Egy előadás a kirándulásról – Érdekességek elemi háromszög-geometriából

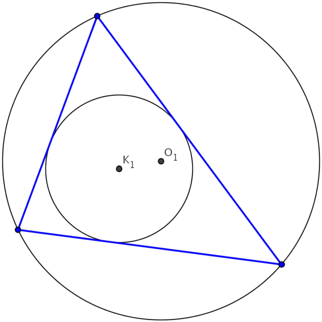
Vígh Viktor

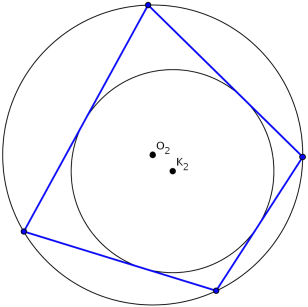
SZTE Bolyai Intézet

2009. november 25.

Problémafelvetés

Bicentrikusnak nevezünk egy (síkbeli) sokszöget, ha egyszerre húrsokszög és érintősokszög is. Például minden háromszög bicentrikus. Általában ez nem igaz, legalább négy csúcsú sokszög esetén a bicentrikusság egy erős tulajdonság.





Problémafelvetés

Általában R jelöli egy bicentikus sokszög körülírt körének sugarát, r a beírt kör sugarát, d pedig a két kör középpontjának távolságát.

Problémafelvetés

Általában R jelöli egy bicentikus sokszög körülírt körének sugarát, r a beírt kör sugarát, d pedig a két kör középpontjának távolságát.

Tétel (Euler-képlet)

Háromszög esetén

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Problémafelvetés

Általában R jelöli egy bicentikus sokszög körülírt körének sugarát, r a beírt kör sugarát, d pedig a két kör középpontjának távolságát.

Tétel (Euler-képlet)

Háromszög esetén

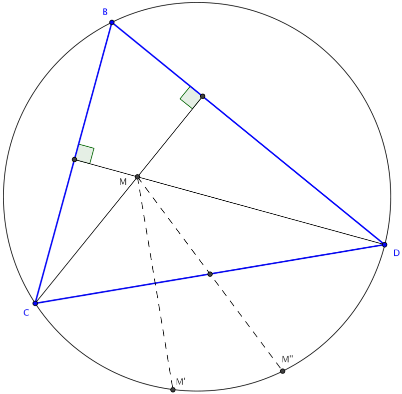
$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Kérdések: Van-e formula $n \geq 4$ esetén? Egyáltalán van-e esély formulát, vagy legalább valamilyen összefüggést találni?

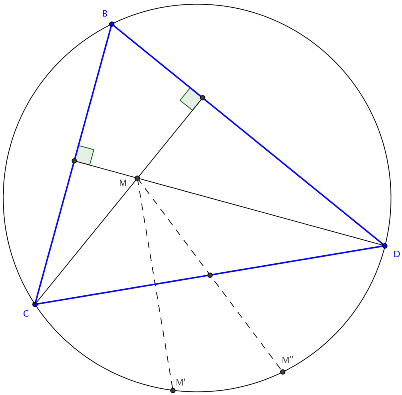
A magasságpont egy tulajdonsága

Állítás

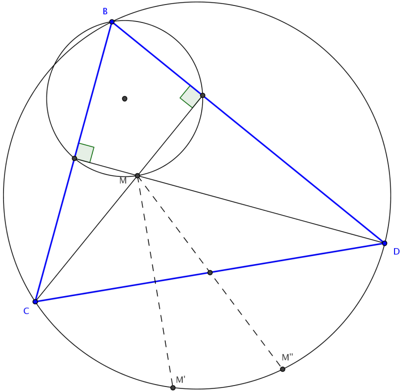
Tükrözzük egy (hegyesszögű) háromszög magasságpontját a háromszög oldalegyeneseire és az oldalfelezőpontjaira. A kapott képpontok a háromszög körülírt körére illeszkednek.



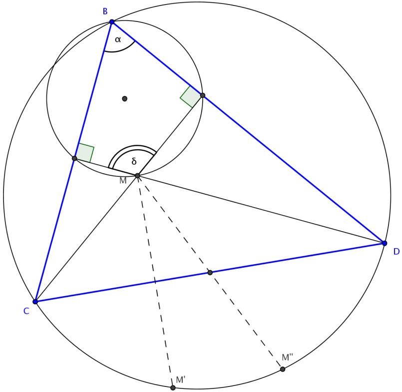
Bizonyítás



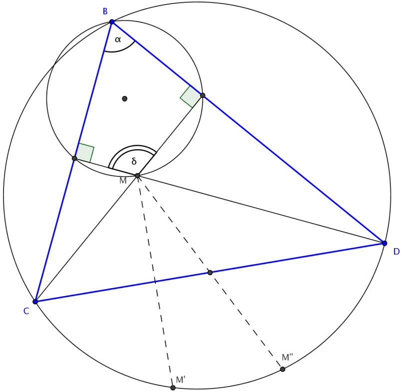
Bizonyítás



Bizonyítás

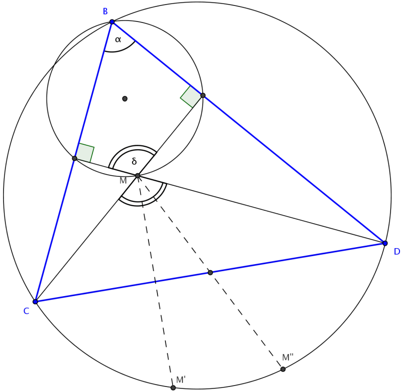


Bizonyítás



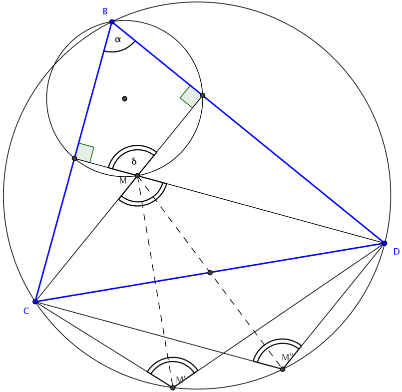
Húrnégyszög-tétel $\Longrightarrow \quad \alpha + \delta = 180^o$

