

Háromszögek fedése két körrel

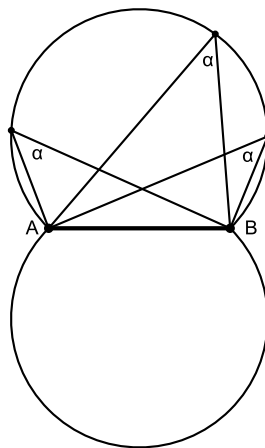
Vígh-Mácsai Zsanett, Vígh Viktor *

1. Bevezetés

Ebben a cikkben háromszögeket fogunk lefedni körökkel (általában kettővel). A fedést egyszerűen tartalmazás értelemben használjuk, vagyis X lefed Y -t, ha $X \supseteq Y$. Az ilyen típusú problémák a diszkrét geometria témakörébe tartoznak. Az általunk tárgyalt, legegyszerűbb esetek kizárólag középiskolában is előforduló, elemi geometriai ismeretekre támaszkodnak. A felhasznált állítások egy helyen megtalálhatóak például [6] könyvben.

Jól ismert a kerületi szögek tétele, vagy egy kicsit erősebb megfogalmazásban a látókörv tétel.

Tétel. (*Látókörv tétel*) *A síkon azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekből egy adott AB szakasz adott α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) szög alatt látszik két, az AB egyenesre szimmetrikusan elhelyezkedő körv. Ezeket a köríveket az α szöghöz tartozó látókörveknek nevezzük.*



1. ábra. Látókörv tétel

*A szerzőt az OTKA 75016 számú pályázata támogatta.

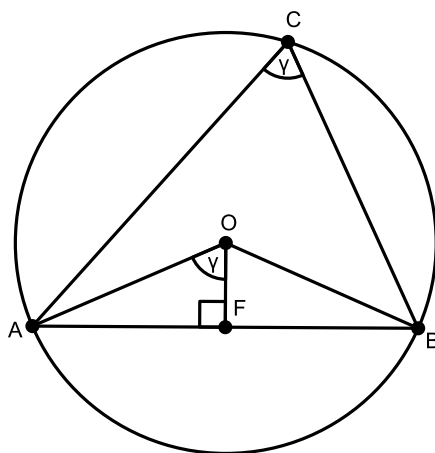
Jól ismert továbbá az is, hogy a P pontból pontosan akkor látszik α -nál nagyobb szögben az AB szakasz, ha a P pont az α -hoz tartozó látóköriíven belül van.

A tételt egy kicsit más, a már említett fedési szemszögből fogjuk tekinteni. Egy adott állítás újrafogalmazása, másféle megközelítése sokszor hasznos a matematikában, hiszen így esetleg könnyebb általánosítani, újabb érdekes kérdéseket feltenni. Jelöljük azon háromszögek halmazát, amelyeknek egységnyi oldalukkal szemben γ szög van H_γ -val, azaz

$$H_\gamma = \{ABC_\Delta : |AB| = 1; C_\angle = \gamma\}.$$

Konvenció. A továbbiakban ha egy $H \in H_\gamma$ háromszöget vizsgálunk, mindig élni fogunk a következő jelölésekkel: a csúcsokat A -val, B -vel és C -vel betűzzük, úgy hogy $|AB| = 1$ és $C_\angle = \gamma$. Továbbá a háromszög magaspontját M , az AB oldal felezőpontját F , a körülírt kör sugarát R , a körülírt kör középpontját pedig O jelöli majd.

1. Állítás. Minden $H \in H_\gamma$ háromszög lefedhető egy $1/(2 \sin \gamma)$ sugarú körrel.



2. ábra. Háromszög fedése egy körrel

Bizonyítás. Arra az esetre szorítkozunk, amikor $\gamma < 90^\circ$, a $\gamma \geq 90^\circ$ hasonlóan látható. Világos, hogy elegendő lenne megmutatni, hogy minden $H \in H_\gamma$ háromszög körülírt körének sugara éppen $1/(2 \sin \gamma)$. Vegyük észre, hogy OF szakasz merőleges az AB oldalra és felezi azt, valamint OF felezi az AOB_\angle szöget is. A középponti és kerületi szögek tételéből következik, hogy $AOB_\angle = 2\gamma$, amelyből $AOF_\angle = \gamma$. Írjuk fel az AFO_Δ derékszögű háromszögben az

$AOF_{\perp} = \gamma$ szög szinuszát a definíció szerint.

$$\sin \gamma = \frac{|AF|}{|AO|} = \frac{1/2}{R}, \quad \text{amelyből az}$$

$$R = \frac{1}{2 \sin \gamma}$$

egyenlőséget kapjuk. Ezzel állításunkat beláttuk. \square

2. Problémafelvetés

Az 1. Állítás szerint a H_{γ} halmazban lévő bármely háromszög lefedhető egy $1/(2 \sin \gamma)$ sugarú körrel, továbbá a megoldásból az is világos, hogy hegyesszögű háromszögekre ennél kisebb sugarú kör már nem elegendő. Ha $\gamma \geq 90^{\circ}$, akkor az \overline{AB} szakasz Thalész-köre a legkisebb sugarú kör, ami lefedi a H_{γ} család bármely háromszögét. A cikk további részében azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy vajon mit mondhatunk akkor, ha a fedéshez nem egy, hanem két kört használunk. A feladat, abban a speciális esetben, amikor $\gamma = 45^{\circ}$, szerepelt az Arany Dániel Matematikaverseny 1999. évi országos döntőjén [1]. Mi a következő, általánosabb feladatot oldjuk meg.

