátrixa

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix},$$

melynek determinánsa $r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$.

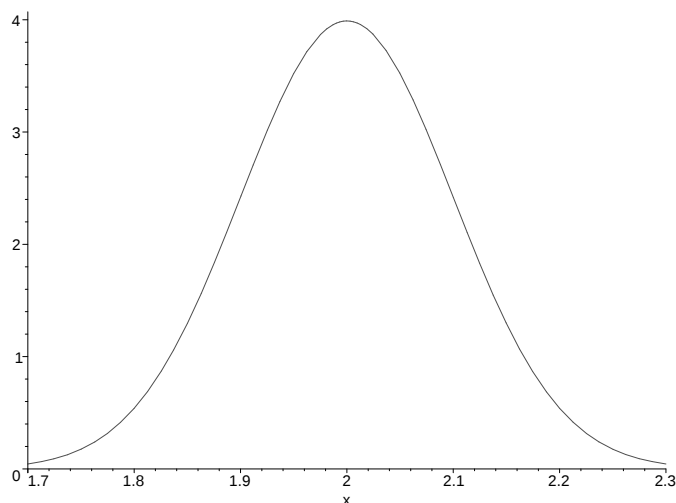
A normális eloszlás várható értéke $\mathbf{E}(\xi) = \mu$, szórása $\mathbf{D}(\xi) = \sigma$.

A $\mu = 0$, $\sigma = 1$ eset a *standard normális eloszlás*. A $(\xi - \mu)/\sigma$ véletlen változó a ξ *standardizáltja*.

7.1. Állítás. Ha $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, akkor $(\xi - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$.

Példa. Az emberek mennyiségi, fizikai jellemzői közelítőleg normális eloszlásúak, például ilyenek a testmagasság, a testsúly, a vérnyomás.

A sűrűségfüggvény $\mu = 2$ és $\sigma = 0,1$ esetén a következőképpen néz ki:



7.7. Az exponenciális eloszlás

A ξ véletlen változó λ -paraméterű *exponenciális eloszlású*, $\lambda > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

A várható érték és a szórás meghatározásához szükséges a parciális integrálás módszere:

$$\int_a^b g(x)h'(x)dx = [g(x)h(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)h(x)dx.$$

Ennek segítségével adódik, hogy $\mathbf{E}(\xi) = \mathbf{D}(\xi) = 1/\lambda$.

7.2. Tétel (Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága). *Ha ξ exponenciális eloszlású, akkor*

$$\mathbf{P}(\xi \geq s + t \mid \xi \geq t) = \mathbf{P}(\xi \geq s), \quad t, s \geq 0.$$

Példa. A tapasztalat azt mutatja, hogy bizonyos élettartamok eloszlása exponenciális. Például radioaktív atom élettartama az elbomlásig, események közötti várakozási idők (például egy telefonközpontban két hívás között eltelt idő).

7.8. Az egyenletes eloszlás

A ξ véletlen változó *egyenletes eloszlású* az (a, b) intervallumon, ha a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

A megfelelő eloszlásfüggvény

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } x \in [a, b], \\ 1, & \text{ha } x \geq b. \end{cases}$$

A változó várható értéke $\mathbf{E}(\xi) = \frac{a+b}{2}$, szórása $\mathbf{D}(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$.

Kísérleti előállítás: Az (a, b) intervallumból találomra kiválasztott szám egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon.

8. Feltételes eloszlás, feltételes várható érték

Legyen ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett véletlen változó, és legyen $B \in \mathcal{A}$ egy pozitív valószínűségű esemény. A ξ változó B -re vonatkozó feltételes eloszlásfüggvénye

$$F_B(x) = \mathbf{P}(\xi < x|B) = \frac{\mathbf{P}(\{\xi < x\} \cap B)}{\mathbf{P}(B)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ha ξ diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor ξ -nek a B -re vonatkozó feltételes eloszlása

$$\mathbf{P}(\xi = x_i|B) = \frac{\mathbf{P}(\{\xi = x_i\} \cap B)}{\mathbf{P}(B)}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

feltételes várható értéke

$$\mathbf{E}(\xi|B) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i|B).$$

feltéve, hogy $\sum_i |x_i| \mathbf{P}(\xi = x_i|B) < \infty$. Ha létezik olyan f_B függvény melyre

$$F_B(x) = \int_{-\infty}^x f_B(t) dt,$$

akkor azt mondjuk, hogy f_B a ξ -nek a B -re vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye. Ekkor ξ -nek a B -re vonatkozó feltételes várható értéke

$$\mathbf{E}(\xi|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_B(x) dx,$$

feltéve, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_B(x) dx < \infty$.

