A Cast Duettől a Rubik-kockáig

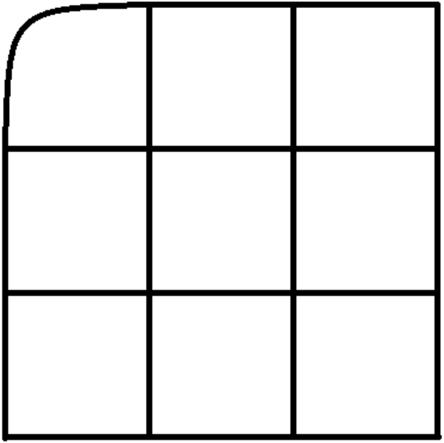
Vígh Viktor
SZTE Bolyai Intézet

2012. szeptember 28.

Kutatók Éjszakája

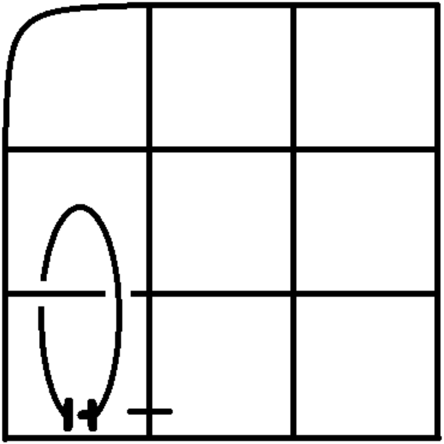
A Hanayama Cast Duet játék bemutatása

Az alaptábla egy háromszor hármas négyzetrács.



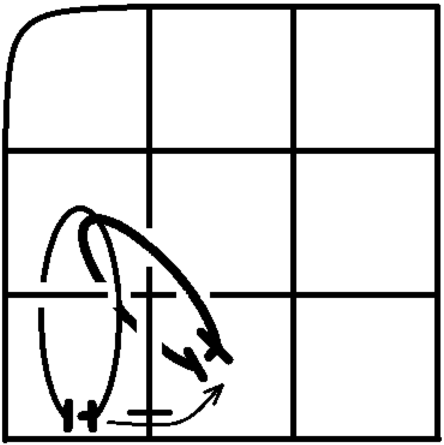
A játék bemutatása

A táblán egy gyűrű mozog kapukon keresztül.



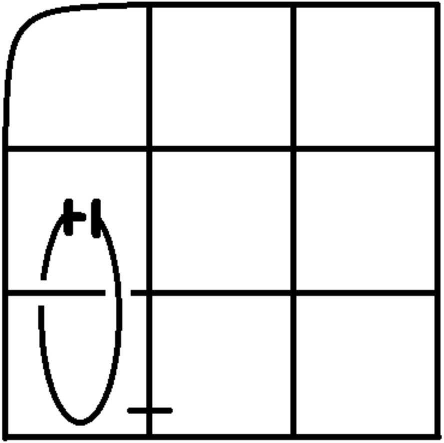
A játék bemutatása

A táblán egy gyűrű mozog kapukon keresztül.



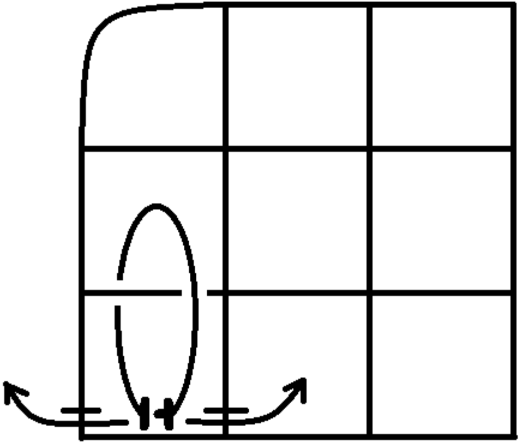
A játék bemutatása

Figyeljük meg, hogy gyűrű nem szimmetrikus, ezért számít, hogy a kapu "alul" vagy "felül" van.