Bizonyítás



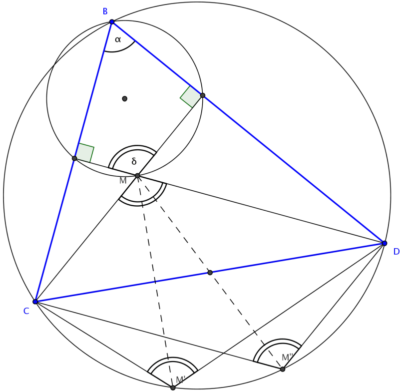
Húrnégyszög-tétel $\Longrightarrow \quad \alpha + \delta = 180^o$

Bizonyítás



Húrnégyszög-tétel $\Longrightarrow \quad \alpha + \delta = 180^o$

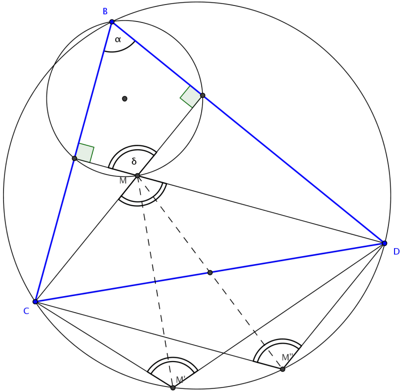
Bizonyítás



Húrnégyszög-tétel $\Longrightarrow \quad \alpha + \delta = 180^o$

Húrnégyszög-tétel $\Longrightarrow$ $BCMD'$ és $BCM''D$ húrnégyszög

Bizonyítás



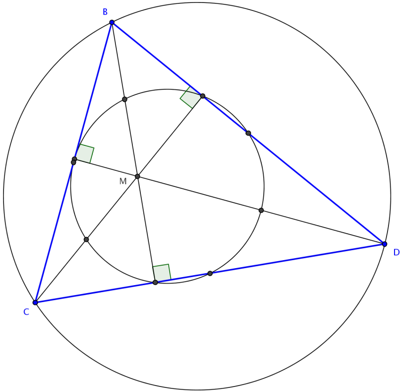
Húrnégyszög-tétel $\Longrightarrow$ $\alpha + \delta = 180^o$

Húrnégyszög-tétel $\Longrightarrow$ $BCMD'$ és $BCM''D$ húrnégyszög $\square$

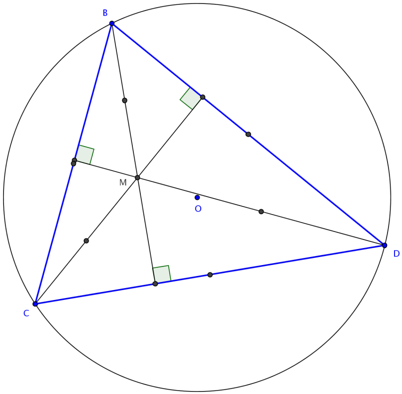
Feuerbach-kör

Tétel (Feuerbach-kör)

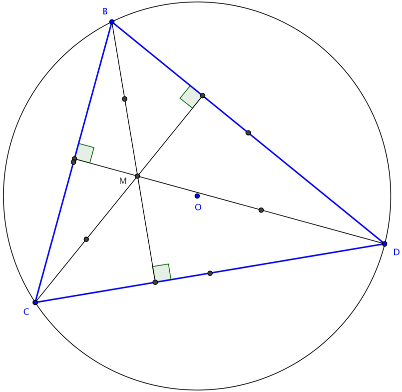
Egy (hegyesszögű) háromszög három oldalfelező pontja, három magasságnak talppontja és három azon pontja, melyek a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezéspontjai, mind illeszkednek egy körre.



Bizonyítás

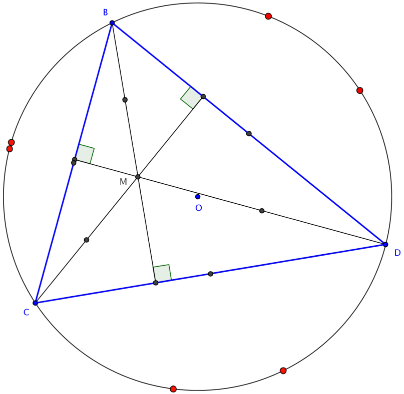


Bizonyítás



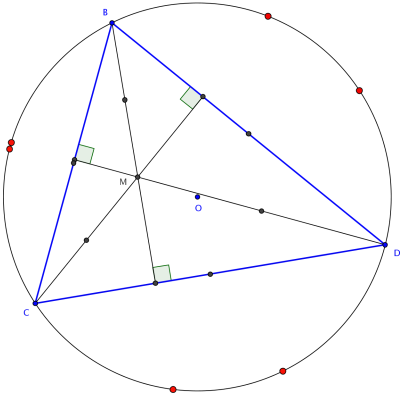
Tükrözzük M-t a kilenc pontunkra!

Bizonyítás



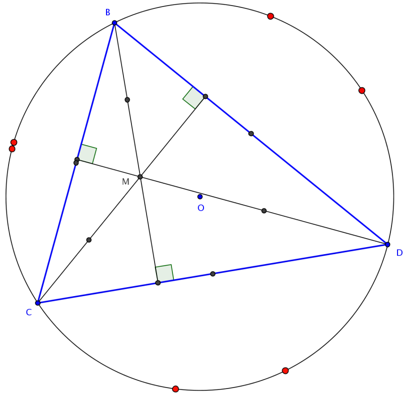
Tükrözzük M-t a kilenc pontunkra!

