

# *Ph-üles D-eluxe*

Kevei Péter

Vígh Viktor

***június 12., csütörtök, 22:26***

*...egyértelmű külső normális... Francba, mi is az a külső normális?*

***június 12., csütörtök, 23:37***

*...kétszer folytonosan... Miért nem kezdtem időben készülni?*

***június 13., péntek, 00:00***

*A kivégzés napja érkezett. Tanulni kell, utolsó vérig. A záróvizsgán nem bukhatok meg. Miért törölték el, hogy lehessen könyvet használni?*

Nagyot sóhajtvá tovább olvasod a véget nem érő jegyzethalmot.

***június 13., péntek 01:27***

*Még egy kávé kéne, reggelig még bevágom a funkanalt.*

***június 13., péntek, 02:19***

*Pihenek tíz percet. Aztán nekiállok az algebrának. Nagyon álmos vagyok, de muszáj.*

***június 13., péntek, 03:14***

*Naaááagyon áááálmos va.....*

## A megpróbáltatások elkezdődnek

Egy nagyobb helyiségben találod magad. Furcsán berendezett tanterem ez, mindenhol matematikai összefüggések vannak a falakon, a plafonról különböző mértani testek lógnak. A katedrán meglett öreg úr áll a táblánál. Vajon ki lehet? Barátságosan köszönt:

—Drága fiam, drága fiam. Foglalj helyet kérlek, tetszésed szerint. Halom, téged is magával ragadott a szenvedély; a gondolkodás, a problémamegoldás utánozhatatlan öröme, a szellemi kihívások csúcsának meghódítása. Remélem egyszerű kis példámot közösen megoldva ismét megtapasztalhatjuk a katarzist.

*Amint látod, felírtam a számokat 1-től 100-ig a táblára. Játszani fogunk velük. Kiválasztunk közösen kettőt közülük, letöröljük őket, majd felírjuk helyettük a szorzatuk és összegük összegét. Így folytatjuk, amíg már csak egyetlen marad majd. Ha megmondod előre, hogy mi fog maradni, akkor továbbmehetsz.*

A megoldáshoz adok tanácsot is, rögtön négyet:

- 1, Jól értsd meg a problémát!
- 2, Gondosan gyűjtsd ki az adatokat. Keress összefüggést az adottak és az ismeretlen közt!
- 3, Ha nem boldogulsz, kutass az elmédben rokon példák után. Talán segíthetnek.
- 4, Ha már elegendő felfedezést tettél, készíts tervet, majd hajtsd végre!

Hajrá, sok szerencsét!

## Sakkban tartanak

Sikeresen megoldottad a rejtélyt! Egy szemvillanás múlva már egy másik szobában találsz magad. Ejha, de micsoda szoba ez! Királyi, mit királyi, egyenesen cári pompa. A helyiségben félhomály uralkodik, csak a kandallóban ropogó tűz ad egy kis fényt. Méltóságteljesen ül a kandalló előtti karosszékekben valaki, csak a sziluettje látható. Így is félelmetes tekintélyt sugároz. Vajon mindent tud?

—Johann és Jacob mondta, hogy valószínűleg vendégem lesz. Isten hozott fiatal kollégám! Kérdezhetnék egyenesről, körről, komplex vagy valós számról, de akár poliéderekről is. Azonban itt most nem azt kell bizonyítanod, hogy az 5 év egyetem alatt sok struktúra, képlet és tétel a fejedbe vándorolt – addig még alhatsz egy kicsit. Itt, most arra vagyok kíváncsi, hogy tudsz-e még egyszerűen gondolkodni.

*Nagy sakkverseny volt Kalinyingrádban nem is oly rég. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. Furcsa jutalmazási szabályt hirdettek azonban: mindenki díjat kapott, aki minden versenytársát legyőzte vagy legyőzött valakit, aki ezt a versenytársat legyőzte. Végül azonban csak egy ember távozott díjjal. A te dolgod, hogy megmutasd, hogy az egyetlen díjazottunk mindenkit legyőzött.*

Kis gondolkodás után így szólsz:

—Csak, hogy tisztázzuk a szöveget: egy  $X$  versenyző akkor kap tehát díjat, ha bármely másik  $A$  versenyzőre igaz, hogy  $X$  legyőzte  $A$ -t, vagy van egy olyan  $B$ , hogy  $X$  legyőzte  $B$ -t és  $B$  legyőzte  $A$ -t. Jól értem?

