Feladatok mindenhonnan

1. Feladat. *Legyenek egy S szabályos 13-szög csúcsai $A_1, A_2, \ldots, A_13$, és N pedig az A_1, A_2, A_5, A_7 négyszög. Vizsgáljuk meg, hogy a következő struktúra az affin sík illeszkedési axiómái közül melyeket teljesíti.*

- *Pontok: S azon pontjai, melyek nem tartoznak N-hez,*
- *egyenesek: N elforgatottjai S középpontja körül $i \cdot 2\pi/13$ szöggel, ahol $i = 1, \ldots, 12$,*
- *illeszkedés: halmazelméleti tartalmazás.*

2. Feladat. *Legyen P az s gömbfelület rögzített pontja. Vizsgáljuk meg, a következő struktúra az affin sík illeszkedési axiómái közül melyeket teljesíti.*

- *Pontok: $S \backslash \{P\}$,*
- *egyenesek: S gömbfelület azon körei, melyek átmennek P ponton*
- *illeszkedés: halmazelméleti tartalmazás.*

3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha 3 sík páronként metsző és a metszésvonalak közül kettőnek van metszéspontja, akkor a harmadik metszésvonal is illeszkedik erre a pontra. (Csak az affin tér illeszkedési axiómáit használjuk.)*

Bizonyítás. A két egyenes közös pontja rajta van mindhárom síkon. □

4. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha egy egyenes két metsző sík mindegyikével párhuzamos, akkor a metszésvonalukkal is párhuzamos. (Csak az affin tér illeszkedési axiómáit használjuk.)*

Bizonyítás. A két egyenesnek nincs közös pontja. Vegyünk a metszet egyenesről egy pontot, és ezen keresztül húzzunk párhuzamost az adott egyenessel. Másrészt tekintsük az adott egyenes és ezen pont által feszített síkot, és messük le valamelyik adott síkkal. A kapott metszet egyenes szintén párhuzamos lesz az eredeti egyenessel, így az egyértelműség miatt egybeesnek. Ebből következik, hogy a húzott párhuzamos mindkét adott síkban benne van, vagyis éppen a metszésvonaluk. □

5. Feladat. *Adott 3 páronként metsző sík. A három metszésvonuk közül kettő párhuzamos. Mutassuk meg, hogy ekkor bármely két metszésvonal párhuzamos. (Csak az affin tér illeszkedési axiómáit használjuk.)*

Bizonyítás. Legyen $S_i \cap S_j = e_{ij}$ és $e_{12}||e_{13}$. Elég megmutatni, hogy $e_{12}||e_{23}$. Egy síkban vannak: $e_{12}, e_{23} \in S_2$. Tfh. $P \in e_{12} \cap e_{23} = S_1 \cap S_2 \cap S_2 \cap S_3 = S_1 \cap S_2 \cap S_3$, így $P \in e_{12} \cap e_{13}$, ellentmondás. (Vesd össze 3. feladattal.) $\square$

6. Feladat. *Adottak e,f és g páronként kitérő egyenesek. Hány olyan e-vel párhuzamos egyenes van, amely f-t és g-t is metszi? (Csak az affin tér illeszkedési axiómáit használjuk.)*

Bizonyítás. A keresett egyenes benne van abban a síkban, ami e-vel párhuzamos, és tartalmazza f-t, illetve abban is, ami szintén párhuzamos e-vel, és g-t tartalmazza. Ezen síkok metszete vagy üres, vagy a keresett egyenes. $\square$

7. Feladat. *Adott négy sík, melyek közül bármely kettő metszi egymást. Lehet-e a síkok* 6 *metszésvonala közül*
a, pontosan 3
b, pontosan 4
párhuzamos?

Bizonyítás. a, Igen.
b, Használjuk fel 5. feladatot. A válasz nemleges. $\square$

8. Feladat. *Lehet-e egy kocka síkmetszete*
a, szabályos ötszög?
b, szabályos hatszög?

Bizonyítás. Vázlat: a, Nem, mert a metszetnek lesznek párhuzamos oldalai.
b, Igen. $\square$

9. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^2$ térre épített Euklideszi síkon teljesül a Desargues-tétel.*

