Feladatgyűjtemény Geometria I. kurzushoz

Vígh Viktor *

1. Térelemek kölcsönös helyzete, illeszkedés

1.1. gyakorlat. *Bizonyítsuk be, hogy ha három sík közül bármely kettő egy egyenesben metszi egymást, és a metszetegyenesek közül valamely kettő egy P pontban metszi egymást, akkor a haramdik metszetegyenes is illeszkedik P-re.*

1.2. gyakorlat. *Adott* 3 *páronként egyenesben metsző sík. A három metszésvonaluk közül kettő párhuzamos. Mutassuk meg, hogy ekkor bármely két metszésvonal párhuzamos!*

1.3. gyakorlat. *Adjunk meg a térben*

(a) három

(b) n

(c) végtelen sok

páronként kitérő egyenest!

1.4. gyakorlat. *Bármely három nem kollineáris pont egyértelműen meghatároz egy síkot. Legfeljebb hány síkot határoz meg*

(a) négy

(b) öt

(c) n

*A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

különböző pont? Adjunk példát olyan konfigurációra, ami a maximumot szolgáltatja!

1.5. gyakorlat. *Hány síkot határozhat meg öt pont a térben? Minden lehetséges különböző konfigurációt adjunk meg!*

1.6. gyakorlat. *Adottak a különböző síkokban fekvő $A_1B_1C_1\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$ háromszögek. Tudjuk, hogy az A_1B_1 és A_2B_2 egyenesek M_1, A_1C_1 és A_2C_2 egyenesek M_2, végül a B_1C_1 és B_2C_2 egyenesek M_3 pontokban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy M_1, M_2 és M_3 pontok kollineárisak.*

1.7. gyakorlat. *Adott két kitérő e és f egyenes a térben. Mutassuk meg, hogy ekkor egyértelműen létezik egy harmadik g egyenes, amely e-t és f-t egyaránt metszi, és azok mindegyikére merőleges. (Ezt a g egyenest az e és f egyenesek normáltranszferzálisának hívjuk.)*

1.8. gyakorlat. *Egy tetraéder minden éle egységnyi. Mennyi két kitérő (szemközti) élének távolsága?*

1.9. gyakorlat. *Az e egyenes párhuzamos a metsző S_1 és S_2 síkok mindegyikével. Mutassuk meg, hogy e párhuzamos $S_1 \cap S_2$ egyenessel is.*

1.10. gyakorlat. *Lehet-e egy kocka síkmetszete*

(a) szabályos ötszög?

(b) szabályos hatszög?

1.11. gyakorlat. *Hány részre osztják a teret egy*

(a) szabályos tetraéder

(b) kocka

lapsíkjai?

1.12. feladat. *Adott négy sík, melyek közül bármely kettő metszi egymást. Lehet-e a síkok* 6 *metszésvonala közül*
a, pontosan 3
b, pontosan 4
párhuzamos?

1.13. feladat. *Adott a skíban négy körvonal, amik közül bármely három illeszkedik egy gömbfelületre. Mutassuk meg, hogy mind a négy illeszkedik egy gömbfelületre!*

1.14. feladat. *Legfeljebb hány részre oszthatja a síkot*

(a) négy

(b) öt

(c) n

egyenes?

1.15. feladat. *Legfeljebb hány részre oszthatja a teret*

(a) négy

(b) öt

(c) n

sík?

1.16. feladat (Gallai-Sylvester tétel). *(a) Igazoljuk, hogy ha egy síkon választott véges sok pontra igaz, hogy a sík egyetlen egyenesére sem pontosan kettő kiválasztott pont illeszkedik, akkor az összes kiválasztott pont illeszkedik egyetlen egyenesre.*

(b) Adott n nem kollineáris pont a síkon. Mutassuk meg, hogy legalább n olyan egyenes van, amire az adott pontok közül legalább kettő illeszkedik!

2. Síkizometriák, szimmetriák

2.1. gyakorlat. *Milyen síkizometria két*

(a) egymással párhuzamos

(b) egymást α szögben metsző

egyenesre vett tengelyes tükrözés szorzata?

2.2. gyakorlat. *Milyen síkizometria három különböző, egymással párhuzamos egyenesre vett tengelyes tükrözés szorzata?*

2.3. gyakorlat. *Milyen síkizometria egy eltolás és egy forgatás szorzata?*

2.4. gyakorlat. *Egy K korlátos alakzat tengelyesen szimmetrikus az e és f egyenesekre vonatkozóan is. Igaz-e, hogy ekkor szimmetrikus az e' egyenesre is, ahol e' az e egyenes f-re vett tükörképe? Indokoljunk részletesen, vagy adjunk ellenpéldát!*

2.5. feladat. *Hova építsünk a folyóra hidat, hogy a két különböző parton fekvő A és B városok között a lehető legrövidebb út legyen? Mi a helyzet több folyó esetén? (A városok pontszerűek, a folyók párhuzamos egyenespárok által határolt sávok.)*

2.6. feladat. *(a) Piroska a nagymamához készül. Mi a legrövidebb út, ha közben még a folyóparton a korsóját is meg kell töltenie friss vízzel? (Piroska és a nagymama egy-egy pont, a folyó egy egyenes által határolt félsík, ami nem tartalmazza Piroskát és a nagymamát.)*

(b) Egy hegyesszögtartományban adott egy P pont. Mi a legrövidebb út, ami a szög mindkét szárát érinti, majd visszatér P-be?

(c) Egy hegyesszögtartományban adottak A és B pontok. Mi a legrövidebb A-ból B-be vezető út, ami a szög mindkét szárát érinti?

