# Rekurzív logikai játékok

Vígh Viktor
SZTE Bolyai Intézet

2014. december 11.

Szent László Gimnázium, Budapest

# Hanoi tornyai

**Forrás**: http://ordoglakat.blog.hu/2011/03/20/hanoi_tornyai

# Hanoi tornyai

Szabály: minden lépésben levehetünk egy olyan korongot, amin nincs másik, és rátehetjük egy olyan rúdra, ami üres, vagy a legfelső korongja nagyobb, mint ami a kezünkben van.

# Hanoi tornyai

Szabály: minden lépésben levehetünk egy olyan korongot, amin nincs másik, és rátehetjük egy olyan rúdra, ami üres, vagy a legfelső korongja nagyobb, mint ami a kezünkben van.

Cél: mozgassuk át az összes korongot egy másik rúdra.

# Hanoi tornyai

**Forrás**: `http://ordoglakat.blog.hu/2011/03/20/hanoi_tornyai`

# Hanoi tornyai

**Forrás**: http://ordoglakat.blog.hu/2011/03/20/hanoi_tornyai

# Hanoi tornyai

**Forrás**: `http://ordoglakat.blog.hu/2011/03/20/hanoi_tornyai`

# Hanoi tornyai

**Forrás**: `http://ordoglakat.blog.hu/2011/03/20/hanoi_tornyai`

A legnagyobb karika a maradék karikák mozgatását nem befolyásolja, hiszen a szabályok szerint mindig valamelyik rúd legalján van. Így az előző megfigyelésünk a következő módszert adja.

# A megoldás

A legnagyobb karika a maradék karikák mozgatását nem befolyásolja, hiszen a szabályok szerint mindig valamelyik rúd legalján van. Így az előző megfigyelésünk a következő módszert adja.

1) Tegyük át a felső öt karikából álló tornyot az első oszlopról a harmadik oszlopra.
2) Helyezzük át a legnagyobb karikát az első oszlopról a másodikra.
3) Tegyük át a felső öt karikából álló tornyot a harmadik oszlopról a második oszlopra.

# A megoldás

A legnagyobb karika a maradék karikák mozgatását nem befolyásolja, hiszen a szabályok szerint mindig valamelyik rúd legalján van. Így az előző megfigyelésünk a következő módszert adja.

1) Tegyük át a felső öt karikából álló tornyot az első oszlopról a harmadik oszlopra.
2) Helyezzük át a legnagyobb karikát az első oszlopról a másodikra.
3) Tegyük át a felső öt karikából álló tornyot a harmadik oszlopról a második oszlopra.

Probléma: ez mind szép és jó, de hogy tegyük át az öt magas tornyot?

# Formalizáljunk!

$$Hanoi\_megold[karikakszama; honnan, hova]$$

# Formalizáljunk!

$Hanoi\_megold[karikakszama; honnan, hova]$

$Hanoi\_megold[N; i, j]$

1) ha $N = 1$, akkor $atrak[i, j]$;
2) egyébként
   1. $Hanoi\_megold[N - 1; i, 6 - i - j]$;
   2. $atrak[i, j]$;
   3. $Hanoi\_megold[N - 1; 6 - i - j, j]$;

vége $Hanoi\_megold$

# Példa

$Hanoi\_megold[3; 1, 2];$

# Példa

$Hanoi\_megold[2;1,3];$

$atrak[1,2];$

$Hanoi\_megold[2;3,2];$

# Példa

$Hanoi\_megold[1;1,2];$

$atrak[1,3];$

$Hanoi\_megold[1;2,3];$

$atrak[1,2];$

$Hanoi\_megold[1;3,1];$

$atrak[3,2];$

$Hanoi\_megold[1;1,2];$

# Példa

$atrak[1, 2];$

$atrak[1, 3];$

$atrak[2, 3];$

$atrak[1, 2];$

$atrak[3, 1];$

$atrak[3, 2];$

$atrak[1, 2];$

# Lépésszám

Ha $N = 1$, akkor egy lépés kell. Ha $N = 2$, akkor 3, ha $N = 3$, akkor 7. Azt sejtjük, hogy $2^N - 1$ lépésre van szükség általában.