10. Feladat. *Jelöljük a klasszikus Euklideszi síkon az $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszög A_i-vel szemközti oldalegyenesét a_i-vel. Legyen B_1 az a_1 tetszőleges pontja, majd $B_2 = A_5B_1 \cap a_4$; $B_3 = A_3B_2 \cap a_2$; $B_4 = A_1B_3 \cap a_5$; $B_5 = A_4B_4 \cap a_3$ és $B_6 = A_2B_5 \cap a_1$. Mutassuk meg, hogy B_1 és B_6 egybeesnek. (Minden pontról feltesszük, hogy létezik.)*

Bizonyítás. Vázlat: Elég belátni, hogy B_1, A_2 és B_5 pontok kollineárisak. Ehhez vegyük észre, hogy $A_1B_2A_5\triangle$ és $A_3B_4A_4\triangle$ perspektívek B_3 pontra, és alkalmazzuk a Desargues-tételt. $\square$

11. Feladat. *Adott az Euklideszi síkon OXY háromszög, és az XY szakaszon az E pont. Az OE szakasz belső pontjain $\times$ műveletet definiálunk. Ha A és B az OE szakasz belső pontjai, akkor legyen $OY \cap XA = C$; $CE \cap YB = D$ és $DX \cap OE = A \times B$.Mutassuk meg, hogy tetszőleges A és B esetén $A \times B = B \times A$.*

Bizonyítás. Vázlat: Legyen $\hat{C} = XB \cap YO$, $\hat{D} = \hat{C}E \cap YA$, $P = CE \cap AY$, $Q = \hat{C}E \cap YB$. Elég belátni, hogy X, D és $\hat{D}$ kollineáris. Ehhez először vegyük észre, hogy $BDE\triangle$ és $Y\hat{C}\hat{D}\triangle$ X-re nézve perspektív, így a Desargues-tétel miatt O, P és Q kollineáris. Így viszont $EYQ\triangle$ és $APC\triangle$ O-ra nézve perspektív, vagyis X, D és $\hat{D}$ kollineáris. □

12. Feladat. *Az alábbi kérdések a valós affin síkra vonatkoznak. Egyenestartó: egyenes képe (teljes) egyenes. Egyenességtartó: kollineáris pontok képe kollineáris. a, Igaz-e, hogy minden egyenestartó bijekció tartja a párhuzamosságot?*
b, Igaz-e, hogy minden egyenességtartó bijekció egyenestartó?
c, Igaz-e, hogy minden olyan egyenestartó leképezés szürjektív, amelynek létezik három nem kollineáris képpontja?
d, Igaz-e, hogy minden egyenestartó leképezés szürjektív?
e, Igaz-e, hogy minden olyan egyenestartó leképezés bijektív, amelynek létezik három nem kollineáris képpontja?

Bizonyítás. a, I; b, I;
c, útmutatás: Észrevétel: ha van két képpontunk, akkor az őket összekötő egyenes minden pontja képpont. (Miért?) Tfh. van három nem kollineáris képpont: A',B',C', és legyen X' tetszőleges pont a képsíkon. Az $A'B'$, $A'C'$ és $B'C'$ egyenesek minden pontja képpont. Ekkor $Y' = A'X' \cap B'C'$ képpont (ha létezik), mivel rajta van $B'C'$-n. Így X' képpont, mert rajta van az A' és Y' képpontokat összekötő egyenesen.
d, $(x, y) \mapsto x + y + (x - y)^3$
e, útmutatás: A szürjektivitást már láttuk. Tfh. létezik O_1 és O_2 pont, amelyeket a leképezés ugyanbba az O' pontba visz. Legyen A olyan, amire $A' \neq O'$. Ekkor AO_1 és AO_2 egyenesek képe ugyanaz az $A'O'$ egyenes. Egy tetszőleges olyan egyenes képe, ami AO_1 és AO_2 egyeneseket két különböző pontban metszi szükségképpen az $A'O'$ egyenes, mivel a két metszéspont képei rajta vannak. Bármely ponton keresztül húzható ilyen egyenes, így minden pont képe $A'O'$ egyenesre esik, ellentmondás. Tehát bijektív.