2.7. feladat. *Adott egy k kör, egy l egyenes és egy A pont. Szerkesszünk olyan e egyenest A ponton keresztül, hogy a l-lel és k-val vett (egyik) metszéspontja által meghatározott szakaszt az A pont felezze.*

2.8. feladat. *Adottak a k kör AB és CD húrjai, valamint a CD húron egy J pont. Szerkesszünk k-n egy olyan X pontot, hogy az AX és BX húrok a CD húrból olyan EF szakaszt vágjanak ki, aminek J a felezéspontja.*

2.9. feladat. *(a) Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük a háromszög oldalaira kifele rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcsait!*

(b) Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük a háromszög oldalaira kifele rajzolt négyzetek középpontjait

(c) Szerkesszünk kilencszöget, ha ismerjük az oldalak felezőpontjait!

(d) Keressünk az első három alfeladatra közös általánosítást, és oldjuk is meg!

2.10. feladat. *(a) Egy K korlátos alakzatnak pontosan két szimmetriatengelye van. Igazoljuk, hogy ezek egymásra merőlegesek!*

(b) Egy L korlátos alakzatnak páros sok szimmetriatengelye van. Igazoljuk, hogy L középpontosan szimmetrikus!

2.11. feladat. *Egy K korlátos alakzatnak legalább két szimmetriatengelye van. Igazoljuk, hogy az összes szimmetriatengely egy közös ponton halad keresztül!*

2.12. feladat (Napóleon-tétel). *(a) Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög oldalaira kifele (befelé) rajzolt szabályos háromszögek középpontjai egy szabályos háromszög csúcsai!*

(b) Az ABC háromszög oldalaira rajzoljunk egyenlőszárú BCA_1, CAB_1 és ABC_1 háromszögeket és az A_1, B_1 és C_1 csúcsoknál lévő szárszögeket jelölje α, β és γ. Mutassuk meg, hogy ha $\alpha + \beta + \gamma = 360°$, akkor az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei $\alpha/2$, $\beta/2$ és $\gamma/2$, azaz az ABC háromszögtől függetlenek.

2.13. feladat. *Ismerjük egy kör AB és CD húrjait. Keressünk a körön olyan X pontot, hogy az AX és BX húrok a CD húrból egy adott a hosszúságú EF szakaszt vágjanak ki.*

2.14. feladat. *A K korlátos alakzatnak van α-szögű forgásszimmetriája ($0° < \alpha < 180°$). Igaz-e hogy K tengelyesen szimmetrikus? Igaz-e, hogy K középpontosan szimmetrikus?*

2.15. gyakorlat. *Az MN egyenes egyazon partján adva van az A és B pont. Szerkesszünk az MN egyenesen olyan X pontot, amire az AX és BX egyenesek ugyanakkora szöget zárnak be MN egyenessel.*

2.16. feladat. *A biliárdgolyó az egyenes falról ugyanakkora szög alatt verődik vissza, mint amekkorában nekiütközött.*

(a) Adott a síkban n egyenes, $\ell_1, \dots, \ell_n$, és két pont, A és B. Milyen szögben kell elökni a golyót az A pontból, hogy minden egyenesről sorban visszaverődjön, és így a B pontba jusson?

(b) Vizsgáljuk meg az előző kérdést, ha $n = 4$, az egyenesek egy téglalapot határolnak, $A = B$ egy belső pont. Mutassuk meg, hogy a biliárdgolyó által megtett út épp a téglalap átlójának kétszerese, függetlenül A pont választásától! Mi történik, ha a pontba való visszajutás után a golyó továbbgurul?

2.17. feladat. *Az MN egyenes egyazon partján adva van az A és B pont. Szerkesszünk az MN egyenesen olyan X pontot, amire az AX egyenes kétszer akkora szöget zár be MN egyenessel, mint a BX egyenes.*

2.18. feladat. *Adott az ℓ egyenes egyik partján két pont A és B, valamint egy a hosszúságú szakasz. Keressünk az ℓ egyenesen olyan a hosszúságú XY szakaszt, hogy az $AXYB$ töröttvonal hossza minimális legyen.*

3. Hasonlóságok

3.0. beugrató Mi az, ami nagyítón kersztül nézve is ugyanakkora marad?

3.1. gyakorlat. *(a) Egy négyzet oldalait kétszeresére növeljük. Hogyan változik a kerülete és a területe?*

(b) Egy kocka éleit háromszorosára növeljük. Hogyan változik a felszíne és a térfogata?

(c) Egy négyzet oldalait λ-szorosára növeljük. Hogyan változik a kerülete és a területe?

(d) Egy kocka éleit λ-szorosára növeljük. Hogyan változik a felszíne és a térfogata?

3.2. gyakorlat. *Adott egy k kör, és rajta [a körvonalon] egy A pont. Határozzuk meg az A pontra illeszkedő húrok felezéspontjainak mértani helyét! (Mértani hely: azon pontok halmaza, amelyek az adott tulajdonsággal rendelkeznek. Figyeljünk oda, hogy nem elég megmutatni, hogy a keresett halmaz valaminek a részhalmaza, mindig törekedjünk a halmaz pontos leírására, pl.: "A keresett mértani hely az EF egyenes, kivéve az X és Y pontokat".)*

3.3. gyakorlat. *Adottak a koncentrikus k_1 és k_2 körök. Szerkesszünk olyan ℓ egyenest ami a két körvonalat A, B, C és D pontokban metszi (az egyenesen ebben a sorrendben), és $AB = BC = CD$.*

3.4. feladat. *(a) Írjunk az adott ABC háromszögbe négyzetet, aminek két csúcsa a háromszög AB oldalára, egy-egy csúcsa pedig a háromszög AC ill. BC oldalára illeszkedik!*

(b) Írjunk az adott ABC háromszögbe olyan háromszöget, aminek oldalai párhuzamiosak az adott ℓ_1, ℓ_2 és ℓ_3 egyenesekkel. (Az ABC háromszög minden oldalára illeszkedik a beírt háromszögg egy-egy csúcsa.)

(c) Írjunk az adott ABC háromszögbe olyan téglalapot, amely oldalainak aránya $2:3$.