8.1. Tétel (Teljes várható érték tétele). *Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer és tegyük fel, hogy $\forall i : \mathbf{P}(B_i) > 0$. Ha a ξ véletlen változónak létezik a várható értéke, akkor*

$$\mathbf{E}(\xi) = \sum_k \mathbf{E}(\xi|B_k) \mathbf{P}(B_k).$$

Bizonyítás. A bizonyítást csak diszkrét véletlen változóra végezzük el. Legyenek ξ lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$. A teljes valószínűség tételének fel-

használásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\xi) &= \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i) \\
&= \sum_i x_i \sum_k \mathbf{P}(\xi = x_i | B_k) \mathbf{P}(B_k) \\
&= \sum_k \left(\sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i | B_k) \right) \mathbf{P}(B_k) \\
&= \sum_k \mathbf{E}(\xi | B_k) \mathbf{P}(B_k).
\end{aligned}$$

□

Legyenek ξ és η diszkrét véletlen változók $x_1, x_2, \dots$ illetve $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel. Tegyük fel, hogy a ξ véletlen változónak létezik a várható értéke és $\mathbf{P}(\eta = y_k) > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Az eddigiek alapján ξ -nek az $\eta = y_k$ feltételre vonatkozó feltételes eloszlása

$$\mathbf{P}(\xi = x_i | \eta = y_k), \quad i = 1, 2, \dots,$$

feltételes várható értéke

$$\mathbf{E}(\xi | \eta = y_k) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i | \eta = y_k).$$

Legyen $\mathbf{E}(\xi | \eta)$ az a véletlen változó, mely az $\mathbf{E}(\xi | \eta = y_k)$ értéket veszi fel az $\{\eta = y_k\}$ eseményen:

$$\mathbf{E}(\xi | \eta)(\omega) = \mathbf{E}(\xi | \eta = y_k), \text{ ha } \omega \in \{\eta = y_k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{E}(\xi | \eta)$ az ξ véletlen változónak az η véletlen változóra vonatkozó feltételes várható értéke.

8.2. Tétel. *Legyenek ξ és η diszkrét véletlen változók $x_1, x_2, \dots$ illetve $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel. Ekkor*

$$\mathbf{P}(\xi = x_i) = \sum_k \mathbf{P}(\xi = x_i | \eta = y_k) \mathbf{P}(\eta = y_k).$$

Ha ξ -nek létezik a várható értéke, akkor

$$\mathbf{E}(\xi) = \sum_k \mathbf{E}(\xi | \eta = y_k) \mathbf{P}(\eta = y_k).$$

Bizonyítás. Az első egyenlőség a teljes valószínűség tételének alkalmazása az $\{\eta = y_k\}, k = 1, 2, \dots$ teljes eseményrendszerrel. A második egyenlőség a teljes várható érték tételének következménye. $\square$

A fejezet hátralévő részében feltesszük, hogy (ξ, η) folytonos eloszlású f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor ξ feltételes sűrűségfüggvénye az $\eta = y$ feltételre nézve

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_{\eta}(y)}, & \text{ha } f_{\eta}(y) \neq 0, \\ g(x), & \text{különben,} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$$

ahol g tetszőleges sűrűségfüggvény. A ξ véletlen változó feltételes eloszlásfüggvénye az $\eta = y$ feltételre nézve

$$\mathbf{P}(\xi < x | \eta = y) = \int_{-\infty}^x f_{\xi|\eta}(u|y) du, \quad x \in \mathbb{R},$$

ξ feltételes várható értéke az $\eta = y$ feltételre nézve

$$\mathbf{E}(\xi | \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi|\eta}(x|y) dx,$$

feltéve, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi|\eta}(x|y) dx < \infty$.