Probléma. *Határozzuk meg azt a legkisebb R_{γ} sugarat, amire teljesül, hogy kettő R_{γ} sugarú körrel minden H_{γ} -beli háromszög lefedhető!*

Mielőtt nekikezdenénk a megoldásnak értsük meg alaposan a feladatot! Háromszögek egy családjának *minden elemét* akarjuk lefedni *minimális* sugarú körpárral. Rögtön kérdések merülnek fel: Mindig lefedhető a család minden eleme két körrel? Van minimális sugár? Az első kérdésre könnyen megnyugtató választ találunk, hiszen világos, hogy $R_{\gamma} \leq 1/(2 \sin \gamma)$ a fent bizonyított állításunk alapján. A második kérdés megválaszolásához vegyünk észre, hogy $R_{\gamma} \geq 1/4$, hiszen egy $1/4$ sugarú kör egy tetszőleges szakaszból legfeljebb $1/2$ hosszú darabot tud lefedni. Tudjuk, hogy a háromszögnek mindig van egy egységnyi oldala, így valóban $R_{\gamma} \geq 1/4$. A minimális sugár létezése ez alapján legalábbis "hihető". R_{γ} meghatározásához mindig két dolgot kell majd ellenőriznünk:

- Valóban minden H_{γ} -beli elemet le lehet fedni R_{γ} sugarú körökkel;
- Legalább egy H_{γ} -beli háromszöghöz kell is R_{γ} sugár, kisebb körökkel a fedés nem megoldható.

Vegyük észre, hogy igazából R_γ -t két irányból becsüljük. Ha ugyanis belátjuk, hogy két ϱ sugarú körrel a H_γ halmaz minden eleme lefedhető, abból következik, hogy $R_\gamma \leq \varrho$, hiszen R_γ *minimális*. Másrészt, ha belátjuk, hogy a H_γ halmaz *valamely* elemének két körrel történő lefedéséhez legalább ϱ sugarú körök kellene, akkor abból $R_\gamma \geq \varrho$ következik, hiszen R_γ sugarú körökkel a H_γ halmaz *minden* eleme lefedhető.

A megoldás során 4 különböző esetet fogunk tárgyalni, a γ szög nagysága szerint:

(i) $\gamma < 45^\circ$

(ii) $45^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$

(iii) $60^\circ < \gamma \leq 90^\circ$

(iv) $90^\circ < \gamma$.

A feladat teljes megoldásához az eddig elmondottak szerint összesen 8 részproblémát fogunk vizsgálni.

3. A tompaszögű eset

Az alsó becslésekhez nagyon hasznos lesz a következő megfigyelés. Vegyük észre, hogy a skatulyaelv miatt van olyan kör, ami a háromszög legalább két csúcsát lefedi. Ebből a következő állítás adódik.

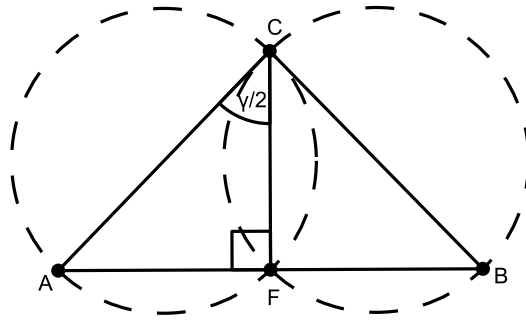
Állítás (A legrövidebb oldal korlát). *Ha egy háromszöget két egyforma sugarú körrel lefedünk, akkor a körök átmérője legalább akkora, mint a háromszög (egyik) legrövidebb oldala.*

Az alapfeladatunk megoldásánál ezt az állítást a H_γ egy speciális elemére alkalmazva alsó korlátot kapunk R_γ -ra.

Ezután nekikezdhethetünk a probléma megoldásának. Először a (iv)-es esetet tárgyaljuk, vagyis ha $\gamma > 90^\circ$. Ehhez számítsuk ki először a γ szárszögű egyenlőszárú háromszög szárának hosszát.

Legyen ABC_Δ egyenlőszárú háromszög. A C -hez tartozó CF magasság merőleges az AB oldalra és felezi azt, valamint felezi a szárszöget is, így $ACF_\perp = \gamma/2$. Írjuk fel a ACF_Δ derékszögű háromszögben definíció szerint az ACF_\perp szinuszát:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{|AF|}{|AC|}, \quad \text{amelyből} \quad |AC| = \frac{1}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

