

Kepler és a tiki-taka

Vígh Viktor
SZTE Bolyai Intézet

2013. április 20.

Egyetemi Tavasz

Mi az a tiki-taka?

Mi az a tiki-taka?

Fő jellemzője: sok, **rövid, lapos** passz

Mi az a tiki-taka?

Fő jellemzője: sok, **rövid, lapos passz**

Története:

- Aranycsapat (1950-es évek)
- Totális futball: '70-es évek, Hollandia, Ajax
- 1988-1996: Dream Team (Barcelona)
- Napjainkban: legjellemzőbben a Barcelona és a spanyol válogatott

Mi az a tiki-taka?

Fő jellemzője: sok, **rövid, lapos passz**

Története:

- Aranycsapat (1950-es évek)
- Totális futball: '70-es évek, Hollandia, Ajax
- 1988-1996: Dream Team (Barcelona)
- Napjainkban: legjellemzőbben a Barcelona és a spanyol válogatott

Néhány név: Rinus Michels, Johan Cruyff, Vicente del Bosque, Josep Guardiola, Xavier „Xavi” Hernández



A tiki-taka megvalósítása

Kulcsfontosságú a játékosok taktikai érzéke, helyezkedése, hiszen az állandó labdajáratás fenntartásához üres, könnyen megjátszható társakra van a labdás embernek szüksége.

A tiki-taka megvalósítása

Kulcsfontosságú a játékosok taktikai érzéke, helyezkedése, hiszen az állandó labdajáratás fenntartásához üres, könnyen megjátszható társakra van a labdás embernek szüksége.

Ezzel együtt természetesen felértékelődik a vezetőedző fontossága is, a megfelelő csapatszerkezet megtalálása, kialakítása kritikus jelentőségű.

Szeretnénk matematikailag megfogni a legjobb csapatszerkezet kialakításának problémáját.

Szeretnénk matematikailag megfogni a legjobb csapatszerkezet kialakításának problémáját. Pusztán azt tartjuk szem előtt, hogy a tiki-taka alapeleme a rövid passz.

Szeretnénk matematikailag megfogni a legjobb csapatszerkezet kialakításának problémáját. Pusztán azt tartjuk szem előtt, hogy a tiki-taka alapeleme a rövid passz.

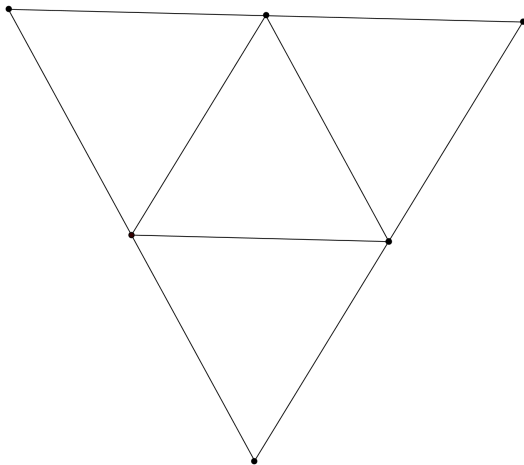
Fő kérdésünk

Hogyan kell felrakni a pályára tíz játékost, hogy minél több rövid passz opciójuk legyen?

Ez még így nem egzakt, hiszen nem tudjuk mit értsünk „rövid passz opció” alatt.

Ez még így nem egzakt, hiszen nem tudjuk mit értsünk „rövid passz opció” alatt.

Egy nagyon durva megközelítéssel élünk: az mondjuk, hogy két játékos passztávolságban van, ha távolságuk minimális (a saját csapaton belül előforduló távolságok között értve).



1. ábra. 9 passztávolságban álló játékospár

Fő kérdésünk

Hogyan lehet elhelyezni tíz (vagy kapussal együtt tizenegy) pontot a síkon úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább egységnyi legyen, és konkrétan az egység távolság a lehető legtöbbször forduljon elő?