□

13. Feladat. *Az Euklideszi sík egy bijektív transzformációjáról tudjuk, hogy bármely három nem kollineáris pont képe nem kollineáris. Mutassuk meg, hogy ez transzformáció kollineáció.*

Bizonyítás. Mivel bijektív, ezért létezik inverze. Az inverz transzformáció kollineáció a feltétel szerint. Kollineáció inverze pedig kollineáció. □

14. Feladat. *Igazoljuk, hogy minden paralelogramma átlói metszik egymást. (A valós affin sík axiómáit használhatjuk.)*

Bizonyítás. útm.: Legyen $ABCD$ paralelogramma, és vegyük fel Z pontot úgy, hogy A rajta legyen a $\overline{DZ}$ szakaszon. Alkalmazzuk a Pasch-axiómát a $DZB\triangle$ háromszögre. □

15. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha az Euklideszi síkon választott véges sok pontra igaz, hogy a sík semmelyik egyenesére nem pontosan kettő pont illeszkedik, akkor az összes pont illeszkedik egy egyenesre. (Sylvester feladata)*

Bizonyítás. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{P}$ ponthalmaz meghatározza az e egyenest, ha legalább két pontja illeszkedik e-re. Legyen $\mathcal{P}$ az adott ponthalmazunk, és legyen az általan meghatározott egyenesek halmaza $\mathcal{L}$. Vegyük észre, hogy a feltevés szerint $\mathcal{L}$ minden elemére legalább 3 $\mathcal{P}$-beli pont illeszkedik. Tegyük fel indirekt, hogy létezik $P \in \mathcal{P}$ és $e \in \mathcal{L}$, úgy hogy $P \notin e$. Tekintsük az összes ilyen (P, e) rendezett párt, amire $P \in \mathcal{P}$, $e \in \mathcal{L}$ és $P \notin e$. Legyen (P_0, e_0) az (egyik) olyan, amire $d(P, e)$ távolság minimális. Legyen a ponthalmazunk e_0-ra eső pontjai közül három P_1, P_2 és P_3, amik ebben a sorrendben helyezkednek el e_0-n ($P_2 \in \overline{P_1P_3}$). Könnyű látni, hogy a P_2 pont a P_0P_1 vagy P_0P_3 egyeneshez közelebb van, mint P_0 e_0-hoz. □

16. Feladat. *Az $ABC\triangle$ háromszög AB ill. BC oldalát $1 : \lambda$ arányban osztja a P ill. Q pont ($\overline{AP}/\overline{PB} = 1/\lambda$ és $\overline{BQ}/\overline{QC} = 1/\lambda$). Legyen $AQ \cap CP = X$, $AC \cap BX = Y$, S az $ABC\triangle$ súlypontja, M pedig a magasságpontja. A $\overrightarrow{BA}$ és a $\overrightarrow{BC}$ vektorok, valamint a λ szám segítségével fejezzük ki a $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{BM}$,$\overrightarrow{BX}$ és $\overrightarrow{BY}$ vektorokat.*

Bizonyítás. Útmutatások:
1, Az osztópontra vonatkozó formulát használjuk: $\overrightarrow{BS} = \frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{3}$
2, Ceva-tételt alkalmazva: $\overrightarrow{BY} = \frac{\lambda^2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{1+\lambda^2}$
3, Húzzunk párhuzamost B-n keresztül AC-vel, és messük ezt AX és CX egyenesekkel. Keressünk hasonló háromszögeket.
$\overrightarrow{BX} = \frac{\lambda+1/\lambda}{1+\lambda+1/\lambda}\overrightarrow{BY}$
4, Legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{BC}$ és $\mathbf{m} = \overrightarrow{BM}$. Vegyük észre, hogy $\langle \mathbf{m}, \mathbf{c}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle$ és $\langle \mathbf{m}, \mathbf{a}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle$. Keressük $\mathbf{m}$-t $\mathbf{m} = \alpha\mathbf{a} + \gamma\mathbf{c}$ alakban. Ezt beírva az előzőekbe, és az egyenletrendszert α-ra és γ-ra megoldva kapjuk, hogy

$$\mathbf{m} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle\langle \mathbf{c}, \mathbf{c}\rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle^2}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle\langle \mathbf{c}, \mathbf{c}\rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle^2} \cdot \mathbf{a} + \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle^2}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle\langle \mathbf{c}, \mathbf{c}\rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle^2} \cdot \mathbf{c}.$$

□

17. Feladat. *Mutassuk meg, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg.*

Bizonyítás. Vázlat: Legyenek egy tetszőleges O (vonatkoztatási) pontból a csúcsokba mutató vektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$. Az oldalfelező pontokba mutató vektorok $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$, stb. Ezek megfelelő különbségei egyenlőek. □