3.5. feladat. *Adott egy k kör, és rajta [a körvonalon] három pont A, B és C. Szerkesszük meg azt az AX húrt, amelyet a BC húr felez.*

3.6. feladat (Feuerbach-kör). *(a) Mutassuk meg, hogy egy hegyesszögű háromszög magasságpontjának az oldalaegyenesekre, illetve az oldalfelezőpontokra vett tükörképei mind a háromszög körülírt körére esnek!*

(b) Mutassuk meg, hogy egy hegyesszögő háromszögben a magasságok talpontjai, az oldalfelezőpontok és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai mind illeszkednek egy körre!

3.7. feladat. *Adott az ℓ_1 egyenesen az A pont, és az ℓ_2 egyenesen a B pont. Szerkesszünk ℓ egyenest, ami olyan X ill. Y pontokban metszi az ℓ_1 ill. ℓ_2 egyeneseket, amikre $AX = BY$ és*

(a) ℓ párhuzamos egy adott e egyenessel.

(b) ℓ áthalad egy rögzített M ponton.

(c) az XY szakasz adott hosszúságú.

(d) egy adott f egyenes felezi az XY szakaszt.

3.8. feladat. *Az ABC háromszög AD súlyvonalának felezőpontja F. A CF egyenes az AB oldalt az M pontban metszi. Határozzuk meg az $AM : AB$ arányt!*

3.9. feladat. *Az ABC háromszögön belül tetszőlegesen felvett O ponton át húzzunk párhuzamosokat a háromszög oldalaival. Ezek az egyenesek a háromszöget hat részre bontják, amik közül három háromszög. E kis háromszögekbe írt körök sugarai legyenek r_1, r_2 és r_3, míg az ABC háromszög beírt körének sugara r. Mutassuk meg, hogy $r_1 + r_2 + r_3 = r$!*

3.10. feladat. *Az ABC háromszög CC_1 súlyvonalán vegyük fel azt a P pontot amely a súlyvonalat $m : n$ arányban osztja (m és n pozitív egészek).Milyen arányban osztja P az AP ill. a BP egyenesnek a háromszögbe eső szakaszát?*

3.11. feladat (Magasság- és befogó-tétel). *Egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója c, átfogóhoz tartozó magassága m, az a és b befogók átfogóra vett merőleges vetületei rendre x és y. Igazoljuk, hogy*

(a) $m^2 = xy$!

(b) $a^2 = xc$, $b^2 = yc$!

3.12. feladat. *Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az egyik hegyesszöge és befogóinak összege!*

3.13. feladat. *Az $ABCD$ trapéz átlói M pontban metszik egymást, alapjai a és c hosszúak.Az alapokkal párhuzamos, M-re illeszkedő egyenes a szárakat X és Y pontokban metszik. Fejezzük ki a és c segítségével az MX és MY szakaszok hosszát!*

3.14. feladat. *Egy trapéz két alapja a és c. Az alapokkal párhuzamosan, egy* $\sqrt{ac}$ *hosszú szakasszal a trapézt két kisebb trapézra vágjuk. Igaz-e, hogy a két kisebb trapéz hasonló egymáshoz?*

3.15. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a trapéz száregyeneseinek metszéspontját az átlók metszéspontjával összekötő egyenes felezi a trapéz alapjait!*

4. Vektorok

4.1. gyakorlat. *(a) Adottak az* A, B *és* O *pontok, valamint az* AB *szakaszt* $\lambda : \mu$ *arányban osztó* X *pont. Fejezzük ki* $\overrightarrow{OX}$*-t* $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ *valamint* λ *és* μ *segítségével!*

(b) Adottak az A, B*,* C *és* O *pontok, valamint az* $ABC\triangle$ *háromszög* S *súlypontja. Fejezzük ki* $\overrightarrow{OS}$*-t* $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ *valamint* $\overrightarrow{OC}$ *segítségével!*

4.2. gyakorlat. *Igazoljuk a háromszögekre vonatkozó cosinus-tételt!*

4.3. gyakorlat. *Igazoljuk, hogy egy négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg! Mi a helyzet, ha négyszögön egy zárt, négy csúcsú töröttvonalat értünk a térben?*

4.4. feladat (Euler-egyenes). *(a) Az* $ABC\triangle$ *körülírt körének középpontja* O*, magasságpontja* M*. Mutassuk meg, hogy* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$*!*

(b) Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges háromszögben a magasságpont, a súlypont és a körülírt kör középpontja egy egyenesre illeszkedik! Ismerünk-e egyéb nevezetes pontot ezen az egyenesen?

4.5. feladat. *Az* $ABC\triangle$ *hegyesszögű, nem szabályos háromszögben rendre* α, β *és* γ *jelöli a szögeket a szokásos módon. Mutassuk meg, hogy a háromszög Euler-egyenese pontosan akkor párhuzamos az* AB *oldallal, ha* $\tan\alpha \cdot \tan\beta = 3$!

4.6. feladat (Minkowski). *(a) Egy konvex sokszög minden oldalára kifelé merőlegesen állítunk egy vektort, amelynek hossza épp a megfelelő oldal hosszával egyenlő. Mutassuk meg, hogy ezeknek a vektoroknak az összege a nullvektor!*

(b) Egy konvex politóp (poliéder) minden lapjára kifelé merőlegesen állítunk egy vektort, amelynek hossza épp a megfelelő lap területével egyenlő. Mutassuk meg, hogy ezeknek a vektoroknak az összege a nullvektor!

