Konvex geometria jegyzetvázlat

Vígh Viktor [1]

2013. október 10.

[1]A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11/1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Kivonat

A jegyzet a magasabb dimenziós sztochasztikus geometria megértéséhez szükséges legalapvetőbb ismereteket gyűjti össze. Tartalmazza a d-dimenziós Euklideszi terek szokásos definícióját, néhány megjegyzéssel kiegészítve, majd a konvex geometria legfontosabb eredményeit.

Minden szakasz végén van néhány feladat. Ezek megoldása a definíciók és tételek megértését segíti, nem igényelnek sem különleges ötletet, sem különösebb előismeretet. Ezek között fontos dolgok is előfordulhatnak, ezért a feladatok elolvasása és megértése a megoldásuk nélkül is hasznos lehet.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Az Euklideszi tér

Korábban találkoztunk az Euklidészi sík és az Euklideszi tér axiomatikus felépítésével. Láthattuk, hogy már három dimenzióban is igen körülményes a pontos axiomatika, a fogalmak egzakt bevezetése. Az alábbi tárgyalásmód lényegesen egyszerűbb, hátránya viszont, hogy nem geometriai szemléletű.

1.1. Euklideszi vektortér

1.1.1. Definíció (Vektortér, lineáris tér)**.** Legyen F test. A V nemüres halmazt F feletti vektortérnek nevezzük, ha a V-n értelmezett egy kétváltozós összeadás művelet (jele: $+$), valamint egy skalárral való szorzás, ami egy $F \times V \to V$ függvény, vagyis minden $(\lambda, \mathbf{v}) \in F \times V$ párhoz hozzárendel pontosan egy V-beli elemet (jele: $\lambda\mathbf{v}$), és ezek a műveletek a következő tulajdonságokat teljesítik.
A $(V, +)$ kommutatív (Abel-féle) csoport, továbbá

- $\forall\lambda \in F$ és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ esetén $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$;
- $\forall\lambda, \mu \in F$ és $\mathbf{v} \in V$ esetén $(\lambda + \mu)\mathbf{v}) = \lambda v + \mu\mathbf{v}$;
- $\forall\lambda, \mu \in F$ és $\mathbf{v} \in V$ esetén $(\lambda\mu)\mathbf{v}) = \lambda(\mu\mathbf{v})$;
- $\forall\mathbf{v} \in V$ esetén $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, ahol 1 az F test egysége.

A V halmaz elemeit vektoroknak, az F halmaz elemeit skalároknak nevezzük.

1.1.2. Definíció (Valós Euklideszi vektortér)**.** A valós számtest feletti E vektorteret Euklideszi vektortérnek nevezzük, ha adott rajta egy $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ belsőszorzat (skalárszorzat), amire teljesül, hogy

- kommutatív: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$;
- additív: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E : \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$;
- skalár kiemelhető: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \lambda \in \mathbb{R} : \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;
- önmagával vett belső szorzat nemnegatív: $\forall \mathbf{x} \in E : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ és egyenlőség csak a nullvektorra teljesül.

Megjegyezzük, hogy komlpex Euklideszi vektortér is definiálható, de nekünk nem lesz rá szükségünk.

1.1.3. Példa. Tekintsük az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^d$ vektorteret, és definiáljuk rajta az

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{1}^{d} \alpha_i \cdot \beta_i$$

skalárszorzatot, ahol $\mathbf{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ és $\mathbf{y} = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$. Így egy d-dimenziós Euklideszi vektorteret nyerünk.

1.1.4. Tétel. *Minden valós, d-dimenziós Euklideszi vektortér izomorf az 1.1.3. példában szereplő térrel.*

A tétel szerint tehát egy valós d-dimenziós Euklideszi vektortérre gondolhatunk úgy, mint $\mathbb{R}^d$-re a szokásos skaláris szorzattal, hiszen izomorfak. Ez alapján -némileg pongyola módon- beszélni fogunk „a d-dimenziós Euklideszi vektortérről” (a valós jelzőt se használjuk a továbbiakban), amin mindig $\mathbb{R}^d$-t értjük, az 1.1.3. példában definiált skalárszorzattal. Ha nem jelöljük meg külön a dimenziót, akkor d dimenzióban dolgozunk, kivéve, ha a szövegkörnyezetből más derül ki (pl. a megadott vektoroknak három koordinátája van).

1.1.5. Definíció. Legyen az Euklideszi vektortér egy eleme $\mathbf{x}$. Az $\mathbf{x}$ normáján az

$$||\mathbf{x}|| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

mennyiséget értjük.

1.1.6. Tétel (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség)**.** *Az Euklideszi vektortér két tetszőleges* $\mathbf{x}$ *és* $\mathbf{y}$ *eleme esetén*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||.$$

Egyenlőség csak akkor áll, ha $\mathbf{x}$ *és* $\mathbf{y}$ *lineárisan függőek.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Ekkor $\forall \mu \in \mathbb{R} : \langle \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \rangle \geq 0$ vagyis $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq 0$ minden μ esetén teljesül. A kifejtést tekintsük μ másodfokú polinomjának; ennek főegyütthatója pozitív, így pontosan akkor nem negatív minden μ-re, ha diszkriminánsa nem pozitív:

$$D = 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leq 0,$$

ami az állítással ekvivalens. (Lásd még 2. feladat.) □

1.1.7. Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség, háromszög-egyenlőtlenség)**.** *Az Euklideszi vektortér bármely két* $\mathbf{x}$ *és* $\mathbf{y}$ *vektorára*

$$||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \geq ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||.$$

Egyenlőség csak akkor teljesül, ha az egyik vektor a másik nem negatív skalárszorosa.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leq \\ &\leq ||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{x}||||\mathbf{y}|| + ||\mathbf{y}||^2 = (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2, \end{aligned}$$

ahol a becslésnél felhasználtuk az 1.1.6. tételt. (Lásd még 2. feladat.) □

1.1.8. Definíció. Az Euklideszi vektortér két tetszőleges $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektora ortogonális (merőleges), ha $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, jele: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Egy vektor normált, ha normája 1. Egy vektorrendszer ortogonális, ha benne bármely két vektor ortogonális. Egy vektorrendszer ortonormált, ha ortogonális, és minden vektora normált.

1.1.9. Tétel (Gram-Schmidt)**.** *Az Euklideszi vektortér tetszőleges $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$ lineárisan független vektorrendszere esetén van olyan $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_k}$ ortonormált vektorrendszer, hogy $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_i}$ ugyanzt a lineáris alteret feszíti, mint $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_i}$ minden $i = 1, \ldots, k$ esetén.*

1.1.10. Következmény. *Euklideszi vektortérben bármely ortonormált vektorrendszer kiegészíthető ortonormált bázissá.*

A következő állítás mutatja, hogy a skalárszorzat kiszámításának szempontjából az ortonormált vektorrendszerek (és speciálisan a bázisok) lényegében ekvivalensek. Ebből azonnal adódik a tétel második része, ami a jól ismert Pitagorasz-tétel egy formája.

1.1.11. Lemma. *Legyen $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_k}$ ortonormált vektorrendszer az Euklideszi vektortérben; $\mathbf{x} := \sum_1^k \alpha_i \mathbf{e_i}$, $\mathbf{y} := \sum_1^k \beta_i \mathbf{e_i}$. Ekkor*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_1^k \alpha_i \beta_i \quad \textit{valamint} \quad ||\mathbf{x}||^2 = \sum_1^k \alpha_i^2.$$

Bizonyítás. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e_j} \rangle = \langle \sum \alpha_i \mathbf{e_i}, \mathbf{e_j} \rangle = \sum \alpha_i \langle \mathbf{e_i}, \mathbf{e_j} \rangle = \alpha_j \langle \mathbf{e_j}, \mathbf{e_j} \rangle = \alpha_j$, majd ugyanezt a gondolatot ismételve

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle x, \sum \beta_i \mathbf{e_i} \rangle = \sum \beta_i \langle \mathbf{x}, \mathbf{e_i} \rangle = \sum \alpha_i \beta_i.$$

Ez utóbbiból azonnal jön a második állítás is:

$$||\mathbf{x}||^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum \alpha_i^2.$$

□

Az ortogonalitás fogalma kiterjeszthető lineáris alterekre is.

1.1.12. Definíció. Egy $\mathbf{x}$ vektor ortogonális egy A lineáris altérre, ha annak bármely vektorára ortogonális. A és B lineáris alterek merőlegesek, ha az A minden vektora ortogonális B-re. (Lásd: 6. feladat.)

Definíció alapján könnyen látható, hogy egy lineáris altérre merőleges összes vektorok is lineáris alteret alkotnak. (7. feladat)

1.1.13. Definíció (Ortogonális komplementer.)**.** Az A lineáris altér ortogonális komplementerén az $A^\perp := \{\mathbf{x}|\mathbf{x} \text{ ortogonális } A\text{-ra}\}$ lineáris alteret értjük.