18. Feladat. *A 17. feladat szerint egy négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát alkotnak. Vegyünk egy konvex négyszöget, és tekintsük ezt a paralelogrammát. Mutassuk meg, hogy a paralelogramma feldarabolható 4 háromszögre úgy, hogy ezek rendre egybevágóak a négyszögből a paralelogramma elhagyása után megmaradó 4 háromszöggel.*

Bizonyítás. Az eredeti négyszög valamelyik átlójának felezéspontját kössük össze a paralelogramma csúcsaival. □

19. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy síkban vagy térben az A pontra és B pontra való tükrözések szorzata $2\overrightarrow{AB}$ vektorral való eltolás.*

20. Feladat. *Milyen egybevágóság a síkban egy pontra való tükrözés és egy eltolás szorzata?*

21. Feladat. *Milyen egybevágóság a síkban három egymással párhuzamos egyenesre való tükrözés szorzata?*

22. Feladat. *Milyen egybevágóság a síkban három pontra való tükrözés szorzata?*

23. Feladat. *Tegyük fel, a síkban az l egyenesre vett tükrözés az e egyenest önmagába viszi. Milyen lehet l és e egymáshoz viszonyított helyzete?*

24. Feladat. *Tegyük fel, hogy a sík valamely izometriája minden egyenest vele párhuzamos egyenesbe visz. Mi lehet ez az izometria?*

25. Feladat. *Igazoljuk, hogy három tengelyes tükrözés szorzata pontosan akkor tengelyes tükrözés, ha a három tengely párhuzamos, vagy egy közös ponton megy át!*

26. Feladat. *Milyen traszformáció lesz a térben a három koordinátasíkra vett tükrözések szorzata?*

27. Feladat. *Legyen A, B és O három nem kollineáris pont. Egy O pólusú inverzió az A és B pontokat rendre az A' és B' pontokba viszi.*
a, Igazoljuk, hogy $ABA'B'$ húrnégyszög!
b, Igazoljuk, hogy $ABA'B'$ húrnégyszög körülírt köre merőlegesen metszi az inverzió alapkörét!

28. Feladat. *Vegyünk egy hegyesszögű ABC háromszöget, a szokásos jelölésekkel: a, b, c jelöli az oldalakat, α, β, γ a szögeket, r a beírt, R a körülírt, r_a, r_b és r_c a megfelelő hozzáírt körök sugarai. Jelölje továbbá m_a, m_b és m_c a magasságokat, T a területet és s a félkerületet. A beírt és körülírt körök középpontjának távolsága legyen d.*

Igazoljuk, hogy

a, $\frac{1}{r} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}$!

b, $T = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$!

c, $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$!

d, $T = \frac{abc}{4R}$!

e, $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$!

f, $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$!

g, $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}$!

h, $d^2 = R^2 - 2Rr$!

i, $\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$!

j, ha a háromszög nem derékszögű, akkor $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$!

Bizonyítás. Lásd Kiss György Amit jó tudni a háromszögekről című cikkét a KöMaLban. □

29. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a parabola érintője rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*
a, a fókuszból az érintőre húzott merőleges talppontja a tengelyponthoz húzott érintőre illeszkedik.
b, a fókusznak az érintőre vett tükörképe a vezéregyenesre illeszkedik.
c, az $y^2 = 2px$ parabola bármelyik a tengelyponthoz húzott érintőtől különböző érintője az y tengelyből feleakkora szakaszt vág le, mint amekkora az érintési pont ordinátája.
d, az $y^2 = 2px$ parabola bármelyik érintője az x tengelyt olyan pontban metszi, amelynek az origótól vett távolsága egyenlő az érintési pont abszcisszájával.

30. Feladat. *Bizonyítsuk, hogy egy ellipszis egyik fókuszpontjának tükörképe egy érintőre illeszkedik a másik fókuszponthoz tartozó vezérkörre.*

31. Feladat. *Két ellipszis egyik fókusza közös. Mutassuk meg, hogy legfeljebb 2 közös külső érintőjük van!*

32. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy merőleges szárú hiperbola bármely érintője ugyanakkora területű háromszöget határol az aszimptotákkal!*

33. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy merőleges szárú hiperbola bármely érintőjének az aszimptoták közé eső szakaszát felezi az érintési pont!*

34. Feladat. *Tegyük fel, hogy* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. *Igazoljuk, hogy* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$*!*