8.3. Tétel. Legyen (ξ, η) folytonos eloszlású vektorváltozó f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi|\eta}(x|y) f_{\eta}(y) dy.$$

Ha ξ -nek létezik a várható értéke, akkor

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\xi | \eta = y) f_{\eta}(y) dy.$$

9. Véletlen változók konvergenciája

9.1. Markov és Csebisev egyenlőtlenségei

9.1. Tétel (Markov-egyenlőtlenség). *Legyen ξ egy nemnegatív véletlen változó, melynek létezik a várható értéke. Ekkor tetszőleges pozitív c konstans esetén*

$$\mathbf{P}(\xi \geq c) \leq \frac{\mathbf{E}(\xi)}{c}.$$

Bizonyítás. Ha ξ diszkrét eloszlású $x_1, x_2, \dots$, lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathbf{E}(\xi) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i) \geq \sum_{i: x_i \geq c} x_i \mathbf{P}(\xi = x_i) \geq c \sum_{i: x_i \geq c} \mathbf{P}(\xi = x_i) = c \mathbf{P}(\xi \geq c).$$

Ha ξ folytonos eloszlású f sűrűségfüggvénnyel, akkor $f(x) = 0$, ha $x < 0$, ezért

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_0^\infty x f(x) dx \geq \int_c^\infty x f(x) dx \geq c \int_c^\infty f(x) dx = c \mathbf{P}(\xi \geq c).$$

□

9.2. Tétel (Csebisev-egyenlőtlenség). *Tegyük fel, hogy a ξ véletlen változónak létezik a szórása. Ekkor tetszőleges pozitív c konstans esetén*

$$\mathbf{P}(|\xi - \mathbf{E}(\xi)| \geq c) \leq \frac{\mathbf{D}^2(\xi)}{c^2}.$$

Bizonyítás. A Markov-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}(|\xi - \mathbf{E}(\xi)| \geq c) = \mathbf{P}((\xi - \mathbf{E}(\xi))^2 \geq c^2) \leq \frac{\mathbf{E}((\xi - \mathbf{E}(\xi))^2)}{c^2} = \frac{\mathbf{D}^2(\xi)}{c^2}.$$

□

9.2. Nagy számok törvényei

9.3. Tétel (A nagy számok Csebisev-féle gyenge törvénye). *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ páronként korrelálatlan, azonos eloszlású véletlen változók, melyeknek létezik a szórása. Jelölje m a változók közös várható értékét. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - m \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

A fenti tételben szereplő konvergencia a sztochasztikus konvergencia. A tétel tehát azt állítja, hogy a feltételek teljesülése esetén $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$ átlagok sorozata sztochasztikusan konvergál a m várható értékhez. Ennek jelölése:

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{szt}} m, \quad n \rightarrow \infty.$$

A sztochasztikus konvergencia általános definíciója a következő.

9.4. Definíció. Legyenek $\eta, \eta_1, \eta_2, \dots$ véletlen változók. Az $\eta_1, \eta_2, \dots$ sorozat sztochasztikusan konvergál η -hoz, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|\eta_n - \eta| > \varepsilon) = 0.$$

Ennek jelölése:

$$\eta_n \xrightarrow{\text{szt}} \eta, \quad n \rightarrow \infty.$$

9.5. Tétel (A nagy számok Bernoulli-féle gyenge törvénye (1713)). *Jelölje S_n egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek számát egy kísérlet n független megfigyelése során. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{szt}} p, \quad n \rightarrow \infty.$$

9.6. Tétel (A nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye). *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ teljesen független, azonos eloszlású véletlen változók véges m várható értékkel. Ekkor*

$$\mathbf{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = m \right) = 1.$$

A tételben szereplő konvergencia a majdnem biztos konvergencia, melynek definíciója a következő.