1.1.14. Lemma. *Tegyük fel, hogy a k-dimenziós A lineáris altér egy ortogonális bázisa $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_k}$, míg az egész tér egy ortogonális bázisa $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_d}$. Ekkor $A^\perp$ egy (ortogonális) bázisa $\mathbf{e_{k+1}}, \ldots, \mathbf{e_d}$, dimenziója $d - k$. (Lásd 8. feladat.)*

1.1.15. Lemma. *Legyen A lineáris altér a V Euklideszi vektortérben. Ekkor bármely $\mathbf{v} \in V$ vektor egyértelműen előáll $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ alakban, ahol $\mathbf{x} \in A$ és $\mathbf{y} \in A^\perp$.*

Bizonyítás. Egyértelműség: tegyük fel, hogy $\mathbf{x_1} + \mathbf{y_1} = \mathbf{x_2} + \mathbf{y_2}$ két megfelelő előállítás. Ekkor a $\mathbf{w} = \mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} = \mathbf{y_2} - \mathbf{y_1}$ vektor benne van A-ban és $A^\perp$-ben is, így merőleges önmagára, vagyis a nullvektor.
Létezés: Válasszunk egy $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_k}$ ortonormált bázist A-ban, és egészítsük ki, hogy $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_d}$ ortonormált bázis legyen V-ben. Ekkor $\mathbf{v}$ előáll $\mathbf{v} = \sum_1^d \alpha_i \mathbf{e_i}$ alakban. $\mathbf{x} := \sum_1^k \alpha_i \mathbf{e_i}$ és $\mathbf{y} := \sum_{k+1}^d \alpha_i \mathbf{e_i}$ megfelelnek a követelményeknek. $\square$

Feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki a $(3, -2, 4)$ és $(1, 2, -1)$ vektorok skalárszorzatát. Merőlegesek-e ezek a vektorok?

2. Feladat. Vizsgáljuk meg mikor áll egyenlőség az 1.1.6. és az 1.1.7. tételekben.

3. Feladat. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{x}$ vektor merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok mindegyikére. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathbf{x}$ merőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ minden lineáris kombinációjára is! Általánosítsunk!

4. Feladat. A nullvektortól különböző $\mathbf{x}$ vektor merőleges az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok mindegyikére. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{x}$ nem áll elő az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként! Általánosítsunk!

5. Feladat. Felhasználva az 1.1.9. tételt bizonyítsuk be az 1.1.10. következményt!

6. Feladat. Legyen $\mathbf{x}$ vektor, A altér bázisa $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_k}$, B altér bázisa $\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_r}$. Mutassuk meg, hogy
a, A ortogonális $\mathbf{x}$-re akkor és csak akkor, ha $\forall i = 1, \ldots, k : \ \mathbf{x} \perp \mathbf{e_i}$;
b, A ortogonális B-re akkor és csak akkor, ha

$$\forall i = 1, \ldots, k; \forall j = 1, \ldots, r : \ \mathbf{e_i} \perp \mathbf{f_j}.$$

7. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy A lineáris altérre merőleges vektorok lineáris alteret alkotnak!

8. Feladat. Bizonyítsuk be az 1.1.14. lemmát!

9. Feladat. Legyenek $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_d}$ vektorok a d-dimenziós Euklideszi vektortérben. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor, hogy minden i-re

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v_i} \rangle \geq 0!$$

10. Feladat. Adjunk meg $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{d+1}}$ $d+1$ darab vektort a d-dimenziós Euklideszi térben, hogy bármely $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén léteznek $1 \leq i, j \leq d+1$ indexek, hogy $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v_i} \rangle > 0$ és $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v_j} \rangle < 0$!

1.2. A d-dimenziós Euklideszi tér

A d-dimenzós Euklideszi vektortér fogalmának bevezetése után nagyon „kényelmesen” definiálhatjuk a d-dimenziós Euklideszi teret. Felhívjuk a figyelmet, hogy különbség van az Euklideszi *vektor*tér és az Euklideszi tér között.

Előbbi egy speciális struktúrájú vektortér, míg utóbbi absztrakt definíciója a következő:

1.2.1. Definíció (Euklideszi tér)**.** A d-dimenziós Euklideszi téren egy (P, V, Θ) hármast értünk, ahol

- P nemüres halmaz, elemeit *pontoknak* nevezzük;
- V a d-dimenziós Euklideszi vektortér;
- $\Theta : P \times P \to V$ leképezés, amire
  - $\forall x \in P$ rögzített pontra $\Theta(x, \cdot) : P \to V$ bijekció;
  - $\forall x, y, z \in P : \Theta(x, y) + \Theta(y, z) = \Theta(x, z)$.

Szokásos jelölés az $\overrightarrow{ab} := \Theta(a, b)$. A d-dimenziós Euklideszi teret $\mathbb{E}^d$-vel fogjuk jelölni. Ha nem félrevezető, akkor a d felső index el is maradhat.

Mivel $\Theta(p, \cdot)$ bijekció, ezért tetszőleges $p \in P$ pont és $\mathbf{v} \in V$ vektor esetén egyértelműen létezik egy $q \in P$ pont, amire $\overrightarrow{pq} = \mathbf{v}$. Ezt röviden úgy is írjuk, hogy $q = p + \mathbf{v}$. (Szemléletesen: ha p-ből indulva, $\mathbf{v}$-t megyünk, úgy q-ba jutunk.) Értelemszerűen, ha $W \subseteq V$, akkor $p + W := \{p + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in W\}$.

Megjegyezzük, hogy ha az ismert módon axiomatizáljuk az Euklideszi síkot, majd a tanult módon bevezetjük a vektor fogalmát, és rajta műveleteket, akkor éppen egy 2 dimenziós Euklideszi vektorteret nyerünk. Vegyük észre, hogy most a szokásos utat visszafelé járjuk be, hiszen előbb definiáltuk a vektort, és csak azután a pontokat és egyéb geometriai objektumokat. A definíció valójában azt mondja, hogy $\mathbb{E}^d$ minden pontjából „úgy néz ki", mint $\mathbb{R}^d$, vagyis a d-dimenziós Euklideszi vektortér. Amint lerögzítünk egy origot (kijelölünk egy tetszőleges pontot), a Θ leképezés átjárást biztosít számunkra a térből a vektortérbe, és vissza. Pongyolán fogalmazva rögzített origo esetén a pontok és a vektorok ekvivalensek. Ez (is) magyarázza, miért hasznos az alábbi példa.

1.2.2. Példa. Ha V a d-dimenziós Euklideszi vektortér, akkor a (V, V, Θ) hármas d-dimeziós Euklideszi tér, ahol $\Theta(x, y) := \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

1.2.3. Definíció (Koordinátázás)**.** Legyen $\mathbb{E}^d = (P, V, \Theta)$, rögzítsünk egy $o \in P$ pontot, és egy $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_d}$ bázist V-ben. Ekkor $\forall x \in P$ esetén léteznek $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ valós számok, hogy $\overrightarrow{ox} = \sum_1^d \alpha_i \mathbf{e_i}$. Ekkor az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ rendezett számsort az x pont koordinátáinak nevezzük.

Vegyük észre, hogy a koordinátázás függ az origo és a bázis választásától.

1.2.4. Definíció (Altér)**.** Egy $S \subseteq P$ halmazt affin altérnek nevezünk, ha van olyan $x \in S$ pont, hogy $\overrightarrow{S_x} := \{\overrightarrow{xy} | y \in S\}$ lineáris altér V-ben.

A következő állítás szerint x szerepe nem lényeges a definícióban.

1.2.5. Lemma. *Ha S affin altér, akkor $\forall y \in S$ esetén $\overrightarrow{S_y}$ is lineáris altér V-ben. Továbbá az így kapott lineáris alterek egybeesnek.*

Bizonyítás. Definíció szerint létezik $x \in S$, hogy $\overrightarrow{S_x}$ lineáris altér. Elég megmutatni, hogy minden $y \in S$ esetén $\overrightarrow{S_x} = \overrightarrow{S_y}$.

Először legyen $\overrightarrow{xz} \in \overrightarrow{S_x}$. Mivel $\Theta(y, \cdot)$ bijekció, ezért van olyan $w \in P$, hogy $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{yw}$. De ekkor $\overrightarrow{xw} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yw} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{xz}$, ahol jobb oldalon mindkét tag eleme $\overrightarrow{S_x}$-nek, így $\overrightarrow{xw} \in \overrightarrow{S_x}$, ahonnan $w \in S$ következik. Ekkor azonban $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{yw} \in \overrightarrow{S_y}$, vagyis $\overrightarrow{S_x} \subseteq \overrightarrow{S_y}$.

Fordítva: legyen $\overrightarrow{yz} \in \overrightarrow{S_y}$. Ekkor $\overrightarrow{yz} = \overrightarrow{yx} + \overrightarrow{xz} = -\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{xz}$, ahol a jobb oldal mindkét eleme benne van $\overrightarrow{S_x}$-ben, ezért $\overrightarrow{yz} \in \overrightarrow{S_x}$, vagyis $\overrightarrow{S_y} \subseteq \overrightarrow{S_x}$. $\square$

Az 1.2.5. lemma szerint helyes az alábbi definíció.

1.2.6. Definíció (Altér vektorizáltja)**.** Az S affin altérhez tartozó (egyértelműen meghatározott) $\overrightarrow{S} := \overrightarrow{S_x}$ $(x \in S)$ lineáris alteret az S vektorizáltjának nevezzük. Az S altér dimenzióján $\overrightarrow{S}$ (vektortér) dimenzióját értjük, jele $\dim S$.

Az 1 dimenziós altereket egyeneseknek, a $d-1$-dimenziós altereket hipersíkoknak nevezzük.