35. Feladat. *Adjunk példát olyan politópra, amelynek* 11 *csúcsa,* 25 *éle és* 16 *lapja van!*

Számolási feladatok

36. Feladat. *Az* $A(0,1,0)$, $B(2,0,0)$, $C(3,1,1)$ *és* D *pontok konvex burkának térfogata* 4*! Írja fel* D *mértani helyének egyenletét!*

37. Feladat. *Számítsuk ki az* $A(0,1,0)$, $B(2,1,0)$, $C(3,2,1)$, $D(1,2,1)$ *és* $E(2,0,3)$ *pontok konvex burkának térfogatát!*

Bizonyítás. $ABCD$ paralelogramma. □

38. Feladat. *Válasszuk ki az egységkocka három kitérő élét. Mekkora területű az ezen élek felezőpontjai által meghatározott háromszög?*

39. Feladat. *Mekkora szög alatt látszik az* AB *szakasz a* C *pontból, ha* $A(1,2,4)$, $B(11,3,7)$ *és* $C(-1,10,11)$*?*

40. Feladat. *Számítsuk ki az* $x - 2y + 4z = 10$ *és* $x - 2y + 4z = 31$ *egyenletű síkok távolságát!*

41. Feladat. *Adjuk meg annak az egyenesnek egy paraméterezését, amelyikre illeszkedik a* $P(2,-1,3)$ *pont és merőleges a* $(2t-3, -t+1, 5t-7)$ *és* $(3t+1, t, 2t)$ *paraméterzésű egyenesek mindegyikére!*

42. Feladat. *Számítsuk ki a* $(2t-3, -t+1, 5t-7)$ *és* $(3t+1, t, 2t)$ *paraméterzésű egyenesek távolságát!*

43. Feladat. *Számítsuk ki a* $P(10,11,12)$ *pontnak az* $x+2y+z = 7$ *egyenletű síkra vonatkozó merőleges vetületét!*

44. Feladat. *Adjuk meg az* $(u-2v+1, v, 3u-3)$ *és* $(u, u+v, 2u-1)$ *paraméterezésű síkok metszésvonalának egy egyenletét.*

45. Feladat. *Számítsuk ki a* $(3t-1, 2t+2, t)$ *paraméterezésű egyenes és az* $x-2y+z=17$ *egyenletű sík metszéspontjának koordinátáit!*

46. Feladat. *Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, ami illeszkedik a* $(t, -3t+1, 7)$ *egyenesre és párhuzamos a* $(-t, -t, 3t+2)$ *egyenessel!*

47. Feladat. *Számítsuk ki a* $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$ *és* $\overrightarrow{w} = (1, 4-1)$ *vektorok skaláris és vektoriális szorzatát!*

48. Feladat. *Legyenek* $\overrightarrow{a}$ *és* $\overrightarrow{b}$ *merőleges vektorok a térben. Mivel egyenlő az* $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})))$ *szorzat?*

49. Feladat. *Írjuk fel a* $(t, 3t, -2t+1)$ *egyenes* $x-y+z=1$ *síkra vonatkozó tükörképének egy paraméterezését!*

50. Feladat. *A* $P(\sqrt{3}, 2, 3)$ *és* $Q(1, \sqrt{6}, 3)$ *pontok az* $x^2+y^2+z^2=16$ *egyenletű gömbön vannak. Milyen hosszú az őket összekötő rövidebb főkörív?*

51. Feladat. *Egy háromszögben a három oldal* $a=7$, $b=10$ *és* $c=12$. *Milyen hosszú az* a *oldalhoz tartozó súlyvonal?*

52. Feladat. *Egy háromszögben a három oldal* $a=7$, $b=10$ *és* $c=12$. *Mekkora a körülírt kör sugara?*

53. Feladat. *Egy háromszögben a három oldal* $a=7$, $b=10$ *és* $c=12$. *Mekkora a beírt kör sugara?*

54. Feladat. *Egy tetraéder csúcsai* $A(0,1,0)$, $B(2,1,0)$, $C(3,0,0)$ *és* $D(0,1,-4)$. *Mekkora a súlypontját az* A *csúccsal összekötő szakasz hossza?*

55. Feladat. *Egy tetraéder csúcsai* $A(0,1,0)$, $B(2,1,0)$, $C(3,0,0)$ *és* $D(0,1,-4)$. *Határozzuk meg a körülírt gömbjének a középpontját!*

