Néhány kombinatorikus összerakó

Vígh Viktor
SZTE Bolyai Intézet

2015. január 26.

Táncsics Mihály Gimnázium, Orosháza

Pentominók

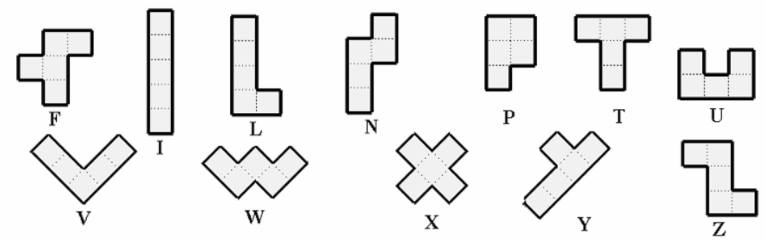
Mi az a pentominó?

„Olyan, mint egy dominó, csak kettő helyett öt négyzetből áll."

Pentominók

Mi az a pentominó?

„Olyan, mint egy dominó, csak kettő helyett öt négyzetből áll.”



Pentominók

Talán a legjobban kielemzett játék a világon. Rengeteg feladattípussal, az egészen könnyűektől a lehetetlenül nehezekig.

Néhány feladattípus:

- Adott forma kitöltése (pl. téglalap, betűk, állatok, stb.)
- Elemkettőzés, elemháromszorozás
- Egyenletek, lehetetlen egyenletek
- Szimmetrikus alakzatok

Pentominók a térben, pentakockák

Ha pentominóinkat nem négyzetlapokból, hanem egyforma kockákból készítjük el, rögtön egy térbeli összerakót kapunk.

Pentominók a térben, pentakockák

Ha pentominóinkat nem négyzetlapokból, hanem egyforma kockákból készítjük el, rögtön egy térbeli összerakót kapunk.

Sőt, öt egyforma kockából már 29 féle „térbeli dominó”, pentakocka készíthető - a pentominókon kívül további 17 darab, amik „valóban térbeliek”.

Pentominók a térben, pentakockák

Ha pentominóinkat nem négyzetlapokból, hanem egyforma kockákból készítjük el, rögtön egy térbeli összerakót kapunk.

Sőt, öt egyforma kockából már 29 féle „térbeli dominó", pentakocka készíthető - a pentominókon kívül további 17 darab, amik „valóban térbeliek".

A kitűzhető feladatok hasonlóak, mint a síkban, de még nagyobb változatosságot mutatnak, és általában nehezebbek is, hiszen a 29 elem már nagyon sok. Animáció#1

Pentominók a térben, pentakockák

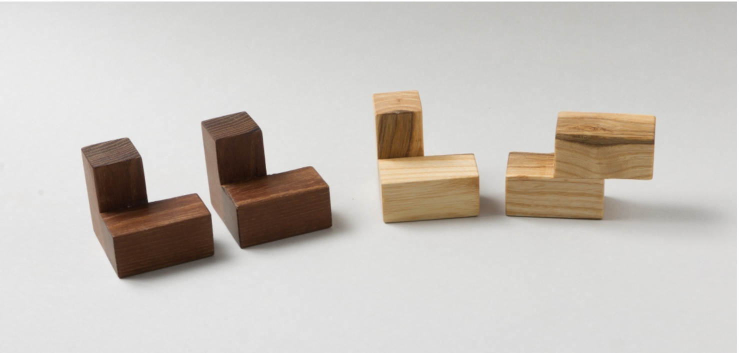
Ha pentominóinkat nem négyzetlapokból, hanem egyforma kockákból készítjük el, rögtön egy térbeli összerakót kapunk.

Sőt, öt egyforma kockából már 29 féle „térbeli dominó", pentakocka készíthető - a pentominókon kívül további 17 darab, amik „valóban térbeliek".

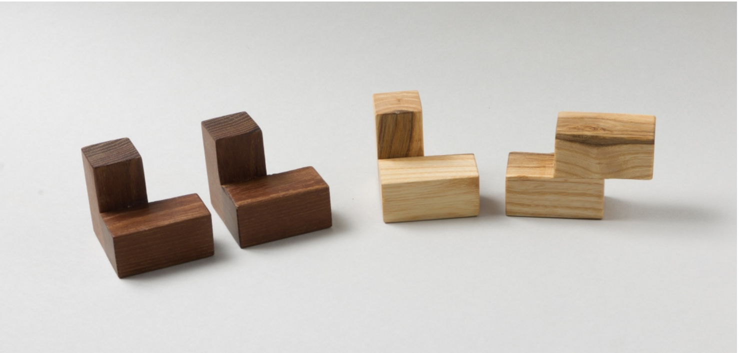
A kitűzhető feladatok hasonlóak, mint a síkban, de még nagyobb változatosságot mutatnak, és általában nehezebbek is, hiszen a 29 elem már nagyon sok. Animáció#1

Míg a síkban négy négyzet egy picit kevés, a tetraminók nem annyira „izgalmasak" (azonalli cáfolat: Tetris), tetrakockákból már kiváló feladványokat lehet gyártani.