Bizonyítás



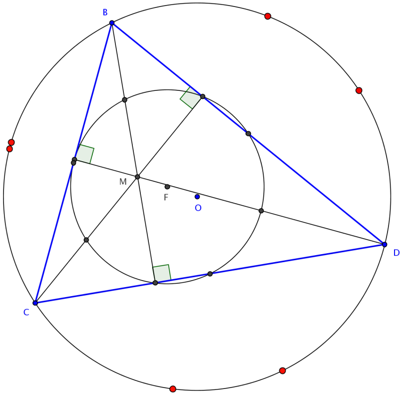
Tükrözzük M-t a kilenc pontunkra!
Előző állítás $\Longrightarrow$ a képek a körültírt körre esnek

Bizonyítás



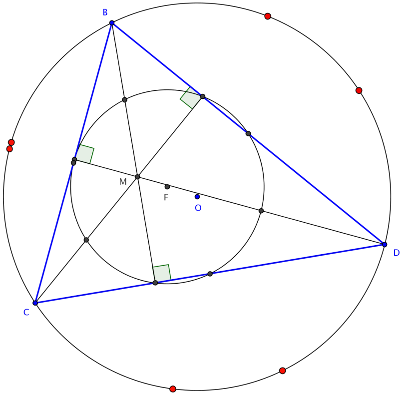
Tükrözzük M-t a kilenc pontunkra!
Előző állítás $\Longrightarrow$ a képek a körültírt körre esnek
Kicsinyítsük a körülírt kört M-ből $\frac{1}{2}$-szeresére.

Bizonyítás



Tükrözzük M-t a kilenc pontunkra!
Előző állítás $\Longrightarrow$ a képek a körültírt körre esnek
Kicsinyítsük a körülírt kört M-ből $\frac{1}{2}$-szeresére.

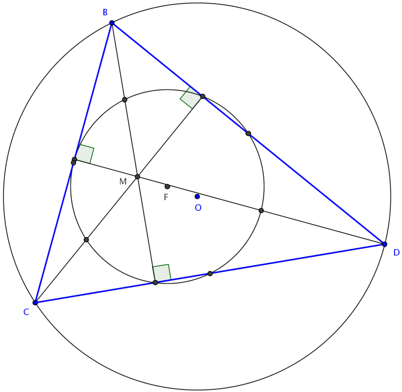
Bizonyítás



Tükrözzük M-t a kilenc pontunkra!
Előző állítás $\Longrightarrow$ a képek a körültírt körre esnek
Kicsinyítsük a körülírt kört M-ből $\frac{1}{2}$-szeresére. $\square$

Feuerbach-kör

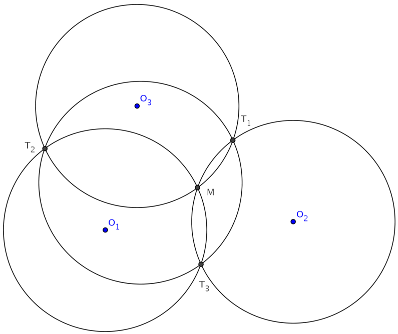
Megjegyzés: a bizonyításból az is látszik, hogy a Feuerbach-kör sugara éppen fele a körülírt kör sugarának, és hogy F középpontja, éppen az OM szakasz felezőpontja.



A négy kör tétel

Tétel (Négy kör tétel (?))

Tegyük fel, hogy három egységnyi sugarú kör átmegy egy közös ponton. Ekkor páronkénti második metszépontjaik illeszkednek egy egységnyi sugarú körre.

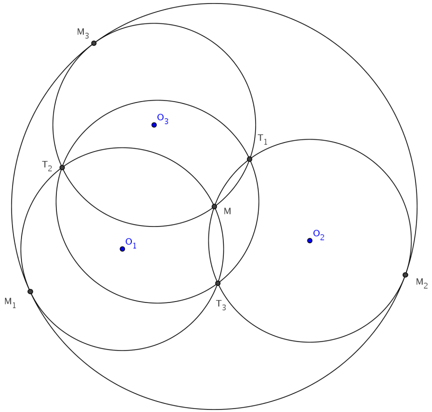


Bizonyítás

Rajzoljunk egy 2 sugarú kört M körül. A három adott körünk ezt belülről érinti.

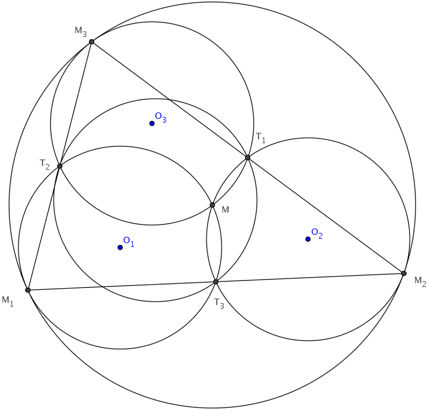
Bizonyítás

Rajzoljunk egy 2 sugarú kört M körül. A három adott körünk ezt belülről érinti.



Bizonyítás

Most kössük össze az érintési pontokat a kis körök második metszéspontjaival az ábra szerint.

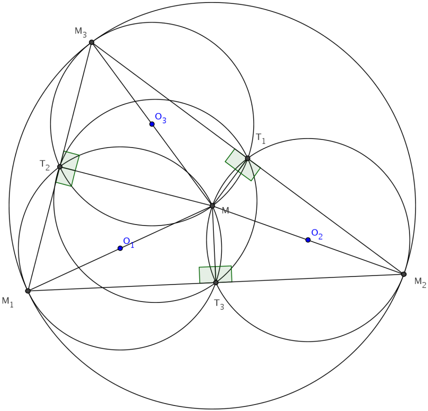


Bizonyítás

Alkalmazzuk Thalész-tételét!

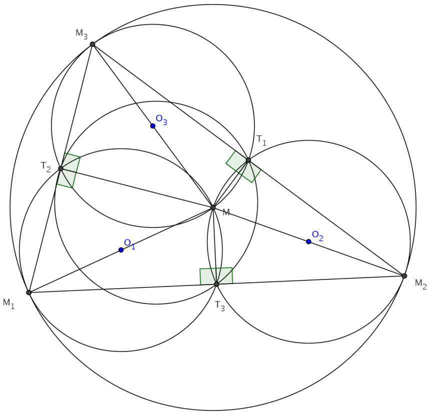
Bizonyítás

Alkalmazzuk Thalész-tételét!



