Feladatok Elemi matematika IV. kurzushoz

1. gyakorlat (2012. február 6.), Síkizometriák

1.1. gyakorlat. *Milyen síkizometria két*

(a) egymással párhuzamos

(b) egymást α szögben metsző

egyenesre vett tengelyes tükrözés szorzata?

1.2. gyakorlat. *Milyen síkizometria három különböző, egymással párhuzamos egyenesre vett tengelyes tükrözés szorzata?*

1.3. gyakorlat. *Milyen síkizometria egy eltolás és egy forgatás szorzata?*

1.4. gyakorlat. *Egy K korlátos alakzat tengelyesen szimmetrikus az e és f egyenesekre vonatkozóan is. Igaz-e, hogy ekkor szimmetrikus az e' egyenesre is, ahol e' az e egyenes f-re vett tükörképe? Indokoljunk részletesen, vagy adjunk ellenpéldát!*

1.5. feladat. *Hova építsünk a folyóra hidat, hogy a két különböző parton fekvő A és B városok között a lehető legrövidebb út legyen? Mi a helyzet több folyó esetén? (A városok pontszerűek, a folyók párhuzamos egyenespárok által határolt sávok.)*

1.6. feladat. *Piroska a nagymamához készül. Mi a legrövidebb út, ha közben még a folyóparton a korsóját is meg kell töltenie friss vízzel? (Piroska és a nagymama egy-egy pont, a folyó egy egyenes által határolt félsík, ami nem tartalmazza Piroskát és a nagymamát.)*

1.7. feladat. *Adott egy k kör, egy l egyenes és egy A pont. Szerkesszünk olyan e egyenest A ponton keresztül, hogy a l-lel és k-val vett (egyik) metszéspontja által meghatározott szakaszt az A pont felezze.*

1.8. feladat. *Adottak a k kör AB és CD húrjai, valamint a CD húron egy J pont. Szerkesszünk k-n egy olyan X pontot, hogy az AX és BX húrok a CD húrból olyan EF szakaszt vágjanak ki, aminek J a felezéspontja.*

1.9. feladat. *(a) Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük a háromszög oldalaira kifele rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcsait!*

(b) Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük a háromszög oldalaira kifele rajzolt négyzetek középpontjait

(c) Szerkesszünk kilencszöget, ha ismerjük az oldalak felezőpontjait!

(d) Keressünk az első három alfeladatra közös általánosítást, és oldjuk is meg!

1.10. feladat. *(a) Egy K korlátos alakzatnak pontosan két szimmetriatengelye van. Igazoljuk, hogy ezek egymásra merőlegesek!*

(b) Egy L korlátos alakzatnak páros sok szimmetriatengelye van. Igazoljuk, hogy L középpontosan szimmetrikus!

1.11. feladat. *Egy K korlátos alakzatnak legalább két szimmetriatengelye van. Igazoljuk, hogy az összes szimmetriatengely egy közös ponton halad keresztül!*

1.12. feladat (Napóleon-tétel). *(a) Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög oldalaira kifele (befelé) rajzolt szabályos háromszögek középpontjai egy szabályos háromszög csúcsai!*

(b) Az ABC háromszög oldalaira rajzoljunk egyenlőszárú BCA_1, CAB_1 és ABC_1 háromszögeket és az A_1, B_1 és C_1 csúcsoknál lévő szárszögeket jelölje α, β és γ. Mutassuk meg, hogy ha $\alpha + \beta + \gamma = 360°$, akkor az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei $\alpha/2$, $\beta/2$ és $\gamma/2$, azaz az ABC háromszögtől függetlenek.