1.2.7. Lemma. *Bármely adott $p \in P$ ponthoz $L \subseteq V$ lineáris altérhez létezik egy egyértelmű S altér, ami illeszkedik p-re $(p \in S)$, és $\overrightarrow{S} = L$.*

Bizonyítás. $S := p + L$ megfelel, és nyilvánvalóan egyértelmű. $\square$

1.2.8. Lemma (Hipersík normálvektoros egyenlete)**.** *Rögzítsünk egy* $\mathbf{n}$ *nemnulla vektort,* α *skalárt és egy* o *pontot. Ekkor a* $H := \{x \in P \mid \langle \overrightarrow{ox}, \mathbf{n} \rangle = \alpha\}$ *halmaz egy hipersík. Ekkor röviden azt mondjuk, hogy a* H *hipersík normálvektoros egyenlete* $\langle x, \mathbf{n} \rangle = \alpha$*.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy létezik $x \in H$, hogy $\overrightarrow{H}_x = (\operatorname{lin} \mathbf{n})^{\perp}$. Ebbol az 1.1.14. lemma alapján következik az állítás.
Válasszunk és rögzítsünk egy tetszőleges $x \in H$ pontot (az eddigiek alapján világos, hogy vagy tetszőleges x-re kijön, vagy semmire). Egyrészt legyen $\overrightarrow{xy} \in \overrightarrow{H}_x$ tetszőleges vektor $\overrightarrow{H}_x$-ból ($y \in H$). Mivel $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{oy} - \overrightarrow{ox}$, ezért

$$\langle \overrightarrow{xy}, \mathbf{n} \rangle = \langle \overrightarrow{oy} - \overrightarrow{ox}, \mathbf{n} \rangle = \langle \overrightarrow{oy}, \mathbf{n} \rangle - \langle \overrightarrow{ox}, \mathbf{n} \rangle = \alpha - \alpha = 0.$$

Így $\langle \overrightarrow{xy}, \lambda\mathbf{n} \rangle = 0$ is nyilván tejesül, vagyis $\overrightarrow{H}_x \subseteq (\operatorname{lin} \mathbf{n})^{\perp}$.
Fordítva: válasszunk egy tetszőleges $\mathbf{v} \in (\operatorname{lin} \mathbf{n})^{\perp}$ vektort. Legyen $y := x + \mathbf{v}$. Ekkor, mivel $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$, azért

$$\langle \overrightarrow{oy}, \mathbf{n} \rangle = \langle \overrightarrow{ox} + \overrightarrow{xy}, \mathbf{n} \rangle = \langle \overrightarrow{ox}, \mathbf{n} \rangle + \langle \overrightarrow{xy}, \mathbf{n} \rangle = \alpha + 0 = \alpha.$$

Így $y \in H$, amiből $\mathbf{v} \in \overrightarrow{H}_x$, vagyis $\overrightarrow{H}_x \supseteq (\operatorname{lin} \mathbf{n})^{\perp}$ következik. $\square$

1.2.9. Definíció (Féltér)**.** A $H := \{x \in P \mid \langle \overrightarrow{ox}, \mathbf{n} \rangle = \alpha\}$ hipersík (zárt) féltereinek a $H_0 := \{x \in P \mid \langle \overrightarrow{ox}, \mathbf{n} \rangle \leq \alpha\}$ és a $H_+ := \{x \in P \mid \langle \overrightarrow{ox}, \mathbf{n} \rangle \geq \alpha\}$ halmazokat nevezzük. (A szokásos jelölés szerint $o \in H_0$, vagyis általában $\alpha \geq 0$. Ez nem lényeges megszorítás hiszen $\langle \overrightarrow{ox}, \mathbf{n} \rangle = \alpha$ akkor és csak akkor teljesül ha $\langle \overrightarrow{ox}, -\mathbf{n} \rangle = -\alpha$.)

1.2.10. Lemma. *Egy* S *ponthalmaz pontosan akkor altér, ha bármely két pontjával együtt az őket tartalmazó egyenest is tartalmazza. (Lásd a 11. feladatot.)*

Bizonyítás. Az egyik irányt az olvasóra bízzuk (12. feladat).
Tegyük fel, hogy S altér bármely két x és y pontjával együtt az xy egyenest is tartalmazza. Rögzítsünk egy tetszőleges $a \in S$ pontot. Megmutatjuk,

hogy $\overrightarrow{S_a}$ lineáris altér, vagyis hogy zárt a skalárral való szorzásra és az összeadásra. Legyen $\overrightarrow{ax} \in \overrightarrow{S_a}$ tetszőleges. Mivel S tartalmazza ax egyenest, azért $\operatorname{lin}(\overrightarrow{ax}) \subseteq \overrightarrow{S_a}$, amiből látszik a skalárszorosra való zártság. ($H \subseteq V$ halmazra $\operatorname{lin}(H)$ a H lineáris bukát jelöli.)
Most legyen $\overrightarrow{ax}, \overrightarrow{ay} \in \overrightarrow{S_a}$ két tetszőleges vektor. A feltétel szerint xy egyenes benne van S-ben, így $\overline{xy}$ szakasz z felezőpontja is (14. feladat). Így $\overrightarrow{az} = (\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{ay})/2 \in \overrightarrow{S_a}$, ahonnan az összeadásra való zártsá adódik. □

1.2.11. Következmény. *Alterek metszete üres vagy altér. Továbbá ha a metszet nem üres, akkor a vektorizáltak metszete megegyezik a metszet vektorizáltjával. (Lásd 15. feladatot.)*

1.2.12. Definíció (Alterek párhuzamossága és gyenge párhuzamossága)**.** Az S és T alterek párhuzamosak, ha $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{T}$. Az S és T alterek gyengén párhuzamosak, ha $\overrightarrow{S} \subseteq \overrightarrow{T}$ vagy $\overrightarrow{S} \supseteq \overrightarrow{T}$.

1.2.13. Lemma. *Bármely S altér és p pont esetén egyértelműen létezik olyan T altér, ami párhuzamos S-sel és tartalmazza p-t.*

Bizonyítás. $T := p + \overrightarrow{S}$ megfelel és egyértelmű. □

1.2.14. Definíció (Metrika)**.** Az x és y pontok távolságán a $d(x,y) := ||\overrightarrow{xy}||$ számot értjük. Használni fogjuk még a $|xy| := d(x,y)$ jelölést is. (16. feladat)

1.2.15. Definíció (Alterek merőlegessége)**.** Az S és T alterek merőlegesek, ha $\overrightarrow{S}$ és $\overrightarrow{T}$ ortogonálisak. Jele: $S \perp T$.

1.2.16. Tétel. *Bármely S altér és p pont esetén egyértelműen létezik egy T altér, melynek dimenziója $d - \dim S$ valamint $S \perp T$ és $p \in T$. Továbbá $S \cap T$ egyetlen x pontból áll, amire teljesül, hogy*

$$|px| = \inf_{s \in S} |ps|.$$

Bizonyítás. Legyen $T := p + \overrightarrow{S}^{\perp}$. Ez nyilvánvalóan jó és egyértelmű. Vegyünk tetszőleges $s \in S$ pontot. Ekkor $\overrightarrow{ps}$ az 1.1.15. lemma szerint egyértelműen előáll $\overrightarrow{ps} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \overrightarrow{T}$ és $\mathbf{w} \in \overrightarrow{S}$. Tekintsük az

$x := p + \mathbf{v}$ pontot. Nyilvánvalóan $x \in T$. Másrészt $\overrightarrow{xs} = \mathbf{w} \in \overrightarrow{S}$, ahonnan $x \in S$, mivel $s \in S$. Tehát $x \in S \cap T$. Tegyük fel, hogy $y \in T \cap S$. Ekkor $\overrightarrow{xy}$ benne van $\overrightarrow{S}$-ben és $\overrightarrow{T}$-ben is, vagyis merőleges önmagára, tehát nulvekktor. Így $x = y$. Végül legyen $s \in S$ tetszőleges. Ekkor

$$|ps|^2 = \langle \overrightarrow{ps}, \overrightarrow{ps} \rangle = \langle \overrightarrow{px} + \overrightarrow{xs}, \overrightarrow{px} + \overrightarrow{xs} \rangle = ||\overrightarrow{px}||^2 + ||\overrightarrow{xp}||^2 = |px|^2 + |xp|^2,$$

mivel $\overrightarrow{px} \in \overrightarrow{T}$ és $\overrightarrow{xs} \in \overrightarrow{S}$, ahonnan $\langle \overrightarrow{px}, \overrightarrow{xs} \rangle = 0$ következik. □

1.2.17. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\overrightarrow{ap} = \sum_1^n \lambda_i \overrightarrow{ap_i}$, ahol $a, p, p_1, \ldots, p_n$ pontok, és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valós számok, amikre $\sum_1^n \lambda_i = 1$. Ekkor tetszőleges b pontra $\overrightarrow{bp} = \sum_1^n \lambda_i \overrightarrow{bp_i}$.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bp} &= \overrightarrow{ap} = \sum_1^n \lambda_i \overrightarrow{ap_i} = \sum_1^n \lambda_i (\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bp_i}) = \\ &= \sum_1^n \lambda_i \overrightarrow{ab} + \sum_1^n \lambda_i \overrightarrow{bp_i} = \overrightarrow{ab} + \sum_1^n \lambda_i \overrightarrow{bp_i}. \end{aligned}$$

□

1.2.18. Definíció (Affin kombináció)**.** A $p \in P$ pont a $p_1, \ldots, p_n \in P$ pontok *affin kombinációja*, ha létezik egy $a \in P$ pont, és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valós számok, melyekre $\sum_1^n \lambda_i = 1$, úgy, hogy

$$\overrightarrow{ap} = \sum_1^n \lambda_i \overrightarrow{ap_i}.$$

Az 1.2.17. lemma szerint a lambda együtthatók függetlenek az a pont választásától, így bevezethetjük a következő jelölést: $p = \sum_1^n \lambda_i p_i$.

Az 1.2.11. következmény szerint helyes következő definíció.

1.2.19. Definíció (Affin burok)**.** Legyen $H \subseteq P$ ponthalmaz, $H \neq \emptyset$. A H által generált altér (H affin burka) a H-t tartalmazó alterek metszete. Jele: aff H.

Hasonlóan a lineáris burok és lineáris kombináció kapcsolatához, az affin burok és az affin kombináció is szoros kapcsolatban áll.