9.7. Definíció. Legyenek $\eta, \eta_1, \eta_2, \dots$ véletlen változók. Az $\eta_1, \eta_2, \dots$ sorozat majdnem biztosan konvergál η -hoz, ha

$$\mathbf{P} \left(\left\{ \omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega) \right\} \right) = \mathbf{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta \right) = 1.$$

Ennek jelölése:

$$\eta_n \xrightarrow{\text{mb}} \eta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ennek megfelelően a Kolmogorov-féle erős törvény állítása a következő alakban is felírható:

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{mb}} m, \quad n \rightarrow \infty.$$

9.3. Centrális határeloszlás-tétel

9.8. Tétel (Centrális határeloszlás-tétel). *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ teljesen független, azonos eloszlású véletlen változók véges $\sigma = \mathbf{D}(\xi) > 0$ szórással és $m = \mathbf{E}(\xi)$ várható értékkel. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x \right) = \Phi(x),$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

a standard normális eloszlásfüggvény.

A tételben szereplő konvergencia az eloszlásban való konvergencia, melynek definíciója a következő.

9.9. Definíció. Legyenek $\eta, \eta_1, \eta_2, \dots$ véletlen változók. Az $\eta_1, \eta_2, \dots$ sorozat eloszlásban konvergál η -hoz, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\eta_n < x) = F_\eta(x)$$

teljesül az

$$F_\eta(x) = \mathbf{P}(\eta < x)$$

eloszlásfüggvény minden x folytonossági pontjában. Ennek jelölése:

$$\eta_n \xrightarrow{d} \eta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ennek megfelelően a centrális határeloszlás-tétel állítása a következő alakban is felírható:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - nm}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} \eta, \quad n \rightarrow \infty,$$

ahol η egy standard normális eloszlású véletlen változó.

Példa. Egy oktató által meghirdetett vizsgákon a hallgatók pontszámai egymástól független, egyforma eloszlású véletlen változók 70 várható értékkel és 12 szórással. Mennyi annak a közelítő valószínűsége, hogy 100 hallgató pontszámának átlaga legalább 73 lesz?

Megoldás. Jelölje n a hallgatók számát, m a várható értéket, σ a szórást, és legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ a hallgatók által elért pontszámok. A $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^n \xi_i/n \geq 73)$ valószínűséget kell meghatározni. A centrális határeloszlás-tétel szerint

$$\mathbf{P} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x \right) \approx \Phi(x).$$

Így

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} \geq 73\right) &= 1 - \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} < 73\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i - nm < n73 - nm\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - nm}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{n73 - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - nm}{\sqrt{n}\sigma} < 2,5\right) \\
&\approx 1 - \Phi(2,5) \\
&= 1 - 0,9938 = 0,0062.
\end{aligned}$$

A centrális határeloszlás-tétel speciális esete a

9.10. Tétel (de Moivre–Laplace tétel). *Jelölje S_n egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek számát egy kísérlet n független ismétlése során, ahol $0 < p < 1$. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \Phi(x).$$

Valóban, tudjuk, hogy a tételben szereplő binomiális eloszlású S_n változó felírható n független p paraméterű Bernoulli-eloszlású véletlen változó összegként, melyek várható értéke p és szórása $\sqrt{p(1-p)}$.

Példa. Egy szerencsejáték során 0,45 eséllyel nyerünk, és 0,55 eséllyel veszítünk. Lejátsszunk 300 játékot. Várhatóan hányszor nyerünk? A de Moivre–Laplace tétel alapján mennyi annak a közelítő valószínűsége, hogy kevesebb mint 145-ször nyerünk, és kevesebb mint 165-ször veszítünk?

Megoldás. Jelölje S azt, hogy a lejátszott 300 játék során hányszor nyerünk. S binomiális eloszlású $n = 300$ és $p = 0,45$ paraméterekkel. $\mathbf{E}(S) = np = 135$, azaz várhatóan 135-ször nyerünk. „Kevesebb mint 145-ször nyerünk” úgy is írható, hogy $S < 145$. $300 - S$ azon esetek száma, amikor veszítünk. Erre teljesülni kell a $300 - S < 165$ relációnak, ami nem más, mint $135 < S$. Így a feladat alapján a $\mathbf{P}(135 < S < 145)$ valószínűséget kell közelítőleg meghatározni. A de Moivre–Laplace-tételt szerint

$$\mathbf{P}\left(a \leq \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a).$$

