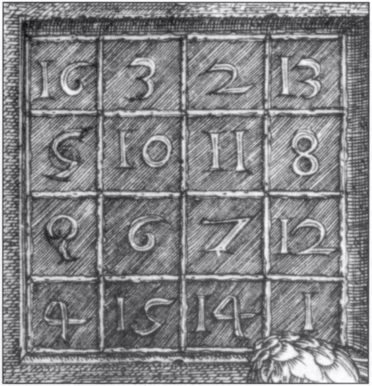
~~Egy~~ Két megoldhatatlan játék története

Vígh Viktor
SZTE Bolyai Intézet

2013. szeptember 27.

Kutatók Éjszakája 2013

Bûvös négyzetek



Albrecht Dürer: Melankólia I. (1514) /részlet/

Melankólia I.

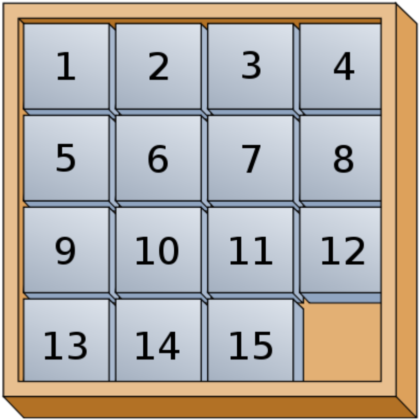
Melankólia I.

Albrecht Dürer: Melankólia I. (1514)

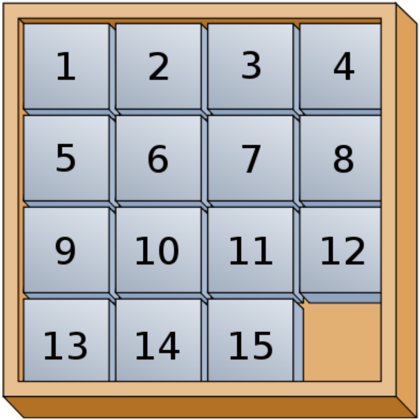
Melankólia I.

Albrecht Dürer: Melankólia I. (1514)
mérete: 24 cm $\times$ 18,8 cm

A tizenötös játék

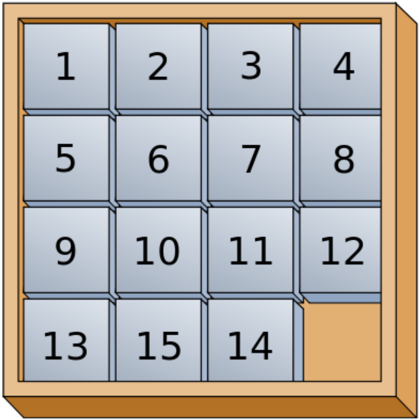


A tizenötös játék



A játékot a wikipedia szerint Noyes Palmer Chapman New York-i postamester „fedezte fel” 1874-ben. 1880-ban igazi õrület söpört végig a világon - pedig ez még az Internet elõtt volt valamivel.

Sam Loyd munkássága



Sam Loyd 1891-tõl kitartóan állította, hogy a játékot õ találta ki. 1000 dollár jutalmat tûzött ki az elsõ megfejtõnek, aki a fenti állást visszatologatja alaphelyzetbe.

A játékrontók

„Apróbb szépséghiba”, hogy a probléma megoldhatatlanságát 12 évvel korábban igazolta és publikálta Wm. Woolsey Johnson és William E. Story.

Wm. Woolsey Johnson and William E. Story: Notes on the "15" Puzzle, *American Journal of Mathematics*, **Vol. 2, No. 4** (Dec., 1879), pp. 397-404.

A játékrontók

„Apróbb szépséghiba”, hogy a probléma megoldhatatlanságát 12 évvel korábban igazolta és publikálta Wm. Woolsey Johnson és William E. Story.

Wm. Woolsey Johnson and William E. Story: Notes on the "15" Puzzle, *American Journal of Mathematics*, **Vol. 2, No. 4** (Dec., 1879), pp. 397-404.

A cikk valójában két különálló írás, az elsõben a megoldható állapotokat jellemzi Johnson, a másodikban Story általánosítja Johnson módszerét. Mai szemmel nézve mindkét írás igen körülményesen érvel.