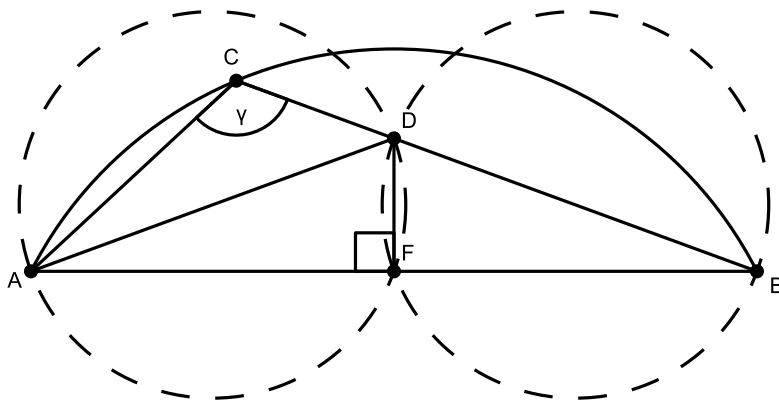


3. ábra. γ szárszögű egyenlőszárú háromszög

Vegyük észre, hogy $\gamma > 90^\circ$ miatt $|AB| > |AC|$, így a legrövidebb oldal korlátból következik, hogy

$$R_\gamma \geq \frac{1}{4 \sin \frac{\gamma}{2}}. \quad (1)$$

Be fogjuk látni, hogy két $1/(4 \sin(\gamma/2))$ sugarú körrel valóban bármelyik H_γ -beli háromszög lefedhető. Ehhez tekintsük a 4. ábrát.



4. ábra. $\gamma > 90^\circ$ eset általában

Állítsunk merőlegest az AB oldalra az F pontban. Feltehetjük, hogy az oldalfelező merőleges a BC oldalt D pontban metszi, míg az AC oldalt nem metszi. ADB_Δ háromszög egy egyenlőszárú háromszög, melynek szárszöge legalább γ , így $ADF_\angle \geq \gamma/2$, és a szinusz függvény monotonitása miatt $\sin(ADF_\angle) \geq \sin(\gamma/2)$. Írjuk fel ADF_Δ derékszögű háromszögben definíció szerint az ADF_\angle szög szinuszát.

$$\sin \frac{\gamma}{2} \leq \sin(ADF_\angle) = \frac{1/2}{|AD|}, \quad \text{amelyből} \quad |AD| \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Ebből következik, hogy AD és BD szakaszok fölé rajzolt Thalész-körök sugara legfeljebb $1/(4 \sin(\gamma/2))$. Mivel $\gamma > 90^\circ$, ezért a C csúcs az AD szakasz Thalész-körén belül van, vagyis a két Thalész-kör együtt lefedi a háromszöget.

Így

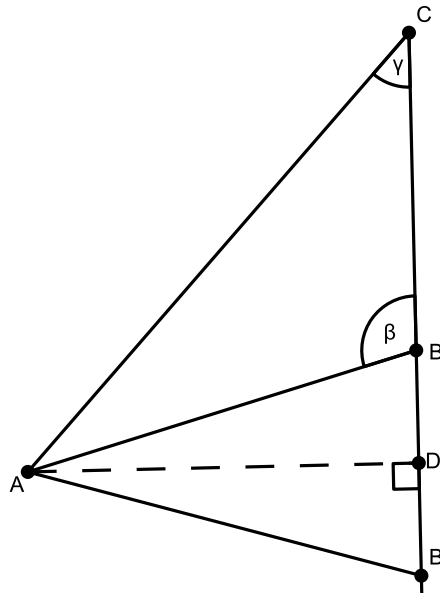
$$R_\gamma \leq \frac{1}{4 \sin \frac{\gamma}{2}}, \quad (2)$$

és az (1)-es és (2)-es egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy

$$\gamma > 90^\circ \quad \text{esetén} \quad R_\gamma = \frac{1}{4 \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

A továbbiakban két nagyon hasznos állítással foglalkozunk, mielőtt a többi esetet vizsgálnánk. Ezek hozzájárulnak a további elemzés rövidítéséhez. Először megmutatjuk, hogy $\gamma \leq 90^\circ$ esetben elegendő nem tompaszögű háromszögekre szorítkozni. Vegyük észre, hogy ha $H_1 \subset H_2$ akkor a H_2 -t fedő körök világos módon fedik H_1 -t is, másrészt H_2 fedéséhez legalább akkora körök kellene, mint H_1 -hez. Ezért ha $H_1, H_2 \in H_\gamma$, és $H_1 \subset H_2$, akkor R_γ meghatározása szempontjából H_1 irreleváns, figyelmen kívül hagyható.

2. Állítás. *Ha $\gamma \leq 90^\circ$ és $H_1 \in H_\gamma$ háromszög tompaszögű, akkor létezik $H_2 \in H_\gamma$ nem tompaszögű háromszög, úgy hogy $H_1 \subset H_2$.*