1.1. Beadható feladatok

1.13. feladat. *Ismerjük egy kör AB és CD húrjait. Keressünk a körön olyan X pontot, hogy az AX és BX húrok a CD húrból egy adott a hosszúságú EF szakaszt vágjanak ki.*

1.14. feladat. *A K korlátos alakzatnak van α-szögű forgásszimmetriája ($0° < \alpha < 180°$). Igaz-e hogy K tengelyesen szimmetrikus? Igaz-e, hogy K középpontosan szimmetrikus?*

2. gyakorlat (2012. február 13.), Síkizometriák, hasonlóságok

2.1. gyakorlat. *Az MN egyenes egyazon partján adva van az A és B pont. Szerkesszünk az MN egyenesen olyan X pontot, amire az AX és BX egyenesek ugyanakkora szöget zárnak be MN egyenessel.*

2.2. feladat. *A biliárdgolyó az egyenes falról ugyanakkora szög alatt verődik vissza, mint amekkorában nekiütközött.*

(a) Adott a síkban n egyenes, $\ell_1, \ldots, \ell_n$, és két pont, A és B. Milyen szögben kell elökni a golyót az A pontból, hogy minden egyenesről sorban visszaverődjön, és így a B pontba jusson?

(b) Vizsgáljuk meg az előző kérdést, ha $n = 4$, az egyenesek egy téglalapot határolnak, $A = B$ egy belső pont. Mutassuk meg, hogy a biliárdgolyó által megtett út épp a téglalap átlójának kétszerese, függetlenül A pont választásától! Mi történik, ha a pontba való visszajutás után a golyó továbbgurul?

2.3. feladat. *Az MN egyenes egyazon partján adva van az A és B pont. Szerkesszünk az MN egyenesen olyan X pontot, amire az AX egyenes kétszer akkora szöget zár be MN egyenessel, mint a BX egyenes.*

2.4. feladat. *Adott az ℓ egyenes egyik partján két pont A és B, valamint egy a hosszúságú szakasz. Keressünk az ℓ egyenesen olyan a hosszúságú XY szakaszt, hogy az $AXYB$ töröttvonal hossza minimális legyen.*

Hasonlóságok

2.5. gyakorlat. *Adott egy k kör, és rajta [a körvonalon] egy A pont. Határozzuk meg az A pontra illeszkedő húrok felezéspontjainak mértani helyét! (Mértani hely: azon pontok halmaza, amelyek az adott tulajdonsággal rendelkeznek. Figyeljünk oda, hogy nem elég megmutatni, hogy a keresett halmaz valaminek a részhalmaza, mindig törekedjünk a halmaz pontos leírására, pl.: "A keresett mértani hely az EF egyenes, kivéve az X és Y pontokat".)*

2.6. gyakorlat. *Adottak a koncentrikus k_1 és k_2 körök. Szerkesszünk olyan ℓ egyenest ami a két körvonalat A, B, C és D pontokban metszi (az egyenesen ebben a sorrendben), és $AB = BC = CD$.*

2.7. feladat. *(a) Írjunk az adott ABC háromszögbe négyzetet, aminek két csúcsa a háromszög AB oldalára, egy-egy csúcsa pedig a háromszög AC ill. BC oldalára illeszkedik!*

(b) Írjunk az adott ABC háromszögbe olyan háromszöget, aminek oldalai párhuzamiosak az adott ℓ_1, ℓ_2 és ℓ_3 egyenesekkel. (Az ABC háromszög minden oldalára illeszkedik a beírt háromszögg egy-egy csúcsa.)

2.8. feladat. *Adott egy k kör, és rajta [a körvonalon] három pont A, B és C. Szerkesszük meg azt az AX húrt, amelyet a BC húr felez.*

2.9. feladat (Feuerbach-kör). *(a) Mutassuk meg, hogy egy hegyesszögű háromszög magasságpontjának az oldalaegyenesekre, illetve az oldalfelezőpontokra vett tükörképei mind a háromszög körülírt körére esnek!*

(b) Mutassuk meg, hogy egy hegyesszögő háromszögben a magasságok talpontjai, az oldalfelezőpontok és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai mind illeszkednek egy körre!

2.10. feladat (Ptolemaiosz-tétel (Nehéz!)). *Egy konvex négyszög oldalai a körüljárás szerint a, b, c és d, átlói e és f. Igazoljuk, hogy*

$$ac + bd \geq ef.$$

2.1. Beadható feladatok

[Két alfeladat ér egy normál feladatnyit, vagyis egy pontért két jó alfeladat kell, két pontért mind a négy. Fél pontot nem adok.]