4.7. feladat. *Legyenek az $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ és $C_1C_2C_3C_4$ négyszögek paralelogrammák, valamint jelölje S_i az $A_iB_iC_i\triangle$ háromszög súlypontját. Mutassuk meg, hogy $S_1S_2S_3S_4$ négyszög is paralelogramma!*

4.8. feladat. *Az $ABC\triangle$ háromszög AB ill. BC oldalát $1 : \lambda$ arányban osztja a P ill. Q pont ($\overline{AP}/\overline{PB} = 1/\lambda$ és $\overline{BQ}/\overline{QC} = 1/\lambda$). Legyen $AQ \cap CP = X$, $AC \cap BX = Y$, S az $ABC\triangle$ súlypontja, M pedig a magasságpontja. A $\overrightarrow{BA}$ és a $\overrightarrow{BC}$ vektorok, valamint a λ szám segítségével fejezzük ki a $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BX}$ és $\overrightarrow{BY}$ vektorokat.*

4.9. feladat (Paralelogramma-tétel). *Bizonyítsuk be, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik az oldalai négyzetösszegével!*

4.10. feladat. *Legyen adva egy O középpontú ellipszis, és rajta a P és Q pontok úgy, hogy OP merőleges OQ-ra. Mutassuk meg, hogy PQ egyenes távolsága az O-tól független a P és Q pontok választásától!*

4.11. feladat. *Legyen adva $ABC\triangle$, beírt körének középpontja K és egy tetszőleges O pont. Felhasználva a szögfelező-tételt igazoljuk, hogy*

$$\overrightarrow{OK} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c},$$

ahol a, b és c a háromszög oldalait jelöli.

4.12. feladat (Euler-képlet). *Egy háromszög beírt körének sugara r, körülírt körének sugara R, a két kör középpontjának távolsága d. Igazoljuk, hogy*

$$d^2 = R^2 - 2rR!$$

(Használjuk a 4.11 feladatot.)

4.13. feladat. *Az ABC háromszög k körülírt körének középpontja O. A k kör BC, AC és AB "rövidebb" (rendre az A, B és C pontokat nem tartalmazó) íveinek felezéspontjai rendre A', B' és C'. Mutassuk meg, hogy $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OK}$, ahol K az $ABC\triangle$-be írt kör középpontja.*

4.14. feladat. *Egy egységkörbe írt húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Mutassuk meg, hogy oldalainak négyzetösszege 8!*

4.15. feladat. *Egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Mutassuk meg, hogy a körülírt kör középpontjának egy oldaltól mért távolsága épp a szemközi oldal fele!*

4.16. feladat. *Az $ABC\triangle$ beírt köre az oldalakat rendre A_1, B_1 és C_1 pontokban érinti. Mutassuk meg, hogy AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok egy pontban metszik egymást? Mi a helyzet, ha a megfelelő oldalkon a megfelelő hozzáírt körök érintési pontját vesszük?*

4.17. feladat. *Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges háromszög súlypontja egybeesik a középvonal-háromszöge súlypontjával!*

4.18. feladat. *Az $ABC\triangle$ magasságpontja M, körülírt körének középpontja O, ennek AB egyenesre vett tükörképe O'. Milyen négyszög $COMO'$?*

4.19. feladat (Magasságpont). *Mutassuk meg, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást!*

5. Vektoriális szorzat, koordinátageometria

5.1. gyakorlat. *Legyen $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ és $\overrightarrow{k}$ három, egymásra páronként merőleges egységvektor, $\overrightarrow{a}$ pedig tetszőleges vektor a térben. Mutassuk meg, hogy*

$$\overrightarrow{a} = \langle \overrightarrow{i}, \overrightarrow{a} \rangle \overrightarrow{i} + \langle \overrightarrow{j}, \overrightarrow{a} \rangle \overrightarrow{j} + \langle \overrightarrow{k}, \overrightarrow{a} \rangle \overrightarrow{k}.$$

5.2. gyakorlat. *Vezessük le az egyenes és a sík normálvektoros egyenletét!*

5.3. gyakorlat. *Adott $\overrightarrow{e}$ egységvektor és egy rá merőleges $\overrightarrow{a}$ vektor. Mivel egyenlő $\overrightarrow{e} \times (\overrightarrow{e} \times (\ldots \overrightarrow{e} \times (\overrightarrow{e} \times \overrightarrow{a})))$ szorzat, ahol az $\overrightarrow{e}$ vektor 2013-szor szerepel tényezőként?*

5.4. gyakorlat. *Tegyük fel, hogy $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. Igazoljuk, hogy*

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}!$$

5.5. gyakorlat. *Legyen $\overrightarrow{e}$ egységvektor. Igazoljuk, hogy*

$$\overrightarrow{a} = \langle \overrightarrow{e}, \overrightarrow{a} \rangle \overrightarrow{e} + (\overrightarrow{e} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{e}!$$

[Megjegyzés: a formula lényegében azt mutatja, hogy egy adott $\overrightarrow{a}$ vektor hogyan bontható fel az $\overrightarrow{e}$ egységvektorral párhuzamos és arra merőleges komponensre. Másképpen úgy is gondolhatunk rá, hogy a skaláris és a vektoriális szorzás segítségével leírtuk az egyenesre ill. síkra vonatkozó merőleges vetítést, lásd még 5.1 gyakorlatot.]

5.6. gyakorlat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *és* $\overrightarrow{c}$ *vektorokra*

$$\langle \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} \rangle!$$

Az $\langle \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} \rangle$ *szorzatot az* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *és* $\overrightarrow{c}$ *vektorok vegyesszorzatának hívjuk, és egyszerűen* $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$*-vel jelöljük.*

5.7. gyakorlat. *Az* $A(0,1,0)$, $B(2,0,0)$, $C(3,1,1)$ *és* D *pontok konvex burkának térfogata* 4*! Írja fel* D *mértani helyének egyenletét!*

5.8. gyakorlat. *Számítsuk ki az* $A(0,1,0)$, $B(2,1,0)$, $C(3,2,1)$, $D(1,2,1)$ *és* $E(2,0,3)$ *pontok konvex burkának térfogatát!*

5.9. gyakorlat. *Mekkora szög alatt látszik az* AB *szakasz a* C *pontból, ha* $A(1,2,4)$, $B(11,3,7)$ *és* $C(-1,10,11)$*?*