56. Feladat. *Legyen* O *az* ABC *hegyesszögű háromszög körülírt körének középpontja. Az* M *pontot válasszuk úgy, hogy* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ *teljesüljön. Számítsuk ki az* $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC} \rangle$ *belsőszorzatot, ha az* ABC *háromszög területe* 1*!*

57. Feladat. *Tekintsük egy* 3 *egység élhosszúságú kocka élharmadoló pontjait. Minden csúcsánál levágunk egy-egy derékszögű tetraédert a csúcshoz legközelebbi három élharmadolón keresztül. Számítsuk ki a megmaradó test felszínét!*

58. Feladat. *Számítsa ki* $\sin(\arctan 2)$ *pontos értékét!*

59. Feladat. *Számítsa ki* $\cot(\arcsin \frac{1}{5})$ *pontos értékét!*

60. Feladat. *Írja fel az* $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25$ *egyenletű gömböt a* $P(11, 8, \sqrt{7})$ *pontjában érintő sík egyenletét!*

61. Feladat. *Tekintsük a*

$$\varphi : (x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + (3, -1)$$

koordináta-transzformációt.
a, Mi a képe a $(3, 2)$ *pontnak?*
b, Adjuk meg a fenti analitikus alakban φ *inverzét!*
c, Írjuk fel a $3x - 2y = 1$ *egyenes* φ *melletti képének egyenletét!*

62. Feladat. *a, Adjuk meg azt a* φ *koordináta-transzformációt a síkon, ami az* $A_1(0, 0)$, $A_2(1, 1)$ *és* $A_3(0, -1)$ *pontokat rendre a* $B_1(1, 0)$, $B_2(0, 1)$ *és* $B_3(2, 2)$ *pontokba viszi!*
b, Mi a képe egy egységnégyzetnek?
c, Adjuk meg φ *inverzét!*
d, Írjuk fel a $3x - 2y = 1$ *egyenes* φ *melletti képének egyenletét!*
e, Írjuk fel koordinátás alakban is a transzformációt! f, Számítsuk ki az $x^2 + y^2 = r^2$ *kör képének egyenletét!*

63. Feladat. *Tekintsük a*

$$\psi : (x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

transzformációt, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$.
a, Milyen λ *esetén kapunk affinitást? (Nevük: merőleges (tengelyes) affinitás.)*
b, Hogyan írhatjuk le „geometriai nyelven" ezt a transzformációt?
c, Legyenek A_1, A_2 *és* A_3 *nemkollineáris pontok, képeik* B_1, B_2 *és* B_3. *Határozzuk meg a*

$$\frac{\det \begin{vmatrix} \overrightarrow{A_1A_2} \\ \overrightarrow{A_1A_3} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} \overrightarrow{B_1B_2} \\ \overrightarrow{B_1B_3} \end{vmatrix}}$$

arányt!
d, Számítsuk ki az $x^2 + y^2 = r^2$ *kör képének egyenletét!*

64. Feladat. *Tekintsük az*

$$\omega : (x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

transzformációt, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$.
a, Milyen λ esetén kapunk affinitást? (Nevük: nyírás.)
b, Hogyan hat a fenti transzformáció az x-tengellyel párhuzamos egyeneseken?
c, Hogyan hat a fenti transzformáció az x-tengellyel nem párhuzamos egyeneseken?
d, Hogyan változik a háromszögek területe?

65. Feladat. *Mennyi annak az ellipszisnek a területe, ami az $x^2 + y^2 = 1$ egységkörnek az $(x, y) \mapsto (3y + 2, 12x + 1)$ affinitás melletti képe?*

66. Feladat. *Írjuk fel az origó középpontú, α szögű forgatáshoz tartozó koordinátatranszformációt. Mennyi a determinánsa?*

67. Feladat. *Írjuk fel az $x-2y+5z = 7$ síkra tükrözéshez tartozó koordinátatranszformációt és adjuk meg koordinátás alakban is. Számítsuk ki a determinánsát!*

68. Feladat. *Igaz-e, hogy minden 1 determinánsú affinitás izometria?*

69. Feladat. *Írjuk fel az $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ egyenletű kör $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körre vonatkozó inverzét.*

Bizonyítás. Tipp: Először döntsük el milyen alakzat lesz a kép. Keressünk rajta speciális ponto(ka)t. □

70. Feladat. *Írjuk fel a $2x - y - 1 = 0$ egyenes $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ körre vonatkozó inverzének egyenletét.*

Bizonyítás. Tipp: Először döntsük el milyen alakzat lesz a kép. Keressünk rajta speciális ponto(ka)t. □

71. Feladat. *Írjuk fel a síkbeli, origón áthaladó, $(3, 4)$ irányvektorú egyenesre vett tük- rözés mátrixát. Számoljuk ki a determinánsát!*

72. Feladat. *Tekintsük két origón átmenő,*
a, $\pi/3$
b, $\pi/2$
szöget bezáró egyenesekre vonatkozó tengelyes tükrözések szorzatát. Írjuk fel a szorzattranszformáció mátrixát!