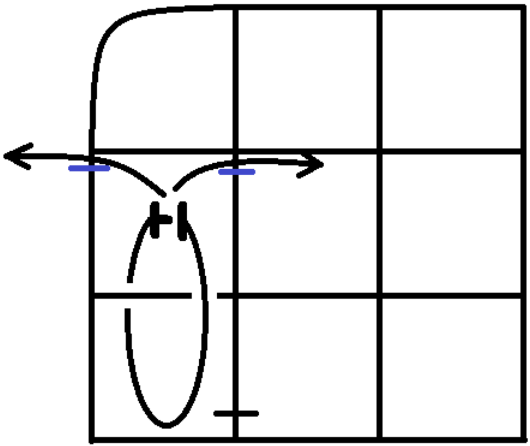
A játék bemutatása

Figyeljük meg, hogy gyűrű nem szimmetrikus, ezért számít, hogy a kapu "alul" vagy "felül" van.



A játék bemutatása

Figyeljük meg, hogy gyűrű nem szimmetrikus, ezért számít, hogy a kapu "alul" vagy "felül" van.



A játék bemutatása

A játék célja, hogy a gyűrűt a kapukon megfelelő sorrendben áthúzva levegyük a tábláról.

A játék bemutatása

A játék célja, hogy a gyűrűt a kapukon megfelelő sorrendben áthúzva levegyük a tábláról. Ehhez "ki kellene magunk ismerni" a táblán - jó lenne valamilyen térképet gyártani.

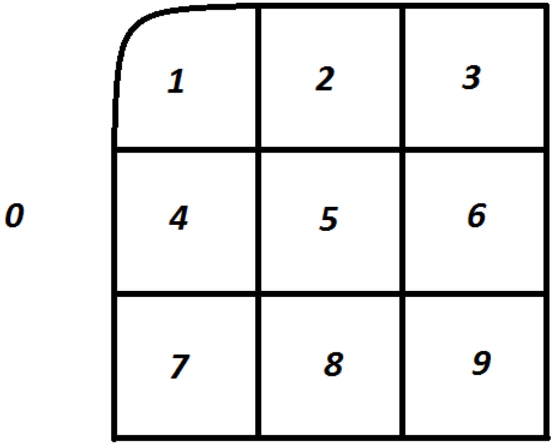
A játék bemutatása

A játék célja, hogy a gyűrűt a kapukon megfelelő sorrendben áthúzva levegyük a tábláról. Ehhez "ki kellene magunk ismerni" a táblán - jó lenne valamilyen térképet gyártani.

Először definiáljuk a gyűrű állapotait.

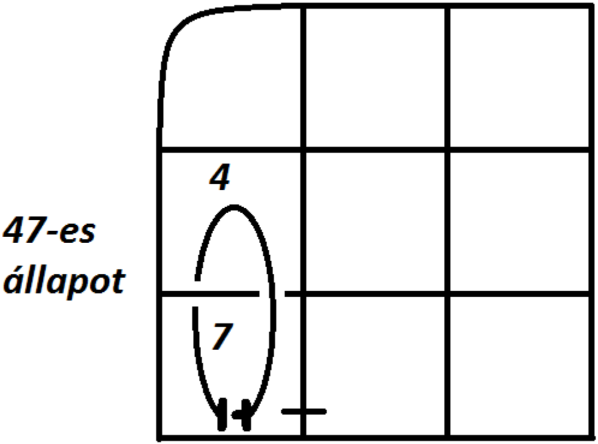
A játék elemzése

Először is számozzuk meg a négyzetrács mezőit. Mostantól kezdve feltesszük, hogy a játék egy fix térbeli helyzetben van, így beszélhetünk "aljáról" és "tetejéről".



A játék elemzése

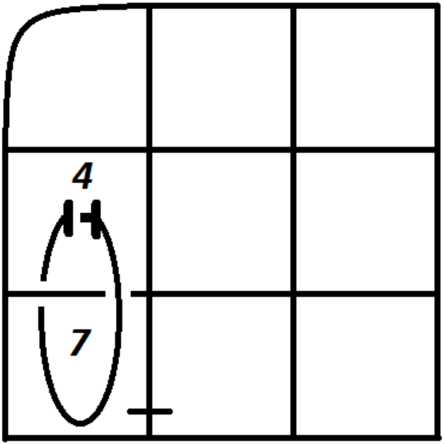
Figyeljük meg, hogy a gyűrű (majdnem) mindig pontosan két számozott részben helyezkedik el - ezekkel leírhatjuk az aktuális állapotát!