5.10. gyakorlat. *Számítsuk ki az* $x - 2y + 4z = 10$ *és* $x - 2y + 4z = 31$ *egyenletű síkok távolságát!*

5.11. gyakorlat. *Adjuk meg annak az egyenesnek egy paraméterezését, amelyikre illeszkedik a* $P(2,-1,3)$ *pont és metszi a* $(2t-3, -t+1, 5t-7)$ *és* $(3t+1, t, 2t)$ *paraméterzésű egyenesek mindegyikét!*

5.12. gyakorlat. *Adjuk meg annak az egyenesnek egy paraméterezését, amelyik merőlegesen metszi a* $(2t-3, -t+1, 5t-7)$ *és* $(3t+1, t, 2t)$ *paraméterzésű egyenesek mindegyikét!*

5.13. gyakorlat. *Számítsuk ki a* $(2t-3, -t+1, 5t-7)$ *és* $(3t+1, t, 2t)$ *paraméterzésű egyenesek távolságát!*

5.14. gyakorlat. *Számítsuk ki a* $P(10,11,12)$ *pontnak az* $x + 2y + z = 7$ *egyenletű síkra vonatkozó merőleges vetületét!*

5.15. gyakorlat. *Adjuk meg az* $(u - 2v + 1, v, 3u - 3)$ *és* $(u, u + v, 2u - 1)$ *paraméterezésű síkok metszésvonalának egy paraméterezését.*

5.16. gyakorlat. *Számítsuk ki a* $(3t-1, 2t+2, t)$ *paraméterezésű egyenes és az* $x - 2y + z = 17$ *egyenletű sík metszéspontjának koordinátáit!*

5.17. gyakorlat. *Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, ami illeszkedik a* $(t, -3t+1, 7)$ *egyenesre és párhuzamos a* $(-t, -t, 3t+2)$ *egyenessel!*

5.18. feladat. *Írjuk fel a* $(t, 3t, -2t+1)$ *egyenes* $x-y+z=1$ *síkra vonatkozó tükörképének egy paraméterezését!*

5.19. feladat. *A* P, Q *és* R *pontok úgy helyezkednek el az* O *középpontú*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

egyenletű ellipszoidon, hogy az OP, OQ, OR *szakaszok páronként merőlegesek egymásra. Mutassuk meg, hogy a* PQR *sík és* O *távolsága nem függ* P, Q, *és* R *megválasztásától. (Nehéz!)*

6. Parabola, hiperbola, ellipszis

6.1. gyakorlat. *Adott egy* P *pont és egy* e *egyenes,* $P \notin e$. *Mi a* P *pontot a kerületén tartalmazó, e-t érintő körök középpontjainak mértani helye?*

6.2. gyakorlat. *Adott egy egy* k *kör, és egy* k *kerületére nem illeszkedő* P *pont. Mi Mi a* P *pontot a kerületén tartalmazó, k-t érintő körök középpontjainak mértani helye?*

6.3. gyakorlat. *Bizonyítsuk be, hogy a parabola érintője rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

a) a fókuszból az érintőre húzott merőleges talppontja a tengelyponthoz húzott érintőre illeszkedik.

b) a fókusznak az érintőre vett tükörképe a vezéregyenesre illeszkedik.

c) az $y^2 = 2px$ *parabola bármelyik a tengelyponthoz húzott érintőtől különböző érintője az* y *tengelyből feleakkora szakaszt vág le, mint amekkora az érintési pont ordinátája.*

d) az $y^2 = 2px$ *parabola bármelyik érintője az* x *tengelyt olyan pontban metszi, amelynek az origótól vett távolsága egyenlő az érintési pont abszcisszájával.*

6.4. gyakorlat. *Számítsuk ki az*

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

ellipszis kis- és nagytengelyének hosszát, valamint fókuszpontjai koordinátáit! Írjuk fel a $(4, 5)$ *pontból az ellipszishez húzott érintők egyenleteit!*

6.5. gyakorlat. *Számítsuk ki az* $x^2 - 4y^2 = 144$ *hiperbola tengelyeinek hosszát, valamint fókuszainak koordinátáit. Húzzunk érintőt a hiperbolához a* $(0,1)$ *pontból!*

6.6. gyakorlat. *Milyen messze van a* $3x + 4y + 46 = 0$ *egyenes az* $y = x^2/64$ *parabolától?*

6.7. gyakorlat. *Bizonyítsuk, hogy egy ellipszis egyik fókuszpontjának tükörképe egy érintőre illeszkedik a másik fókuszponthoz tartozó vezérkörre.*

6.8. feladat. *Két ellipszis egyik fókusza közös. Mutassuk meg, hogy legfeljebb 2 közös külső érintőjük van!*

6.9. gyakorlat. *Igazoljuk, hogy egy merőleges szárú hiperbola bármely érintője ugyanakkora területű háromszöget határol az aszimptotákkal!*

6.10. gyakorlat. *Igazoljuk, hogy egy merőleges szárú hiperbola bármely érintőjének az aszimptoták közé eső szakaszát felezi az érintési pont!*

6.11. feladat. *Igazoljuk, hogy ha egy külső* P *pontból érintőket húzunk a kúpszelethez, akkor a* P*-t az érintési pontokkal összekötő szakaszok a kúpszelet fókuszából vagy egyenlő, vagy pedig egymást* $180°$*-ra kiegészítő szögekben látszanak. Az utóbbi eset csak akkor fordul elő, ha a kúpszelet hiperbola és a két érintő annak két különböző ágához tartozik.*

6.12. feladat. *Legyen* $\mathcal{K}$ *egy hiperbolától különböző kúpszelet,* e_1 *és* e_2 *pedig két rögzített érintője. Igazoljuk, hogy ekkor* $\mathcal{K}$ *tetszőleges érintőjének* e_1 *és* e_2 *közé eső szakasza* $\mathcal{K}$ *fókuszából állandó szög alatt látszik.*