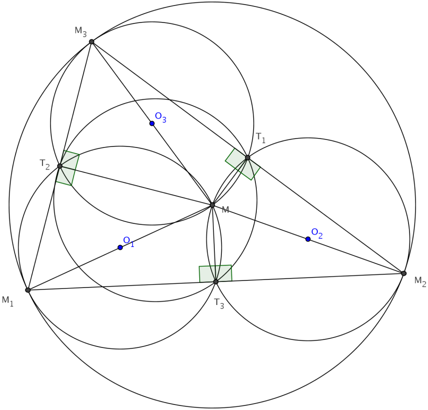
Bizonyítás

Alkalmazzuk Thalész-tételét! $\longrightarrow$ Egy háromszöget kaptunk!



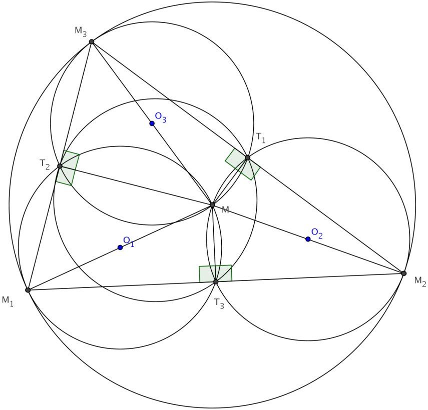
Bizonyítás

$$MM_1T_3\triangle \cong MM_2T_3\triangle$$



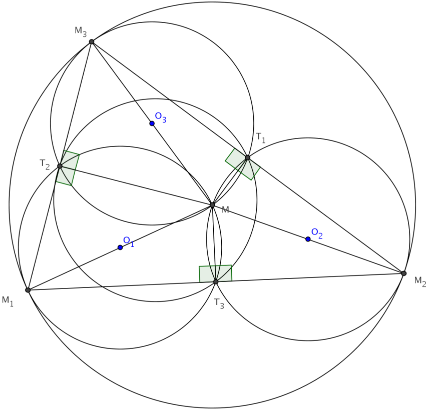
Bizonyítás

$$MM_1T_3\triangle \cong MM_2T_3\triangle \implies T_3 \text{ oldalfelezőpont}$$



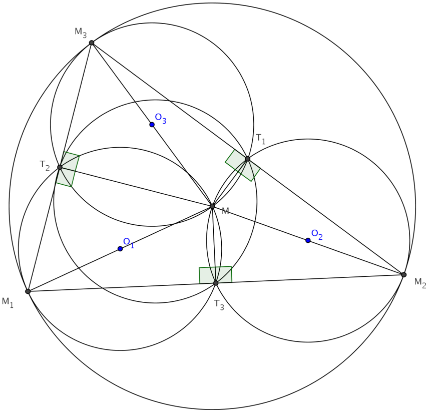
Bizonyítás

Végül vegyük észre, hogy a T_1, T_2, T_3 pontokra illeszkedő kör éppen $M_1M_2M_3\triangle$ Feuerbach-köre, vagyis sugara 1.



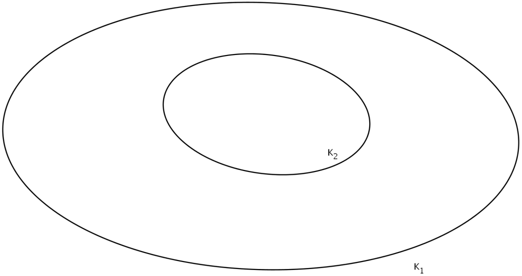
Bizonyítás

Végül vegyük észre, hogy a T_1, T_2, T_3 pontokra illeszkedő kör éppen $M_1M_2M_3\triangle$ Feuerbach-köre, vagyis sugara 1. $\square$



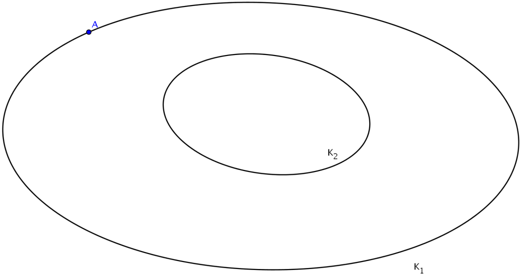
„Érintőhúzási eljárás”

Tekintsünk két zárt, konvex alakzatot a síkon, tegyük fel, hogy az egyik a másik belsejében van: $K_2 \subset K_1$. Válasszunk egy pontot K_1 határán, és húzzunk belőle „érintőt” K_2-höz. Ez egy újabb pontban metszi K_1 határát. Most húzzunk ebből az új pontból „érintőt”, stb.



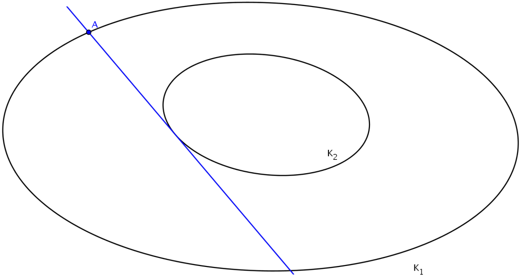
„Érintőhúzási eljárás"

Tekintsünk két zárt, konvex alakzatot a síkon, tegyük fel, hogy az egyik a másik belsejében van: $K_2 \subset K_1$. Válasszunk egy pontot K_1 határán, és húzzunk belőle „érintőt" K_2-höz. Ez egy újabb pontban metszi K_1 határát. Most húzzunk ebből az új pontból „érintőt", stb.



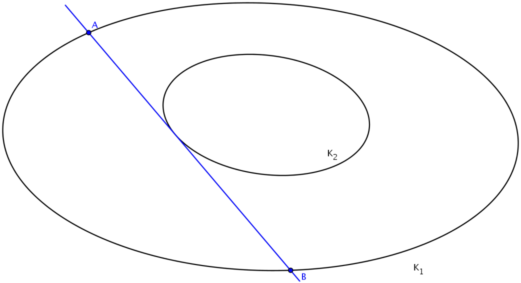
„Érintőhúzási eljárás"

Tekintsünk két zárt, konvex alakzatot a síkon, tegyük fel, hogy az egyik a másik belsejében van: $K_2 \subset K_1$. Válasszunk egy pontot K_1 határán, és húzzunk belőle „érintőt" K_2-höz. Ez egy újabb pontban metszi K_1 határát. Most húzzunk ebből az új pontból „érintőt", stb.