2.11. feladat. *Adott az ℓ_1 egyenesen az A pont, és az ℓ_2 egyenesen a B pont. Szerkesszünk ℓ egyenest, ami olyan X ill. Y pontokban metszi az ℓ_1 ill. ℓ_2 egyeneseket, amikre $AX = BY$ és*

(a) ℓ párhuzamos egy adott e egyenessel.

(b) ℓ áthalad egy rögzített M ponton.

(c) az XY szakasz adott hosszúságú.

(d) egy adott f egyenes felezi az XY szakaszt.

3. gyakorlat (2012. február 20.), Hasonlóságok, inverzió

3.1. feladat. *Az ABC háromszög AD súlyvonalának felezőpontja F. A CF egyenes az AB oldalt az M pontban metszi. Határozzuk meg az $AM : AB$ arányt!*

3.2. feladat. *Az ABC háromszögön belül tetszőlegesen felvett O ponton át húzzunk párhuzamosokat a háromszög oldalaival. Ezek az egyenesek a háromszöget hat részre bontják, amik közül három háromszög. E kis háromszögekbe írt körök sugarai legyenek r_1, r_2 és r_3, míg az ABC háromszög beírt körének sugara r. Mutassuk meg, hogy $r_1 + r_2 + r_3 = r$!*

3.3. feladat. *Az ABC háromszög CC_1 súlyvonalán vegyük fel azt a P pontot amely a súlyvonalat $m : n$ arányban osztja (m és n pozitív egészek).Milyen arányban osztja P az AP ill. a BP egyenesnek a háromszögbe eső szakaszát?*

Nevezetes feladatok inverzióra

3.4. gyakorlat. *Keressük meg az inverzió invariáns alakzatait!*

3.5. feladat. *(a) Három egységnyi sugarú kör egy közös ponton megy át. Igazoljuk, hogy a három darab, páronkénti második metszésponjuk által meghatározott kör sugara is egységnyi!*

(b) (Záródási-tétel, 0. verzió) Legyen az ABC háromszög körülírt köre k_1, beírt köre k_2. Válasszunk egy tetszőleges P pontot a k_1 körön, és húzzuk meg az érintőket P-ből a k_2 körhöz. Ezek az érintők k_1 kört X és Y pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy XY egyenes érinti k_2-t!

3.6. feladat. *(a) (Simson-egyenes, aka. Wallace-egyenes) Mutassuk meg, hogy egy P pont ABC hegyesszögű háromszög oldalegyeneseire vett vetületei pontosan akkor kollineárisak, ha P illeszkedik az ABC körülírt körére!*

(b) (Salmon-tétel) Adott egy c kör és rajta négy pont: A, B, C és P. Szerkesszük meg a PA, PB és PC átmérőjű köröket: c_1-et, c_2-t és c_3-at. A körök páronkénti második (P-n kívüli) metszéspontjai legyenek X, Y és Z. igazoljuk, hogy az X, Y és Z pontok egy egyenesen vannak!

3.7. feladat (Apollóniusz szerkesztések). *Szerkesszünk kört, amely érint (kör és egyenes esetén) / tartalmaz (pont esetén)*

(a) *három adott pontot.*

(b) *két adott pontot, és egy adott egyenest.*

(c) *egy adott pontot és két adott egyenest.*

(d) *három adott egyenest.*

(e) *két adott pontot és egy adott kört.*

(f) *egy adott pontot, egy adott egyenest és egy adott kört.*

(g) *két adott egyenest és egy adott kört.*

(h) *egy adott pontot és két adott kört.*

(i) *egy adott egyenest és két adott kört.*

(j) *három adott kört.*

3.1. Beadható feladatok

3.8. feladat (Magasság- és befogó-tétel). *Egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója c, átfogóhoz tartozó magassága m, az a és b befogók átfogóra vett merőleges vetületei rendre x és y. Igazoljuk, hogy*