6.13. feladat. *Legyen adva* $\mathcal{K}$ *kúpszelet az* F *fókuszával és* v *vezéralakzatával. Szerkesszük meg* $\mathcal{K}$ *és egy adott* e *egyenes metszéspontjait!*

6.14. feladat. *Legyen adva* $\mathcal{K}$ *kúpszelet az* F *fókuszával és* v *vezéralakzatával. Szerkesszünk* $\mathcal{K}$*-hoz érintőt egy adott* P *pontból!*

6.15. feladat. *Legyen adva* $\mathcal{K}$ *kúpszelet az* F *fókuszával és* v *vezéralakzatával. Szerkesszünk* $\mathcal{K}$*-hoz érintőt egy adott* e *egyenessel párhuzamosan!*

7. A háromszög

7.1. feladat. *Vegyünk egy hegyesszögű ABC háromszöget, a szokásos jelölésekkel: a, b, c jelöli az oldalakat, α, β, γ a szögeket, r a beírt, R a körülírt, r_a, r_b és r_c a megfelelő hozzáírt körök sugarai. Jelölje továbbá m_a, m_b és m_c a magasságokat, T a területet és s a félkerületet. A beírt és körülírt körök középpontjának távolsága legyen d.*

Igazoljuk, hogy

a, $\frac{1}{r} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}$*!*

b, $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$*!*

c, $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$*!*

d, $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}$*!*

e, $\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$*!*

f, ha a háromszög nem derékszögű, akkor $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$*!*

7.2. feladat. *Mutassuk meg, hogy* $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq 3/2$*! [Lásd: 8.6. feladat]*

7.3. feladat. *Egy háromszög beírt körének sugara r, hozzáírt köreinek sugarai rendre r_a, r_b és r_c. Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = 1.$$

7.4. feladat. *Egy háromszög belső szögei α, β, γ. Mutassuk meg, hogy*

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \leq \frac{1}{8}.$$

7.5. feladat. *Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6!$$

[Lásd: 8.6. feladat]

7.6. feladat. *Igazoljuk, hogy egy háromszög a, b, c oldalaira*

(a) $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0!$

(b) $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \le abc$*!*

7.7. feladat. *Mutassuk meg, hogy ha P az $ABC\triangle$ belső pontja, akkor a $PAB\angle$, $PBC\angle$ és $PCA\angle$ szögek közül legalább az egyik nem nagyobb $30°$-nál! [Lásd: 8.6. feladat]*

7.8. feladat. *Igazoljuk, hogy egy háromszög a, b, c oldalaira*

$$\frac{27}{8} \le \frac{(a+b+c)^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} < 4 \quad !$$

7.9. feladat. *Egy háromszög oldalai a, b, c. Mutassuk meg, hogy*

$$a^2(-a+b+c) + b^2(a-b+c) + c^2(a+b-c) \le 3abc.$$

7.10. feladat. *Az $ABC\triangle$ háromszög c oldala egységnyi, vele szemben fekvő szöge $\gamma = 45°$. Mutassuk meg, hogy $ABC\triangle$ lefedhető kettő darab, egységnyi átmérőjű körrel!*

7.11. feladat. *Egy derékszögű háromszög befogói a és b, beírt körének sugara r. Mutassuk meg, hogy*

$$2+\sqrt{2} \le \frac{2ab}{(a+b)r} < 4.$$

7.12. feladat. *Az $ABC_\triangle$ háromszög belsejében levő P pontra $PAB\angle = PBC\angle = PCA\angle = \varphi$. Mutassuk meg, hogy ha a háromszög szögei α , β és γ , akkor*

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

8. Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőértékfeladatok

8.1. feladat (Izogonális pont, Fermat-Toricelli pont). *Adott ABC hegyesszögű háromszögben keressük meg azt pontot, aminek a csúcsoktól mért távolságösszege minimális! Mutassuk meg, hogy ez a pont egyértelmű, belőle minden oldal ugyanakkora szög alatt látszik!*

8.2. feladat (Talpponti háromszög). *Adott a hegyesszögű ABC háromszög, egy H háromszöget az ABC-ba írtnak mondunk, ha H egy-egy csúcsa illeszkedik ABC egy-egy oldalára. Tekintsük az ABC háromszög magasságvonalainak talppontjai által meghatározott háromszöget. Mutassuk meg, hogy az ABC-be írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a legkisebb!*

8.3. feladat. *Egy konvex négyszög oldalai rendre a körüljárás szerint* a, b, c *és* d*, területe* T*. Igazoljuk, hogy*

$$ac + bd \geq 2T!$$

8.4. feladat (Ptolemaiosz-tétel (Nehéz!)). *Egy konvex négyszög oldalai a körüljárás szerint* a*,* b*,* c *és* d*, átlói* e *és* f*. Igazoljuk, hogy*

$$ac + bd \geq ef.$$

8.5. feladat. *Írjunk félgömbbe maximális térfogatú téglatestet!*

8.6. feladat (Erdős-Mordell egyenlőtlenség (Nehéz!)). *Legyen* P *az* $ABC\triangle$ *belső vagy határpontja, az oldalegyenesktől mért távolságai rendre* x, y *és* z*, míg a csúcsoktól mért távolságai* u, w *és* v*. Ekkor*

$$u + v + w \geq 2(x + y + z),$$

és egyenlőség csak akkor teljesül, ha P *az* $ABC\triangle$ *szabályos háromszög középpontja.*

8.7. feladat (Sugáregyenlőtlenség). *Mutassuk meg, hogy egy háromszög beírt körének sugara legfeljebb fele akkora, mint a körülírt körének sugara!*

8.8. feladat. *Mutassuk meg, hogy egy hegyesszögű háromszög beírt körének* r *sugarára,* m_a, m_b *és* m_c *magasságaira, valamint körülírt körének* R *sugarára fennáll, hogy*

$$9r \leq m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}.$$

8.9. feladat. *Írjunk adott körbe maximális területű* n*-szöget! Írjunk adott kör köré minimális területű* n*-szöget!*