—Teljesen jól.

—De hiszen ekkor csak úgy kaphat valaki díjat, ha mindenkit legyőz, nem?

—Gondold meg jobban!

## Tini dinka teknőcök

A következő szobában különös látvány fogad: egy középkorú, öltönyös férfi négykézláb ereszkedve teknősbékákkal foglalatoskodik.

— Kerüljön beljebb fiatalember! Egy pillanat és elrendezem a teknőseimet.

Közben körülnézve a szobában meglepődve tapasztalod, hogy nincsenek bútorok. A földön elszórva kisebb-nagyobb távcsövek vannak. Az ablak éppen egy hatalmas almafára néz. Vendéglátód végez a teknőseivel és hozzád lép.

— Ne ijedjen meg, még nem bolondultam meg teljesen. Elmagyarázom mit csináltam, illetve próbáltam csinálni éppen. Leo barátomtól hallottam a következő feladatot:

*Egy 1 méter oldalhosszú négyzet négy csúcsába leteszünk egy-egy betanított teknőst úgy, hogy mindegyik az órámutató járása szerinti szomszédját követi. A teknősök sebessége konstans, 1 méter/perc. Mikor találkoznak?*

Gondoltam modellezem a problémát, de ezek a nyavalyás teknősök összevissze mászkálnak. Remélem tud nekem segíteni és nem maradok szégyenben Leo előtt.

## Kémek és városállamok

Míves márványcsarnokban térsz magadhoz. Klasszikus szépségű, középkorú férfi áll előtted, éppen fürdeni készül.

—Jaj, gyere már közelebb, ne légy szégyellős te kis huncut! Mit szólnál, ha áldoznánk Dionüszosznak és aztán tán Erosnak és Amornak is? Hmm? Egyébként rólam már elneveztek egy szitát. Azért, mert szép vagyok. Neked is tetszem, igaz? Mellesleg lemértem az Egyenlítőt is. Okos vagyok és híres, ezért próbára teszek!

Hosszú csönd áll be, mintha gyötrődne valamin beszélgetőtársad.

—Nagyon tetszel nekem - böki ki végül. Véd jól az eszedbe, hogy az egyenlítőtlenségek általában nehezek, de egyik sem az, aminek látszik. Tetszel nekem, Zeuszra mondom, nem szeretném, ha elbuknál. Egyszerű problémát adok neked ezért, de óvatos légy, könnyű hibázni.

Egyiptomi tartózkodásom alatt oldottam meg a városállamok kémproblémáját, ha neked is sikerül teljesen kielemezned, továbbmehetsz -nem bánom.

*A városállamok közt nagy a versengés, de szigorúak a törvények. Az év első napján minden városállam az egyik hozzá legközelebb lévő városállamba egy kémet indított. Végül azonban összesen csak 2 városállamba érkezett kém, a két legfejlettebbe természetesen. Egyiptomban rájöttem, hogy ha eggyel több városállam lett volna, akkor már legalább 3 helyre érkezett volna kém. Hány városállam van?*

### Hivatali visszaélés

Egy precízen berendezett szobában találod magad. Mindenfelé hatalmas mappák, névjegyzékek, törvénykönyvek. Középen egy íróasztalnál egy középkorú úr dolgozik. Nagy gallérú, bő ruhát visel. A kor XVI–XVII. század lehet. Vendéglátód azonnal megszólít.

— Üdvözlöm uram, már nagyon vártam. Egy pillanat és az öné vagyok, csak még be kell könyvelnem Franz d'Épinay úr kérelmét.

Kíváncsian várod mi fog történni. A szoba lakója eddig teljesen normálisnak tűnik, erre aztán tényleg nem számítottál. Alaposabban körülnézve észreveszel egy könyvespolcot, melyen mindössze kettő könyv áll. Az egyik jó állapotban van, címét messziről ki tudod betűzni, a Biblia. A másik egy rossz állapotú, rongyosra olvasott vastag könyv.

