A Fermat-Torricelli pont

Vígh Viktor
SZTE Bolyai Intézet

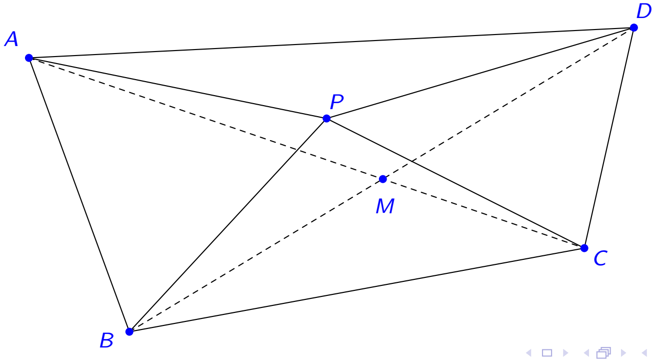
2014. november 26.

Huhn András Díj 2014

Valamikor 1996 tavaszán, a Kalmár László Matematikaverseny megyei fordulóján, a hetedik osztályosok versenyén. [Korhű idézet.]

4. feladat

Az $ABCD$ konvex négyszög melyik belső pontjára igaz, hogy a négy csúcstól mért távolságának összege a legkisebb? Állításodat indokold!

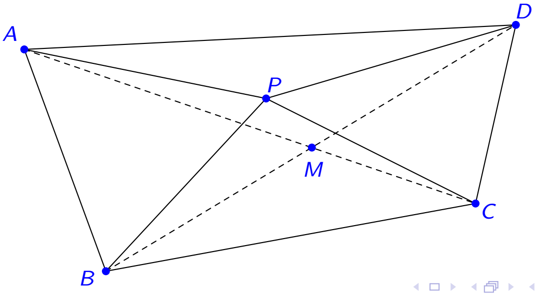


Megoldás.

Az átlók metszéspontja legyen M, P pedig tetszőleges. A háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva $ACP_{\triangle}$-re és $BDP_{\triangle}$-re:

$$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}\geq\overline{AC}+\overline{BD}=\overline{AM}+\overline{BM}+\overline{CM}+\overline{DM}.$$

Egyenlőség csak $P=M$ esetben áll, tehát a keresett minimumot az átlók metszéspontja adja. $\square$



A konvexitás az jó dolog?

A feladat megoldásában lényeges volt, hogy $ABCD$ négyszög konvex. (Hol?) De látszólag sok a feladatban a "felesleges" és nem is feltétlenül természetes feltevés. Megfogalmazhatjuk a következő, általánosabb kérdést.

A konvexitás az jó dolog?

A feladat megoldásában lényeges volt, hogy $ABCD$ négyszög konvex. (Hol?) De látszólag sok a feladatban a "felesleges" és nem is feltétlenül természetes feltevés. Megfogalmazhatjuk a következő, általánosabb kérdést.

Probléma

Adottak az A, B, C és D pontok a síkon. A sík melyik pontjára igaz, hogy a négy ponttól mért távolságának összege a legkisebb?

A konvexitás az jó dolog?

A feladat megoldásában lényeges volt, hogy $ABCD$ négyszög konvex. (Hol?) De látszólag sok a feladatban a "felesleges" és nem is feltétlenül természetes feltevés. Megfogalmazhatjuk a következő, általánosabb kérdést.

Probléma

Adottak az A, B, C és D pontok a síkon. A sík melyik pontjára igaz, hogy a négy ponttól mért távolságának összege a legkisebb?

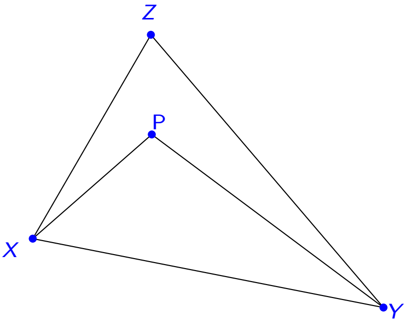
Ha $ABCD$ egy konvex négyszög, akkor előző érvelésünk természetesen helyes marad. Sőt, ha D pont az $ABC_\triangle$ határán van, akkor is. Marad tehát az az eset, ha a D pont az $ABC_\triangle$ belsejében van.

Egy jól ismert, hasonló feladat...