8.10. feladat. *Írjunk adott körbe maximális kerületű* n*-szöget! Írjunk adott kör köré minimális kerületű* n*-szöget!*

9. Nevezetes illeszkedési és arányossági tételek

9.1. feladat (Ceva-tétel). *Az* ABC *hegyesszögű háromszög megfelelő csúccsal szemközti oldalain adottak az* A_1*,* B_1 *és* C_1 *pontok. Mutassuk meg, hogy* AA_1*,* BB_1 *és* CC_1 *egy pontban metszi egymást pontosan akkor, ha*

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1.$$

9.2. feladat (Desargues-tétel). *Mutassuk meg, hogy két háromszög pontosan akkor perspektív pontra nézve, ha egyenesre nézve is az!*

9.3. feladat. *Jelöljük a klasszikus Euklideszi síkon az $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszög A_i-vel szemközti oldalegyenesét a_i-vel. Legyen B_1 az a_1 tetszőleges pontja, majd $B_2 = A_5B_1 \cap a_4$; $B_3 = A_3B_2 \cap a_2$; $B_4 = A_1B_3 \cap a_5$; $B_5 = A_4B_4 \cap a_3$ és $B_6 = A_2B_5 \cap a_1$. Mutassuk meg, hogy B_1 és B_6 egybeesnek. (Minden pontról feltesszük, hogy létezik. Használjuk a Desargues-tételt!)*

9.4. feladat. *Mondjuk ki pontosan majd bizonyítsuk Meneláosz tételét!*

9.5. feladat. *Mondjuk ki Pascal és Brianchon tételeit! Vizsgáljuk meg milyen esetek lehetségesek az Euklideszi síkon!*

10. Terület, kerület, térfogat, felszín

10.1. feladat (Brahmagupta-tétel). *Legyenek N húrnégyszög oldalai a, b, c és d, félkerülete s, területe T. Igazoljuk, hogy*

$$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

10.2. feladat. *Igazoljuk, hogy egy konvex négyszög oldalfelezőpontjai által meghatározott négyszög területe éppen fele az eredeti négyszögének!*

10.3. feladat. *Az $ABC\triangle$ szabályos háromszög területe 1, egy belső pontja P. A P-ből minden oldalra merőlegest állítunk, ezek talppontjai T_A, T_B és T_C. Mutassuk meg, hogy $T(AT_CP) + T(BT_AP) + T(CT_BP) = 1/2$.*

10.4. feladat. *Egy téglalapot hat négyzetre osztottunk. Határozzuk meg a legnagyobb négyzet területét, ha a legkisebbé 1. ((Nehéz!))*

10.5. gyakorlat. *Válasszuk ki az egységkocka három kitérő élét. Mekkora területű az ezen élek felezőpontjai által meghatározott háromszög?*

10.6. feladat (Steiner-képlet). *(a) Egy L konvex sokszög kerülete K, területe T. Tekintsük azon pontok halmazát, amelyek L-től legfeljebb d távolságra vannak. Mennyi ennek a ponthalmaznak a területe?*

(b) Egy P konvex, korlátos poliéder (politóp) élei a hozzájuk tartozó külső szögekkel $\{(e_i, \gamma_i)\}$ párok $(i = 1, \ldots, k)$, felszíne A, térfogata V. Tekintsük azon pontok halmazát, amelyek legfeljebb d távolságra vannak P-től. Mekkora ennek a ponthalmaznak a térfogata?

10.7. feladat. *Egy* 100 *egység sugarú körben adott* 10250 *pont. Mutassuk meg, hogy van közöttük kettő, amelyek távolsága kisebb, mint* 2.

10.8. feladat. *Egy sávon két párhuzamos egyenes által határolt síkrészt értjük, szélességén az egyenesek távolságát. Egy egységnyi átmérőjű kört lefed néhány sáv. Mutassuk meg, hogy a sávok szélességeinek összege legalább egy.*

10.9. feladat. *Mutassuk meg, hogy az egységkörbe írt n-szögek közül a szabályosnak maximális a területe!*

10.10. feladat. *Egy K konvex ötszög minden oldalát belülről érint egy 5 egység sugarú kör, K kerülete 60. Az ötszög oldalait kifele 1 egységgel eltoljuk, így kapjuk a K' ötszöget. Igazoljuk, hogy $T(K') > 213$.*

10.11. feladat. *Egy R sugarú kerek asztalon elhelyeztünk n darab r sugarú pénzérmét úgy, hogy minden érme egy teljes lapjával az asztalon fekszik. Az asztalra újabb érme már nem helyezhető el. Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right) \leq \sqrt{n} \leq \frac{R}{r}.$$

11. "Szokatlan" transzformációk

Inverzió

11.1. gyakorlat. *Keressük meg az inverzió invariáns alakzatait!*

11.2. feladat. *Legyen A, B és O három nem kollineáris pont. Egy O pólusú inverzió az A és B pontokat rendre az A' és B' pontokba viszi.*

(a) Igazoljuk, hogy $ABA'B'$ húrnégyszög!

(b) Igazoljuk, hogy $ABA'B'$ húrnégyszög körülírt köre merőlegesen metszi az inverzió alapkörét!

11.3. feladat. *(a) Három egységnyi sugarú kör egy közös ponton megy át. Igazoljuk, hogy a három darab, páronkénti második metszésponjuk által meghatározott kör sugara is egységnyi!*

(b) (Záródási-tétel, 0. verzió) Legyen az ABC háromszög körülírt köre k_1, beírt köre k_2. Válasszunk egy tetszőleges P pontot a k_1 körön, és húzzuk meg az érintőket P-ből a k_2 körhöz. Ezek az érintők k_1 kört X és Y pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy XY egyenes érinti k_2-t!