(a) $m^2 = xy$*!*

(b) $a^2 = xc$, $b^2 = yc$*!*

3.9. feladat. *Adott egy k kör és a belsejében az A és B pontok. Mutassuk meg, hogy van olyan kör, ami a kerületén tartalmazza A-t és B-t, és teljesen a k kör belsejében fekszik!*

4. gyakorlat (2012. február 27.), Merőleges affinitás

4.1. gyakorlat. *Adott egy t egyenes és egy $\lambda > 0$ szám. Tekintsük a következő transzformációt: a t tengely pontjai fixek. Legyen $P \notin t$ pont, és T a P-ből t-re bocsájtott merőleges talppontja. A P pont képe az a P' pont a T kezdőpontú TP félegyenesen, amire $|P'T|/|PT| = \lambda$. A definiált transzformációt t tengelyre vonatkozó, λ arányú merőleges affinitásnak hívjuk. Mutassuk meg, hogy a merőleges affinitás egyenest egyenesbe visz!*

4.2. feladat. *Legyen $\mathcal{E}$ egy ellipszis $2a$ és $2b$ tengelyekkel $(a > b)$. Mutassuk meg, hogy a nagytengely egyenesére vonatkozó, a/b arányú merőleges affinitás $\mathcal{E}$-t egy a sugarú körbe transzformálja!*

4.1. Beadható feladatok

Ötlet: merőleges affinitással vigyük az ellipszist körbe, oldjuk meg arra a feladatot, majd transzformáljuk vissza.

4.3. feladat. *Adott egy ellipszis a két tengelyével és egy külső pont. Szerkesszünk a pontból érintőt az ellipszishez!*

4.4. feladat. *Adott egy ellipszis a két tengelyével és egy egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis és az egyenes metszéspontjait!*

5. gyakorlat (2012. március 5.), Vektorok alkalmazása

5.1. gyakorlat. *(a) Adottak az* A, B *és* O *pontok, valamint az* AB *szakaszt* $\lambda : \mu$ *arányban osztó* X *pont. Fejezzük ki* $\overrightarrow{OX}$*-t* $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ *valamint* λ *és* μ *segítségével!*

(b) Adottak az A, B, C *és* O *pontok, valamint az* $ABC\triangle$ *háromszög* S *súlypontja. Fejezzük ki* $\overrightarrow{OS}$*-t* $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ *valamint* $\overrightarrow{OC}$ *segítségével!*

5.2. gyakorlat. *Igazoljuk a háromszögekre vonatkozó cosinus-tételt!*

5.3. gyakorlat. *Igazoljuk, hogy egy négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg! Mi a helyzet, ha négyszögön egy zárt, négy csúcsú töröttvonalat értünk a térben?*

5.4. gyakorlat. *Vezessük le az egyenes és a sík normálvektoros egyenletét!*

5.5. feladat. *(a) Az* $ABC\triangle$ *körülírt körének középpontja* O*, magasságpontja* M*. Mutassuk meg, hogy* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$*!*

(b) (Euler-egyenes) Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges háromszögben a magasságpont, a súlypont és a körülírt kör középpontja egy egyenesre illeszkedik! Ismerünk-e egyéb nevezetes pontot ezen az egyenesen?

5.6. feladat (Minkowski). *(a) Egy konvex sokszög minden oldalára kifelé merőlegesen állítunk egy vektort, amelynek hossza épp a megfelelő oldal hosszával egyenlő. Mutassuk meg, hogy ezeknek a vektoroknak az összege a nullvektor!*

(b) Egy konvex politóp (poliéder) minden lapjára kifelé merőlegesen állítunk egy vektort, amelynek hossza épp a megfelelő lap területével egyenlő. Mutassuk meg, hogy ezeknek a vektoroknak az összege a nullvektor!

5.1. Beadható feladatok

(Kettő vektor előállítása ér egy pontot, mind a négyé két pontot.)