Feladat

Igazoljuk, hogy ha P az $XYZ_\triangle$ egy Z-től különböző pontja, akkor

$$\overline{PX} + \overline{PY} < \overline{ZX} + \overline{ZY}.$$

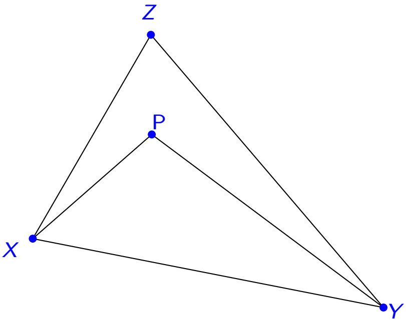


Egy jól ismert, hasonló feladat...

Feladat

Igazoljuk, hogy ha P az $XYZ_\triangle$ egy Z-től különböző pontja, akkor

$$\overline{PX} + \overline{PY} < \overline{ZX} + \overline{ZY}.$$



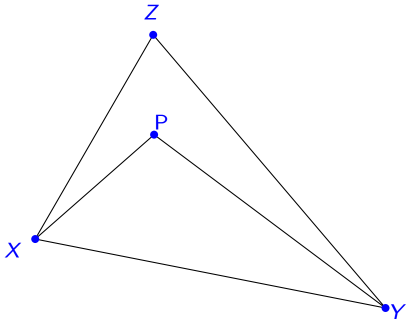
Kvízkérdés a tanároknak: hányas feladat ez a Geo. I.-ben?

Egy jól ismert, hasonló feladat...

Feladat

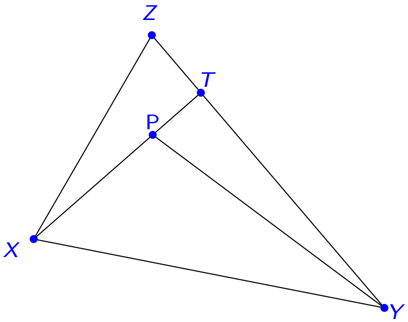
Igazoljuk, hogy ha P az $XYZ_\triangle$ egy Z-től különböző pontja, akkor

$$\overline{PX} + \overline{PY} < \overline{ZX} + \overline{ZY}.$$



Kvízkérdés a tanároknak: hányas feladat ez a Geo. I.-ben? Válasz: 172.

Megoldás



$$\begin{array}{rrl} XTZ_\triangle: & \overline{XT} = \overline{XP} + \overline{PT} & \leq \overline{TZ} + \overline{XZ}. \\ PYT_\triangle: & \overline{PY} & \leq \overline{PT} + \overline{TY}. \\ \hline \oplus: & \overline{XP} + \overline{PY} & \leq \overline{XZ} + \overline{ZY}. \end{array}$$

Egyenlőség csak akkor áll, ha $P \in \overline{YZ}$ és $P \in \overline{XZ}$ egyszerre teljesül. $\square$

A nem konvex eset

Térjünk vissza az eredeti feladathoz, amikor D az $ABC\triangle$ belsejében van, és azt az M pontot keressük, aminek az adott négy ponttól mért távolságösszege minimális.

A nem konvex eset

Térjünk vissza az eredeti feladathoz, amikor D az $ABC\triangle$ belsejében van, és azt az M pontot keressük, aminek az adott négy ponttól mért távolságösszege minimális.

Először is vegyük észre, hogy (tetszőleges P pont esetén) a $PAB_\triangle, PAC_\triangle$ és $PBC_\triangle$ együttesen lefedik az $ABC_\triangle$-t. Ezért valamelyikőjük, mondjuk $PAB_\triangle$, tartalmazza (legalább a határán) D pontot.

A nem konvex eset

Térjünk vissza az eredeti feladathoz, amikor D az $ABC\triangle$ belsejében van, és azt az M pontot keressük, aminek az adott négy ponttól mért távolságösszege minimális.

Először is vegyük észre, hogy (tetszőleges P pont esetén) a $PAB_\triangle$, $PAC_\triangle$ és $PBC_\triangle$ együttesen lefedik az $ABC_\triangle$-t. Ezért valamelyikőjük, mondjuk $PAB_\triangle$, tartalmazza (legalább a határán) D pontot.

