A tall, cylindrical lighthouse with alternating red and white horizontal bands. The top section is white with a glass-enclosed lantern room and a dark dome. The lighthouse is situated on a rugged, rocky cliffside. In the background, the ocean stretches to the horizon under a grey, overcast sky. The overall scene is somewhat desolate and atmospheric.

A világítótornyok problémája

Krámli András

Vígh Viktor

SZTE Bolyai Intézet

2009. október 16.-17.

Problémafelvetés

Egy kikötő bejáratánál van 2 világítótorony. Egyenletesen, azonos sebességgel forgó fénykévéik tökéletes egyenesek (két irányban világítanak). Mi a fénykévék metszéspontjainak mértani helye, ha

- ▶ a) a fénykévék egy irányba forognak?

Problémafelvetés

Egy kikötő bejáratánál van 2 világítótorony. Egyenletesen, azonos sebességgel forgó fénykévéik tökéletes egyenesek (két irányban világítanak). Mi a fénykévék metszéspontjainak mértani helye, ha

- ▶ a) a fénykévék egy irányba forognak?
- ▶ b) a fénykévék ellenkező irányba forognak?

Problémafelvetés

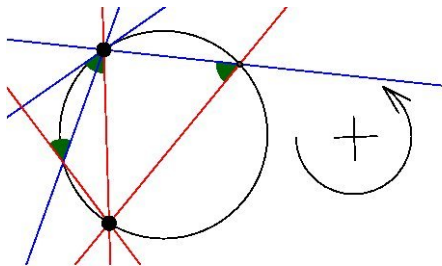
Egy kikötő bejáratánál van 2 világítótorony. Egyenletesen, azonos sebességgel forgó fénykévéik tökéletes egyenesek (két irányban világítanak). Mi a fénykévék metszéspontjainak mértani helye, ha

- ▶ a) a fénykévék egy irányba forognak?
- ▶ b) a fénykévék ellenkező irányba forognak?

A feladat 2007-ben a Wolfram MathWorld honlapján jelent meg.

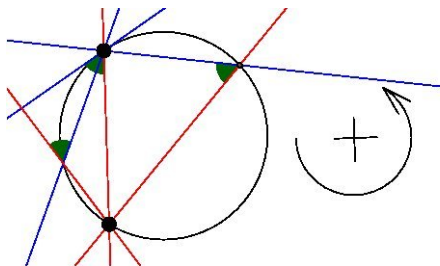
Az a, kérdésről

A válasz nyilvánvalóan kör.



Az a, kérdésről

A válasz nyilvánvalóan kör.



Lásd bővebben: Richard Guy: The Lighthouse Theorem - A Budget of Paradoxes, 2005

Sejtés

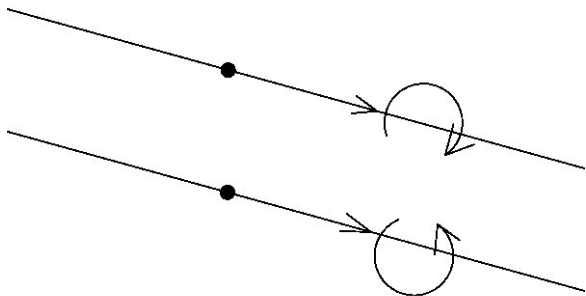
Először is vegyük észre, hogy van egy állapot, amikor a két kéve párhuzamos.

Sejtés

Először is vegyük észre, hogy van egy állapot, amikor a két kéve párhuzamos. Ha ez az állapot merőleges a tornyok egyenesére, akkor a metszéspont mindig rajta lesz a szakaszfelező merőlegesükön.

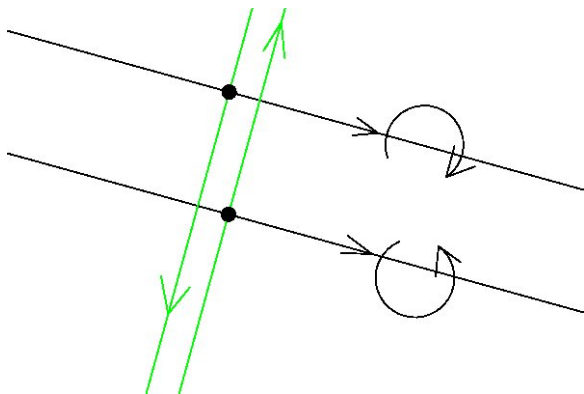
Sejtés

Először is vegyük észre, hogy van egy állapot, amikor a két kéve párhuzamos. Ha ez az állapot merőleges a tornyok egyenesére, akkor a metszéspont mindig rajta lesz a szakaszfelező merőlegesükön. A továbbiakban feltesszük, hogy nem ez a helyzet.



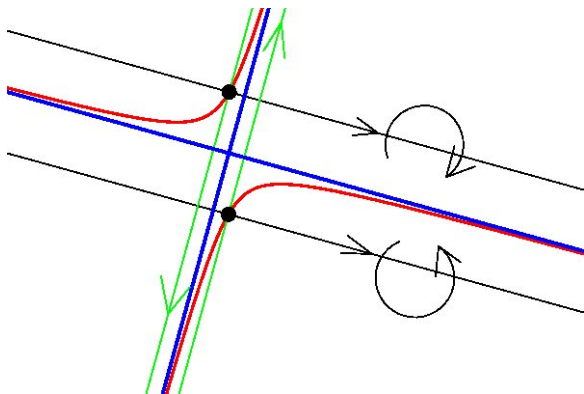
Sejtés

Először is vegyük észre, hogy van egy állapot, amikor a két kéve párhuzamos. Ha ez az állapot merőleges a tornyok egyenesére, akkor a metszéspont mindig rajta lesz a szakaszfelező merőlegesükön. A továbbiakban feltesszük, hogy nem ez a helyzet.