# Lépésszám

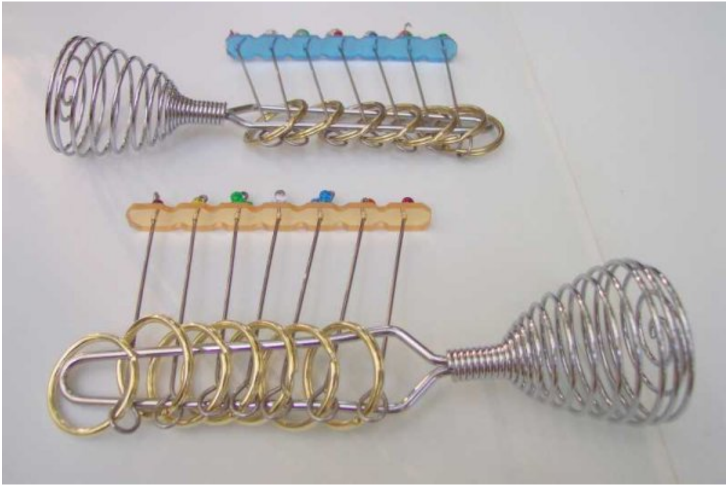
Ha $N = 1$, akkor egy lépés kell. Ha $N = 2$, akkor 3, ha $N = 3$, akkor 7. Azt sejtjük, hogy $2^N - 1$ lépésre van szükség általában.

Valóban

1. $Hanoi\_megold[N-1; i, 6-i-j];$ $\rightarrow 2^{N-1} - 1,$
2. $atrak[i,j];$ $\rightarrow 1,$
3. $Hanoi\_megold[N-1; 6-i-j, j];$ $\rightarrow 2^{N-1} - 1,$

ez tényleg $2^{N-1} - 1 + 1 + 2^{N-1} - 1 = 2^N - 1$ lépés.

# A meleda (Kínai karikák, Cardano karikái)



**Forrás**: `http://forum.johnrausch.com/cgi-bin/ultimatebb.cgi?ubb=get_topic&f=5&t=000177`

Hasonló az ötlet, mint az előbb, de némileg nehezebb formalizálni: jelölje *Levesz*$[k]$ az első $k$ gyűrűt levevő eljárást, *Feltesz*$[k]$, pedig a megfordítását.

Hasonló az ötlet, mint az előbb, de némileg nehezebb formalizálni: jelölje $Levesz[k]$ az első $k$ gyűrűt levevő eljárást, $Feltesz[k]$, pedig a megfordítását.

Ahhoz, hogy az utolsó gyűrűt leejtsük, az első $n-2$-t le kell vennnünk. Ha a leejtés után visszatesszük az első $n-2$ karikát, akkor a játék eggyel kisebb, $n-1$ karikás változatához jutunk.

# Az algoritmus

*Levesz*$[n]$

1) Ha $n = 1$, akkor *Leejt*$[1]$;
2) Ha $n = 2$, akkor *Leejt*$[2]$; *Leejt*$[1]$;
3) Egyébként
    1. *Levesz*$[n-2]$;
    2. *Leejt*$[n]$;
    3. *Feltesz*$[n-2]$;
    4. *Levesz*$[n-1]$;

Vége *Levesz*$[n]$

# Az algoritmus

*Levesz*$[n]$

1) Ha $n = 1$, akkor *Leejt*$[1]$;
2) Ha $n = 2$, akkor *Leejt*$[2]$; *Leejt*$[1]$;
3) Egyébként
    1. *Levesz*$[n - 2]$;
    2. *Leejt*$[n]$;
    3. *Feltesz*$[n - 2]$;
    4. *Levesz*$[n - 1]$;

Vége *Levesz*$[n]$

A *Feltesz*$[n]$ hasonlóan, csak a két szerep felcserélődik (és *Leejt*$[k]$ helyett *Felfuz*$[k]$ lesz.).

# Lépésszám

A Hanoi tornyai játékhoz hasonlóan igazolható, hogy páros sok karika esetén a lépésszám $(2^{n+1} - 2)/3$, páratlan soknál $(2^{n+1} - 1)/3$.

# Lépésszám

A Hanoi tornyai játékhoz hasonlóan igazolható, hogy páros sok karika esetén a lépésszám $(2^{n+1}-2)/3$, páratlan soknál $(2^{n+1}-1)/3$.

A Hanoi tornyai esetén világos, hogy amit csinálunk, az optimális, kevesebb lépésben nem megoldható a játék. Itt feltétlenül megfontolásra szorul, hogy az utolsó karika leejtése után szükséges-e visszatérni az $n-1$ karikás alapállapotba.

# A Gros-kód

Rendeljünk hozzá minden állapothoz egy kettes számrendszerbeli számot a következő módon: tegyük a bal kezünk felé a leghátsó gyűrűt. A pánton fenn levő gyűrűket számozzuk felváltva 1-gyel és 0-val. A leejtett gyűrűk esetén keressük meg a hozzájuk legközelebbi, tőlük balra eső a pánton levő gyűrűt, és rendejük hozzájuk ennek a számát, ha ilyen gyűrű nincs, akkor pedig 0-t.