5. ábra. A tompaszög csökkentése

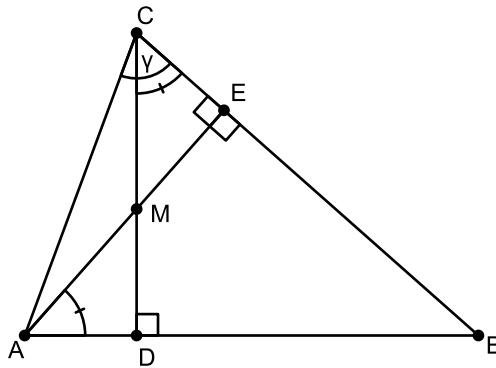
Bizonyítás. Ha $\gamma = 90^\circ$, akkor az állítás semmitmondó, mivel H_γ nem tartalmaz tompaszögű háromszöget. Legyen tehát $\gamma < 90^\circ$ és $H_1 = ABC_\Delta \in H_\gamma$ tompaszögű háromszög, $B_\angle = \beta > 90^\circ$ az 5. ábra szerint. Állítsunk merőlegest az A csúsból a BC oldal egyenesére, majd tükrözzük erre a B pontot, és jelöljük a kapott pontot B' -vel. Az $AB'C_\Delta \in H_\gamma$, hiszen $ACB'_\angle = \gamma$ és AB' oldala egységnyi, szögei pedig γ , $180^\circ - \beta$ és $\beta - \gamma$. Tudjuk, hogy γ nem tompaszög, míg $180^\circ - \beta$ szintén nem tompaszög $\beta > 90^\circ$ miatt. Így az $AB'C_\Delta$ vagy már nem tompaszögű (és ekkor kész vagyunk), vagy a tompaszöge éppen $\beta - \gamma$. Vegyük észre, hogy ezzel a tükrözéssel a tompaszöget γ -val csökkentettük. Ezt a tükrözési eljárást elég sokszor végrehajtva H_γ -beli háromszögek egy tartalmazásra nézve monoton növekvő sorozatát kapjuk, aminek utolsó H_2 eleme már nem tompaszögű. Ezzel az állítást beláttuk. \square

A továbbiakban a $\gamma \leq 90^\circ$ esetekkel foglalkozunk, és feltesszük, hogy H_γ csupa nem tompaszögű háromszöget tartalmaz.

4. "Kövér" háromszögek

3. Állítás. ([3]) *Az ABC_Δ nem tompaszögű háromszögben a C csúcsnál lévő γ hegyesszöggel szemben fekvő oldal egységnyi, M a magasságpont. Ekkor*

$$|CM| = \frac{1}{\tan \gamma}.$$



6. ábra. A magasságpont és a γ szög kapcsolata

Bizonyítás. Ha ABC_Δ derékszögű, akkor az állítás triviális. (Jegyezzük meg, hogy a feltételek szerint γ nem derékszög.) Felhetejük tehát, hogy ABC_Δ

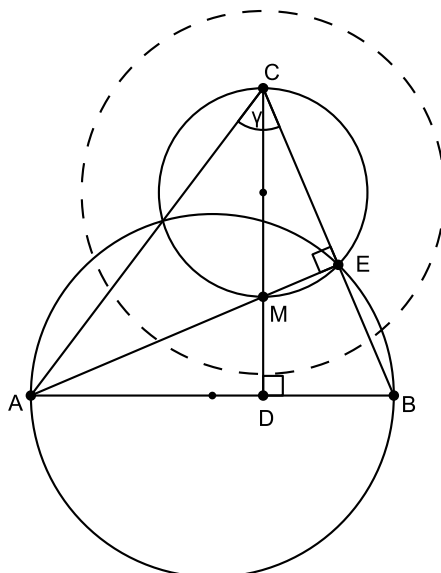
hegyesszögű. Használjuk a 6. ábra jelöléseit. Az MEC_{Δ} és az AEB_{Δ} háromszögek hasonlóságát használjuk. Mindkét háromszög derékszögű, valamint $EAB_{\angle} = MCE_{\angle}$, mert merőleges szárú szögek, így a háromszögek valóban hasonlóak. A megfelelő oldalak aránya hasonló háromszögekben egyenlő, így

$$\frac{|CE|}{|CM|} = \frac{|AE|}{1},$$

amelyből

$$|CM| = \frac{|CE|}{|AE|} = \frac{1}{\tan \gamma}.$$

Ezzel állításunkat beláttuk. □



7. ábra. Háromszög fedése két körrel, ha $45^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$

Rátérhetünk a (ii)-es esetre, amikor $45^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$. (Ez az eset tartalmazza az Arany Dániel feladat [1] megoldását.) Először is jegyezzük meg, hogy γ szárszögű egyenlőszárú háromszög legkisebb szöge γ , így a vele szemben fekvő egységnyi oldala a legrövidebb oldala. Ebből következik a legrövidebb oldal korlát miatt, hogy

$$R_\gamma \geq \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Ezután vegyük észre, hogy $\tan 45^\circ = 1$, és így $\tan \gamma \geq 1$, ha $45^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$. Ezt beírva az előző állításunkba nyerjük, hogy

$$|CM| = \frac{1}{\tan \gamma} \leq 1.$$

Az eddigiek szerint feltehetjük, hogy ABC_Δ nem tompaszögű, vagyis M a háromszögben van. Világos, hogy az AB és CM szakaszok Thalész-körei lefedik az ABC_Δ -t, lásd 7. ábrát. Így $|CM| \leq 1$ miatt kapjuk, hogy

$$R_\gamma \leq \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Az eddigiekből ((3), (4)) következik, hogy $R_\gamma = 1/2$ minden $45^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$ esetén.