1.2.20. Lemma. *Legyenek x és y különböző pontok. A z pont pontosan akkor van rajta az xy egyenesen, ha $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ alkalmas λ valós számmal.(Lásd a 17. feladatot.)*

1.2.21. Tétel. *Legyen H nemüres ponthalmaz. Ekkor*

$$\operatorname{aff} H = \left\{ \sum \alpha_i h_i \mid \sum \alpha_i = 1, h_i \in H \right\}.$$

A tétel azt állítja, hogy H affin burka megkapható a H-ból képezhető összes affin kombinációk halmazként.

Bizonyítás. Legyen $S = \{\sum \alpha_i h_i \mid \sum \alpha_i = 1, h_i \in H\}$. Először belátjuk, hogy S altér. Ehhez felhasználjuk az 1.2.10. és az 1.2.20. lemmákat. Legyen $x = \sum \alpha_i h_i$ és $y = \sum \alpha_i' h_i'$ két tetszőleges pont S-ből ($\sum \alpha_i = 1$ és $\sum \alpha_i' = 1$). Elég belátni, hogy $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ is eleme S-nek. $z = \sum(\lambda\alpha_i)h_i + \sum((1 - \lambda)\alpha_i')h_i'$, és ez valóban affin kombináció, mivel $\sum(\lambda\alpha_i) + \sum((1 - \lambda)\alpha_i') = \lambda \sum \alpha_i + (1 - \lambda) \sum \alpha_i' = \lambda + (1 - \lambda) = 1$. Tehát S altér.

Világos, hogy $H \subseteq S$, így definíció szerint $\operatorname{aff} H \subseteq S$.

Most legyen T altér, ami tartalmazza H-t: $T \supseteq H$. Belátjuk, hogy tetszőleges $\sum_1^n \alpha_i h_i$ affin kombináció benne van T-ben. n szerinti indukciót alkalmazunk. Az $n = 1$ eset triviális. Tegyük fel, hogy n-re igaz. Ekkor

$$\sum_1^{n+1} \alpha_i h_i = \left(\sum_1^n \alpha_i\right) \left(\sum_1^n \left(\frac{\alpha_i}{\sum_1^n \alpha_i}\right) h_i\right) + \alpha_{n+1} h_{n+1}, \tag{1.1}$$

ahol az indukciós feltevés szerint

$$\sum_1^n \left(\frac{\alpha_i}{\sum_1^n \alpha_i}\right) h_i \in T,$$

hiszen

$$\sum_1^n \left(\frac{\alpha_i}{\sum_1^n \alpha_i}\right) h_i$$

egy n tagú affin kombináció. Innen az 1.2.10. és az 1.2.20. lemmák szerint kész vagyunk, mivel (1.1) jobb oldala egy két tagú affin kombináció. Ezzel beláttuk, hogy $S \subseteq T$, amiből $S \subseteq \operatorname{aff} H$ azonnal következik. $\square$

1.2.22. Definíció (Affin függetlenség)**.** A $p_1, \dots, p_n$ pontokat affin függetlennek nevezzük, ha közülük semelyik nincs benne a maradék $n-1$ pont affin burkában.

1.2.23. Lemma. *A $p_1, \dots, p_n$ pontok pontosan akkor affin függetlenek, ha a $\overrightarrow{p_1p_2} \dots, \overrightarrow{p_1p_n}$ vektorok lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy a $p_1, \dots, p_n$ pontok affin függetlenek. Indirekt tegyük fel, hogy $\overrightarrow{p_1p_2} \dots, \overrightarrow{p_1p_n}$ vektorok nem lineárisan függetlenek, vagyis léteznek $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ nem csupa nulla számok, hogy $\sum_2^n \alpha_i \overrightarrow{p_1p_i} = \mathbf{0}$. Ha $\sum_2^n \alpha_i \neq 0$, akkor $\overrightarrow{p_1p_1} = \mathbf{0} = \sum \frac{\alpha_i}{\sum \alpha_i} \overrightarrow{p_1p_i}$, vagyis $p_1 = \sum_2^n \frac{\alpha_i}{\sum \alpha_i} p_i$, ami ellentmond annak, hogy a $p_1, \dots, p_n$ pontok affin függetlenek. Ha $\sum \alpha_i = 0$, akkor létezik j index, hogy $0 \neq \alpha_j = -\sum_{i \neq j} \alpha_i$. Ebből pedig $\overrightarrow{p_1p_j} = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} \overrightarrow{p_1p_i}$, ahol $\sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} = 1$, vagyis $p_j = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} p_i$, újra ellentmondás. A másik irány bizonyítását az olvasóra bízzuk. (18. feladat.) $\square$

1.2.24. Következmény. *Legfeljebb $d+1$ affin független pont adható meg a d-dimenziós térben.*

Feladatok

11. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a és b pontokhoz egyértelműen tartozik egy őket tartalmazó egyenes! (Ennek az egyenesnek a jele: ab.)

12. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy S altér bármely két pontjával együtt a rájuk illeszkedő egyenest is tartalmazza!

13. Feladat. Írjuk fel a p pontra illeszkedő, $\mathbf{n}$ normálvektorú hipesík normálvektoros egyenletét!

14. Feladat. Legyenek o, x, y tetszőleges pontok. Ekkor $\Theta(o, \cdot)$ bijektivitása miatt van olyan z, amire $\overrightarrow{oz} = (\overrightarrow{ox} + \overrightarrow{oy})/2$. Mutassuk meg, hogy $z \in xy$ (z

illeszkedik xy egyenesre)! Mutassuk meg, hogy z független o választásától! Mutassuk meg, hogy $||\overrightarrow{xz}|| = ||\overrightarrow{yz}||$! A z pontot az $\overline{xy}$ szakasz felezőpontjának hívjuk.

15. Feladat. Bizonyítsuk be az 1.2.11. következményt!

16. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az 1.2.14. defincóban szereplő d leképezés teljesíti a metrika axiómáit!

17. Feladat. Bizonyítsuk be az 1.2.20. lemmát!

18. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha a $\overrightarrow{p_1p_2} \dots, \overrightarrow{p_1p_n}$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor a $p_1, \dots, p_n$ pontok affin függetlenek!

19. Feladat. Tegyük fel, hogy a $p_1, \dots, p_n$ pontok affin függetlenek. Bizonyítsuk be, hogy egy $p \in \text{aff}\,\{p_i\}$ pontra a $p = \sum \alpha_i p_i$ előállítás egyértelmű!

2. fejezet

Konvex halmazok

2.1. Konvexitás

2.1.1. Definíció (Szakasz)**.** Az $x, y \in P$ pontok által meghatározott szakaszon az $\overline{xy} = \{z \in P \mid z = \lambda x + (1-\lambda)y, \lambda \in [0,1]\}$ halmazt értjük.

2.1.2. Definíció (Konvexitás)**.** A $K \subseteq \mathbb{E}^d$ halmaz konvex, ha minden $x, y \in K$ esetén $\overline{xy} \subseteq K$.

2.1.3. Példa. Konvex halmazra példa 1 pont, egy altér vagy egy szakasz.

2.1.4. Lemma. *Konvex halmazok metszete konvex.*

Bizonyítás. Ha x és y benne vannak a metszetben, akkor minden egyes halmazban is. Mivel minden halmaz konvex, ezért minden halmaz tartalmazza az $\overline{xy}$ szakaszt, így a metszetük is. $\square$

2.1.5. Definíció (Konvex burok)**.** A $H \subseteq \mathbb{E}^d$ halmaz konvex burka a H-t tartalmazó összes konvex halmazok metszete, jele $\operatorname{conv} H$.

2.1.6. Definíció (Konvex kombináció)**.** A $p_1, \ldots, p_n$ pontok $p = \sum \alpha_i p_i$ affin kombinációját konvex kombinációnak nevezzük, ha a szereplő együtthatók nem negatívak, vagyis minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $\alpha_i \geq 0$.

A konvex kombináció és a konvex burok között az affin kombinációnál és a lineáris kombinációnál már látott kapcsolat szintén megvan.

2.1.7. Lemma. *Az összes konvex kombinációk éppen a konvex burkot adják, vagyis $H \subseteq \mathbb{E}^d$ esetén*

$$\operatorname{conv} H = \left\{ \sum \alpha_i p_i \mid \sum \alpha_i = 1 \text{ és } \forall i : p_i \in H, \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

Bizonyítás. Vezessük be a $J := \{\sum \alpha_i p_i \mid \sum \alpha_i = 1 \text{ és } \forall i : p_i \in H, \alpha_i \geq 0\}$ jelölést. Először belátjuk, hogy J konvex.

Tekintsük J két tetszőleges elemét: $\sum \alpha_i p_i$-t és $\sum \beta_i q_i$-t. Az általuk meghatározott szakasz egy tetszőleges pontja felírható $\lambda \sum \alpha_i p_i + (1-\lambda) \sum \beta_i q_i$ alakban, ahol $\lambda \in [0,1]$. Ez pedig világos módon egyenlő $\sum (\lambda \alpha_i) p_i + \sum ((1-\lambda)\beta_i) q_i$-vel, ami valóban egy H-ból képzett konvex kombináció.

Az egy ponból képzett konvex kombinációk éppen H-t adják, így $H \subseteq J$, amiből $\operatorname{conv} H \subseteq J$ azonnal következik.

Utolsó lépésként megmutatjuk, hogy ha K konvex halmaz tartalmazza H-t, akkor J-t is. Ebből $J \subseteq \operatorname{conv} H$ adódik.