Ezt felhasználva adódik, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(135 < S < 145) &= \mathbf{P}\left(\frac{135 - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{145 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(0 < \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}} < 1,16\right) \\ &\approx \Phi(1,16) - \Phi(0) \\ &= 0,877 - 0,5 = 0,377.\end{aligned}$$

10. Statisztikai alapfogalmak

Legyen ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett véletlen változó, ahol a $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték ismeretlen számunkra. Annyit tudunk, hogy $\mathbf{P}$ valószínűségi mértékek egy ismert $\mathcal{P}$ halmazához tartozik. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ hármast *statisztikai mezőnek* nevezzük. A cél a megfelelő $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték kiválasztása, vagy annak valamilyen tulajdonságának meghatározása. Végezzünk független megfigyeléseket a ξ változóra. A kapott független, azonos eloszlású véletlen változókból álló $\xi_1, \xi_2, \dots$ sorozatot *statisztikai mintának* nevezzük. A közös eloszlás a minta *háttéreloszlása*. A statisztikai problémák során általában véges, n -elemű mintákkal dolgozunk. A minta egy adott realizációját $x_1, \dots, x_n$ jelöli. A minta egy ismert T függvényét *statisztikának* nevezzük.

10.1. Alapstatisztikák

Mintaátlag:

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Empirikus szórásnégyzet:

$$V_n(\xi) = V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}_n)^2.$$

10.1. Tétel (Steiner-tétel). *Tetszőleges $x_1, \dots, x_n$ értékekre és c valós számra*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - c)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}_n)^2 + (\bar{\xi}_n - c)^2.$$

A $c = 0$ speciális esetben a következőt kapjuk:

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - (\bar{\xi}_n)^2.$$

$x_1, \dots, x_n$ realizáció átlaga és empirikus szórásnégyzete

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2.$$

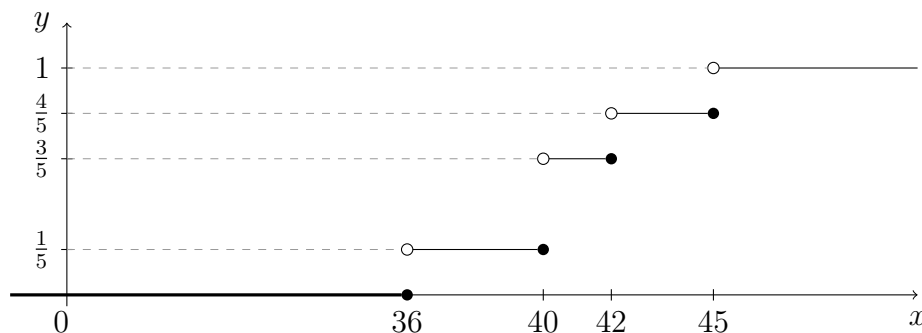
A $\xi_1, \dots, \xi_n$ minta *empirikus eloszlásfüggvénye*

$$F_n(x) = \frac{1}{n} |\{i : \xi_i < x\}|.$$

Példa. Az $x_1 = 40$, $x_2 = 45$, $x_3 = 40$, $x_4 = 42$, $x_5 = 36$ minta átlaga és empirikus szórásnégyzete:

$$\begin{aligned}\bar{x}_n &= \frac{x_1 + \dots + x_5}{5} = \frac{40 + 45 + 40 + 42 + 36}{5} = 40,6, \\ v_n &= \frac{((40 - 40,6)^2 + (45 - 40,6)^2 + (40 - 40,6)^2 + (42 - 40,6)^2 + (36 - 40,6)^2)}{5} \\ &= 8,64.\end{aligned}$$

A minta empirikus eloszlásfüggvénye:



10.2. Állítás. Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots$ az F háttéreloszlásból származó minta, és tekintsük ennek az F_n empirikus eloszlásfüggvényét. Ekkor

$$\mathbf{E}(F_n(x)) = F(x), \quad \mathbf{D}^2(F_n(x)) = \frac{F(x)(1 - F(x))}{n}.$$

10.3. Állítás (A nagy számok Csebisev-féle gyenge törvénye).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|F_n(x) - F(x)| > \varepsilon) = 0.$$

10.2. Paraméterbecslés

Feltesszük, hogy $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$. Θ -t paraméterternek, annak elemeit paraméternek nevezzük. A θ paraméter ismeretlen, melynek $\psi(\theta)$ függvényét becsüljük egy $\xi_1, \dots, \xi_n$ minta alapján. Legyen $T_n = T(\xi_1, \dots, \xi_n)$ egy statisztika.