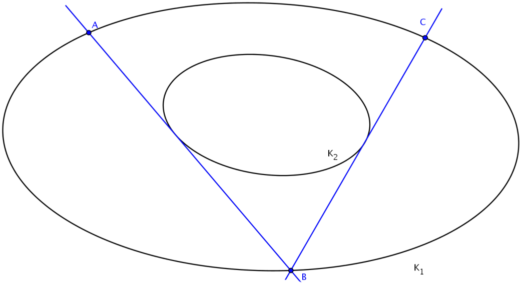
„Érintőhúzási eljárás"

Tekintsünk két zárt, konvex alakzatot a síkon, tegyük fel, hogy az egyik a másik belsejében van: $K_2 \subset K_1$. Válasszunk egy pontot K_1 határán, és húzzunk belőle „érintőt" K_2-höz. Ez egy újabb pontban metszi K_1 határát. Most húzzunk ebből az új pontból „érintőt", stb.



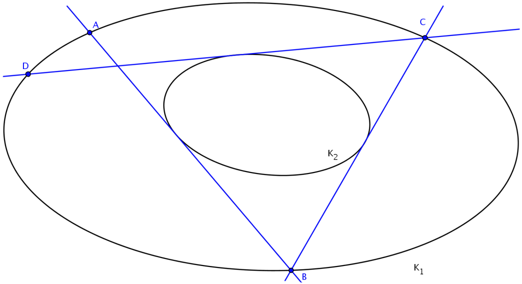
„Érintőhúzási eljárás”

Tekintsünk két zárt, konvex alakzatot a síkon, tegyük fel, hogy az egyik a másik belsejében van: $K_2 \subset K_1$. Válasszunk egy pontot K_1 határán, és húzzunk belőle „érintőt” K_2-höz. Ez egy újabb pontban metszi K_1 határát. Most húzzunk ebből az új pontból „érintőt”, stb.



„Érintőhúzási eljárás”

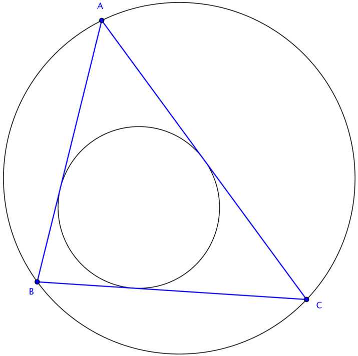
Tekintsünk két zárt, konvex alakzatot a síkon, tegyük fel, hogy az egyik a másik belsejében van: $K_2 \subset K_1$. Válasszunk egy pontot K_1 határán, és húzzunk belőle „érintőt” K_2-höz. Ez egy újabb pontban metszi K_1 határát. Most húzzunk ebből az új pontból „érintőt”, stb.



Egy záródási tétel

Tétel (Záródási tétel, nulladik verzió)

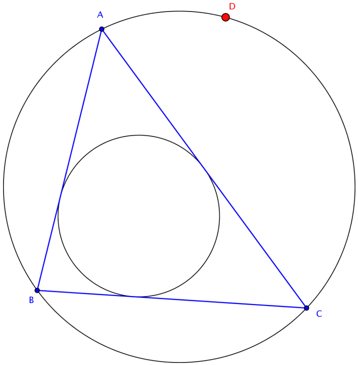
Tegyük fel, hogy a K_1 kör tartalmazza a K_2 kört. Ha létezik olyan A határpontja a K_1 körnek, ahonnan indulva az érintőhúzási eljárás 3 lépésben záródik (vagyis a negyedik kapott pont megegyezik A-val), akkor bármelyik határpontból indulva 3 lépésben záródni fog.



Egy záródási tétel

Tétel (Záródási tétel, nulladik verzió)

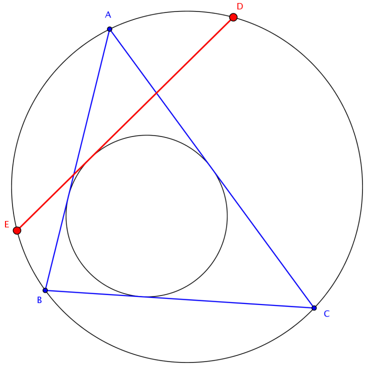
Tegyük fel, hogy a K_1 kör tartalmazza a K_2 kört. Ha létezik olyan A határpontja a K_1 körnek, ahonnan indulva az érintőhúzási eljárás 3 lépésben záródik (vagyis a negyedik kapott pont megegyezik A-val), akkor bármelyik határpontból indulva 3 lépésben zárodni fog.



Egy záródási tétel

Tétel (Záródási tétel, nulladik verzió)

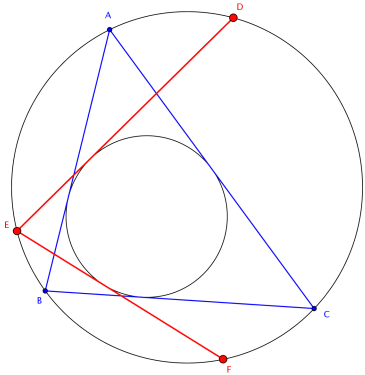
Tegyük fel, hogy a K_1 kör tartalmazza a K_2 kört. Ha létezik olyan A határpontja a K_1 körnek, ahonnan indulva az érintőhúzási eljárás 3 lépésben záródik (vagyis a negyedik kapott pont megegyezik A-val), akkor bármelyik határpontból indulva 3 lépésben zárodni fog.