# A Gros-kód

Rendeljünk hozzá minden állapothoz egy kettes számrendszerbeli számot a következő módon: tegyük a bal kezünk felé a leghátsó gyűrűt. A pánton fenn levő gyűrűket számozzuk felváltva 1-gyel és 0-val. A leejtett gyűrűk esetén keressük meg a hozzájuk legközelebbi, tőlük balra eső a pánton levő gyűrűt, és rendejük hozzájuk ennek a számát, ha ilyen gyűrű nincs, akkor pedig 0-t.

Ezzel „lekódoltuk" az állást egy bináris számsorba. Vegyük észre a következőket:

1. Bármilyen bináris számsor „visszafejthető".

# A Gros-kód

Rendeljünk hozzá minden állapothoz egy kettes számrendszerbeli számot a következő módon: tegyük a bal kezünk felé a leghátsó gyűrűt. A pánton fenn levő gyűrűket számozzuk felváltva 1-gyel és 0-val. A leejtett gyűrűk esetén keressük meg a hozzájuk legközelebbi, tőlük balra eső a pánton levő gyűrűt, és rendejük hozzájuk ennek a számát, ha ilyen gyűrű nincs, akkor pedig 0-t.

Ezzel „lekódoltuk" az állást egy bináris számsorba. Vegyük észre a következőket:

1. Bármilyen bináris számsor „visszafejthető".
2. Különböző számsorokhoz különböző állapotok tartoznak.

# A kódolásból adódó megoldás

## Állítás

A $-1$ kettes számrendszerbeli művelethez tartozó operáció a játékon egy lépést jelent.

# A kódolásból adódó megoldás

**Állítás**

A $-1$ kettes számrendszerbeli művelethez tartozó operáció a játékon egy lépést jelent.

Bizonyítás.

1. Ha az utolsó számjegy 1.

# A kódolásból adódó megoldás

**Állítás**

A $-1$ kettes számrendszerbeli művelethez tartozó operáció a játékon egy lépést jelent.

Bizonyítás.

1. Ha az utolsó számjegy 1.
2. Ha az utolsó számjegy 0.

# A kódolásból adódó megoldás

**Állítás**

A $-1$ kettes számrendszerbeli művelethez tartozó operáció a játékon egy lépést jelent.

Bizonyítás.

1. Ha az utolsó számjegy 1.
2. Ha az utolsó számjegy 0.

□

# A kódolásból adódó megoldás

Az adódó eljárás: „vonogassunk ki egyet”.

# A kódolásból adódó megoldás

Az adódó eljárás: „vonogassunk ki egyet”.

Lépésszám:
ha $n$ páros

$$2^{n-1} + 2^{n-3} + \ldots + 2 = 2 \cdot \frac{4^{n/2} - 1}{4 - 1} = \frac{2^{n+1} - 2}{3},$$

hasonlóan, ha $n$ páratlan.

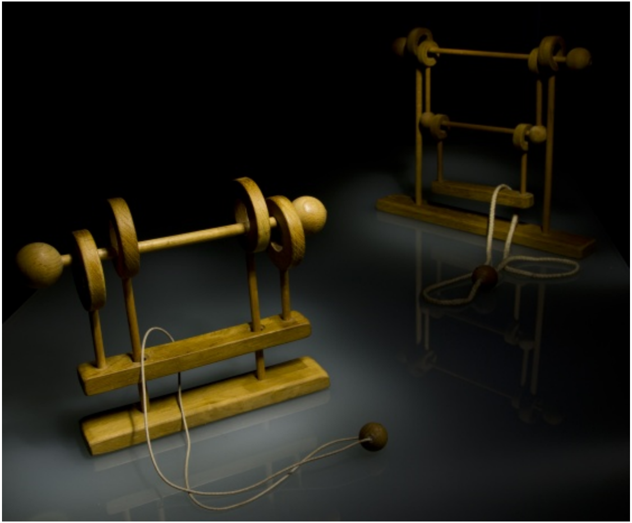
# A drótszív


**Forrás:** `http://ordoglakat.blog.hu/2012/05/06/drotsziv`

# Kétszintes drótszív


**Forrás:** `http://ordoglakat.blog.hu/2012/05/06/drotsziv`

# Az akrobaták



Forrás: `http://ordoglakat.blog.hu/2012/09/02/akrobatak_317`

# Jákob lajtorjája

**Forrás:** `http://ordoglakat.blog.hu/2009/03/29/meleda`

# Néhány cikk játékokról

- Przytycki, Józef H.; Sikora, Adam S.: Topological insights from the Chinese rings. *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no. 3, pp. 893–902 (electronic).
- Bertuccioni, Inta: A topological puzzle. *Amer. Math. Monthly* **110** (2003), no. 10, pp. 937–939.
- Bozóki, S., Lee, T.L., Rónyai, L.: Seven mutually touching infinite cylinders. *Computational Geometry: Theory and Applications* **48(2)** (2015), pp. 87–93.

Köszönöm a figyelmet!