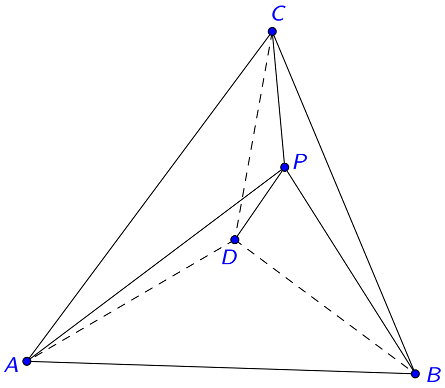
Az előző segédállítás szerint $\overline{PA} + \overline{PB} \geq \overline{DA} + \overline{DB}$. (Egyenlőség csak $P = D$ esetben állhat.) Másrészt $\overline{PC} + \overline{PD} \geq \overline{DC}$.

A nem konvex eset

Összegezve:

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}\geq\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{DC},$$

és egyenlőség csak $P=D$ esetén állhat, így $M=D$ adja a keresett a minimumot.



Miért nem csak három pontra kérdeztük először?

Probléma

Adottak az A, B és C pontok a síkon. A sík melyik M pontjára igaz, hogy a három ponttól mért távolságának összege a legkisebb?

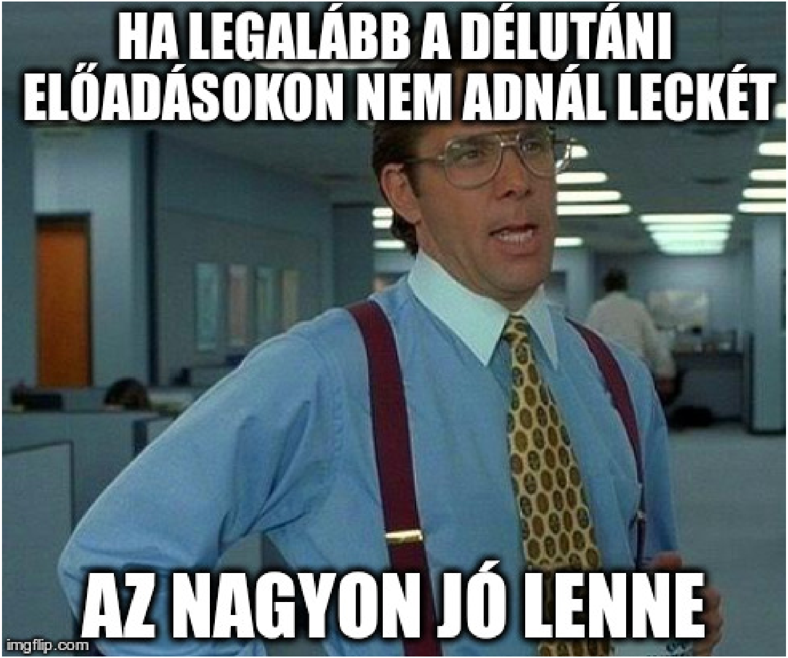
Miért nem csak három pontra kérdeztük először?

Probléma

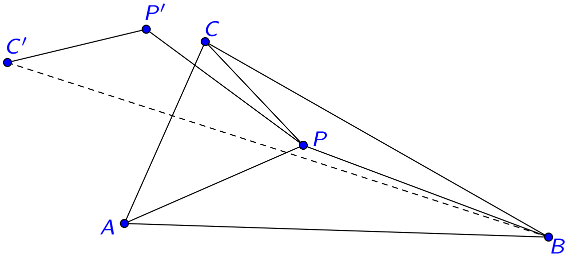
Adottak az A, B és C pontok a síkon. A sík melyik M pontjára igaz, hogy a három ponttól mért távolságának összege a legkisebb?

Házi feladat:

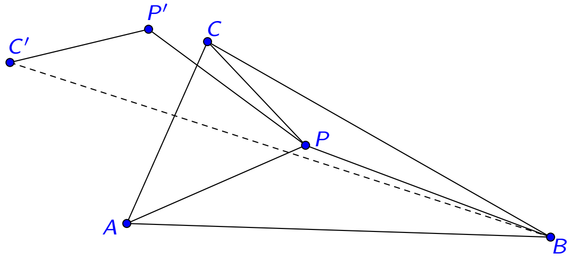
- az A, B és C kollineáris eset megoldása;
- megmutatni, ha $P \notin ABC_{\triangle}$, akkor P nem lehet a megoldás.


HA LEGALÁBB A DÉLUTÁNI ELŐADÁSOKON NEM ADNÁL LECKÉT
AZ NAGYON JÓ LENNE
imgflip.com

Legyen tehát P az $ABC_{\triangle}$ egy pontja, és forgassuk el 60°-kal a CP szakaszt A körül az ábra szerint.