Fő kérdésünk

Hogyan lehet elhelyezni tíz (vagy kapussal együtt tizenegy) pontot a síkon úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább egységnyi legyen, és konkrétan az egység távolság a lehető legtöbbször forduljon elő?

A kérdést 1972-ben tűzte ki O. Reutter (Ochsenhausen) az Elemente der Mathematik folyóirat problémárovatában 664A sorszámmal - tetszőleges számú játékosra. A két évvel később Heiko Harborth német professzor megoldását közölte a lap.

Tétel (Harborth (1974))

Adott a síkban n pont úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább 1. Ekkor legfeljebb $\lfloor 3n - \sqrt{12n - 3} \rfloor$ olyan pontpár van, amelyek távolsága 1. Ez a korlát minden n -re el is érhető.

Tétel (Harborth (1974))

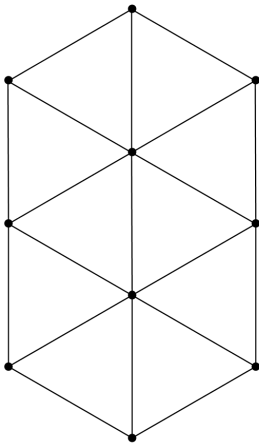
Adott a síkban n pont úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább 1. Ekkor legfeljebb $\lfloor 3n - \sqrt{12n - 3} \rfloor$ olyan pontpár van, amelyek távolsága 1. Ez a korlát minden n -re el is érhető.

Egy könnyen érthető átfogalmazás adható körlapok segítségével: n darab nem átfedő, egységnyi átmérőjű körlap között legfeljebb $\lfloor 3n - \sqrt{12n - 3} \rfloor$ érintő pár van.

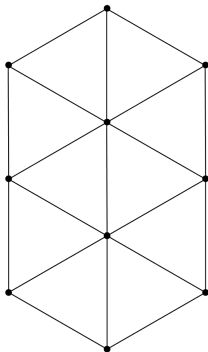


A megoldás $n=10$ -re

Tíz pont esetén a képlet szerint legfeljebb 19-szer fordulhat elő az egységnyi távolság, az egyetlen ezt megvalósító konfiguráció az ábrán látható.

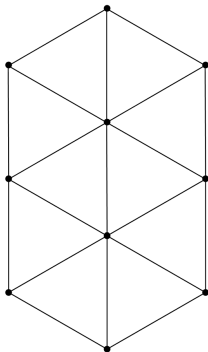


A 3-4-3 felállítás



2. ábra. A megoldás és néhány valódi taktikai rajz

A 3-4-3 felállítás

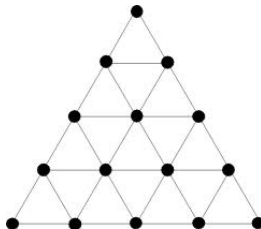


2. ábra. A megoldás és néhány valódi taktikai rajz

Megjegyzés: az ábrát 90° -kal elforgatva is a 3-4-3 felállítás egy verziója rajzolódik ki.

Az általános megoldás: háromszögrács

Könnyű meggondolni (de tapasztalatból mindenképp tudjuk), hogy egy érme legfeljebb hat másikkal érintkezhet, így joggal sejtjük, hogy az általános megoldásban is minél több érmének lesz hat szomszédja. Valóban ez a helyzet, minden n -re az optimális konfiguráció a háromszögrács egy „hatszögszerű” darabja. (Nem minden n -re egyértelmű.)



A síkban a legnevezetesebb rokon feladat a következő: tegyük le egy asztalra a lehető legtöbb egyforintost. Ha az asztalra végtelen sok érme fér el, akkor minél nagyobb arányban szeretnénk lefedni. (Ez a definíció precízzé tehető.) A probléma erősen függ az asztal méretététől és alakjától.

A síkban a legnevezetesebb rokon feladat a következő: tegyük le egy asztalra a lehető legtöbb egyforintost. Ha az asztalra végtelen sok érme fér el, akkor minél nagyobb arányban szeretnénk lefedni. (Ez a definíció precízzé tehető.) A probléma erősen függ az asztal méretététől és alakjától.