A tizenötös játék megismerése - számok sorrendje

A játék célja, hogy kialakítsuk a számok „természetes” sorrendjét. Hogyan mérhetnénk, mennyire vagyunk ettől távol?

A tizenötös játék megismerése - számok sorrendje

A játék célja, hogy kialakítsuk a számok „természetes" sorrendjét. Hogyan mérhetnénk, mennyire vagyunk ettől távol?

Vegyük az $1, 2, 3, 4, 5$ számokat, és tekintsük a $2, 4, 3, 1, 5$ sorrendjüket.

A tizenötös játék megismerése - számok sorrendje

A játék célja, hogy kialakítsuk a számok „természetes” sorrendjét. Hogyan mérhetnénk, mennyire vagyunk ettől távol?

Vegyük az $1, 2, 3, 4, 5$ számokat, és tekintsük a $2, 4, 3, 1, 5$ sorrendjüket. Az öt számból összesen tíz féle pár képezhető, vizsgáljuk meg, hogy ezek „önmagukban” jó sorrendben vannak-e.

A tizenötös játék megismerése - számok sorrendje

A játék célja, hogy kialakítsuk a számok „természetes” sorrendjét. Hogyan mérhetnénk, mennyire vagyunk ettől távol?

Vegyük az $1, 2, 3, 4, 5$ számokat, és tekintsük a $2, 4, 3, 1, 5$ sorrendjüket. Az öt számból összesen tíz féle pár képezhető, vizsgáljuk meg, hogy ezek „önmagukban” jó sorrendben vannak-e. Például az 1 és a 2 nem jó sorrendben van, hiszen az 1 a 2 után következik. A 3 és az 5 jó sorrendben vannak, mivel a 3 megelőzi az 5-t a sorbarendezésben.

A tizenötös játék megismerése - számok sorrendje

A játék célja, hogy kialakítsuk a számok „természetes” sorrendjét. Hogyan mérhetnénk, mennyire vagyunk ettől távol?

Vegyük az $1, 2, 3, 4, 5$ számokat, és tekintsük a $2, 4, 3, 1, 5$ sorrendjüket. Az öt számból összesen tíz féle pár képezhető, vizsgáljuk meg, hogy ezek „önmagukban” jó sorrendben vannak-e. Például az 1 és a 2 nem jó sorrendben van, hiszen az 1 a 2 után következik. A 3 és az 5 jó sorrendben vannak, mivel a 3 megelőzi az 5-t a sorbarendezésben. **Azt mondjuk, hogy az 1 és a 2 inverzióban (fordított sorrendben) állnak.**

A tizenötös játék megismerése - számok sorrendje

A játék célja, hogy kialakítsuk a számok „természetes” sorrendjét. Hogyan mérhetnénk, mennyire vagyunk ettől távol?

Vegyük az $1, 2, 3, 4, 5$ számokat, és tekintsük a $2, 4, 3, 1, 5$ sorrendjüket. Az öt számból összesen tíz féle pár képezhető, vizsgáljuk meg, hogy ezek „önmagukban” jó sorrendben vannak-e. Például az 1 és a 2 nem jó sorrendben van, hiszen az 1 a 2 után következik. A 3 és az 5 jó sorrendben vannak, mivel a 3 megelőzi az 5-t a sorbarendezésben. **Azt mondjuk, hogy az 1 és a 2 inverzióban (fordított sorrendben) állnak.**

A fenti példában megkereshetjük az összes inverzióban álló párt: $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$; $(3, 4)$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a $2, 4, 3, 1, 5$ sorrend inverziószáma 4. Az inverziószámot i-vel jelöljük.

Számoljunk inverziószámot!

Legyen az üres mező sorszáma 16, és soroljuk fel a játékmező számait balról jobbra, és fentről lefele. Alaphelyzetben a számok sorban következnek, és az állás inverziószáma 0.

Számoljunk inverziószámot!

Legyen az üres mező sorszáma 16, és soroljuk fel a játékmező számait balról jobbra, és fentről lefele. Alaphelyzetben a számok sorban következnek, és az állás inverziószáma 0.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	16	12
13	14	11	15

A fenti állás inverziószáma 8.

Invariáns mennyiség

Egy adott állásnál az inverziószámon kívül még azt fogjuk figyelni, hogy az üres mező mennyi lépésben vihető vissza a jobb alsó sarokba. Ez egy 0 és 6 közötti pozitív egész szám, jelöljük d-vel.