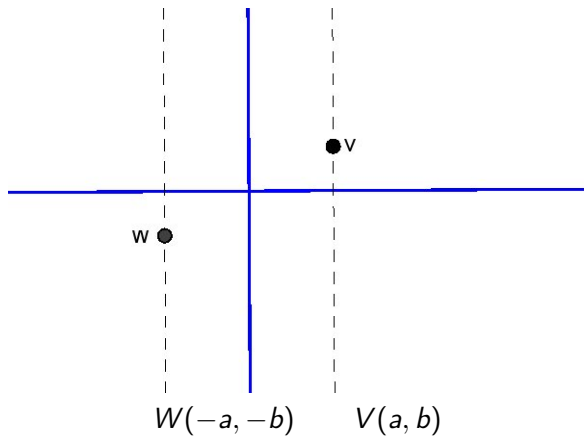


Sejtés

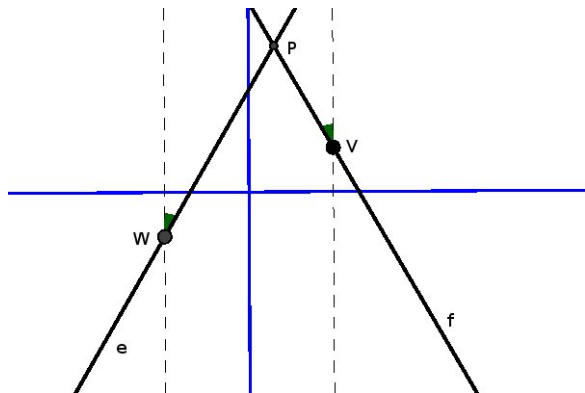
Először is vegyük észre, hogy van egy állapot, amikor a két kéve párhuzamos. Ha ez az állapot merőleges a tornyok egyenesére, akkor a metszéspont mindig rajta lesz a szakaszfelező merőlegesükön. A továbbiakban feltesszük, hogy nem ez a helyzet.



Bizonyítás



Bizonyítás

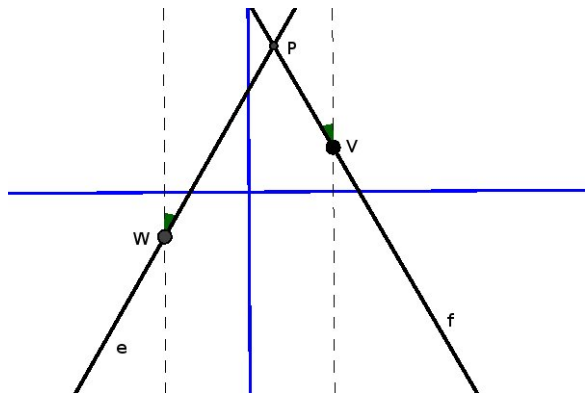


$$W(-a, -b)$$

$$V(a, b)$$

$$e : y + b = m_1(x + a) \quad , \quad f : y - b = m_2(x - a)$$

Bizonyítás



$$W(-a, -b) \quad V(a, b)$$

$$e : y + b = m_1(x + a) \quad , \quad f : y - b = m_2(x - a)$$

$$m_1 + m_2 = 0$$

Bizonyítás

$$e : y + b = m_1(x + a) \quad , \quad f : y - b = m_2(x - a)$$
$$m_1 + m_2 = 0$$

Bizonyítás

$$e : y + b = m_1(x + a) \quad , \quad f : y - b = m_2(x - a)$$
$$m_1 + m_2 = 0$$

Kiküszöbölve y -t:

$$m_1(x + a) - b = m_2(x - a) + b,$$

Bizonyítás

$$e : y + b = m_1(x + a) \quad , \quad f : y - b = m_2(x - a)$$
$$m_1 + m_2 = 0$$

Kiküszöbölve y -t:

$$m_1(x + a) - b = m_2(x - a) + b,$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$(m_1 - m_2)x = (m_1 + m_2)a + 2b = 2b.$$

Bizonyítás

$$e : y + b = m_1(x + a) \quad , \quad f : y - b = m_2(x - a)$$
$$m_1 + m_2 = 0$$

Kiküszöbölve y -t:

$$m_1(x + a) - b = m_2(x - a) + b,$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$(m_1 - m_2)x = (m_1 + m_2)a + 2b = 2b.$$

Így $x = b/m_1$.

Bizonyítás

$$e : y + b = m_1(x + a) \quad , \quad f : y - b = m_2(x - a) \\ m_1 + m_2 = 0$$

Kiküszöbölve y -t:

$$m_1(x + a) - b = m_2(x - a) + b,$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$(m_1 - m_2)x = (m_1 + m_2)a + 2b = 2b.$$

Így $x = b/m_1$. Innen $y = m_1(x + a) - b = b + m_1a - b = m_1a$ következik, és $xy = ab$, vagyis a P metszéspont valóban illeszkedik egy hiperbolára.

Köszönöm a figyelmet!