Egy záródási tétel

Tétel (Záródási tétel, nulladik verzió)

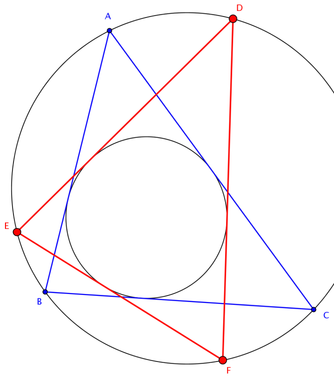
Tegyük fel, hogy a K_1 kör tartalmazza a K_2 kört. Ha létezik olyan A határpontja a K_1 körnek, ahonnan indulva az érintőhúzási eljárás 3 lépésben záródik (vagyis a negyedik kapott pont megegyezik A-val), akkor bármelyik határpontból indulva 3 lépésben zárodni fog.



Egy záródási tétel

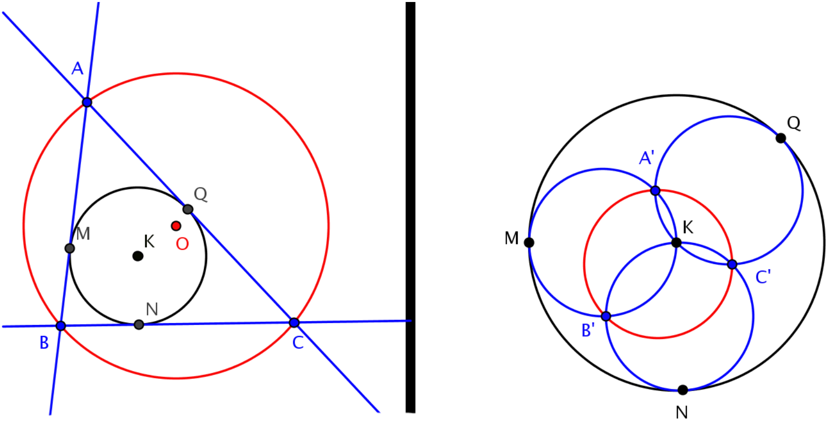
Tétel (Záródási tétel, nulladik verzió)

Tegyük fel, hogy a K_1 kör tartalmazza a K_2 kört. Ha létezik olyan A határpontja a K_1 körnek, ahonnan indulva az érintőhúzási eljárás 3 *lépésben záródik (vagyis a negyedik kapott pont megegyezik A-val), akkor bármelyik határpontból indulva* 3 *lépésben zárodni fog.*



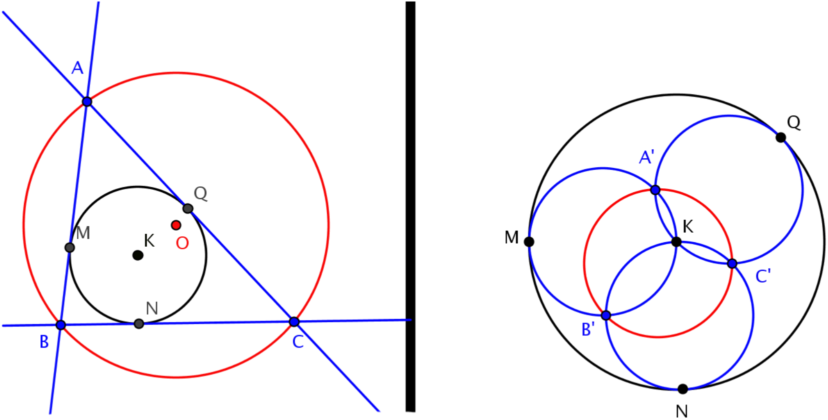
Bizonyítás

Invertáljunk a beírt körre!



Bizonyítás

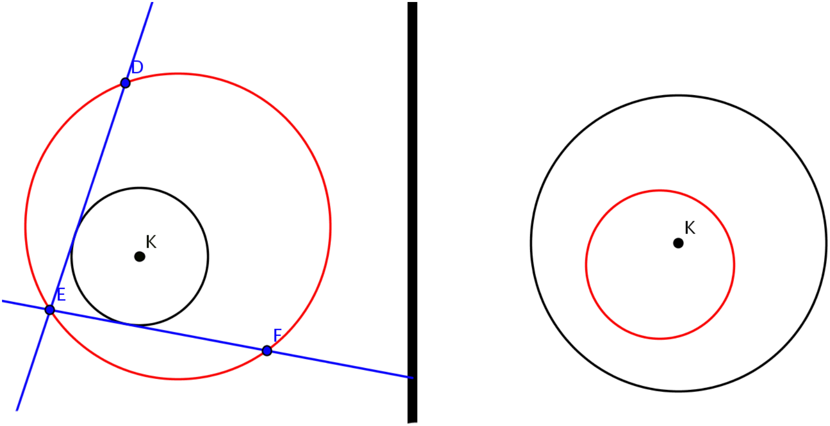
Invertáljunk a beírt körre!



Négy kör tétel $\Longrightarrow$ a körülírt kör képének átmérője r

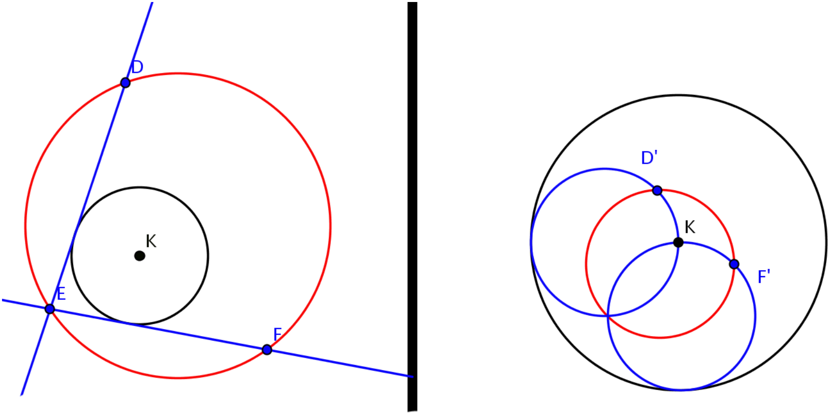
Bizonyítás

Invertáljunk a beírt körre!