Invariáns mennyiség

Egy adott állásnál az inverziószámon kívül még azt fogjuk figyelni, hogy az üres mező mennyi lépésben vihető vissza a jobb alsó sarokba. Ez egy 0 és 6 közötti pozitív egész szám, jelöljük d-vel.

Az $i + d$ mennyiség változásait fogjuk figyelni. A következő állítás a megoldhatóság szükséges feltételét adja.

Állítás

Az alapállásból szabályos lépések sorozatával elérhető állapotokban az $i + d$ mennyiség mindig páros.

Vízszintes lépés

Világos, hogy alapállapotban $d + i = 0$. Először nézzük meg, hogy mi történik egy tetszőleges vízszintes lépésnél.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	16	12
13	14	11	15

A d távolság eggyel nő vagy csökken, hiszen az üres mező minden lépésben mozdul. Hasonlóan az i inverziószám is eggyel nő vagy csökken, hiszen két szomszédos elem helyet cserél, így az ő sorrendjük megváltozik, viszont bármely más elempáré nem. Összességében $d + i$ vagy kettővel módosul (nő vagy csökken), vagy változatlan marad, tehát párossága nem változik.

Függőleges lépés

Most nézzük a függőleges lépéseket.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	16	12
13	14	11	15

A d távolság ismét eggyel nő vagy csökken. Az inverziószámot hét elempár helycseréje módosítja.

Függőleges lépés

Most nézzük a függőleges lépéseket.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	16	12
13	14	11	15

A d távolság ismét eggyel nő vagy csökken. Az inverziószámot hét elempár helycseréje módosítja.
$\pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm \ldots \pm 1$ típusú összeg paritása csak a tagok számának paritásától függ, esetünkben összességében páros változást kapunk.

Konklúzió

Először is azonnal látszik, hogy Sam Loyd feladványa megoldhatatlan, hiszen ott $d + i = 1$, ami páratlan.

Konklúzió

Először is azonnal látszik, hogy Sam Loyd feladványa megoldhatatlan, hiszen ott $d + i = 1$, ami páratlan.

Egyszerű indoklásunk ugyan nem mutatja, de nem túl bonyolult meggondolni, hogy $d + i$ párossága elegendő feltétele is a megoldhatóságnak.

Konklúzió

Először is azonnal látszik, hogy Sam Loyd feladványa megoldhatatlan, hiszen ott $d + i = 1$, ami páratlan.

Egyszerű indoklásunk ugyan nem mutatja, de nem túl bonyolult meggondolni, hogy $d + i$ párossága elegendő feltétele is a megoldhatóságnak.

A tizenötös játék a permutációjátékok családjába tartozik, hasonló megoldhatósági feltételek léteznek sok egyéb játékra, pl. a Rubik-kockára is.

Coffin megoldhatatlan játéka

Forrás: `http://ordoglakat.blog.hu/2009/04/02/az_egyszerutol_a_lehetetlenig` ill. Gál Péter: Ördöglakatok, pentominók és társaik (Typotex).

A játék története

A játékot Steward Coffin világhírű ördöglakat- és logikaijáték-tervező jegyzetfüzetében látta Pieter Van Delft és Jack Bothermans, akik épp könyvet írtak a témában.

A játék története

A játékot Steward Coffin világhírű ördöglakat- és logikaijáték-tervező jegyzetfüzetében látta Pieter Van Delft és Jack Bothermans, akik épp könyvet írtak a témában.

Pieter Van Delft és Jack Bothermans: Creative Puzzles of the World című könyvükben meg is jelentették (Coffinra hivatkozva), sőt, még megoldást is adtak hozzá.

A játék története

A játékot Steward Coffin világhírű ördöglakat- és logikaijáték-tervező jegyzetfüzetében látta Pieter Van Delft és Jack Bothermans, akik épp könyvet írtak a témában.

Pieter Van Delft és Jack Bothermans: Creative Puzzles of the World című könyvükben meg is jelentették (Coffinra hivatkozva), sőt, még megoldást is adtak hozzá.

Több gyártó, a könyv alapján gyártani kezdte - majd egy idő után egyre több mérgelődő vásárlóval találták szemben magukat.