Cél: építsünk két egyforma alakzatot. (Tervezők: Bram Cohen és Wei-Hwa Huang)



Cél: építsünk két egyforma alakzatot. (Tervezők: Bram Cohen és Wei-Hwa Huang)

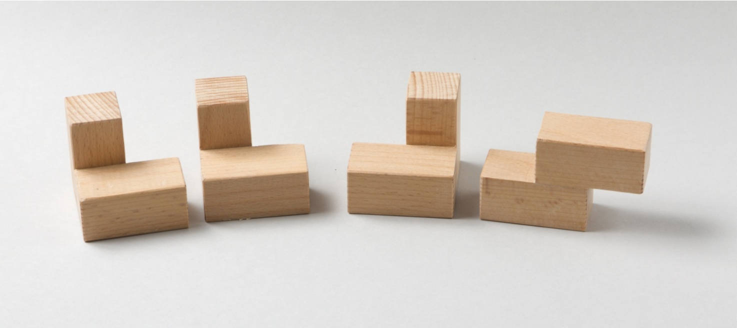


$$X + X = X + Y \Rightarrow X = Y\,?$$

Forrás: http://ordoglakat.blog.hu/2013/10/20/dartagnan_es_egy_mutans

…és egy mutáns

Cél: építsünk két egyforma alakzatot. (Tervező: Gál Péter)

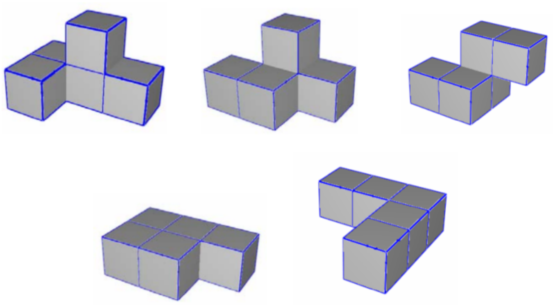


Két játék az egyben!

Forrás: `http://ordoglakat.blog.hu/2013/10/20/dartagnan_es_egy_mutans`

Öt elemű készlet pentakockákból

Cél : válasszunk négy tetszőlegeset, és építsünk két egyforma alakzatot. Mi a helyzet ha egymás tükörképeit akarjuk kirakni ?



Animáció#2

Transzformer: Kocka-tégla-hasáb

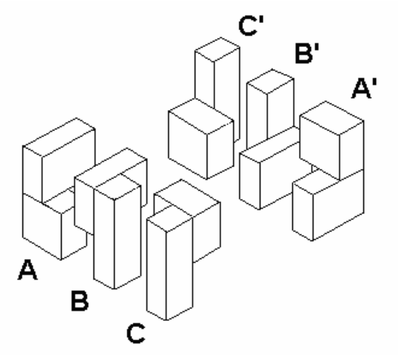
Gyakorlatilag csak a fantáziánk szab határt az egységkockák összeragasztásával készült kitűzhető játékoknak.

Transzformer: Kocka-tégla-hasáb

Gyakorlatilag csak a fantáziánk szab határt az egységkockák összeragasztásával készült kitűzhető játékoknak.

Felmerülnek „esztétikai" szempontok is: például kevés elemszámból nehéz játékot kitalálni. Vagy csak egyszerűen legyen a játék valamitől különleges. Animáció#3

Az előzőhöz hasonló, de hat elemből áll, amik páronként egymás tükörképei. Hatféle téglatest rakható ki a készletből (köztük a kocka), amelyek könnyedén egymásba alakíthatóak. Animáció#4



O'Beirne másik boszorkánysága: az Olvasztótégely

Tegyük be a kimaradó téglát is az olvasztótégelybe!

Forrás: `http://puzzling-parts.thejuggler.net/?p=1269`

Az Olvasztótégely kipakolva

Forrás: `http://puzzling−parts.thejuggler.net/?p=1269`

Tényleg van hely!

Forrás: http://puzzling−parts.thejuggler.net/?p=1269

Tényleg boszorkányság?