11.4. feladat (Euler-képlet). *Egy háromszög beírt körének sugara r, körülírt körének sugara R, a két kör középpontjának távolsága d. Igazoljuk, hogy*

$$d^2 = R^2 - 2rR!$$

(Használjuk a Záródási-tétel 0. verzióját annak igazolására, hogy elegendő egyenlőszárú háromszöggel foglalkozni.)

11.5. feladat. *(a) (Simson-egyenes, aka. Wallace-egyenes) Mutassuk meg, hogy egy P pont ABC hegyesszögű háromszög oldalegyeneseire vett vetületei pontosan akkor kollineárisak, ha P illeszkedik az ABC körülírt körére!*

(b) (Salmon-tétel) Adott egy c kör és rajta négy pont: A, B, C és P. Szerkesszük meg a PA, PB és PC átmérőjű köröket: c_1-et, c_2-t és c_3-at. A körök páronkénti második (P-n kívüli) metszéspontjai legyenek X, Y és Z. igazoljuk, hogy az X, Y és Z pontok egy egyenesen vannak!

11.6. feladat (Apollóniusz szerkesztések). *Szerkesszünk kört, amely érint (kör és egyenes esetén) / tartalmaz (pont esetén)*

(a) három adott pontot.

(b) két adott pontot, és egy adott egyenest.

(c) egy adott pontot és két adott egyenest.

(d) három adott egyenest.

(e) két adott pontot és egy adott kört.

(f) egy adott pontot, egy adott egyenest és egy adott kört.

(g) két adott egyenest és egy adott kört.

(h) egy adott pontot és két adott kört.

(i) egy adott egyenest és két adott kört.

(j) három adott kört.

11.7. feladat. *Adott egy k kör és a belsejében az A és B pontok. Mutassuk meg, hogy van olyan kör, ami a kerületén tartalmazza A-t és B-t, és teljesen a k kör belsejében fekszik!*

11.8. feladat (Feuerbach-tétel (Nehéz!)). *Mutassuk meg, hogy egy háromszög Feuerbach-köre érinti a beírt és hozzáírt köröket!*

Merőleges affinitás

11.9. gyakorlat. *Adott egy t egyenes és egy $\lambda > 0$ szám. Tekintsük a következő transzformációt: a t tengely pontjai fixek. Legyen $P \notin t$ pont, és T a P-ből t-re bocsájtott merőleges talppontja. A P pont képe az a P' pont a T kezdőpontú TP félegyenesen, amire $|P'T|/|PT| = \lambda$. A definiált transzformációt t tengelyre vonatkozó, λ arányú merőleges affinitásnak hívjuk. Mutassuk meg, hogy a merőleges affinitás egyenest egyenesbe visz!*

11.10. feladat. *Legyen $\mathcal{E}$ egy ellipszis $2a$ és $2b$ tengelyekkel $(a > b)$. Mutassuk meg, hogy a nagytengely egyenesére vonatkozó, a/b arányú merőleges affinitás $\mathcal{E}$-t egy a sugarú körbe transzformálja!*

11.11. feladat. *Adott egy ellipszis a két tengelyével és egy külső pont. Szerkesszünk a pontból érintőt az ellipszishez!*

11.12. feladat. *Adott egy ellipszis a két tengelyével és egy egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis és az egyenes metszéspontjait!*

12. Konvexitás, orsókonvexitás

12.1. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy konvex halmazok metszete konvex!*

12.2. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy egy konvex lemeznek (konvex, korlátos és zárt halmaz) létezik bármilyen irányú támaszegyenese!*

12.3. gyakorlat. *Adott egy K konvex lemez és rajta kívül egy P pont. Mutassuk meg, hogy egyértelműen létezik $M \in K$ pont, amire PM távolság minimális!*

12.4. feladat. *Rögzítsünk egy koordinátarendszert $\mathbb{E}^2$-ben, és legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, minden valósra értelmezett függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény az $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon konvex, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ esetén*

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Mutassuk meg, hogy ha f konvex az (a, b) intervallumon, akkor a $H := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{E}^2 \mid \beta \geq f(\alpha)\}$ halmaz konvex!

12.5. feladat. *Adjunk példát olyan H nem konvex ponthalmazra, ami bármely két x és y pontjával együtt az $\overline{xy}$ szakasz felezőpontját is tartalmazza!*

12.6. feladat. *Rögzítsünk a síkon egy S szakaszt és egy koordinátázást, úgy hogy S illeszkedjen az $x = 1$ egyenletű egyenesre. Jelöljük a síkon $e(a, b)$-vel azt az egyenest, melynek egyenlete $y = ax + b$. Legyen $H := \{(a, b) \in \mathbb{E}^2 \mid e(a, b) \cap S \neq \emptyset\}$. Igazoljuk, hogy H konvex.*

12.7. feladat. *Legyenek $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ vektorok a 3-dimenziós Euklideszi térben. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ vektor, hogy minden i-re*

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_i} \rangle \geq 0!$$

12.8. feladat. *Adjunk meg $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_4}$ vektorokat a 3-dimenziós Euklideszi térben, hogy bármely $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ vektor esetén léteznek $1 \leq i, j \leq 4$ indexek, hogy $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_i} \rangle > 0$ és $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_j} \rangle < 0$!*

Orsókonvexitás

12.9. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy orsókonvex halmazok metszete orsókonvex!*

12.10. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy ha egy S orsókonvex lemeznek e támaszegyenese a P pontban, akkor az e-t S-sel megyegező oldalon érintő egységkör tartalmazza S-t!*

12.11. gyakorlat. *Legyen S orsókonvex lemez, és jelöljük S^*-gal az S-t tartalmazó egységkörlapok középpontjainak halmazát. Mutassuk meg, hogy S^* orsókonvex.*

12.12. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy $S^{**} = S$.*

12.13. gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy S orsókonvex lemez bármely két párhuzamos támaszegyenesének távolsága egy pontosan akkor, ha $S^* = S$.*