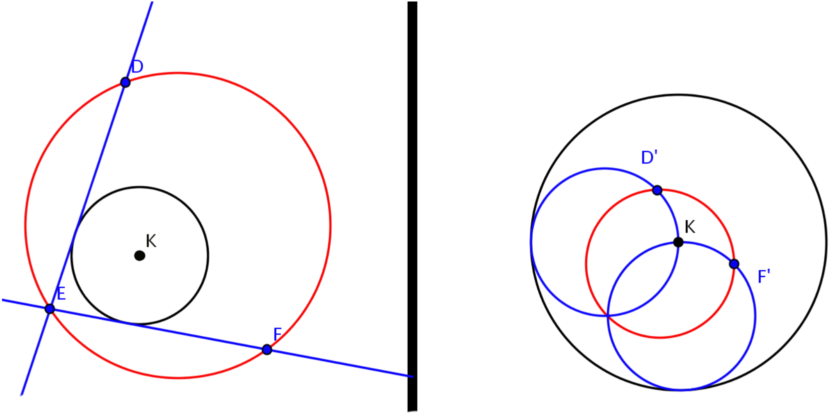
Bizonyítás

Invertáljunk a beírt körre!



Bizonyítás

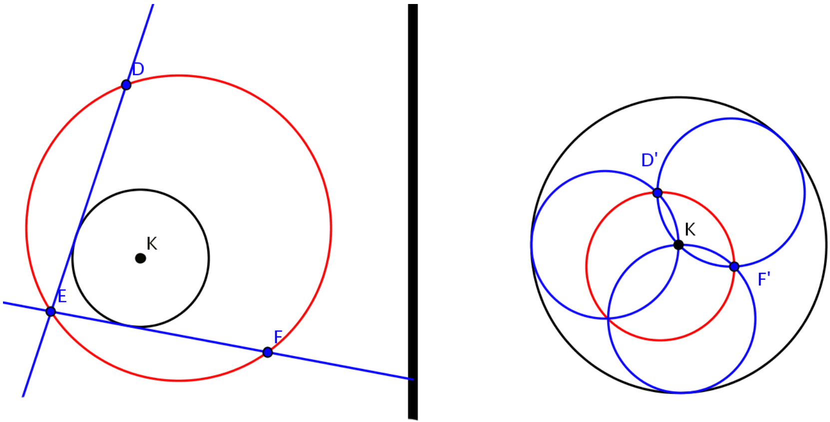
Invertáljunk a beírt körre!



Négy kör tétel $\Longrightarrow$ a D', F', K köré írt kör képének átmérője r

Bizonyítás

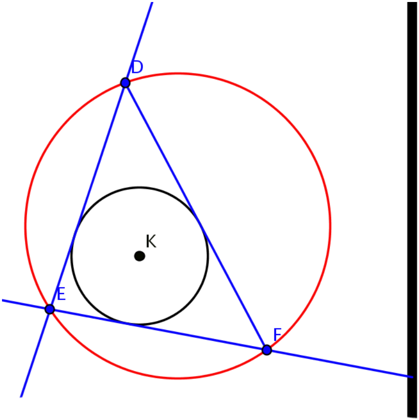
Invertáljunk a beírt körre!

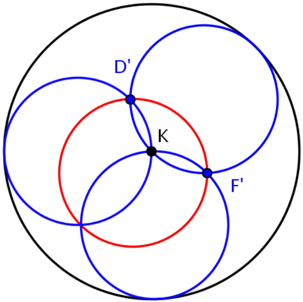


Négy kör tétel $\Longrightarrow$ a D', F', K köré írt kör képének átmérője r

Bizonyítás

Invertáljunk a beírt körre!

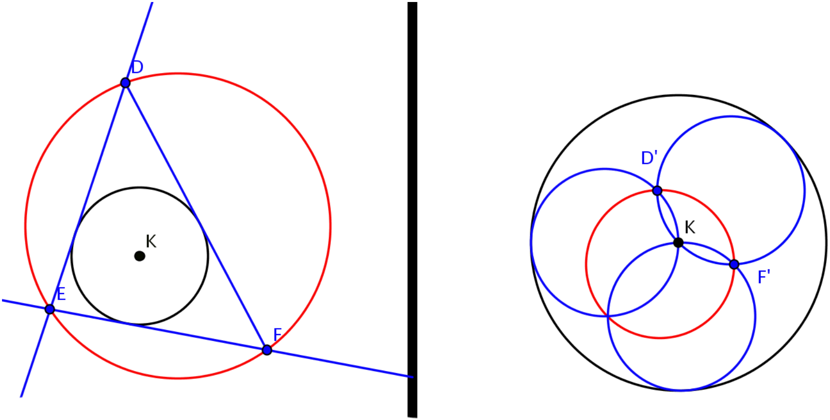




Négy kör tétel $\Longrightarrow$ a D', F', K köré írt kör képének átmérője r

Bizonyítás

Invertáljunk a beírt körre!



Négy kör tétel $\Longrightarrow$ a D', F', K köré írt kör képének átmérője r $\square$

A nagy Poncelet-tétel

Tétel (Poncelet záródási tétele)

Ha két kúpszeletre az érintőhúzási eljárás n lépésben záródik valamely pontból kezdve, akkor bármely pontból kezdve is n lépésben záródik.

Megjegyzés: a tétel további értelmezésre szorul.

Magyar nyelvű referencia pl. Hraskó András PhD-értekezése (2005) illetve Nagy Örs ETDK dolgozata (2008).

Euler-képlet

Tétel (Euler)

Háromszög esetén

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Euler-képlet

Tétel (Euler)

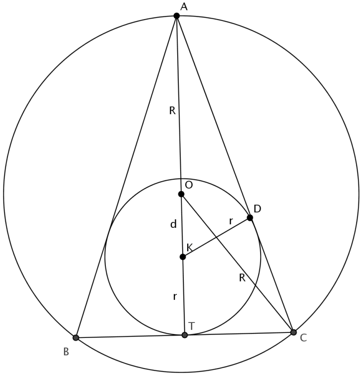
Háromszög esetén

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

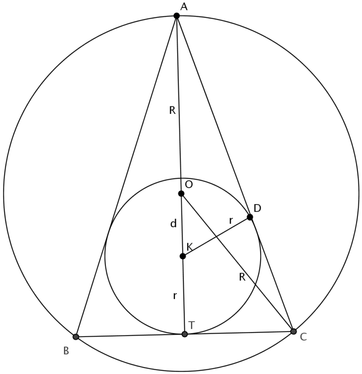
Bizonyítás.