Ha az asztal a teljes sík, akkor a problémát Thue oldotta meg 1892-ben. Speciális, korlátos asztalokra (tehát amikre csak véges sok érme fér el) csak néhány szorványos eredmény ismert, főképp amikor az asztal mérete kicsi az érméhez képest. (Szegedi vonatkozás: dr. Fodor Ferenc eredményei kör alakú asztalokra.)

A térbeli kérdés

A térbeli analóg probléma így hangzik: pakoljunk egy ládába minél több szabványos (egyforma) focilabdát. Ha a láda a teljes (három-dimenziós) tér, akkor a lefedett térfogat arányát szeretnénk maximalizálni - ezt a problémát nevezzük **Kepler-sejtésnek**.



A modern matematika egyik legnagyobb eredménye volt, amikor 1998-ban Thomas Hales (és csapata) bejelentette a probléma megoldását.

A modern matematika egyik legnagyobb eredménye volt, amikor 1998-ban Thomas Hales (és csapata) bejelentette a probléma megoldását.

A közel 400 éves kérdés megválaszolásához masszív számítógépes segítséget vett igénybe, és forradalmian új módszereket dolgozott ki eközben. A bizonyítás helyességét még a mai napig nem ellenőrizték le teljesen, de az általános vélekedés az, hogy lényegi hiba nincs benne.

Vissza a tiki-takához!

Egy másik lehetőség a rövid passz opciók számának növelésére, ha azt szeretnénk, hogy egy „átlagos csapattárs” a lehető legközelebb legyen.

Egy másik lehetőség a rövid passz opciók számának növelésére, ha azt szeretnénk, hogy egy „átlagos csapattárs” a lehető legközelebb legyen.

Probléma

Hogyan lehet tíz (vagy általában n) pontot elhelyezni a síkra úgy, hogy a páronkénti átlagos távolságuk minimális legyen, feltéve, hogy bármely két pont távolsága legalább egy egység?

Meglepő módon a fenti kérdés lényegében teljesen megválaszolatlan!

Meglepő módon a fenti kérdés lényegében teljesen megválaszolatlan!

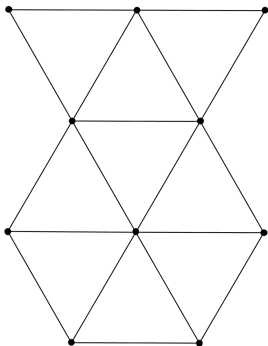
A rövid történeti áttekintés fényében joggal gyanítjuk, hogy erre a kérdésre is a háromszögrács, illetve annak a megfelelő darabjai adják majd a választ.

Tíz pont esetére (numerikusan) összehasonlíthatjuk a háromszögrács darabjait.

Tíz pont esetére (numerikusan) összehasonlíthatjuk a háromszögrács darabjait. **Ismét a „3-4-3 rombusz” taktika nyer!**

Tíz pont esetére (numerikusan) összehasonlíthatjuk a háromszögrács darabjait. **Ismét a „3-4-3 rombusz” taktika nyer!**

Érdemes megnézni a második helyezettet is:



A 4-3-3 felállítás



3. ábra. A második helyezett és néhány valódi taktikai rajz

Nyilván mértanilag nem annyira pontosak a felállások, mint ahogy mi kiszámoltuk, és egyéb tényezőket is figyelembe kell venni a taktika kidolgozásakor, de az egyszerű modelljeink alapján kiszámolt eredmények összességében szinte már megdöbbentően összecsengenek a gyakorlattal.

Nyilván mértanilag nem annyira pontosak a felállások, mint ahogy mi kiszámoltuk, és egyéb tényezőket is figyelembe kell venni a taktika kidolgozásakor, de az egyszerű modelljeink alapján kiszámolt eredmények összességében szinte már megdöbbentően összecsengenek a gyakorlattal.

Köszönöm a figyelmet!