A játék története

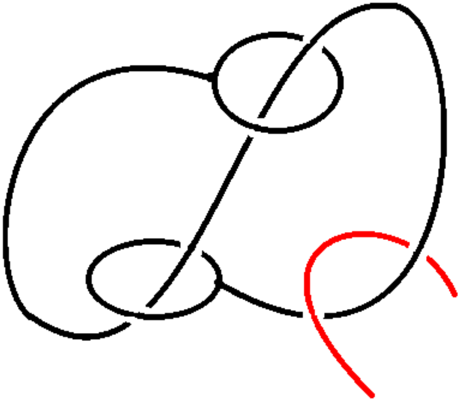
A játékot Steward Coffin világhírű ördöglakat- és logikaijáték-tervező jegyzetfüzetében látta Pieter Van Delft és Jack Bothermans, akik épp könyvet írtak a témában.

Pieter Van Delft és Jack Bothermans: Creative Puzzles of the World című könyvükben meg is jelentették (Coffinra hivatkozva), sőt, még megoldást is adtak hozzá.

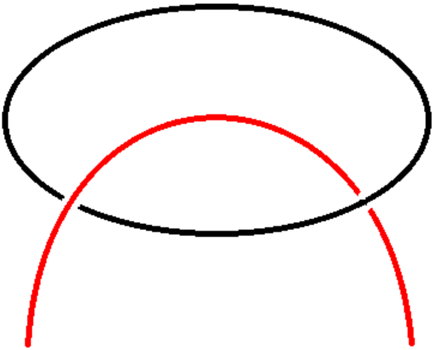
Több gyártó, a könyv alapján gyártani kezdte - majd egy idő után egyre több mérgelődő vásárlóval találták szemben magukat.

A megoldhatatlanságot Inta Bertuccioni igazolta 2003-s, A topological puzzle című cikkében, ami az American Mathematical monthlyban jelent meg.

Még egyszer a játék

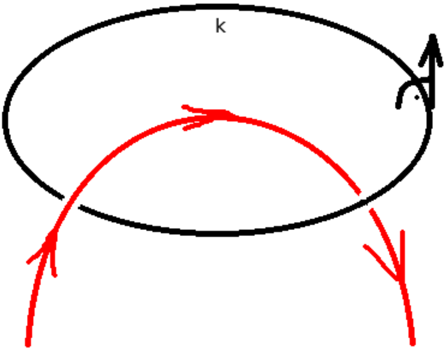


Ötlet



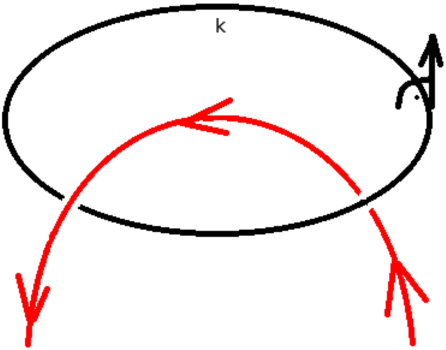
Egy gyűrűbe fűzött zsinór.

Ötlet



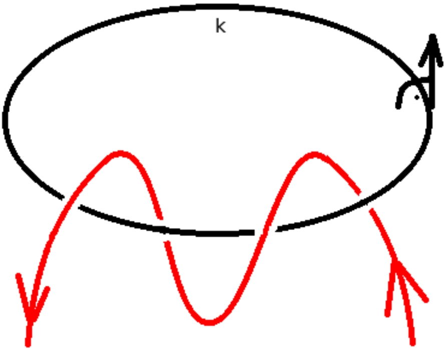
Irányítsunk mindent! A fűzést leírhatjuk így: k.

Ötlet



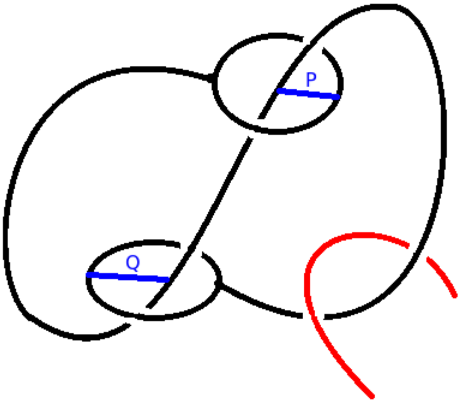
Ha megfordítjuk az irányítást, a fűzés leírása k^{-1} lesz.