Vegyük továbbá azt is észre, hogy ezek a háromszögek nem fedhetők le "gazdaságosan" két egyforma sugarú körrel, a fedések mindig "löttyögnek". Ennek szemléletes oka, hogy a vizsgált háromszögek "kövérek". (7. ábra)

5. "Vékony" háromszögek

Térjünk rá az (i)-es esetre, vagyis amikor $\gamma < 45^\circ$! Legyen $H \in H_\gamma$ tetszőleges, és tekintsük a háromszög k körülírt körét. Kicsinyítsük ezt a kört úgy, hogy A és B csúcsokon továbbra is átmenjen, így kapjuk a k_2 kört, amelynek középpontja O_2 . (Az O_2 pont az AB oldal felezőmerőlegesére esik.) A k_2 kör az AC oldalt D , a CB oldalt pedig E pontban metszi, a 8. ábra szerint. Ezután DEC_Δ háromszög köré írjuk k_1 kört, amelynek középpontja legyen O_1 .

Állítás. O_2 pont választható a H háromszög belsejében úgy, hogy a k_1 és k_2 körök sugarai egyenlőek.

Bizonyítás. Mozgassuk O_2 -t az \overline{OF} szakaszon O -ból F felé. A kezdőállapotban, vagyis amikor $O_2 = O$, a k_2 kör sugara R , a k_1 kör ponttá fajul (sugara 0). Vegyük észre, hogy a mozgatás során a k_1 kör sugara folyamatosan nő, míg k_2 kör sugara folyamatosan csökken. Ha megmutatjuk, hogy $O_2 = F$ végállapotban a k_2 kör sugara kisebb, mint a k_1 kör sugara, akkor az állítás egyszerű folytonossági megfontolásból adódik. Tekintsük tehát azt az esetet, amikor $O_2 = F$ és a k_2 kör éppen az \overline{AB} szakasz Thalész-köre, így sugara $1/2$. Vegyük észre, hogy ekkor D és E pontok a B -ből ill. A -ból induló magasságok talppontjai. Ebből következik, hogy k_1 kör megegyezik a \overline{CM} szakasz Thalész-körével. A 3. Állítás szerint ezen kör sugara éppen $1/(2 \tan \gamma)$, ami $\gamma < 45^\circ$ miatt nagyobb, mint $1/2$. Ezzel az állítást beláttuk. \square

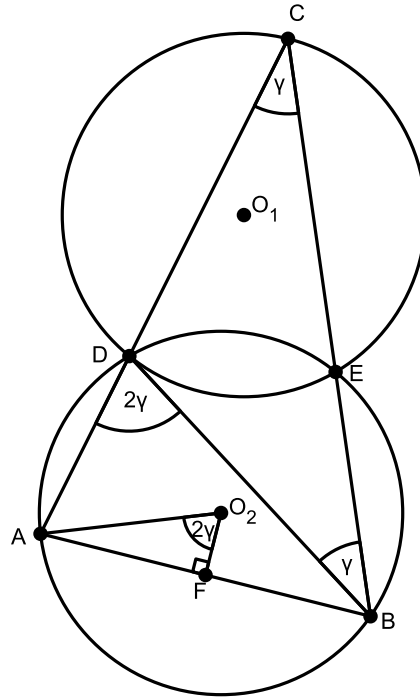
Válasszuk tehát O_2 -t úgy, hogy a két kör ugyanakkora sugarú legyen (8. ábra). Ekkor a $DBC_\angle = \gamma$, mert ACB_\angle és DCB_\angle ugyanakkora sugarú körökben, egyenlő hosszúságú köríveken nyugvó kerületi szögek. Így DBC_Δ egyenlőszárú háromszög, amelynek ADB_\angle egy külső szöge, amiből $ADB_\angle = 2\gamma$

következik. A középponti és kerületi szögek tétele alapján pedig $AO_2B_{\perp} = 4\gamma$, és így $AO_2F_{\perp} = 2\gamma$. Ezek alapján kiszámíthatjuk a k_1 és k_2 körök közös sugarát: tekintsük az O_2AF_{\perp} -et. Írjuk fel az AO_2F_{\perp} szinuszt ebben a háromszögben definíció szerint.

$$\sin 2\gamma = \frac{|AF|}{|AO_2|} = \frac{1/2}{|AO_2|}, \quad \text{amelyből} \quad |AO_2| = \frac{1}{2 \sin 2\gamma}.$$

Ezzel beláttuk, hogy $\gamma < 45^\circ$ esetén

$$R_{\gamma} \leq \frac{1}{2 \sin 2\gamma}.$$



8. ábra. Háromszög fedése két körrel, ha $\gamma < 45^\circ$

Megmutatjuk, hogy ha $\gamma < 45^\circ$, akkor a γ szárszögű, egyenlőszárú háromszög nem fedhető le, két $1/(2 \sin 2\gamma)$ -nál kisebb sugarú körrel. Jelöljük a γ szárszögű, egyenlőszárú háromszöget $E(\gamma)$ -val, ennek csúcsait rendre A -val, B -vel és C -vel, úgy hogy $C_{\perp} = \gamma$. Tegyük fel, hogy az $r < 1/(2 \sin 2\gamma)$ sugarú k_1 és k_2 körök együtt lefedik $E(\gamma)$ -t. Korábban számolással igazoltuk, hogy az $E(\gamma)$ háromszög szárai $a = b = 1/(\sin(\gamma/2))$ hosszúak. Tegyük fel, hogy a k_1 és a k_2 körök közül az egyik tartalmazza a C csúcsot, és tartalmaz még

egy másik csúcsot is. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez A . Ekkor az r sugár legalább $b/2$, hiszen egy r sugarú kör tartalmaz egy b hosszú szakaszt, amiből

$$r \geq \frac{b}{2} \geq \frac{1}{2 \sin(\frac{\gamma}{2})} > \frac{1}{2 \sin 2\gamma},$$

mivel a szinusz monoton nő a $[0^\circ, 90^\circ]$ intervallumon, és $0^\circ < \gamma/2 < 2\gamma \leq 90^\circ$, ami ellentmondás.