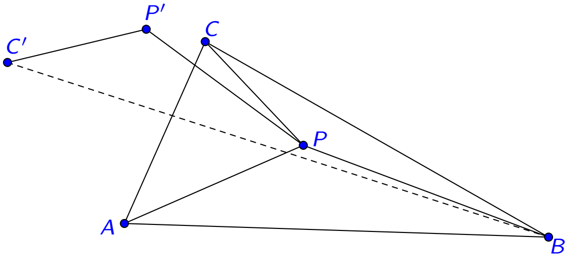
Legyen tehát P az $ABC_\triangle$ egy pontja, és forgassuk el 60°-kal a CP szakaszt A körül az ábra szerint.



A forgatás miatt $\overline{C'P'} = \overline{CP}$ és $\overline{PP'} = \overline{AP'}$.

Az izogonális pont

Legyen tehát P az $ABC_\triangle$ egy pontja, és forgassuk el 60°-kal a CP szakaszt A körül az ábra szerint.



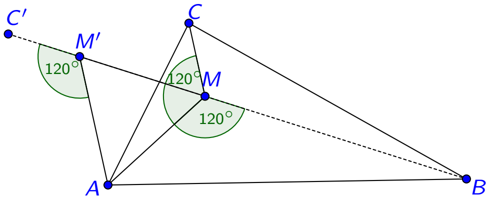
A forgatás miatt $\overline{C'P'} = \overline{CP}$ és $\overline{PP'} = \overline{AP'}$. Így a háromszög-egyenlőtlenség miatt:

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} = \overline{PP'} + \overline{BP} + \overline{C'P'} \geq \overline{BC'}.$$

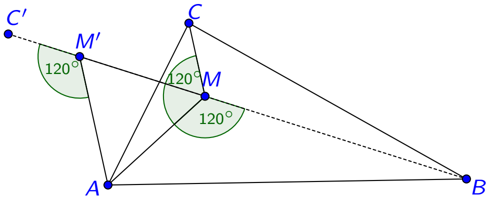
Egyenlőség csak abban az esetben teljesül, ha B, P, P' és C' ebben a sorrendben egy egyenesen fekszenek.

Az izogonális pont

Nézzük meg, mi következik abból, ha egyenlőség teljesül!

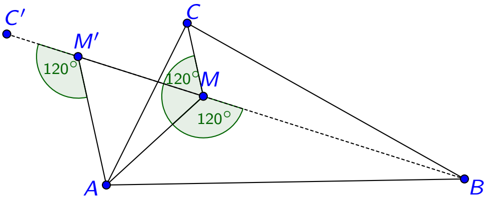


Nézzük meg, mi következik abból, ha egyenlőség teljesül!



Mivel, $AMM'_{\triangle}$ szabályos, így $AMB\angle = 120°$ valamint $AM'C'\angle = 120°$ is teljesül. Utóbbi a forgatás megyegyezik $AMC\angle$-gel, így $AMC\angle = 120°$, s végül $BMC\angle = 120°$ is következik.

Nézzük meg, mi következik abból, ha egyenlőség teljesül!



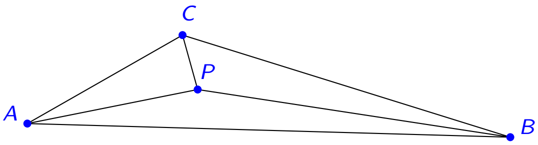
Mivel, $AMM'_{\triangle}$ szabályos, így $AMB\angle = 120°$ valamint $AM'C'\angle = 120°$ is teljesül. Utóbbi a forgatás megyegyezik $AMC\angle$-gel, így $AMC\angle = 120°$, s végül $BMC\angle = 120°$ is következik.

Ilyen M pont csak akkor létezik, ha nincs a háromszögnek 120°-nál nagyobb szöge, de olyankor egyértelmű. (Ide véve azt a lehetőséget, hogy M a 120°-nál lévő csúcs legyen.) (Biz: látókörívek.)

Ha van "nagy" szög...

Ha valamelyik szög több, mint 120°, akkor a tompaszögű csúcs a keresett pont. Ennek szabatos kimutatása hasonló a másik esethez

- szintén házi feladat.



Általában mi a helyzet?

Megfogalmazhatjuk a problémát általánosan, n pontra is.