A kombinációban szereplő tagok száma (n) szerinti indukciót alkalmazunk. Az egytagú kombinációk benne vannak K-ban, hiszen ezek épp H elemei és $H \subseteq K$. Tegyük, fel hogy az állítás igaz n-re. Ekkor

$$\sum_1^{n+1} \alpha_i p_i = \sum_1^{n} \alpha_i p_i + \alpha_{n+1} p_{n+1} = (\sum_1^{n} \alpha_j) \sum_1^{n} \frac{\alpha_i}{\sum \alpha_j} p_i + \alpha_{n+1} p_{n+1},$$

ahol az indexelést úgy választottuk, hogy $\sum_1^n \alpha_i \neq 0$ teljesüljön. Itt $\sum_1^n \frac{\alpha_i}{\sum \alpha_j} p_i \in K$ az indukciós feltevés szerint, így a jobb oldal tekinthető úgy, mint két K-beli pont által meghatározott szakasz egy pontja, ami definíció szerint benne van K-ban. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Az előző állításnál több is mondható. Elegendő a legfeljebb $d+1$ tagú konvex kombinációkat tekintenünk, ezek is kiadják a teljes konvex burkot.

2.1.8. Tétel (Charatheodory)**.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{E}^d$, ekkor*

$$\operatorname{conv} H = \left\{ \sum_1^{d+1} \alpha_i p_i \mid \sum \alpha_i = 1 \text{ és } \forall i : p_i \in H, \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy egy $n > d+1$ tagú konvex kombináció egyenlő egy H-ból képzett eggyel kevesebb tagú konvex kombinációval. Tekintsük tehát a $\sum_1^n \alpha_i p_i$ H-ból képzett konvex kombinációt, ahol $n > d+1$. Ekkor a $\{p_i\}$ pontok nem affin függetlenek az 1.2.24. következmény szerint, vagyis létezik $1 \leq j \leq n$ index, hogy $p_j = \sum_{i \neq j} \beta_i p_i$, ahol $\sum_{i \neq j} \beta_i = 1$. A $\beta_j = -1$ jelöléssel tekintsük a $\sum_1^n (\alpha_i - \lambda\beta_i) p_i$ kifejezést, ami affin kobináció minden λ skalárra, hiszen $\sum_1^n (\alpha_i - \lambda\beta_i) = \sum_1^n \alpha_i - \lambda \sum_1^n \beta_i = 1 - \lambda 0 = 1$. Továbbá vegyük észre, hogy behelyettesítve p_j fenti kifejezését, azt kapjuk, hogy

$$\sum_1^n (\alpha_i - \lambda\beta_i) p_i = \sum_1^n \alpha_i p_i. \tag{2.1}$$

A bal oldalon álló kifejezés általában nem konvex kombináció minden λ-ra, hiszen nem minden együttható szükségképpen nem negatív. Nyilván λ-t úgy szeretnénk választani, hogy a bal oldalon konvex kombináció álljon, és legalább az egyik együttható tűnjön el (legyen 0). Vegyük észre, hogy a

$$\lambda := \min_{\beta_i > 0} \frac{\alpha_i}{\beta_i}$$

választás jó lesz. Egyrészt van olyan i, hogy $\beta_i > 0$, hiszen $\beta_j = -1$ és $\sum \beta_i = 0$, így λ definíciója értelmes. Másrészt azokra az i-kre, amikre β_i pozitív, $\alpha_i - \lambda\beta_i$ is nem negatív λ választása miatt. Végül, mivel $\lambda \geq 0$, azért azokra az i-kre, amikre $\beta_i \leq 0$, azokra $\alpha_i - \lambda\beta_i \geq \alpha_i \geq 0$. Ezekből következik, hogy (2.1) bal oldalán konvex kombináció áll, továbbá legalább egyik együtthatója 0, méghozzá éppen arra az indexre, amire a minimum felvevődik λ definíciójában. □

Feladatok

20. Feladat. Bizonyítsuk be definíció alapján, hogy minden szakasz konvex!

21. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{E}^d$ rögzített pont, és tekintsük a

$$B(x) := \left\{ p \in \mathbb{E}^d \mid |xp| \leq 1 \right\}$$

halmazt, az x középpontú egységsugarú gömböt. Mutassuk meg, hogy $B(x)$ konvex!

22. Feladat. Rögzítsünk egy koordinátarendszert $\mathbb{E}^2$-ben, és legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, minden valósra értelmezett függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény az $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon konvex, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ esetén

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Mutassuk meg, hogy ha f konvex az (a, b) intervallumon, akkor a $H := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{E}^2 \mid \beta \geq f(\alpha)\}$ halmaz konvex!

23. Feladat. Adjunk példát olyan H nem konvex ponthalmazra, ami bármely két x és y pontjával együtt az $\overline{xy}$ szakasz felezőpontját is tartalmazza!

24. Feladat. Rögzítsünk a síkon egy S szakaszt és egy koordinátázást, úgy hogy S illeszkedjen az $x = 1$ egyenletű egyenesre. Jelöljük a síkon $e(a, b)$-vel azt az egyenest, melynek egyenlete $y = ax + b$. Legyen $H := \{(a, b) \in \mathbb{E}^2 \mid e(a, b) \cap S \neq \emptyset\}$. Igazoljuk, hogy H konvex.

2.2. Helly tétel

Helly tételének bizonyításához szükségünk van a következő, Radontól származó tételre.

2.2.1. Tétel (Radon)**.** *Legyen $X \subseteq \mathbb{E}^d$ véges ponthalmaz aminek elemszáma legalább $d+2$. Ekkor léteznek X_1 és X_2 nem üres, diszjunkt partíciói X-nek, vagyis $X = X_1 \dot\cup X_2$, úgy, hogy $\operatorname{conv} X_1 \cap \operatorname{conv} X_2 \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Legyenek X elemei $x_1, \ldots, x_n$, ahol $n > d+1$. Az 1.2.24. következmény szerint ezek nem affin függetlenek. Feltehetjük, hogy $x_1 = \sum_2^n \alpha_i x_i$, ahol $\alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \ldots \leq \alpha_k \leq 0 < \alpha_{k+1} \leq \ldots \leq \alpha_n$, valamint definiáljuk $\alpha_1 := -1$. Legyen $X_1 := \{x_1, \ldots, x_k\}$ és $X_2 := \{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$. Ekkor nyilván $X = X_1 \dot\cup X_2$, elég tehát belátni, hogy konvex burkaik metszete nem üres. Ehhez tekintsük az

$$x := \sum_1^k \frac{\alpha_i}{\sum_1^k \alpha_i} x_i$$

pontot. Ez valóban konvex kombináció hiszen $\sum_1^k \alpha_i$ szigorúan negatív (nem pozitív számok összege, melyek közt szerepel -1), a számlálók pedig nem pozitív számok. Így $x \in \operatorname{conv} X_1$. Az x_1-re felírt affin kombinációból következik, hogy

$$x = \sum_{k+1}^{n} \frac{\alpha_i}{\sum_{k+1}^{n} \alpha_i} x_i.$$

Hasonlóan, mint az előbb itt is látható, hogy a jobb oldal konvex kombináció, vagyis $x \in \operatorname{conv} X_2$, amiből az állítás adódik. $\square$

Megjegyzés. Radon tételét Tverberg általánosította 1966-ban. Ha $X \subseteq \mathbb{E}^d$ véges ponthalmaz legalább $(d+1)(r-1)+1$ elemű, akkor létezik

$$X = X_1 \dot\cup X_2 \dot\cup \ldots \dot\cup X_r$$

partícionálása úgy, hogy

$$\operatorname{conv} X_1 \cap \ldots \cap \operatorname{conv} X_r \neq \emptyset.$$

Részletek [8] könyvben találhatók.

2.2.2. Tétel (Helly)**.** *Legyen $K_1, K_2, \ldots, K_n$ legalább $d+1$ darab konvex halmaz $\mathbb{E}^d$-ben úgy, hogy bármelyik $(d+1)$-nek van közös pontja. Ekkor az összesnek van közös pontja,*

$$\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Az állítás először az $n = d+2$ esetben érdekes, ezt bizonyítjuk, majd n szerinti indukciót alkalmazunk.
Legyen tehát $n = d+2$. Ekkor bármely adott j-re $(j = 1, \ldots, d+2)$ a $\cap_{i \neq j} K_i$ halmaz nem üres a feltétel szerint. Válasszuk a p_j pontot tetszőleges ebből a halmazból, $p_j \in \cap_{i \neq j} K_i$ $(j = 1, \ldots, d+2)$. Alkalmazhatjuk a $\{p_1, \ldots, p_{d+2}\}$ pontokra a 2.2.1. tételt. Esetleges újraindexelés után kapjuk tehát, hogy valamilyen k $(1 \leq k \leq d+1)$ indexszel az $X_1 := \{p_1, \ldots, p_k\}$ és az $X_2 := \{p_{k+1}, \ldots, p_{d+2}\}$ halmazokra $\operatorname{conv} X_1 \cap \operatorname{conv} X_2 \neq \emptyset$. Ekkor válasszunk tetszőlegesen egy $p \in \operatorname{conv} X_1 \cap \operatorname{conv} X_2$ pontot. Vegyük észre,

hogy a p_i pontok definíciója miatt, ha $1 \leq i \leq k$ és $k+1 \leq j \leq d+2$, akkor $p_i \in K_j$. Mivel $\cap_{k+1}^{d+2} K_j$ konvex, azért $\operatorname{conv} X_1 = \operatorname{conv}\{p_1, \dots p_k\} \subseteq \cap_{k+1}^{d+2} K_j$, vagyis $p \in \cap_{k+1}^{d+2} K_j$. Ugyanígy megmutatható, hogy $p \in \cap_1^k K_i$. Ezekből pedig az állítás következik az $n = d+2$ esetben.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy az állítást igazoltuk n-ig. Legyenek $K_1, \dots, K_{n+1}$ halmazok a tétel feltételei szerint. Tekintsük a $K_1 \cap K_{n+1}, \dots, K_n \cap K_{n+1}$ halmazokat (összesen n darab). Megmutatjuk, hogy ezek közül bármelyik $d+1$ metszete nem üres. Szimmetriai okokból elég az első $d+1$-re belátni. A feltevésünk szerint a $K_1, \dots, K_{d+1}, K_{n+1}$ halmazok közül bármelyik $d+1$ metsző, alkalmazva az állítást a fentebb bizonyított $d+2$ esetre nyerjük, hogy a metszetük nem üres. Viszont így

$$\emptyset \neq \left(\bigcap_1^{d+1} K_i \right) \bigcap K_{n+1} = \bigcap_1^{d+1} (K_i \cap K_{n+1}).$$