Ötlet



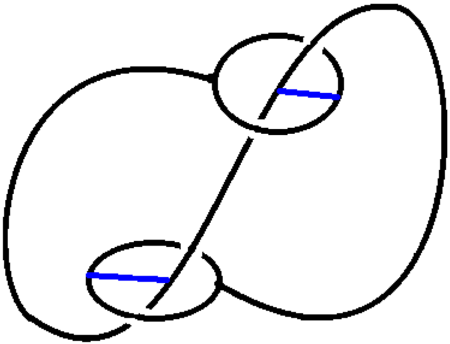
Csavarhatjuk kétszer is, ekkor a fűzés leírása $k^{-1}k^{-1}$.

Módosítsuk kicsit a játékot!



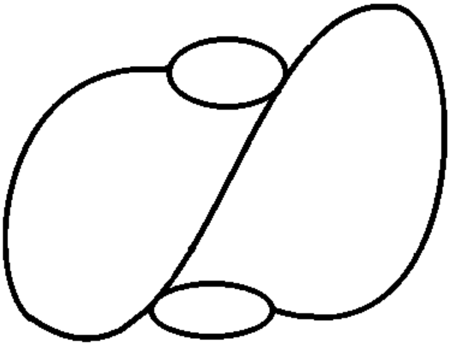
Adjunk a játékhoz két extra rudat!

Módosítsuk kicsit a játékot!



Képzeletben kezdjünk folytonosan megrövidíteni a két extra rudat!

Módosítsuk kicsit a játékot!



Lényegében négy független kört kaptunk!

Ezt már tudjuk!

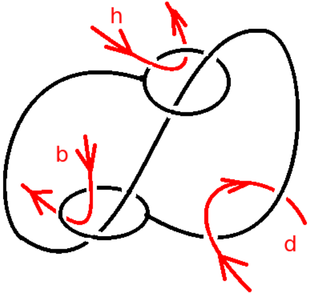
A négy körre (legyenek a, b, c, d) lehetséges fűzések leírása már komolyabb eszközöket igényelne, de szemléletesen hihető, hogy ezek egymástól függetlenek, vagyis tetszőleges szó, ami a, b, c, d-vel és inverzeikkel leírható, és triviálisan nem egyszerűsíthető, az különböző fűzést ad. Pl.: $abc^{-1}ab^{-1}d$ egy ilyen „kódszó”.

Ezt már tudjuk!

A négy körre (legyenek a, b, c, d) lehetséges fűzések leírása már komolyabb eszközöket igényelne, de szemléletesen hihető, hogy ezek egymástól függetlenek, vagyis tetszőleges szó, ami a, b, c, d-vel és inverzeikkel leírható, és triviálisan nem egyszerűsíthető, az különböző fűzést ad. Pl.: $abc^{-1}ab^{-1}d$ egy ilyen „kódszó”.

Ez az észrevétel adja a bizonyítás alapját. A következő lépésben két az előzőekhez hasonló helyzetű rudat adunk a rendszerhez, majd néhány lépésben ezek segítségével leírjuk az eredeti eredeti játék lehetséges fűzéseit. Az eredményben megjelennek a betűkre vonatkozó bizonyos azonosságok.

A játék lehetséges fűzéseinek leírása



A lehetséges fűzéseket a d, h és b fűzésekből kombinálhatjuk, figyelembe véve, hogy

$$d = b^{-1}d^{-1}hdh^{-1}bhd^{-1}h^{-1}d.$$

Egy kérdés maradt...

Vajon a d fűzés az azonosság sokszori alkalmazásával átvihető-e az üres fűzésbe? Azaz levehető-e a madzag a játékról?

Egy kérdés maradt...

Vajon a *d* fűzés az azonosság sokszori alkalmazásával átvihető-e az üres fűzésbe? Azaz levehető-e a madzag a játékról?

Ennek megválaszolása a fentiek után „rutinmunka”, de viszonylag eszközigényes. Elképzelhető, hogy létezik egyszerű, elemi megfontolás is, ami mutatja, hogy a játék nem megoldható.

Egy kérdés maradt...

Vajon a d fűzés az azonosság sokszori alkalmazásával átvihető-e az üres fűzésbe? Azaz levehető-e a madzag a játékról?

Ennek megválaszolása a fentiek után „rutinmunka”, de viszonylag eszközigényes. Elképzelhető, hogy létezik egyszerű, elemi megfontolás is, ami mutatja, hogy a játék nem megoldható.

Köszönöm a figyelmet!