A játék elemzése

Ne feledjük, hogy a pöcök által okozott asszimmetria miatt kétféle "állása" lehet a gyűrűnek - ezek között a számok sorrendjével teszünk különbséget.

74-es állapot



A játék elemzése

Hány állapot van?

A játék elemzése

Hány állapot van?

- 0x és x0 típusú $2 \cdot 8 = 16$
- sarokmezőre illeszkedő: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$
- élmezőre illeszkedő: $4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$
- a középső mezőre illeszkedő: $8 \cdot 2 = 16$

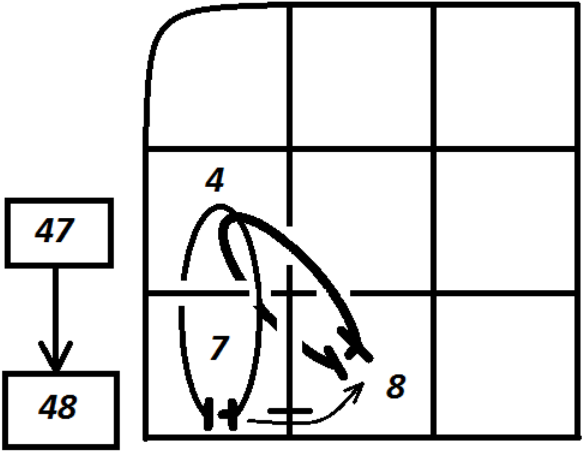
Összesen 112, de mindent kétszer számoltunk, a 00 (lent van a gyűrű) állapot viszont kimaradt, így **57 különböző állapot van.**

A játék elemzése

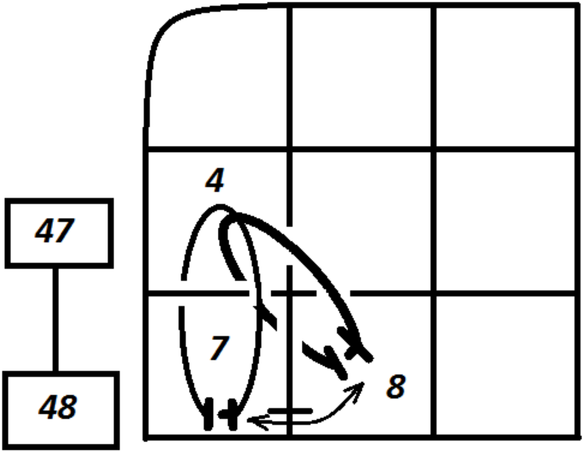
Állapotváltás pontosan akkor történik, ha áthaladunk egy kapun. Ezeket könnyen szemléltethetjük egy egyszerű rajzon.

A játék elemzése

Állapotváltás pontosan akkor történik, ha áthaladunk egy kapun. Ezeket könnyen szemléltethetjük egy egyszerű rajzon.



Vegyük észre, hogy minden lépésünk megfordítható, ezért felesleges jelölni az állapotok között, hogy milyen irányba lehetséges az áthaladás.