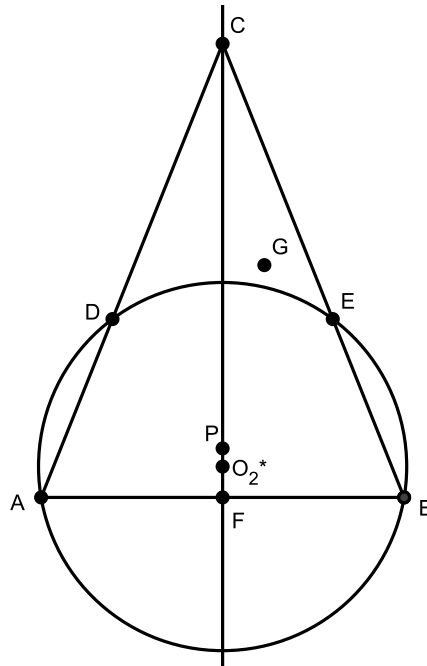
Feltehetjük tehát, hogy sem a k_1 , sem a k_2 kör nem tartalmaz (legalább) két csúcsot, amelyek közül az egyik C . Ez csak úgy lehetséges, ha a k_1 kör tartalmazza a C csúcsot, míg a másik két csúcsot nem, míg a k_2 kör tartalmazza az A és B csúcsokat, de a C -t nem. Megmutatjuk, hogy az is feltehető, hogy a k_2 kör a kerületén tartalmazza az A és B csúcsokat. Tekintsük ehhez azt az r sugarú, O_2^* középpontú k_2^* kört, amely kerületén tartalmazza az A és B pontokat, és $O_2^* \in E(\gamma)$.

4. Állítás.

$$k_2^* \cap E(\gamma) \supseteq k_2 \cap E(\gamma).$$

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $G \in k_2 \cap E(\gamma)$ pont, ami nincs benne $k_2^* \cap E(\gamma)$ -ban. Tekintsük továbbá az $ABG_\Delta \hat{k}$ körülírt körét, ennek középpontja legyen P , az AB oldal felezőpontja pedig F , lásd 9. ábra. Mivel a P pont rajta van az AB oldalfelező merőlegesén, ezért két eset lehetséges, vagy P a CO_2^* szakaszon van, vagy P a CF félegyenesen van. Ha P a CO_2^* szakaszon van, akkor $|PA| > |AO^*| = r$, mivel $AO_2^*C_\perp$ világos módon tompaszög, ellentmondás, mivel k_2 kör tartalmazza ABG_Δ -t. Ha P a CT félegyenesen van, akkor pedig $|PG| > |O_2^*G|$, mert $PO_2^*G_\perp$ tompaszög, ismét ellentmondás. Ezzel az állítást beláttuk. \square

Ez azt mutatja, hogy a k_1 kör választásától függetlenül lehet a k_2 kör helyett a k_2^* választani, ezzel a fedést nem rontjuk el. Messe a k_2^* kör AC és BC szakaszait rendre D és E pontokban. Világos, hogy k_1 kör lefedi a CDE_Δ -t, ezért k_1 kör r sugara legalább annyi, mint CDE_Δ körülírt körének ϱ sugara, vagyis $r \geq \varrho$. A felső becslésnél látott számolásból következik, hogy $r = 1/(2 \sin 2\gamma)$ választással $\varrho = 1/(2 \sin 2\gamma)$ adódna, és nyilvánvaló módon ha r -t csökkentjük, akkor ϱ növekszik. Ebből azonnal következik, hogy $r < 1/(2 \sin 2\gamma)$ miatt $\varrho > 1/(2 \sin 2\gamma)$, s így $r < \varrho$, ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy ha $\gamma < 45^\circ$, akkor $R_\gamma = 1/(2 \sin 2\gamma)$, amivel az (i)-es esetet is megoldottuk.