Probléma

Adottak az általános helyzetű $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok a síkon. A sík melyik M pontjára igaz, hogy az n adott ponttól mért távolságának összege a legkisebb?

Általában mi a helyzet?

Megfogalmazhatjuk a problémát általánosan, n pontra is.

Probléma

Adottak az általános helyzetű $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok a síkon. A sík melyik M pontjára igaz, hogy az n adott ponttól mért távolságának összege a legkisebb?

Ilyen pont mindig létezik, és egyértelmű. (Az össztávolságot mérő f függvény a háromszög-egyenlőtlenség miatt P futó pont szigorúan konvex függvénye, aminek "a végtelenben végtelen a határértéke".)

A nagy tétel

Jelölje $\mathbf{u}_i(X)$ az $\overrightarrow{XA_i}/|\overrightarrow{XA_i}|$ egységvektort.

Tétel (L. Lindelöf (1867), R. Sturm (1884))

A keresett M pont vagy valamelyik A_i pont, vagy sem.
Az első esetben legyen $M = A_{i_0}$, ekkor

$$\left| \sum_{1 \le i \le n; i \ne i_0} \mathbf{u}_i(M) \right| \le 1. \tag{1}$$

A második esetben

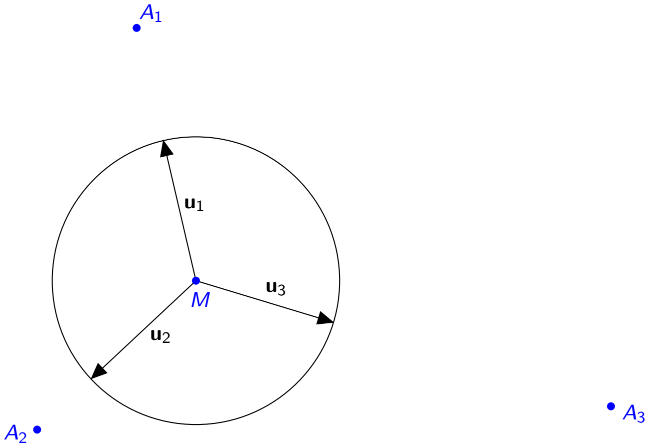
$$\left| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i(M) \right| = 0. \tag{2}$$

Továbbá, ha (1) teljesül valamely i_0-ra, akkor $M = A_{i_0}$; valamint ha (2) teljesül valamely M pontra, akkor az az M adja a keresett minimumot.

Az M pontot **Fermat-Torricelli pontnak** szokás nevezni.

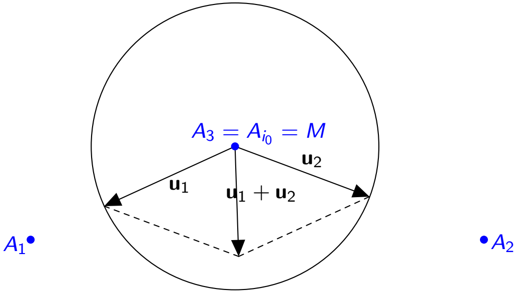
A három pont esete - újratöltve

Ha van izogonális pont, akkor a tétel szerint az adja a megoldást.



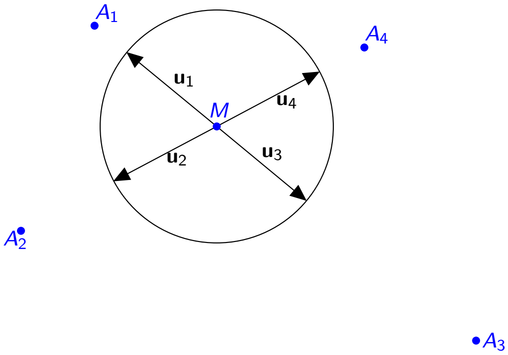
A három pont esete - újratöltve

Ha nincs izogonális pont, akkor a tétel szerint van egy olyan i_0, ahonnan induló egységvektorok (esetünkben két darab) összegének hossza egynél kisebb - vagyis a vektorok szöge 120°-nél nagyobb.