A játék elemzése

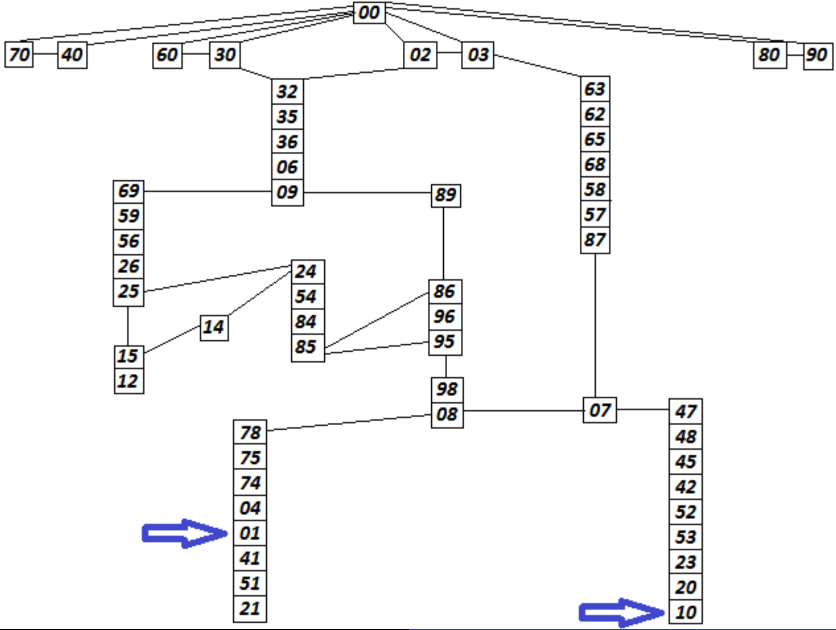
A játék táblájának alapos és gondos megvizsgálása után felírhatjuk, hogy pontosan mik azok az állapotpárok, amelyek egymásba közvetlen átvihetőek. Ezeket szemléltethetjük egy ábrán, amiben kis téglalapokba írt számok jelzik az állapotokat, és két állapotot összekötünk, ha közvetlen átvihetőek egymásba. Így megkapjuk a játéktábla **gráfját**. Az állapotokat a gráf csúcsainak, az átmenetek szemléltető vonalakat a gráf éleinek nevezzük.

A játék elemzése

A játék táblájának alapos és gondos megvizsgálása után felírhatjuk, hogy pontosan mik azok az állapotpárok, amelyek egymásba közvetlen átvihetőek. Ezeket szemléltethetjük egy ábrán, amiben kis téglalapokba írt számok jelzik az állapotokat, és két állapotot összekötünk, ha közvetlen átvihetőek egymásba. Így megkapjuk a játéktábla **gráfját**. Az állapotokat a gráf csúcsainak, az átmenetek szemléltető vonalakat a gráf éleinek nevezzük.

Csiribú-csiribá, a Cast Duet gráfja:

A játék gráfja



Dehát ez nem is nehéz!

A játék gráfja nem túl bonyolult. Ha az élek helyére folyosókat képzelünk, akkor egy labirintust kapunk, amit ha megépítenénk, legtöbben gyorsan kiismernének. A lakat valódi nehézsége, hogy az átmenetek fizikai megvalósítása bonyolult (nem úgy mint a labirintusban), ráadásul a tábla viszonylagos szimmetriája és kétoldalassága miatt nagyon könnyű "belezavarodni", hogy hol tartunk, és például észrevétlenül visszafordulni, vagy körbe-körbe menni. Továbbá vannak lépések, amik "felfedezése" sem nyilvánvaló a szokatlan kapuhasználat miatt. Mindazonáltal a gráf ismeretében lényegében érdektelenné válik a játék.

A Logi-toli

Nagyon hasonló elven megoldható (talán helyesebb lenne a szétcincál szót használni) a Logi-toli néven ismert játék. Itt a lényegesen különböző állapotok megértése és használható eljelölése már valamivel komolyabb feladat, a végén egy 78 csúcsú, viszonylag szabályos gráfot kapunk. Az érdeklődő hallgatóság figyelmébe ajánlom Gál Péter blogján Bozóki Sándor írását:
http://ordoglakat.blog.hu/2012/06/08/logi_toli

A Logi-toli miért könnyebb, mint a Duet?

Valószínűleg kipróbálás után a legtöbben egyetértenének, hogy a Logi-toli könnyebben megoldható, mint a Duet, hiába van több állapota. A magyarázat erre - túl néhány már taglalt dolgon -, hogy a Logi-toliban a lépések "logikusak", míg a Duet egy lényegében véletlenszerű labirintus, így nem nagyon van más esélyünk, mint "kifárasztani" a játékot és szisztematikusan bejárni, végigpróbálni az egészet.

A Rubik-kocka

A Rubik-kocka is gráffal leírható játék. Egy állapotnak egy konkrét összekeverést tekintünk, és akkor rajzolunk két keverés közé élet, ha egyetlen lap forgatásával egymásba vihetőek (HTM). Kiszámítható, hogy körülbelül $4,3 \cdot 10^{19}$ csúcsa lesz a kocka gráfjának! Ez csillagászati szám, ha a Földön minden embernek hirtelen annyi utódja születne, ahány ember van a Földön, akkor körülbelül ennyien lennénk összesen.