10.3. Torzítatlanság

10.4. Definíció. T_n torzítatlan becslése $\psi(\theta)$ -nak, ha

$$\mathbf{E}_\theta(T_n) = \psi(\theta) \quad \text{minden } \theta \in \Theta \text{ esetén.}$$

T_n aszimptotikusan torzítatlan becslése $\psi(\theta)$ -nak, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\theta(T_n) = \psi(\theta) \quad \text{minden } \theta \in \Theta \text{ esetén.}$$

10.5. Állítás. *A $\bar{\xi}_n$ mintaátlag torzítatlan becslése a várható értéknek, ha az létezik.*

Legyen

$$V_n^*(\xi) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}_n)^2 = \frac{n}{n-1} V_n(\xi),$$

a korrigált empirikus szórásnégyzet.

10.6. Állítás. *Tegyük fel, hogy ξ szórása létezik. Ekkor $V_n(\xi)$ aszimptotikusan torzítatlan becslése a szórásnégyzetnek, $V_n^*(\xi)$ torzítatlan becslése a szórásnégyzetnek.*

10.4. Konzisztencia

10.7. Definíció. T_n gyengén konzisztens becslése $\psi(\theta)$ -nak, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\theta (|T_n - \psi(\theta)| > \varepsilon) = 0.$$

10.8. Állítás. *Ha ξ szórása létezik, akkor a $\bar{\xi}_n$ mintaátlag gyengén konzisztens becslése a várható értéknek.*

Legyen $(\xi, \eta), (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots$ egy kétváltozós minta. A minta empirikus kovarianciája

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}_n)(\eta_i - \bar{\eta}_n).$$

10.9. Állítás. *Ha $\mathbf{E}(\xi^4) < \infty$, $\mathbf{E}(\eta^4) < \infty$, akkor C_n gyengén konzisztens becslése a kovarianciának.*

10.5. Maximum likelihood módszer

A legnagyobb valószínűség elve alapján becsüljük a θ paramétert.

Diszkrét eloszlású ξ háttérváltozó esetén az $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ realizációhoz tartozó *likelihood-függvény*

$$L_\theta(\mathbf{x}) = L_\theta(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}_\theta(\xi = \mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n \mathbf{P}_\theta(\xi = x_j).$$

$L_\theta(\mathbf{x})$ annak a valószínűsége, hogy a mintavételezés során a $\mathbf{x}$ realizációt kapjuk meg.

Ha ξ folytonos eloszlású háttérváltozó f_θ sűrűségfüggvénnyel, akkor a $\mathbf{x}$ realizációhoz tartozó *likelihood-függvény*

$$L_\theta(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n f_\theta(x_j).$$

10.10. Definíció. A θ paraméter *maximum likelihood becslése* az a $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x})$ érték, melyre

$$L_{\hat{\theta}}(\mathbf{x}) \geq L_\theta(\mathbf{x}) \quad \text{minden } \theta \in \Theta \text{ esetén.}$$

A $\hat{\theta}$ paraméter érték esetén a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy az $x_1, \dots, x_n$ realizációt kapjuk meg. A maximum-likelihood becslés maximum helye a $\ell_{\hat{\theta}}(\mathbf{x}) = \log L_{\hat{\theta}}(\mathbf{x})$ log-likelihood függvénynek is, mert a logaritmus függvény szigorúan monoton nő.

Példa. Legyen ξ exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Ekkor

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

így a likelihood-függvény

$$L_\lambda(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n f_\lambda(x_j) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i},$$

a log-likelihood függvény pedig

$$\ell_\lambda(\mathbf{x}) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

Ennek maximum helyét deriválással kaphatjuk meg:

$$\frac{d\ell_\lambda(\mathbf{x})}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i.$$

Az

$$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

egyenlet $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}_n}$ megoldása maximumhely.