— Már kész is vagyok. Látom éppen a "könyvtáramat" vizsgálja. Hiába, sajnós még most is nagyon lefoglal a munkám, nincs időm semmire. Azt tudja, kedves uram, hogy ez a két könyv fogyott a legnagyobb példányszám-ban a világon? Persze a Bibliának nagyobb a reklámja. Térjünk végre a tárgyra. Hallottam tanult kollégám Önhöz intézett tanácsait. Én pedig azt mondom, hogy a kemény munka is eredményre vezethet. Nem kell minden mögött csavart sejteni, időnként a verítékkal végzett munkának is lehet szépsége. Láthatja, én sem vetem meg a kemény számítások elvégzését. Egyébiránt sajnálattal kell közölnöm, hogy kénytelen vagyok korlátozni személyes szabadságát mindaddig, míg az alábbi feladatot meg nem oldja.

*Határozd meg az összes olyan természetes számot, melynek pontosan tíz nemnegatív osztója van és az osztók reciprokösszege 2!*

## Az unatkozó hadvezér elfoglalja magát

Félve érkezel a következő szobába, egyre inkább érzed, hogy eddig csak a jó szerencsédnek köszönheted, hogy nem ragadtál örökre bezárva (valahol az Elm utcában). Nincs időd felocsúdni, rögtön neked ront egy alacsony, kalapos ember egy karddal hadonászva.

—Kémkedni jöttél, igaz? Egy rossz mozdulat, és hívom az őrséget.

Feszült csendben állsz, nem tudsz mit mondani. A szobában átható vörösbor illat terjeng. A falakon térképek lógnak, rajtuk különféle színes cetlik. Az alacsony ember örült tekintettel vizsgálgat. Hosszú percek múlva ismét megszólal:

—Nem látszol veszélyesnek. Mi a munkád?

—Matematikusnak tanulok - válaszolsz megszeppenve.

—Helyes. Kitűnő. Értesz a háromszögekhez? Persze, hogy értesz. Segíteni fogsz! Mert én úgy akarom. Igen, igen, én parancsolhatok neked, mert én mindenkinek parancsolok. Mindenkinek. Érted, ugye?

*Na, szóval ott tartottunk, hogy háromszög. Most akkor rajzolok egy tetszőlegest, hívjuk Angliának, majd rajzolok minden oldalára "kifele" egy újabb szabályos háromszöget. Ezek középpontjai szintén háromszöget határoznak meg, legyen ennek neve Nagy-Britannia. Most rajzolunk "befele" is minden oldalra egy-egy szabályos háromszöget, amelyek középpontjai egy harmadik háromszöget határoznak meg, Essexet. De nem tudom kiszámolni, hogy ha kihagyom Nagy-Britannia területéből Essex területét, akkor az vajon hányszorosa lesz Anglia területének, és főleg miért. Ha erre megfelelsz, akkor még meggondolom a sorsod. Nagy-Britanniával mindig csak a baj van...*

## Kockán forog

Épphogy résnyire nyitod az ajtót, a szobából dühös ordítás szűrődik ki.

— Nem szégyelled magad? Megbukni matematikából, ráadásul éppen geometriából! Hogy néz ezentúl apád az emberek szemébe? Hogy megyek ki az utcára?

Félve lépsz a szobába, és látod, hogy egy férfi kiabál egy tízévesforma fiúval, aki egy íróasztalnál ül és tanul. Az örvongó úr feléd fordul:

— Jöjjön csak beljebb fiatalember! Majd maga segít a fiamnak a házi feladatát megoldani. Mert én aztán nem fecsérlem tovább a drága időmet. Addig a szemem elé ne kerüljete, míg mind a 22 kocka a helyén nem lesz! A semmirekellő fiam majd beavatja a példa részleteibe.

Csendesen leülsz a fiú mellé, aki kis bátorítás után előadja a feladatot:

*Egy egységnyi oldalhosszúságú kockára minél több tömör egységkockát kell ragasztani úgy, hogy minden újabb kocka lappal érintkezzen az eredetivel.*

—Remélem tudsz segíteni, én még messze vagyok a 22 kockától.