73. Feladat. *a, Mutassuk meg, hogy a síkban egy forgatás és egy eltolás szorzata forgatás. Mekkora a forgatás szöge?*
b, Tekintsük az origó körüli $\pi/3$ szögű forgatás és az $(1, -2)$ vektorral történő eltolások szorzatát. Az a, rész szerint ez egy forgatás. Mi a középpontja?

74. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a síkban az origó körüli* $\pi/6$ *szögű , és a* $Q(1,0)$ *pont körüli* $-\pi/6$ *szögű elforgatás szorzata egy eltolás.*

75. Feladat. *Írjuk fel a* $P(6,3)$ *pontból a* $k:\ x^2+y^2+2x-4y+5=0$ *körhöz húzott érintő egyenletét! Milyen hosszú az érintőszakasz?*

76. Feladat. *Határozzuk meg* m *értékét úgy, hogy az* $y=mx-2$ *egyenletű egyenes érintse az* $y=x^2/4$ *parabolát.*

77. Feladat. *Milyen messze van a* $3x+4y+46=0$ *egyenes az* $y=x^2/64$ *parabolától?*

78. Feladat. *Határozzuk meg az* $y^2=16x$ *parabola azon pontjait, amelyek a fókuszponttól* 13 *egységnyi távolságra vannak.*

79. Feladat. *Egy parabola tengelye az* x *tengely, tengelypontja a* $(-5,0)$ *pont, és az y tengelyből 12 egység hosszúságú húrt metsz ki. Írjuk fel a parabola egyenletét!*

80. Feladat. *Határozzuk meg azon hiperbola egyenletét, amelynek aszimptotái* $y=\pm x/2$ *és egy érintője* $5x-6y-8=0$.

81. Feladat. *A* $P(1,-10$ *pontból érintőket húzunk a* $4x^2-y^2=32$ *hiperbolához. Írjuk fel az érintési pontokon átmenő egyenes egyenletét!*

82. Feladat. *Írjuk fel a* $(3/5,14/5)$ *pontból a* $4x^2+9y^2=36$ *ellipszishez húzott érintő(k) egyenletét.*

83. Feladat. *Írjuk fel az* $y=x^2/4$ *parabola* $(1,1)$ *pontra vonatkozó tükörképének az egyenletét.*

84. Feladat. *Mekkora térfogatú paralelepipedont feszítenek az* $\overrightarrow{a}=(1,2,0)$, $\overrightarrow{b}=(0,1,-2)$ *és* $\overrightarrow{c}=(1,1,1)$ *vektorok?*

85. Feladat. *Egy téglatest éleinek aránya* $1:3:5$. *Felszínének és térfogatának mérőszáma megegyezik. Mekkorák az élei?*

86. Feladat. *Egy paralelpipedon lapjai egybevágó rombuszok, amelyek oldala* 11, *hegyesszöge* $52,3°$. *Mekkora a paralelpipedon térfogata?*

87. Feladat. *A kocka lapközéppontjainak konvex burka egy szabályos oktaéder. Mennyi ennek a térfogata, ha a kockáé* 1*?*

88. Feladat. *Mekkora az egyenes körkúp felszíne és térfogata, ha alapkörének sugara* 1, *alkotójának hossza* 2*?*

89. Feladat. *Egy politópnak* 20 *háromszöglapja van (más lapja nincs). Hány éle és hány csúcsa van? Adjunk példát ilyen testre.*

Nevezetes elemi tételek, feladatok

Az itt lévő feladatok nehezebbek, de órán mindnek elhangzottak a főbb gondolatai.