10.6. Momentumok módszere

Tegyük fel, hogy a Θ paraméterter k dimenziós. A $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ paramétervektor komponenseit együttesen becsüljük. Tegyük fel azt is, hogy $\mathbf{E}_\theta(\xi^k) < \infty$, és legyen $m_j = \mathbf{E}_\theta(\xi^j)$. Az m_j momentum függvénye θ -nak:

$$m_j = g_j(\theta_1, \dots, \theta_k), \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (2)$$

Legyen

$$\widehat{m}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^j,$$

a minta j -edik empirikus momentuma. Feltesszük, hogy a $(g_1(\theta), \dots, g_k(\theta)) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ leképezésnek létezik inverze, legyen ez $(h_1, \dots, h_k)$. Az inverz leképezést úgy kapjuk meg, hogy az (2) egyenletekből kifejezzük a θ_i értékeket: $\theta_i = h_i(m_1, \dots, m_k)$. A θ_i paraméter momentum becslése

$$\widehat{\theta}_i = h_i(\widehat{m}_1, \dots, \widehat{m}_k), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Példa. Legyen ξ geometriai eloszlású véletlen változó p paraméterrel. Ekkor $m_1 = \mathbf{E}_p(\xi) = \frac{1}{p}$, tehát $p = h(m_1) = \frac{1}{m_1}$, így a p paraméter momentum becslése

$$\widehat{p} = h_1(\widehat{m}_1) = \frac{1}{\widehat{m}_1} = \frac{1}{\xi_n}.$$

10.7. Lineáris regresszió

Egy rendszer kimeneti értéke ismeretlen függvénye a bemeneti értéknek. A kimenetet csak hibával tudjuk megmérni. Jelölje x a bemeneti értéket, Y a kimeneti értéket, f az ismeretlen függvényt, ε a hibát. Ezek kapcsolatát a következő modellel írjuk le:

$$Y = f(x) + \varepsilon.$$

A feladat az, hogy egy (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ minta alapján adjunk becslést az f függvényre. Csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor az f függvény lineáris: $f(x) = ax + b$ valamely a, b konstansok esetén. Így a mintára a következő modell érvényes:

$$y_i = ax_i + b + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

A modell paramétereit a legkisebb négyzetek módszerével becsüljük. A hibák négyzetösszege,

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i + b)^2$$

a következő a és b értékek esetén lesz minimális:

$$a = \hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)(x_i - \bar{x}_n)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2},$$
$$b = \hat{b} = \bar{y}_n - \hat{a}\bar{x}_n,$$

ahol $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ és $\bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$. Az $\hat{a}$ és $\hat{b}$ értékek az a és b paraméterek legkisebb négyzetes becslései.

11. Konfidenciaintervallumok

Legyenek T_1 és T_2 statisztikák.

11.1. Definíció. (T_1, T_2) egy $1 - \varepsilon$ megbízhatósági szintű konfidencia intervallum a θ paraméterre, ha

$$\mathbf{P}(T_1 < \theta < T_2) = 1 - \varepsilon, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

ahol $0 < \varepsilon < 1$.

11.1. Konfidenciaintervallum normális eloszlás várható értékére ismert szórás esetén

Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ egy $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású minta. A μ várható értékre konstruálunk meg egy konfidenciaintervallumot ismert σ szórás esetén. Az

$$u = \frac{\bar{\xi}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

statisztika standard normális eloszlású, így

$$\mathbf{P}(-u_{\varepsilon/2} < u < u_{\varepsilon/2}) = 1 - \varepsilon,$$

ahol

$$u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2).$$

Ezek alapján adódik, hogy

$$\mathbf{P}\left(\bar{\xi}_n - \frac{u_{\varepsilon/2}\sigma}{\sqrt{n}} < u < \bar{\xi}_n + \frac{u_{\varepsilon/2}\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \varepsilon,$$

tehát

$$\left(\bar{\xi}_n - \frac{u_{\varepsilon/2}\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{\xi}_n + \frac{u_{\varepsilon/2}\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

egy $1 - \varepsilon$ megbízhatósági szintű konfidencia intervallum a μ várható értékre.