Vegyük észre, hogy a záródási tétel szerint elegendő egyenlőszárú háromszögre igazolni a formulát.

Bizonyítás

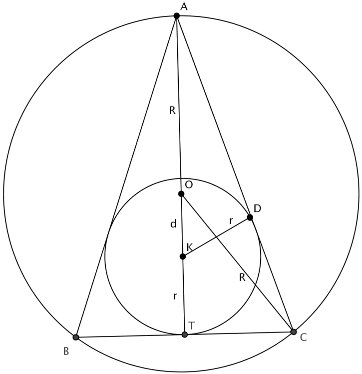


Bizonyítás



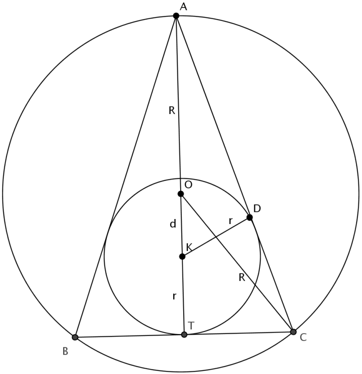
$$TC = \sqrt{R^2 - (d+r)^2} \quad AD = \sqrt{(R+d)^2 - r^2}$$
$$AC = \sqrt{(R+d+r)^2 + R^2 - (d+r)^2} = \sqrt{2R(R+d+r)}$$

Bizonyítás



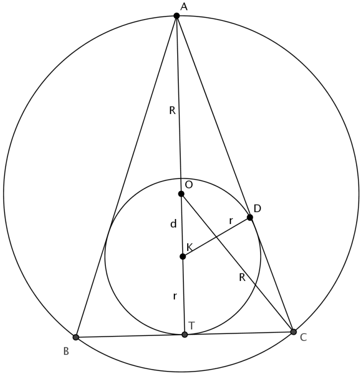
$$TC = \sqrt{R^2 - (d+r)^2} \quad AD = \sqrt{(R+d)^2 - r^2}$$
$$AC = \sqrt{(R+d+r)^2 + R^2 - (d+r)^2} = \sqrt{2R(R+d+r)}$$
$$AKD\triangle \sim ATC\triangle$$

Bizonyítás



$$TC = \sqrt{R^2 - (d+r)^2} \quad AD = \sqrt{(R+d)^2 - r^2}$$
$$AC = \sqrt{(R+d+r)^2 + R^2 - (d+r)^2} = \sqrt{2R(R+d+r)}$$
$$AKD\triangle \sim ATC\triangle \implies \quad \frac{AK}{AD} = \frac{AC}{AT}$$

Bizonyítás



$$TC = \sqrt{R^2 - (d+r)^2} \quad AD = \sqrt{(R+d)^2 - r^2}$$

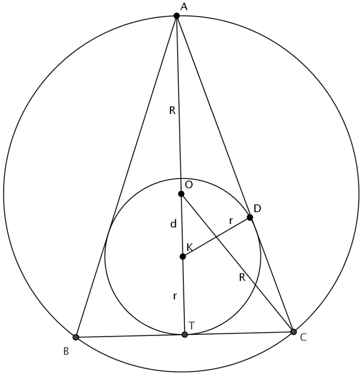
$$AC = \sqrt{(R+d+r)^2 + R^2 - (d+r)^2} = \sqrt{2R(R+d+r)}$$

$$AKD\triangle \sim ATC\triangle \Longrightarrow \quad \frac{AK}{AD} = \frac{AC}{AT}$$

$$\frac{R+d}{\sqrt{(R+d)^2 - r^2}} = \frac{\sqrt{2R(R+d+r)}}{R+d+r} \Rightarrow \frac{R+d}{\sqrt{R+d-r}} = \sqrt{2R} \Rightarrow$$

$$R^2 + d^2 + 2Rd = 2R^2 + 2Rd - 2Rr$$

Bizonyítás



$$TC = \sqrt{R^2 - (d+r)^2} \quad AD = \sqrt{(R+d)^2 - r^2}$$
$$AC = \sqrt{(R+d+r)^2 + R^2 - (d+r)^2} = \sqrt{2R(R+d+r)}$$
$$AKD\triangle \sim ATC\triangle \implies \frac{AK}{AD} = \frac{AC}{AT}$$
$$\frac{R+d}{\sqrt{(R+d)^2-r^2}} = \frac{\sqrt{2R(R+d+r)}}{R+d+r} \Rightarrow \frac{R+d}{\sqrt{R+d-r}} = \sqrt{2R} \Rightarrow$$
$$R^2 + d^2 + 2Rd = 2R^2 + 2Rd - 2Rr \ \square$$

Bicentrikus sokszögek

A Poncelet-féle záródási tétel segítségével $n > 3$ esetén is feltehető a tengelyes szimmetria, illetve az összefüggés létezése is „garantált”.

Bicentrikus sokszögek

A Poncelet-féle záródási tétel segítségével $n > 3$ esetén is feltehető a tengelyes szimmetria, illetve az összefüggés létezése is „garantált”.

Rengeteg pozitív eredmény van (Fuss, Cayley, stb.), már kis n-ekre elég bonyolultak.

Bicentrikus sokszögek

A Poncelet-féle záródási tétel segítségével $n > 3$ esetén is feltehető a tengelyes szimmetria, illetve az összefüggés létezése is „garantált”.

Rengeteg pozitív eredmény van (Fuss, Cayley, stb.), már kis n-ekre elég bonyolultak.

Számtalan, lényegében elemi eszközöket használó általánosítás és nyitott probléma található az irodalomban és az Interneten.

Köszönöm a megtisztelő figyelmet!

[1] http://www.math.u-szeged.hu/~vigvik/huhnandras.pdf