Tehát valóban a $K_1 \cap K_{n+1}, \dots, K_n \cap K_{n+1}$ halmazok közül bármelyik $d+1$ metszete nem üres. Így alkalmazva az indukciós hipotézist n-re

$$\emptyset \neq \bigcap_1^{n} (K_i \cap K_{n+1}) = \bigcap_1^{n+1} K_i,$$

amivel az állítást beláttuk. □

Feladatok

25. Feladat. Bizonyítsuk be Tverberg tételét $d = 2$, $r = 3$ és $|X| = 7$ esetén! (Vigyázat! Nehéz!)

26. Feladat. Konstruáljunk konvex halmazokat a síkon, hogy bármely 3-nak legyen közös pontja, de az összes metszete legyen üres! (Vessük össze a feladatot a 2.2.2. tétellel.)

27. Feladat. Tegyük fel, hogy néhány zárt féltér lefedi a teljes $\mathbb{E}^d$-t. Mutassuk meg, hogy kiválasztható közülük legfeljebb $d+1$, ami szintén lefedi $\mathbb{E}^d$-t. [Tipp: vizsgáljuk a félterek komplementereit.]

28. Feladat. Adottak a síkon $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pontok. Tudjuk, hogy közülük bármely 3 lefedhető egy egységsugarú körlappal. Igazoljuk, hogy az összes lefedhető egy egységsugarú körlappal.

29. Feladat. Adott a síkon n pont, bármely kettő távolsága legfeljebb 1. Mutassuk meg, hogy lefedhetőek egy $\sqrt{3}/3$ sugarú körlappal.

30. Feladat. Adott a síkon n páronként párhuzamos és páronként diszjunkt szakasz. Közülük bármely háromhoz létezik egy olyan egyenes, ami mindhármukat metszi. Mutassuk meg, hogy létezik olyan egyenes, ami az összeset metszi. (Ezt az egyenest Santalo-transzverzálisnak nevezzük.) [Tipp: használjuk fel a 24. feladatot.]

2.3. Támaszhipersík, szeparáció

2.3.1. Definíció. A H hipersík a K konvex halmaz támaszhipersíkja, ha $H \cap K \neq \emptyset$, és K-t tartalmazza egy H-hoz tartozó féltér. Ez utóbbi félteret K támaszféltérének nevezzük.

2.3.2. Lemma. *Legyen K kompakt, konvex halmaz,* $\mathbf{n}$ *pedig egy tetszőleges vektor. Ekkor K-nak létezik támaszhipersíkja, melynek normálvektora* $\mathbf{n}$.

Bizonyítás. Tekintsük az $f_{\mathbf{n}} : K \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle \overrightarrow{ox}, \mathbf{n} \rangle$ függvényt valamilyen rögzített o pontra. Mivel K kompakt és f folytonos, ezért f felveszi a szélsőértékeit K-n. Legyen a minimum α_{min}, a hozzá tartozó (egyik) minimum hely x_{min}; a maximum értéke α_{max}, a hozzá tartozó (egyik) maximum hely pedig x_{max}. Legyen H_{max} hipersík egyenlete $\langle x, \mathbf{n} \rangle = \alpha_{max}$; H_{min} hipesík egyenlete $\langle x, \mathbf{n} \rangle = \alpha_{min}$. Világos, hogy egyrészt $x_{max} \in H_{max} \cap K$ és $x_{min} \in H_{min} \cap K$; másrészt a K konvex test a H_{min} és H_{max} hipersíkok egy-egy zárt félterében van az α_{max} és α_{min} skalárok extremalitása miatt. $\square$

Célszerű $\mathbf{n}$-t egységnyinek választani, hiszen ekkor az $\alpha_{max} - \alpha_{min}$ érték éppen a két hipersík távolsága lesz. Ezt a mennyiséget pedig joggal nevezhetjük K $\mathbf{n}$ irányú szélességének, vagy vastagságának. Általában egy test $\mathbf{n}$

irányú szélessége függ $\mathbf{n}$-től, de például a gömb esetén minden irányban $2r$ a szélesség. Érdekes kérdés, hogy van-e másik olyan test a gömbön kívül, aminek a szélessége állandó. Erre a válasz igenlő. Egyszerű példát gyárthat mindenki, ha egy 1 oldalú szabályos háromszög minden csúcsa, mint középpont köré rajzol egy 1 sugarú kört, és tekinti ezen körök metszetét. Az így kapott alakzat a Relaux-háromszög. Hasonlóan gyártható tetszőleges páratlan k-ra k oldalú Relaux-poligon, ami szintén állandó szélességű lesz. Az állandó szélességű alakzatoknak komoly irodalma van, mi itt most csak két egyszerű állítást mondunk ki bizonyítás nélkül.

2.3.3. Lemma. *Egy d állandó szélességű, konvex, kompakt síklemez kerülete éppen $d\pi$.*

2.3.4. Tétel (Blaschke)**.** *Ha $K \subseteq \mathbb{E}^d$ kompakt, konvex halmaz* 1 *állandó szélességű, akkor tartalmaz egy* $1/(d+1)$ *sugarú gömböt.*

Utóbbi tétel bizonyítása a Helly-tétel egy általánosabb változatán alapszik.

2.3.5. Definíció. Az A és B ponthalmazokat szeparálja a H hipersík, ha $A \subseteq H_0$ és $B \subseteq H_+$ (vagy fordítva).

A következő tétel a szeparációs tételek közül a legegyszerűbb, azt állítja, hogy egy kompakt, konvex halmaz mindig szeparálható egy hozzá nem tartozó ponttól egy támaszhipersíkkal.

2.3.6. Tétel (Szeparációs)**.** *Legyen $K \in \mathbb{E}^d$ kompakt, konvex halmaz és $p \notin K$ pont. Ekkor létezik H támaszhipersíkja K-nak, ami szeparálja K-t és p-t és $p \notin H$.*

Bizonyítás. Mivel K kompakt ezért létezik olyan t pontja ami minimális távolságra van p-től. Ez a t pont egyértelműen meghatározott, hiszen két különböző $t_1 \neq t_2$ minimiális tulajdonságú pont esetén az általuk meghatározott szakasz felezőpontja szigorúan közelebb lenne p-hez (33. feladat). Tekintsük azt a H hipersíkot, amelyik illeszkedik t-re és normálvektora $\overrightarrow{tp}$. Az origot tegyük t-be, így $p \in H_+$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in (H_+ \cap K) \backslash H$, vagyis, hogy a H nem támaszhipersíkja K-nak. Mivel K konvex, azért $\overline{tx} \in K$. A definíciók miatt $\delta := \langle \overrightarrow{tx}, \overrightarrow{tp} \rangle > 0$ teljesül. A $\overline{tx}$ szakasz tetszőleges y pontja felírható $y = t + \lambda \cdot \overrightarrow{tx}$ alakban, ahol $0 \leq \lambda \leq 1$. Ekkor az $|yp|$ távolság így számítható:

$$\begin{aligned} |yp|^2 &= \langle \overrightarrow{yp}, \overrightarrow{yp} \rangle = \langle \overrightarrow{ty} - \overrightarrow{tp}, \overrightarrow{ty} - \overrightarrow{tp} \rangle = \langle \lambda \overrightarrow{tx} - \overrightarrow{tp}, \lambda \overrightarrow{tx} - \overrightarrow{tp} \rangle = \\ &= \lambda^2 |tx|^2 - 2\lambda \langle \overrightarrow{tx}, \overrightarrow{tp} \rangle + |tp|^2 = \lambda^2 |tx|^2 - 2\lambda\delta + |tp|^2. \end{aligned}$$

Vagyis, ha $0 < \lambda < \frac{2\delta}{|tx|^2}$ (ilyen λ létezik, a fentiek miatt), akkor $|yp|^2 < |tp|^2$, ami ellentmond t választásának, hiszen $y \in K$. Így H támaszhipersík, ami szeparálja p-t és K-t, és nyilvánvalóan $p \notin H$. $\square$

2.3.7. Következmény. *Minden kompakt, konvex halmaz előáll támaszféltereinek metszeteként, vagyis legyen K kompakt, konvex halmaz, ekkor*

$$K = \bigcap_{H_+ \, \textit{támaszféltér}} H_+.$$

Bizonyítás. Mivel definíció szerint minden támaszféltere tartalmazza K-t, így a metszetük is, vagyis $K \subseteq \bigcap H_+$. Másrészről tegyük fel hogy $x \in (\bigcap H_+) \backslash K$. Ekkor a 2.3.6. tétel szerint x támaszhipersíkkal szeparálható K-tól, és az ehhez tartozó támaszféltér nem tartalmazza x-t. Ez ellentmondás, amivel a következményt beláttuk. $\square$

A következő állítás szintén egy szeparációs tétel, ami az előző állításból azonnal megkapható.