90. Feladat (Négy kör tétel)**.** *Három egységnyi sugarú kör egy közös ponton megy át. Igazoljuk, hogy a három darab, páronkénti második metszésponjuk által meghatározott kör sugara is egységnyi!*

91. Feladat (Euler-egyenes)**.** *Igazoljuk, hogy egy hegyesszögű háromszögben a súlypont a magasságpontot és a körülírt kör középpontját összekötő szakasz utóbbihoz közelebbi harmadolópontja!*

92. Feladat (Feuerbach-kör)**.** *Legyen az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja M, körülírt körének középpontja O, oldalainak felezőpontjai F_1, F_2 és F_3, a magasságok talppontjai T_1, T_2 és T_3, valamint az MA, MB és MC szakaszok felezőpontjai Q_1, Q_2 és Q_3. Mutassuk meg, hogy az F_1, F_2 és F_3; T_1, T_2 és T_3; valamint Q_1, Q_2 és Q_3 pontok mind illeszkednek olyan körre, amelynek középpontja az MO szakasz felezőpontja.*

93. Feladat (Simson-egyenes, aka. Wallace-egyenes)**.** *Mutassuk meg, hogy egy P pont ABC hegyesszögű háromszög oldalegyeneseire vett vetületei pontosan akkor kollineárisak, ha P illeszkedik az ABC körülírt körére!*

94. Feladat (Salmon-tétel)**.** *Adott egy c kör és rajta négy pont: A, B, C és P. Szerkesszük meg a PA, PB és PC átmérőjű köröket: c_1-et, c_2-t és c_3-at. A körök páronkénti második (P-n kívüli) metszéspontjai legyenek X, Y és Z. igazoljuk, hogy az X, Y és Z pontok egy egyenesen vannak!*

Bizonyítás. Tipp: Invertáljunk P pólussal és keressünk Simson-egyenest. □

95. Feladat (Feuerbach-tétel)**.** *Igazoljuk, hogy a Feuerbach-kör érinti a beírt kört és a hozzáírt köröket!*

Bizonyítás. Lásd Füredi Zoltán cikkét a KöMaL 2004. májusi számában. □

96. Feladat (Ceva-tétel)**.** *Legyen az ABC háromszög BC oldalán az A', AC oldalán a B' és AB oldalán a C' pont. Igazoljuk, hogy AA', BB' és CC' egyenesek pontosan akkor megy át egy közös P ponton, ha*

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1.$$

Bizonyítás. Pontosan = akkor és csak akkor!!! (két irány) □

97. Feladat (Menelaosz-tétel)**.** *Legyen az ABC háromszög BC oldalegyenesén az A', AC oldalegyenesén a B' és AB oldalegyenesén a C' pont. Igazoljuk, hogy A', B' és C' pontok pontosan akkor kollineárisak, ha*

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1,$$

ahol a szakaszok előjeles arányát vesszük, vagyis XY/YZ pozitív, ha Y az XZ szakasz belső pontja, egyébként negatív.

Bizonyítás. Pontosan = akkor és csak akkor!!! (két irány) □

98. Feladat (Záródási-tétel, 0. verzió)**.** *Legyen az ABC háromszög körülírt köre k_1, beírt köre k_2. Válasszunk egy tetszőleges P pontot a k_1 körön, és húzzuk meg az érintőket P-ből a k_2 körhöz. Ezek az érintők k_1 kört X és Y pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy XY egyenes érinti k_2-t!*

Bizonyítás. Tipp: Invertáljunk k_2-re és használjuk (többször) a négy kör tételt. Nézzük meg, mi lesz a képe ABC oldalegyeneseinek és ebből következtessünk k_1 képére. □

99. Feladat (Napóleon-tétel)**.** *Egy hegyesszögű háromszög minden oldalára kifele szabályos háromszöget rajzolunk. Mutassuk meg, hogy ezen szabályos háromszögek középpontjai szintén szabályos háromszöget alkotnak!*

100. Feladat (Apollóniusz szerkesztések)**.** *Szerkesszünk kört, amely érint (kör és egyenes esetén) / tartalmaz (pont esetén)*

- *három adott pontot.*
- *két adott pontot, és egy adott egyenest.*
- *egy adott pontot és két adott egyenest.*
- *három adott egyenest.*
- *két adott pontot és egy adott kört.*
- *egy adott pontot, egy adott egyenest és egy adott kört.*
- *két adott egyenest és egy adott kört.*
- *egy adott pontot és két adott kört.*
- *egy adott egyenest és két adott kört.*
- *három adott kört.*

Bizonyítás. Lásd Méri Károly cikkét. □