A megoldás „puszta” számmágián alapszik. A téglák mérete: $19 \times 29 \times 44$, $38 \times 29 \times 44$, $19 \times 58 \times 44$, $19 \times 29 \times 88$, $38 \times 58 \times 44$, $38 \times 29 \times 88$, $19 \times 58 \times 88$, $39 \times 58 \times 88$. A „kimaradó” darab a legkisebbel megegyező méretű. Az olvasztótégely mérete $58 \times 88 \times 133$.

Tényleg boszorkányság?

A megoldás „puszta” számmágián alapszik. A téglák mérete: $19 \times 29 \times 44$, $38 \times 29 \times 44$, $19 \times 58 \times 44$, $19 \times 29 \times 88$, $38 \times 58 \times 44$, $38 \times 29 \times 88$, $19 \times 58 \times 88$, $39 \times 58 \times 88$. A „kimaradó” darab a legkisebbel megegyező méretű. Az olvasztótégely mérete $58 \times 88 \times 133$.

A nyolc tégla valójában elfér egy $57 \times 87 \times 132$ méretű dobozban, az átrendezés után pedig valóban kitöltjük a teljes tégelyt. Minden stimmel: $58 \times 88 \times 133 - 57 \times 87 \times 132 = 19 \times 29 \times 44$. Animáció#5

Legyenek kockák helyett golyók!

A Lonpos 101 játék.

Egy másik változat

A Lonpos Colorful Cabin.

A Kepler-sejtés

...arról szól, hogy átfedések nélküli egyforma méretű gömbökkel legfeljebb a tér mekkora hányada tölthető ki. Az 1600-as évek elejére datálódik, nyomtatásban 1611-ben jelent meg. David Hilbert a XX. század fordulóján, később elhíresült előadásában beválogatta a matematika legfontosabb problémái közé. (A 18. probléma részeként.)

Híreket mondunk

A Kepler-sejtés

...arról szól, hogy átfedések nélküli egyforma méretű gömbökkel legfeljebb a tér mekkora hányada tölthető ki. Az 1600-as évek elejére datálódik, nyomtatásban 1611-ben jelent meg. David Hilbert a XX. század fordulóján, később elhíresült előadásában beválogatta a matematika legfontosabb problémái közé. (A 18. probléma részeként.)

Hales bizonyítása (1998)

Thomas C. Hales 1998 augusztusában jelentette be, hogy a sejtést igazolta. A bizonyítás kb. 250 oldalnyi matematikából és 3 GB számítógépes adatból állt. A modern matematika egyik legnagyobb teljesítménye ez a bizonyítás (szerintem).

Híreket mondunk

Bírálás és felmerülő nehézségek

A bizonyításból íródott cikk csak 2005-ben jelent meg az Annals of Mathematicsben. A 12 tagú bírálóbizottság - Fejes Tóth Gábor vezetésével - négy év munka után sem merte állítani, hogy a bizonyítás helyes, csak 99 %-ban győződtek meg róla. (Ezt a véleményt 2003-ban fogalmazták meg.)

Híreket mondunk

Bírálás és felmerülő nehézségek

A bizonyításból íródott cikk csak 2005-ben jelent meg az Annals of Mathematicsben. A 12 tagú bírálóbizottság - Fejes Tóth Gábor vezetésével - négy év munka után sem merte állítani, hogy a bizonyítás helyes, csak 99 %-ban győződtek meg róla. (Ezt a véleményt 2003-ban fogalmazták meg.)

Formális bizonyítás - aktualitás

Ennek hatására (?) Hales formálisan, emberi tényezőtől mentesen ellenőrizhető bizonyítás megadásába kezdett. 2014. augusztus 10-én jelentette be, hogy a formális bizonyítás is készen van, ezzel végleg eloszlatva a kételyeket (?).

A lapcentrált kockarács

A hírek kapcsán a facebookon társalogtak (matematikából magasan képzett) informatikus ismerősök:

„-Gúlába ágyúgolyót le lehet pakolni négyszög meg háromszög/hatszög rácsba is nem? Remélem az utóbbi a jobb, a sparos vödrös narancsot mindig hatszögbe raktam.
-[...] Azt írja, hogy négyzetrácsokat tegyél egymásra értelemszerű szinteltolással, ami nem látszik ugyanannak, mint a hatszögrács, de ebben nem vagyok biztos, a térlátásom nulla. Lehet, hogy az egyiket elforgatva valami hülye szögben és irányban épp a másikat kapod, nem tudom, és nincs itthon elég üveggolyóm.”

A lapcentrált kockarács

A megoldás „szerkesztése” : vegyünk egy egységnyi élhosszúságú (végtelen) kockarácsot. Minden csúcs és lapközéppont köré írjunk $\sqrt{2}/4$ sugarú gömböt. Ez a gömbelhelyezés az optimális, lapcentrált kockarácsnak nevezzük.