2.3.8. Következmény. *Ha K kompakt, konvex halmaz, $p \notin K$ pont, akkor létezik őket szigorúan szeparáló H hipersík, vagyis olyan szeparáló hipersík, amelynek K-val vett metszete üres, és nem tartalmazza p-t.*

Bizonyítás. Lásd a 34. feladatot. $\square$

A következő lemmát nem bizonyítjuk.

2.3.9. Lemma. *Ha K kompakt, konvex és $p \notin$ relint K, akkor p és K szeparálható. (relint K a K relatív belseje, ami nem más, mint K belseje aff K-ban.)*

Ez a lemma az előzőekhez képest annyi többletinformációt ad, hogy a relatív határon lévő pontok is szeparálhatóak, amiből azonnal következik, hogy nemcsak minden irányban, de minden határpontban is van támaszhipersík.

2.3.10. Következmény. *Konvex halmaz bármely határpontjában „húzható" támaszhipersík.*

Feladatok

31. Feladat. Adjunk példát olyan korlátos, konvex halmazra, aminek nincs támaszhipersíkja. (Egy halmaz korlátos, ha lefedhető egy gömbbel.)

32. Feladat. Vegyünk egy egységnyi oldalú szabályos ötszöget, és „építsünk" rá egy Relaux-poligont. Mekkora lesz ennek a kerülete? Mekkora a területe?

33. Feladat. Tegyük fel, hogy $|pt_1| = |pt_2|$ valamilyen p és $t_1 \neq t_2$ pontokra. Mutassuk meg, hogy $\overline{t_1t_2}$ szakasz f felezőpontja közelebb van p-hez, mint t_1.

34. Feladat. Bizonyítsuk be a 2.3.8. következményt.

35. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha K kompakt, konvex halmaz, $\mathbf{n}$ pedig egy tetszőleges vektor, akkor K-nak létezik olyan támaszhipersíkja, aminek normálvektora $\mathbf{n}$.

2.4. Dualitás

Ebben a szakaszban végig feltételezzük, hogy rögzítve van egy koordinátázás. A pontok és a vektorok így azonosíthatóak.

2.4.1. Definíció. Egy $H \subseteq \mathbb{E}^d$ halmaz duálisán (vagy más szóhasználattal polárisán) a

$$H^* = \{x \in \mathbb{E}^d \mid \langle x, y \rangle \leq 1, \forall y \in H\}.$$

2.4.2. Példa. Az x_0 pont polárisa az $\{x \in \mathbb{E}^d \mid \langle x, x_0 \rangle \leq 1\}$ halmaz, ami egy zárt féltér, kivéve ha $x_0 = o$, amikor az egész $\mathbb{E}^d$.

2.4.3. Definíció. $\overline{H}$ a H halmaz lezártját jelöli.

2.4.4. Tétel (A dualitás tulajdonságai). *i) H^* konvex, zárt, és tartalmazza o-t.*

ii) $H^* = (\operatorname{conv} H)^*$, *ha* $H_1 \subseteq H_2$ *,akkor* $H_1^* \supseteq H_2^*$, $(\alpha H)^* = \frac{1}{\alpha} H^*$.

iii) $(\overline{\operatorname{conv} H})^* = (\operatorname{conv} H)^*$.

iv) $(H_1 \cup H_2)^* = H_1^* \cap H_2^*$.

v) Ha K konvex és zárt, $o \in K$ akkor $K^{**} := (K^*)^* = K$.

vi) Ha K_1 és K_2 konvexek és zártak, $o \in K_1 \cap K_2$, akkor

$$(K_1 \cap K_2)^* = \overline{\operatorname{conv}(K_1^* \cup K_2^*)}.$$

Bizonyítás. i) $H^* = \cap_{y \in H} \{x \mid \langle x, y \rangle \leq 1\}$, így H^* konvex zárt halmazok (félterek, esetleg az egész tér) metszete, vagyis maga is konvex és zárt. Világos, hogy $o \in H^*$, mivel $\langle o, x \rangle = 0$.
ii) Lásd a 36. feladatot.
iii) Egyrészt $\overline{\operatorname{conv} H} \supseteq \operatorname{conv} H$, amiből $(\overline{\operatorname{conv} H})^* \subseteq (\operatorname{conv} H)^*$ azonnal jön. Másrészt tudjuk, hogy a belsőszorzat folytonos. Legyen $y \in (\operatorname{conv} H)^*$, és $x \in \overline{\operatorname{conv} H}$. Válasszunk x_n sorozatot $\operatorname{conv} H$-ból, hogy $x_n \to x$. Ekkor a folytonosság miatt $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$. Mivel minden x_n-re $\langle x_n, y \rangle \leq 1$, így $\langle x, y \rangle \leq 1$, amiből $(\overline{\operatorname{conv} H})^* \supseteq (\operatorname{conv} H)^*$.
iv) A ii) pont alapján, mivel $H_1 \subseteq H_1 \cup H_2$, azért $H_1^* \supseteq (H_1 \cup H_2)^*$, hasonlóan $H_2^* \supseteq (H_1 \cup H_2)^*$, így

$$H_1^* \cap H_2^* \supseteq (H_1 \cup H_2)^*.$$

Másrészt ha $x \in H_1^* \cap H_2^*$, akkor $\langle x, y \rangle \leq 1$ egyrészt minden $y \in H_1$, másrészt minden $y \in H_2$ esetén. Ebből $x \in (H_1 \cup H_2)^*$ adódik, vagyis

$$H_1^* \cap H_2^* \subseteq (H_1 \cup H_2)^*.$$

v) Vegyük észre, hogy $K \subseteq K^{**}$ a definícióból azonnal következik. Tegyük fel indirekt, hogy létezik $y_0 \in K^{**} \setminus K$ pont. Ekkor a 2.3.8. következmény szerint létezik egy H hipersík, ami szigorúan szeparálja őket, legyen ennek egyenlete $\langle x, n \rangle = \alpha$, ahol $K \subseteq \{x \,|\, \langle x, n \rangle < \alpha\}$ és $\langle y_0, n \rangle > \alpha$. Mivel $o \in K$, azért α szigorúan pozitív, vagyis $K \subseteq \{x \,|\, \langle x, n/\alpha \rangle < 1\}$. Így $n/\alpha \in K^*$ valamint a feltevés szerint $y_0 \in K^{**}$, ahonnan $\langle n/\alpha, y_0 \rangle \leq 1$, ami ellentmondás a szigorú szeparáció miatt.

vi) A 37. feladat alapján $\overline{\text{conv}\,(K_1^* \cup K_2^*)}$ konvex, és nyilvánvalóan zárt, így

$$(\overline{\text{conv}\,(K_1^* \cup K_2^*)})^{**} = \overline{\text{conv}\,(K_1^* \cup K_2^*)}. \tag{2.2}$$

Másrészről ii), iii) és iv) alapján

$$(\overline{\text{conv}\,(K_1^* \cup K_2^*)})^{*} = (K_1^* \cup K_2^*)^* = K_1^{**} \cap K_2^{**} = K_1 \cap K_2.$$

Utóbbi számítás duálisát összevetve (2.2) -vel nyerjük az állítást. □

2.4.5. Példa. Az origo középpontú, r sugarú gömb duálisa az origo középpontú $1/r$ sugarú gömb. Speciálisan az egységgömb önduális.

Feladatok

36. Feladat. Bizonyítsuk a 2.4.4. tétel ii) állítását.

37. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy konvex halmaz lezártja is konvex.

38. Feladat. Számítsuk ki egy tetszés szerinti négyzet duálisát.

39. Feladat. Számítsuk ki egy tetszés szerinti háromszög duálisát.

40. Feladat. Milyen alakzatra igaz, hogy $K = K^*$?

41. Feladat. Adjunk példát olyan (legalább 2-dimenziós) alakzatra, amire K és K^* egybevágó, de K nem gömb.

2.5. Poliéderek, politópok

A középiskolában szokásostól eltérően fogjuk használni a poliéder kifejezést.

2.5.1. Definíció. Véges sok zárt féltér metszetét poliédernek nevezzük. A korlátos poliédereket *politópoknak* hívjuk.

2.5.2. Példa. Poliéderre példa egy féltér. Politóp minden szabályos sokszög a síkon, a tetraéder a térben.

2.5.3. Példa (Kocka.)**.** A $C_d := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{E}^d \mid |x_i| \leq 1, \forall i = 1, \dots, d\}$ halmaz egy d-dimenziós kocka. Megfigyelhetjük, hogy a kockát előállítják az $x_i = \pm 1$ egyenletű hipersíkokhoz tartozó, origot tartalmazó félterek.

A következő állítás azonnal mutatja, hogy egy politópra úgy is lehet gondolni, mint véges sok pont konvex burkára. Az egyik irányt nem bizonyítjuk.

2.5.4. Tétel. *Minden politóp véges sok pont konvex burka. Véges sok pont konvex burka politóp.*

Bizonyítás. Az első állítás több előkészületet igényel, ezért nem bizonyítjuk. Legyen $P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$. Feltehető, hogy $\operatorname{aff} P = \mathbb{E}^d$ és $o \in \operatorname{int} P$. Utóbbiból következik, hogy létezik ε, amire $B(o, \varepsilon) \subseteq P$. Továbbá az 1.1.7. tétel felhasználásával könnyű látni, hogy P korlátos, és világos, hogy zárt. Tekintsük a P^* halmazt. Erre a dualitás tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy

$$P^* = (\operatorname{conv} \cup \{x_i\})^* = (\cup\{x_i\})^* = \cap(\{x_i\}^*) = \cap\{y \mid \langle y, x_i \rangle \leq 1\},$$

vagyis P^* véges sok féltér metszete, így poliéder. Másrészt $B(o, \varepsilon) \in P$ miatt $B(o, 1/\varepsilon) \supseteq P^*$, vagyis P^* korlátos, így politóp. Az állítás első része szerint így P^* véges sok pont konvex burka, $P^* = \operatorname{conv}\{z_j\}$. Innen hasonlóan, mint az előbb látható, hogy P^{**} is politóp, ez azonban egyenlő P-vel. $\square$

Egy d-dimenziós politóp lapja szintén nem a szoksásos 3-dimenziós lap fogalmával esik egybe.