—Én ezt az egészet nem igazán értem. Pontosán mit jelent, hogy lappal érintkezzen?- kérdezel vissza bizonytalanul.

—Egy kockát akkor tudsz ráragasztani az eredetire, ha található rajtuk egy-egy lap, melyek közös részének területe több mint nulla. Természetesen semelyik két kocka nem lóghat egymásba, hiszen tömörek.

—Hajaj, egyre nehezebbnek hangzik...

—A Tanító Úr azt mondta az iskolában, hogy 20-nál többet nem is lehet felragasztani. Nekem csak 16 sikerült, ezért kérdeztem meg apámat. Teljesen kikelt magából. Először a Tanító Urat pocskondiázta, hogy tehetségtelen senki, és hogy az Ő megoldása teljes tévút. Azután kikelt magából ellenem is. Na, inkább gondolkozzunk, mert ha akkor se lesz kész, amikor visszajön... Biztosan van megoldás, apám szigorú, és hirtelen haragú, de a matematikával nem viccelődik.



### Akit az istenek szeretnek

A következő szobában egy húszéves srác egy íróasztalnál elmélyülten ír. Sokáig fel sem pillant, így van időd alaposan körülnézni. Az íróasztalon levő nagy halom feljegyzés, számolás közül barátunk néha felkap egy-egy lapot, és másol. A szobában egyébként is mindenütt sűrűn vannak papírok, elszórva egy-két könyv is. A vendéglátód asztalán egy pisztoly hever, ez valahogy nem illik a képbe. Az íróasztalon kívül az egyetlen bútor egy ágy. A falakat francia nemzeti zászló díszíti. Az egyik sarokban néhány 'Lajos Fülöp takarodj' illetve 'mondjon le' feliratú transzparens van.

— Már szóltak, hogy jössz és adnom kell valami triviális feladatot. Most nincs sok időm ilyen hülyeségekkel foglalkozni. Le kell írjam a felfedezéseimet, hátha száz év múlva már lesz valaki, aki képes felfogni és értékelni őket. Elképesztő kik nevezik manapság matematikusnak magukat: Cauchy, meg az a hülye Poisson. Na mindegy, a meg nem értett zsenik sorsa se rossz. Lássuk azt a triviális feladatot. Bár ahogy elnézlek...

*Bizonyítsd be, hogy 4 különböző valós szám között mindig van olyan kettő: a és b, amelyekre*

$$\frac{1 + ab}{\sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + b^2}} \geq \frac{1}{2}.$$

### M-m-még e-egy b-bo-bolond

Egy egyszerű, szegényen berendezett, tiszta szobában találod magad. A szoba lakója fel-alá rohangál, hangosan, erősen dadogva beszél.

— ... a-az a-a p-pi-piszok sz-sz-szöröss-t-talp-pú d-d-digó. P-Pedig m-m-megígért-te, ho-ho-hogy n-nem k-közli. T-t-tehetségtelenn marh-ha. A-ars M-magna, sz-szerényen. A-az én erredm-ményem. M-m-megessküdtött m-mindennre, am-mi sz-szent. Á-átvert. M-m-most m-mindenki úgy ism-meri, m-mint a-az ő k-kép-plete. A-az é-én er-redm-ményemm. K-kisemmiztek. N-nálam v-volt a t-t-tudáss. M-mindek-kit l-legacyzhe-hettem v-volna.

A férfi negyvenes évei közepén járhat. Jelentős arcszőrzzettel rendelkezik, ennek ellenére világosan kivehető egy nagy vágás a száján. Végre észrevesz. Ködös tekintetét rád emeli. Hozzád szalad, ujjával hadonászva magyaráz.

— T-te az-zért t-t-tudod, h-ho-hogy a k-képlet a-az enyém. Cs-csak b-becsaptak. Én t-találtam m-meg, én jöttemm r-rá. V-valammi f-f-feladat kell, m-mi? A-az a p-piszok, b-be-becsapott. N-ne b-bízz s-ss-senkib-ben. M-még B-B-Br-Br-Bres-s-s-ciából is k-kitúrtak. N-na oldd m-meg e-ezt, és m-menj, h-h-hírdesd az i-i-igazs-ságot!