A Rubik-kocka

A Rubik-kocka is gráffal leírható játék. Egy állapotnak egy konkrét összekeverést tekintünk, és akkor rajzolunk két keverés közé élet, ha egyetlen lap forgatásával egymásba vihetőek (HTM). Kiszámítható, hogy körülbelül $4,3 \cdot 10^{19}$ csúcsa lesz a kocka gráfjának! Ez csillagászati szám, ha a Földön minden embernek hirtelen annyi utódja születne, ahány ember van a Földön, akkor körülbelül ennyien lennénk összesen.

Az embereket régóta foglalkoztatta a kérdés, hogy hány tekeréssel lehet biztosan kitenni a kockát tetszőleges pozícióból indulva. Ez a matematika nyelvén a gráf átmérője. Ennek a bűvös számnak elterjedt neve a "God's number", vagyis Isten száma.

Improvements on God's number

Date	Lower bound	Upper bound	Gap	Notes and Links
July, 1981	18	52	34	Morwen Thistlethwaite proves 52 moves suffice.
December, 1990	18	42	24	Hans Kloosterman improves this to 42 moves.
May, 1992	18	39	21	Michael Reid shows 39 moves is always sufficient.
May, 1992	18	37	19	Dik Winter lowers this to 37 moves just one day later!
January, 1995	18	29	11	Michael Reid cuts the upper bound to 29 moves by analyzing Kociemba's two-phase algorithm.
January, 1995	20	29	9	Michael Reid proves that the "superflip" position (corners correct, edges placed but flipped) requires 20 moves.
December, 2005	20	28	8	Silviu Radu shows that 28 moves is always enough.
April, 2006	20	27	7	Silviu Radu improves his bound to 27 moves.
May, 2007	20	26	6	Dan Kunkle and Gene Cooperman prove 26 moves suffice.
March, 2008	20	25	5	Tomas Rokicki cuts the upper bound to 25 moves.
April, 2008	20	23	3	Tomas Rokicki and John Welborn reduce it to only 23 moves.
August, 2008	20	22	2	Tomas Rokicki and John Welborn continue down to 22 moves.
July, 2010	20	20	0	Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson, and John Dethridge prove that God's Number for the Cube is exactly 20.

Hogy csinálták?

- Kb. 2 milliárd kisebb részproblémára osztották felhasználva a csoportstruktúrát.

Hogy csinálták?

- Kb. 2 milliárd kisebb részproblémára osztották felhasználva a csoportstruktúrát.
- Szimmetriák és egyéb hasonló ötletek alkalmazásával a valóban megoldandó esetek számát 55 millióra redukálták.

Hogy csinálták?

- Kb. 2 milliárd kisebb részproblémára osztották felhasználva a csoportstruktúrát.
- Szimmetriák és egyéb hasonló ötletek alkalmazásával a valóban megoldandó esetek számát 55 millióra redukálták.
- A megoldások keresésénél nem törekedtek optimalitásra, csak a 20-as határt tartották be. (A pozíciók 95%-a 17 vagy 18 lépésre van a kiindulástól - 10^6-szorosára felgyorsult az algoritmus!)

Hogy csinálták?

- Kb. 2 milliárd kisebb részproblémára osztották felhasználva a csoportstruktúrát.
- Szimmetriák és egyéb hasonló ötletek alkalmazásával a valóban megoldandó esetek számát 55 millióra redukálták.
- A megoldások keresésénél nem törekedtek optimalitásra, csak a 20-as határt tartották be. (A pozíciók 95%-a 17 vagy 18 lépésre van a kiindulástól - 10^6-szorosára felgyorsult az algoritmus!)
- A Google párhuzamosított szuperrendszerén végezték a számításokat, ami egy korszerű asztali pc-nek egyébként 35 évig tartott volna.

Isten száma 20, nem pedig 42!

Isten száma 20, nem pedig 42!

Köszönöm a figyelmet!