2.5.5. Definíció (Lap)**.** Egy politóp egy támaszhipersíkjával vett metszetét lapnak nevezzük. Az i-dimenziós lapok számát f_i-vel fogjuk jelölni (egy adott P politóp esetén).

Figyeljük meg, hogy eszerint a 3-dimenzióban szokásos csúcsok, élek és lapok mind lapok lesznek az új elnevezés szerint is. Általában magasabb dimenzióban a lap dimenziójával jelezzük, hogy milyen lapról van szó. Mivel minden lap benne van egy hipersíkban, ezért ez a dimenzió legfeljebb $d-1$ lehet. A 0-dimenziós lapokra, az eddigiekkel összhangban megtartjuk a csúcs elnevezést. A $(d-1)$-dimenziós lapokat általában hiperlapoknak hívjuk. Az él mindig 1-dimenziós lapra utal, 3-nál magasabb dimenzióban kerülendő.

Megfigyelhetjük, hogy egy az egy dimenziós politóp nem más, mint egy szakasz; két dimenziós politópok a jól ismert (konvex) poligonok. Három dimenziós politópra az olvasó már bizonyára számtalan példát látott. Egy dimenzióban egy politópnak (szakasznak) csak csúcsai vannak, mindig pontosan 2. Két dimenzióban tudjuk, hogy akármennyi csúcs és oldal lehet, de ezek száma mindig egyenlő. Három dimenzióban is viszonylag közismert, hogy létezik egy összefüggés a politóp csúcsai, élei és lapjai száma között, ezt szokás Euler-formulának nevezni. A következő tétel ennek az állításnak az általánosítása magasabb dimenzióra. Az előbbi három konkrét példából már megsejthető, hogy a bal oldalon váltott előjellel összeadva a megfelelő dimenziós lapok számát 0-t vagy 2-t kapunk aszerint, hogy a dimenzió páros vagy páratlan.

2.5.6. Tétel (Euler)**.** *Legyen P d-dimenziós politóp. Ekkor*

$$\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i f_i = 1 + (-1)^{d+1}.$$

Bizonyítás. Az általános bizonyítás dimenzió szerinti indukcióval történhet, mi csak a $d = 3$ esetre adunk egy szemléletre alapozó bizonyítást. [Vizsgára az előadáson elhangzott bizonyítások és eközül elég egy tetszés szerintit megtanulni.]

A csúcsok, élek és lapok számára megtartjuk a bevett c, e és l jelölést. Vegyük észre, hogy egy megfelelő külső pontból egy megfelelő síkra vetítve a test élvázát egy síkgráfot kapunk, aminek c csúcsa, e éle van, és a síkot l tartományra bontja. Ha van olyan tartomány, amit nem három él határol, akkor ezt a tartományt egy új éllel két tartományra vághatjuk. Ezzel az élek és a tartományok száma is eggyel nőtt, összességében erre az új síkgráfra pontosan akkor teljesül a tétel ha az eredetire. Ilyen új élek hozzáadása után feltehetjük, hogy minden tartomány háromszög (három él határolja). Most „kívülről befelé" lebontjuk a gráfunk, úgy, hogy törölgetjük a háromszögeket. Kétfajta „külső" háromszög van, aminek a végtelen tartománnyal egy közös oldala van, illetve aminek kettő. Az első esetben a közös oldalt megszűntetve eggyel csökken az élek és a tartományok száma, vagyis a tétel érvényessége nem változik. A második esetben két élet törlünk, egy csúcsot, és megszűnik egy tartomány. A tétel érvenyessége ettől a művelettől sem változik. Ilyen lépésekkel eljuthatunk addig, míg már csak egy háromszög marad, amire a tétel nyilván igaz. □

Egy egyszerű következmény a három dimenziós szabályos testek meghatározása. Legyenek a keresett test lapjai m-szögek, és minden csúcsa legyen k-adfokú. Innen $lm = 2e$ adódik, hiszen a bal oldalon laponként leszámoljuk az éleket, de minden él két lapra is illeszkedik. Másrészt $ck = 2e$ is adódik az éleket csúcsonként leszámolva. Behelyettesítve az Euler-formulába kapjuk, hogy

$$\frac{2e}{m} - e + \frac{2e}{k} = 2.$$

Ezt átrendezve

$$e\left(\frac{2k + 2m - mk}{mk}\right) = 2$$

adódik. Innen $2k+2m-mk > 0$, vagyis $(2-m)(2-k) < 4$. Az összes esetet szisztematikusan megvizsgálva öt megoldást kapunk az (m, k) párra: $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$, $(3, 5)$.

2.5.7. Tétel (Szabályos politópok 3-dimenzióban)**.** *A* 3*-dimenziós Euklideszi térben* 5*-féle szabályos politóp van, méghozzá a tetraéder, a kocka, az oktaéder,* *a dodekaéder és az ikozaéder.*

Legyen P tetszőleges 3-dimenziós politóp c csúccsal, e éllel és l lappal. Mivel minden lapra legalább 3 él illezskedik, így $2e \geq 3l$. Másrészt, mivel minden csúcs legalább harmadfokú, így $2e \geq 3c$.

2.5.8. Tétel ((c, e, l) hármasok jellemzése)**.** *Pontosan akkor létezik P háromdimenziós politóp c csúccsal, e éllel és l lappal, ha*

- $c - e + l = 2$,
- $2e \geq 3l$,
- $2e \geq 3c$

mindegyike teljesül.

Bizonyítás. A szükségesség az Euler-formulából és az előzetes megjegyzésből következik.

Az elégségességet úgy látjuk be, hogy minden megfelelő hármashoz konstruálunk egy politópot, ami realizálja. Először is vegyük észre, hogy a feltételekkel ekvivalens a következő három feltétel:

- $c - e + l = 2$,
- $2l \geq c + 4$,
- $2c \geq l + 4$.

Ilyen módon elegendő a lapok és a csúcsok számára figyelni, hiszen az élek száma az Euler-tétel miatt „automatikusan" jó lesz. Egyszerűen azt mondjuk, hogy az (a, b) számpár realizálható, ha létezik 3-politóp a darab csúccsal és b darab lappal. Három lépésben bizonyítunk.

1, Ha $a \geq 4$, akkor (a, a) realizálható.

2, Ha (a, a) realizálható, akkor $(a + i, a + 2i)$ is realizálható minden nem negatív i esetén.

3, Ha (a, a) realizálható, akkor $(a + 2i, a + i)$ is realizálható minden nem negatív i esetén.

Könnyű meggondolni, hogy ezekből az állítás már következik.

1, belátáshoz elég egy $(a-1)$-szög alapú gúlára gondolni. 2, belátásához, az előbb megadott gúlából indulva i-szer „ragasztunk” egy háromszöglapra kifelé egy „lapos” gúlát. Könnyű látni, hogy mindig lesz háromszög lap, ami használható. 3, belátásához pedig a gúlából indulva i-szer lecsapunk harmadfokú csúcsokat. Könnyű látni, hogy harmadfokú csúcs is mindig marad. $\square$

A következő tétel szerint minden kompakt, konvex testhez van tetszőlegesen „közel” egy politóp.

2.5.9. Definíció. Legyen K kompakt, konvex test. Ekkor $K(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{E}^d \mid \exists p \in K : d(p,x) \leq \varepsilon\}$.

2.5.10. Tétel (Politóp approximáció.)**.** *Legyen K kompakt, konvex test. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik P politóp, hogy*

$$P \subseteq K \subseteq P(\varepsilon).$$

Bizonyítás. Rögzítsük $\varepsilon > 0$-t. Legyen $B(x,\varepsilon)$ az x középpontú, ε sugarú nyílt gömb. Nyilvánvalóan

$$K \subseteq \cup_{x \in K} B(x,\varepsilon).$$

Mivel K kompakt, ezért ebből a nyílt fedésből kiválasztható egy véges fedő rendszer, vagyis léteznek $x_1,\dots,x_n$ pontok K-ban, hogy

$$K \subseteq \cup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon).$$

Legyen $P := \operatorname{conv}\{x_1,\dots,x_n\}$. $P \subseteq K$ teljesül, mivel K konvex. Másrészt bármely $x \in K$ esetén létezik j index, hogy $x \in B(x_j,\varepsilon)$ a véges fedés miatt. Így viszont $x \in P(\varepsilon)$ és $K \subseteq P(\varepsilon)$. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] P.M. Gruber, Convex and discrete geometry, Springer, 2007.

[2] Kincses J., Bevezetés a geometriába, előadásjegyzet, 2002.

[3] Kincses J., Konvex geometria, előadásjegyzet, 2003.

[4] Kovács Z., Konvexitás, előadásvázlat, 2004.
`http://zeus.nyf.hu/~kovacsz/konvex.pdf`

[5] Kurusa Á., Euklideszi geomteria, Polygon, 2008.

[6] R. Schneider, Convex Bodies – the Brunn-Minkowski theory, Cambridge Univ. Press, 1993.

[7] Szabó L., Bevezetés a lineáris algebrába, Polygon, 2003.

[8] Szabó L., Konvex geometria, ELTE jegyzet, 1996.

[9] Szabó Z., Bevezető fejezetek a geometriába, JATE jegyzet, 1982.