*Bizonyítsd be, hogy ha az*

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

*egyenlet valós  $x_1$ ,  $x_2$  és  $x_3$  gyökeire  $x_1 < x_2 < x_3$ , akkor*

$$x_3^2 - x_2^2 = x_3 - x_1!$$

## Valószínű elbukók

Egy modern berendezésű szobába érkezel. Rendezetlen frizurájú, gyorsbeszédű, ideges kinézetű ember fogad.

—Végre, már nagyon vártalak. Kaptam egy levelet Kolmogorovtól. A múltkor is csúnyán rászédett azzal a legyes-bringás feladatával. Nem hiszem el, hogy rávett, hogy majdnem 2,4 másodpercet elpazaroljak egy triviális szummára, mikor a megoldás 0,7 alatt is meglehetősen volna, egy sima szorzással. Bosszantó, felettébb bosszantó. Most itt ez az egyenlőtlenség. Egy triviális egyenlőtlenség. 4,3 másodperc alatt bizonyítottam be, de félek Kolmogorov barátom ismét kinevet. Barátom, honfitársam... Benned minden bizodalمام. *Bizonyítsd egyszerűen, és már mehetsz is, viheted tovább nemzetünk hírnevét.  $x$  egy 0 és 1 közé eső valós számot jelöl,  $m$  és  $n$  pedig pozitív egészeket.*

$$(1 - x^n)^m + (1 - (1 - x)^m)^n \geq 1$$

## Nincs kiút

Ahogy belépsz a szobába, rögtön látod, hogy itt valami nem stimmel. A szobában valahogy semmi sem teljes: a festés nincs befejezve, a középen levő asztalnál csak három szék van, egy izzó kiégett a csillárban, ... Az is hamar világossá válik, hogy a szoba lakója sincs teljesen rendben. Egy ijesztően sovány, szemüveges, idős bácsi sápadtan ül az ágya szélén. Lassan felnéz, majd megszólal:

— Üdvözlöm fiatal kolléga, Niccolo már értesített, hogy nemsokára itt lesz. Ne ijedjen meg, azért vagyok ilyen sovány, mert mióta az én Adelém bekerült a kórházba, egy falatot sem eszem. Tudja ebben a helyben az a jó, hogy azon túl, hogy a Nagy Könyvbe bele tudok pillantani, el tudok intézni bizonyos világi dolgokat is. Na, de térjünk is gyorsan a tárgyra. Ön a holnapi záróvizsgáján pontosan akkor fog a Jordan-normálalakból vizsgázni (és így megbukni), ha a következő állítása igaz. De figyeljen, csak akkor mehet tovább, ha ehhez adott szavamat meg kell tartanom. Nos?

### Sugallat

Szervusz barátom, Erdős Pál vagyok. Nagyon ügyes voltál, ezért segítek neked. Megsúgom mit fognak kérdezni tőled a mai vizsgán. Már bizonyítottad, hogy a matematikához értesz, de egy matematikusnak fontos, hogy ismerje és elismerje kollégáit is. Írd fel a híres matematikusok vezetéknévét akikkel találkoztál, összesen 11-t. (A görög nevekben a nem ejtett 'h' hangokat ne írd.). A témád a következő lesz:

*VIII./6. IV./13. VII./4. V./4. VI./6. I./3. X./4. II./1. XI./5. III./2. IX./1.*

Mentőövek:

1, Legyen  $K$  konvex lemez. Mutassuk meg, hogy elhelyezhető a síkon 6 darab  $K$ -val egybevágó konvex lemez úgy, hogy ezek mindegyikének van  $K$ -val közös határpontja, de a hét síkidom közül semelyik kettőnek nincs közös belső pontja.

2, Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletrendszert:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$$

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3.$$

3, Egy mozgólépcsőn 125 lépcsőfok van. Az egyenletesen felfelé haladó mozgólépcsőn mi is elindulunk felfelé, és 45 lépcsőfok megtétele után felérünk. Legközelebb már 55 lépcsőfokot tudunk így módon megtenni. (A mozgólépcső sebessége nem változott.) Hányszorosára sikerült a sebességünket növelni?