9. ábra. A k_2^* kör

6. A hiányzó eset

Végül rátérhetünk a (iii)-as esetre, amikor $60^\circ < \gamma \leq 90^\circ$! Az eset megoldásánál a korábbi eredményeket fogjuk használni. Először ismét alulról becsljük R_γ -t a legkisebb oldal korlát segítségével. A $\gamma > 90^\circ$ esettel megegyezően kapjuk, hogy

$$R_\gamma \geq \frac{1}{4 \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

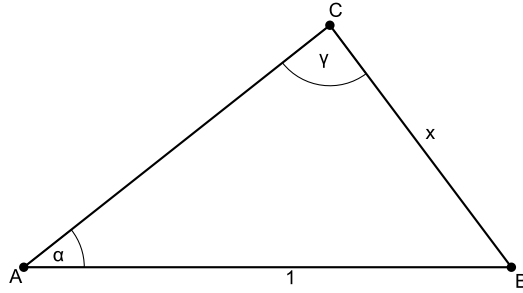
A felső becslésnél két esetet különböztetünk meg a vizsgált háromszög legkisebb szöge szerint. Az eddigiekből tudjuk, hogy

$$R_\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2 \sin 2\gamma}, & \text{ha } \gamma < 45^\circ \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 45^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ \end{cases} \quad (5)$$

Jegyezzük meg, hogy továbbra is elegendő nem tompaszögű háromszögekkel foglalkoznunk. Világos, hogy ebben az esetben γ nem lehet a legkisebb szög a háromszögben. Ezért tegyük fel, hogy α a háromszög legkisebb szöge, $0^\circ < \alpha < 60^\circ$. Két alesetet különböztetünk meg:

I. $0^\circ < \alpha < 45^\circ$

II. $45^\circ \leq \alpha < 60^\circ$.



10. ábra. Az x oldal számítható szinusztétellel

Vizsgáljuk először az I. esetet, amikor $\alpha < 45^\circ$. Tekintsük tehát az ABC_Δ háromszöget, amelynek legkisebb szöge $\alpha < 45^\circ$ és $60^\circ < \gamma \leq 90^\circ$. Legyen a háromszög α szögével szemközti oldala $BC = x$ a 10. ábra szerint. Alkalmazzuk a Szinusztételt erre az AB és BC oldalakra! Kapjuk, hogy

$$\frac{x}{1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}. \quad (6)$$

Korábbi eredményünkből, (5)-ből egy x arányú hasonlóságot alkalmazva következik, hogy háromszögünk lefedhető két

$$xR_\alpha = \frac{x}{2 \sin 2\alpha}$$

sugarú körrel. Helyettesítsük be xR_α -ba x helyére (6) kifejezést! Ezután elemi átalakításokkal kapjuk, hogy

$$xR_\alpha = \frac{x}{2 \sin 2\alpha} = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \gamma \sin 2\alpha} = \frac{1}{4 \sin \gamma \cos \alpha} = \frac{1}{4 \sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{1}{2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \alpha} \leq \frac{1}{4 \sin \frac{\gamma}{2}},$$

mert

$$2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \alpha \geq 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,$$

hiszen $\gamma \leq 90^\circ$ és $\alpha < 45^\circ$.

Ezután térjünk rá a II. esetre, amikor $45^\circ \leq \alpha < 60^\circ$! Az I. esetnél már láttuk, hogy $x = \sin \alpha / \sin \gamma$. Ebből és (5)-ből ismét hasonlóságot alkalmazva nyerjük, hogy a háromszög lefedhető két $xR_\alpha = x/2 = \sin \alpha / 2 \sin \gamma$ sugarú körrel. Alakítsuk xR_α -t:

$$xR_\alpha = \frac{x}{2} = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \gamma} = \frac{\sin \alpha}{4 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{4 \sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\gamma}{2}}. \quad (7)$$

Mivel $\alpha \leq \beta$, ezért $\alpha + \gamma/2 \leq \beta + \gamma/2$, és így $\alpha \leq 90^\circ - \gamma/2$. Ebből

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \frac{\gamma}{2})} \leq 1$$

következik, amit beírva (7)-ba kapjuk, hogy

$$xR_\alpha \leq \frac{1}{4 \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Mindkét esetben megmutattuk, hogy a háromszög lefedhető két $1/(4 \sin(\gamma/2))$ sugarú körrel, ezért

$$R_\gamma \leq \frac{1}{4 \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Ezzel beláttuk, hogy $60^\circ < \gamma \leq 90^\circ$ esetén

$$R_\gamma = \frac{1}{4 \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

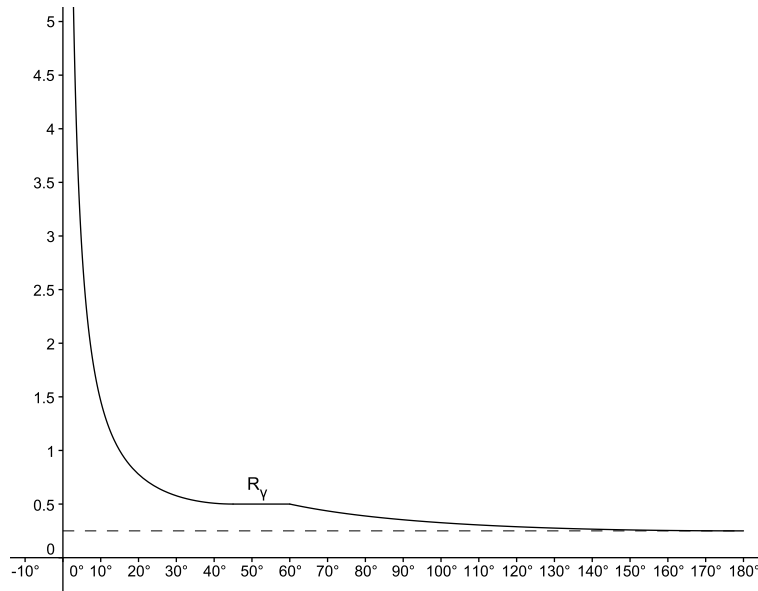
7. Fő eredmény

A korábbi négy szakaszban leírtak igazolják a következő tételt, amely cikkünk fő eredménye.