A lapcentrált kockarács

A megoldás „szerkesztése”: vegyünk egy egységnyi élhosszúságú (végtelen) kockarácsot. Minden csúcs és lapközéppont köré írjunk $\sqrt{2}/4$ sugarú gömböt. Ez a gömbelhelyezés az optimális, lapcentrált kockarácsnak nevezzük.

Másképp: színezzük ki a tér egész koordinátájú ponjait „sakktáblaszerűen”, és írjunk $\sqrt{2}/2$ sugarú gömböt a fehér rácspontok köré.

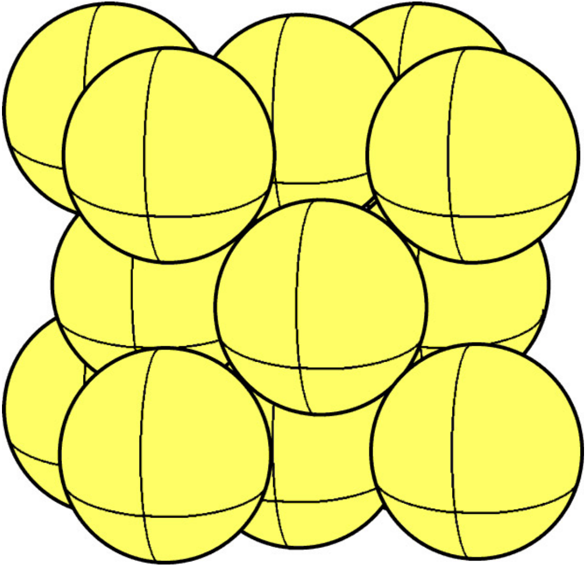
A lapcentrált kockarács

A megoldás „szerkesztése” : vegyünk egy egységnyi élhosszúságú (végtelen) kockarácsot. Minden csúcs és lapközéppont köré írjunk $\sqrt{2}/4$ sugarú gömböt. Ez a gömbelhelyezés az optimális, lapcentrált kockarácsnak nevezzük.

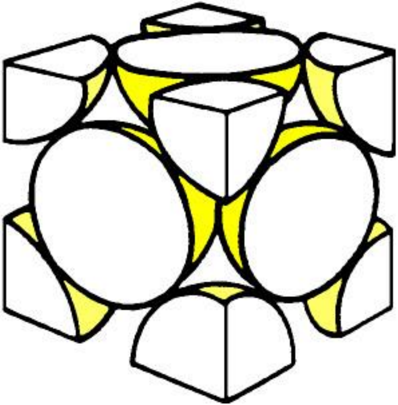
Másképp: színezzük ki a tér egész koordinátájú ponjait „sakktáblaszerűen”, és írjunk $\sqrt{2}/2$ sugarú gömböt a fehér rácspontok köré.

[Szükségtelen mondani: ebbe a diába írás közben természetesen belezavarodtam...]

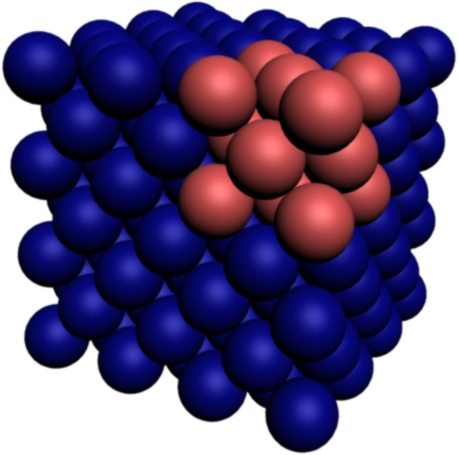
A lapcentrált kockarács



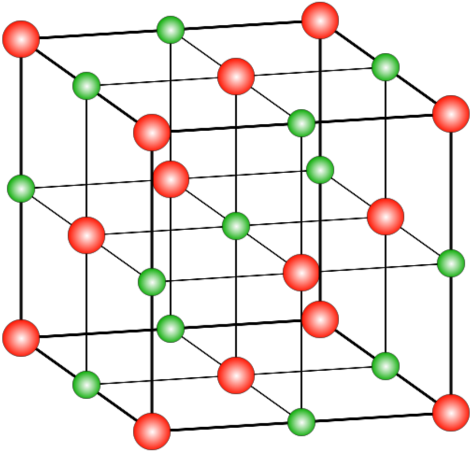
A lapcentrált kockarács



A lapcentrált kockarács



A lapcentrált kockarács



Játék lapcentrált kockarácsból

Játék lapcentrált kockarácsból

Játék lapcentrált kockarácsból

Köszönöm a figyelmet!