11.2. Konfidenciaintervallum normális eloszlás várható értékére ismeretlen szórás esetén

Az előző eljárást úgy módosítjuk, hogy σ helyett annak $\sqrt{V_n^*(\xi)}$ becslését használjuk. A kapott

$$t = \frac{\bar{\xi}_n - \mu}{\sqrt{V_n^*(\xi)}/n}$$

statisztika Student-eloszlású $n - 1$ szabadságfokkal. A Student-eloszlású definíciója a következő.

11.2. Definíció. Legyenek $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ független standard normális eloszlású véletlen változók. Ekkor a

$$t = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}{n}}}$$

változó eloszlása az n szabadságfokú Student-eloszlás. Ennek eloszlásfüggvénye $\Phi_n(x) = \mathbf{P}(t < x)$.

Ezek alapján

$$\mathbf{P}(-t_{\varepsilon/2} < t < t_{\varepsilon/2}) = 1 - \varepsilon,$$

ahol

$$t_{\varepsilon/2} = \Phi_{n-1}^{-1}(1 - \varepsilon/2),$$

tehát

$$\left(\bar{\xi}_n - \frac{t_{\varepsilon/2} \sqrt{V_n^*(\xi)}}{\sqrt{n}}, \bar{\xi}_n + \frac{t_{\varepsilon/2} \sqrt{V_n^*(\xi)}}{\sqrt{n}} \right).$$

egy $1 - \varepsilon$ megbízhatósági szintű konfidencia intervallum a μ várható értékre.

12. Statisztikai próbák

A θ paraméterrel kapcsolatos hipotéziseket vizsgálunk. Legyen Θ_0, Θ_1 a paraméterter egy partíciója: $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset, \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$. Egy rendelkezésre álló minta alapján el kell döntenünk, hogy a minta ismeretlen paramétere a Θ_0 vagy a Θ_1 halmazhoz tartozik, vagyis a következő két hipotézis közül ki kell választani a megfelelőt:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0, \quad H_1 : \theta \in \Theta_1.$$

H_0 -t nullhipotézisnek, H_1 -et ellenhipotézisnek nevezzük. A statisztikai próba egy olyan eljárás, amely megmondja, hogy a két hipotézis közül melyiket fogadjuk el. A döntést általában egy próbastatisztika segítségével végezzük el. Ha a próbastatisztika elér egy küszöbértéket, akkor elvetjük a nullhipotézist.

Elsőfajú hibát vétünk, ha H_0 igaz, mégis elvetjük. Másodfajú hibát vétünk, ha H_0 nem igaz, mégis elfogadjuk. A próbát mindig úgy konstruáljuk meg, hogy az elsőfajú hiba valószínűsége ne haladjon meg egy előírt ε szintet. Az ε értéket a próba szignifikanciaszintjének nevezzük. Egy próba konzisztens, ha a másodfajú hiba valószínűsége 0-hoz tart, ha minta mérete a végtelenhez tart.

12.1. u -próba

Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó ismeretlen μ várható értékkel és ismert σ szórással. Rögzített μ_0 esetén a következő hipotéziseket vizsgáljuk:

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

A próbastatisztika

$$u = \frac{\bar{\xi}_n - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n},$$

az ε szignifikanciaszinthez tartozó küszöbérték $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2)$. H_0 -t elfogadjuk, ha $|u| \leq u_{\varepsilon/2}$, különben elvetjük. Ezt az eljárást u -próbának nevezzük. Az u -próba konzisztens.

12.2. t -próba

Az u -próbánál tárgyalt hipotéziseket vizsgáljuk, de most nem ismerjük a szórást. Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó ismeretlen μ várható értékkel és ismeretlen szórással. Rögzített μ_0 esetén a tekintsük a következő hipotéziseket:

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

A próbastatisztika

$$t = \frac{\bar{\xi}_n - \mu_0}{\sqrt{V_n^*(\xi)}} \sqrt{n},$$

az ε szignifikanciaszinthez tartozó küszöbérték $t_{\varepsilon/2} = \Phi_{n-1}^{-1}(1 - \varepsilon/2)$. H_0 -t elfogadjuk, ha $|t| \leq t_{\varepsilon/2}$, különben elvetjük. Ezt az eljárást t -próbának nevezzük. A t -próba is konzisztens.