Tétel. *A vizsgált R_γ függvény a következők szerint számítható:*

$$R_\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2 \sin 2\gamma}, & \text{ha } \gamma < 45^\circ, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 45^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ, \\ \frac{1}{4 \sin \frac{\gamma}{2}}, & \text{ha } 60^\circ < \gamma. \end{cases}$$

Az R_γ függvény viselkedését szemlélteti a 11. ábra.

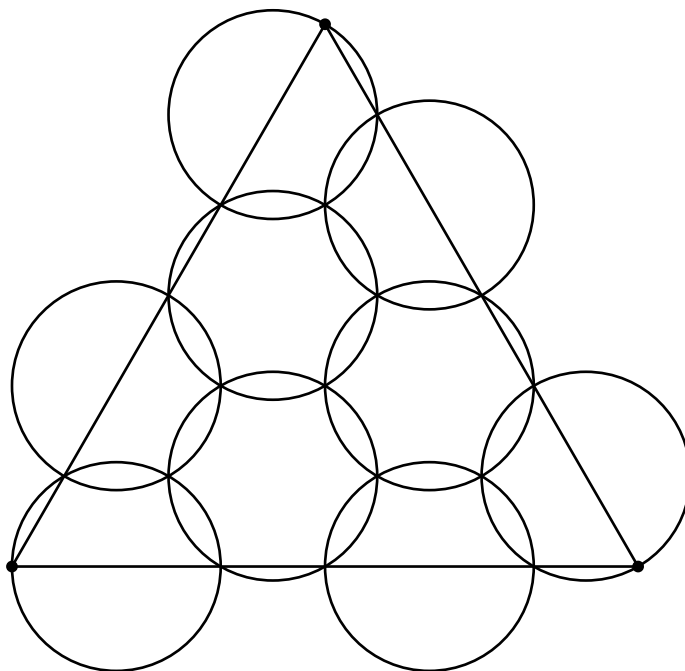


11. ábra. Az R_γ függvény grafikonja

További érdekes kérdéseket tehetünk fel a tételünkkel kapcsolatban. A legtermészetesebb közülük, hogy mi történik ha kettő helyett három, vagy még több kört használunk.

Probléma. *Határozzuk meg azt a minimális $R_\gamma(n)$ sugarat, amire teljesül, hogy bármely $H \in H_\gamma$ háromszög lefedhető n darab $R_\gamma(n)$ sugarú körrel!*

A fenti kérdés már $n = 3$ -ra is meglehetősen nehéznek tűnik. A korábbi hasonló eredmények szinte kizárólag szabályos háromszögre vonatkoznak, pontosabban a vizsgált kérdés a következő: határozzuk meg a minimális r_n sugarat úgy, hogy az egység oldalhosszúságú szabályos háromszög lefedhető legyen n darab r_n sugarú körrel. Az r_n pontos értéke azokban az esetekben ismert csak, ha $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ vagy 9 , lásd [4]-t illetve 12. ábrát. Gazdaságos fedéseket találtak számítógéppel [5], ha a fedő körök száma legfeljebb 36 , de ezek optimalitása általában nem bizonyított. További érdekes, különböző alakzatokkal való kis elemszámú fedéseket és pakolásokat találhatunk [7] honlapon.



12. ábra. Szabályos háromszög optimális fedése 9 körrel

Szintén érdekes, bár az előzőektől kissé más természetű a következő kérdés.

Probléma. *Írjuk le az $R_\gamma(n)$ sorozat aszimptotikus viselkedését, amint $n \rightarrow \infty$!*

Ehhez lényegében éles becslésekre lenne szükségünk $R_\gamma(n)$ -re, ha n "nagyon nagy".

Ezeket kívül háromszögek helyett vizsgálhatunk más poligonosztályokat, sőt akár fedhetünk köröket is körökkel. A téma iránt mélyebben érdeklődő olvasónak ajánljuk [2] monográfiát, amelyben hasonló kérdésekről és az ismert megoldási technikákról kaphatunk átfogó képet.

Hivatkozások

- [1] Arany Dániel Matematikaverseny, Haladók, Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók versenye, 1999. év, Harmadik (döntő) forduló, 3. feladat.
- [2] ifj. Böröczky Károly: Finite packing and covering, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [3] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1999./4.szám., C.539. gyakorlat
- [4] H. Melissen: Loosest circle coverings of an equilateral triangle, *Math. Mag*, **70** (1997), 119–125.
- [5] K. J. Nurmela: Conjecturally optimal coverings of an equilateral triangle with up to 36 equal circles, *Experiment Math.*, **9** (2000), no. 2, 241-250.
- [6] Obádovics J. Gyula: Matematika, Műszaki Kiadó, Budapest, 1962.
- [7] <http://www2.stetson.edu/~efriedma/packing.html>