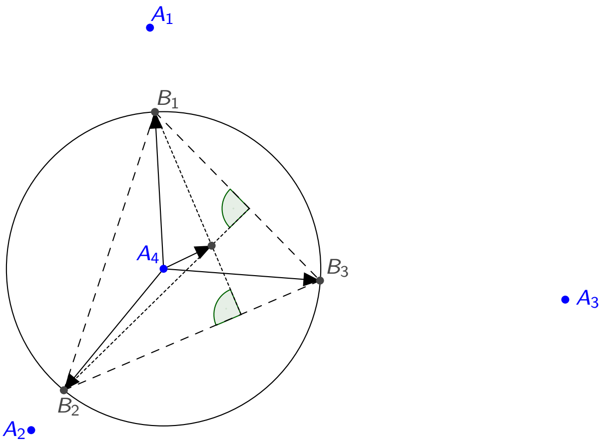
A négy pont esete - újratöltve

Konvex esetben az átlók metszéspontjából induló egységvektorok összege triviálisan nulla, mert páronként egymás ellentettjei, így a tétel szerint ez a megoldás.

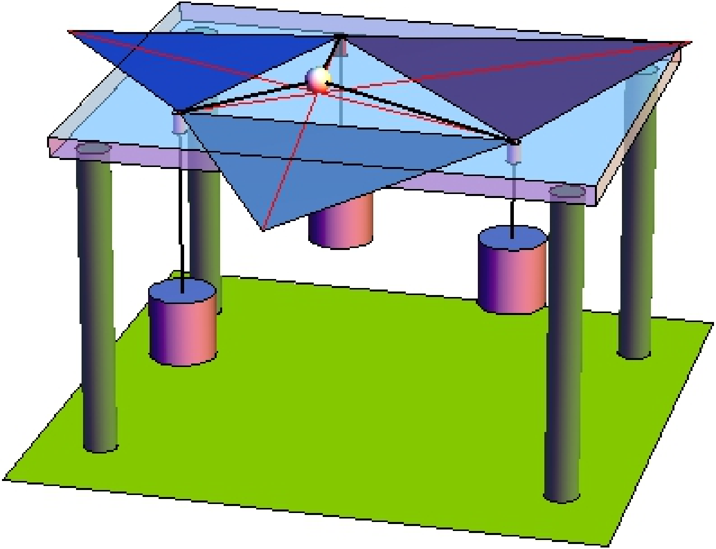


A négy pont esete - újratöltve

A nemkonvex eset:



A Pólya-féle mechanikai modell



Megjegyzések

A tétel valójában akárhány dimenzióban szó szerint ugyanígy igaz, a bizonyítás sem bonyolódik lényegesen.

Megjegyzések

A tétel valójában akárhány dimenzióban szó szerint ugyanígy igaz, a bizonyítás sem bonyolódik lényegesen.

Magasabb dimenzióban a tétel feltételeinek "geometriai" feloldása már jóval bonyolultabb, mint a síkban.

Megjegyzések

A tétel valójában akárhány dimenzióban szó szerint ugyanígy igaz, a bizonyítás sem bonyolódik lényegesen.

Magasabb dimenzióban a tétel feltételeinek "geometriai" feloldása már jóval bonyolultabb, mint a síkban.

Y. S. Kupitz és H. Martini 1994-ben igazolta, hogy az izogonális pontnak van háromdimenziós analógiája. Lényegében azt mutatták meg, hogy ha egy tetraéder minden térszöge legfeljebb π, akkor létezik egy belső pontja, ahonnan minden lapja pontosan π térszög alatt látszik, és ez a pont épp a négy csúcs Fermat-Torricelli pontja. Ha van nagy térszög, akkor a Fermat-Toricelli pont valamelyik csúcs.

Megjegyzések

A tétel valójában akárhány dimenzióban szó szerint ugyanígy igaz, a bizonyítás sem bonyolódik lényegesen.

Magasabb dimenzióban a tétel feltételeinek "geometriai" feloldása már jóval bonyolultabb, mint a síkban.

Y. S. Kupitz és H. Martini 1994-ben igazolta, hogy az izogonális pontnak van háromdimenziós analógiája. Lényegében azt mutatták meg, hogy ha egy tetraéder minden térszöge legfeljebb π, akkor létezik egy belső pontja, ahonnan minden lapja pontosan π térszög alatt látszik, és ez a pont épp a négy csúcs Fermat-Torricelli pontja. Ha van nagy térszög, akkor a Fermat-Toricelli pont valamelyik csúcs.

Legjobb tudomásom szerint ez az egyetlen létező "geometriai" jellegű magasabb dimenziós állítás.

Köszönöm a figyelmet!