5.7. feladat. *Az* $ABC\triangle$ *háromszög* AB *ill.* BC *oldalát* $1 : \lambda$ *arányban osztja a* P *ill.* Q *pont* ($\overline{AP}/\overline{PB} = 1/\lambda$ *és* $\overline{BQ}/\overline{QC} = 1/\lambda$)*. Legyen* $AQ \cap CP = X$*,* $AC \cap BX = Y$*,* S *az* $ABC\triangle$ *súlypontja,* M *pedig a magasságpontja. A* $\overrightarrow{BA}$ *és a* $\overrightarrow{BC}$ *vektorok, valamint a* λ *szám segítségével fejezzük ki a* $\overrightarrow{BS}$*,* $\overrightarrow{BM}$*,* $\overrightarrow{BX}$ *és* $\overrightarrow{BY}$ *vektorokat.*

6. gyakorlat (2012. március 12.), Vektorok alkalmazása

6.1. feladat (Paralelogramma-tétel). *Bizonyítsuk be, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik az oldalai négyzetösszegével!*

6.2. feladat. *Legyen adva egy O középpontú ellipszis, és rajta a P és Q pontok úgy, hogy OP merőleges OQ-ra. Mutassuk meg, hogy PQ egyenes távolsága az O-tól független a P és Q pontok választásától!*

6.3. feladat. *Legyen adva $ABC\triangle$, beírt körének középpontja K és egy tetszőleges O pont. Felhasználva a szögfelező-tételt igazoljuk, hogy*

$$\overrightarrow{OK} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c},$$

ahol a, b és c a háromszög oldalait jelöli.

6.4. feladat. *Az ABC háromszög k körülírt körének középpontja O. A k kör BC, AC és AB "rövidebb" (rendre az A, B és C pontokat nem tartalmazó) íveinek felezéspontjai rendre A', B' és C'. Mutassuk meg, hogy $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OK}$, ahol K az $ABC\triangle$-be írt kör középpontja.*

6.5. feladat. *Egy egységkörbe írt húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Mutassuk meg, hogy oldalainak négyzetösszege 8!*

6.6. feladat. *Egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Mutassuk meg, hogy a körülírt kör középpontjának egy oldaltól mért távolsága épp a szemközi oldal fele!*

6.7. feladat. *Az $ABC\triangle$ beírt köre az oldalakat rendre A_1, B_1 és C_1 pontokban érinti. Mutassuk meg, hogy AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok egy pontban metszik egymást? Mi a helyzet, ha a megfelelő oldalkon a megfelelő hozzáírt körök érintési pontját vesszük?*

6.1. Beadható feladatok

6.8. feladat. *Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges háromszög súlypontja egybeesik a középvonal-háromszöge súlypontjával!*

6.9. feladat. *Az $ABC\triangle$ magasságpontja M, körülírt körének középpontja O, ennek AB egyenesre vett tükörképe O'. Milyen négyszög $COMO'$?*

7. gyakorlat (2012. március 19.), Nevezetes elemi tételek

7.1. feladat (Magasságpont). *Mutassuk meg, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást!*

7.2. feladat (Izogonális pont, Fermat-Toricelli pont). *Adott ABC hegyesszögű háromszögben keressük meg azt pontot, aminek a csúcsoktól mért távolságösszege minimális! Mutassuk meg, hogy ez a pont egyértelmű, belőle minden oldal ugyanakkora szög alatt látszik!*

7.3. feladat (Talpponti háromszög). *Adott a hegyesszögű ABC háromszög, egy H háromszöget az ABC-ba írtnak mondunk, ha H egy-egy csúcsa illeszkedik ABC egy-egy oldalára. Tekintsük az ABC háromszög magasságvonalainak talppontjai által meghatározott háromszöget. Mutassuk meg, hogy az ABC-be írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a legkisebb!*

7.4. feladat (Ceva-tétel). *Az ABC hegyesszögű háromszög megfelelő csúccsal szemközti oldalain adottak az A_1, B_1 és C_1 pontok. Mutassuk meg, hogy AA_1, BB_1 és CC_1 egy pontban metszi egymást pontosan akkor, ha*

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1.$$

7.5. feladat (Desargues-tétel). *Mutassuk meg, hogy két háromszög pontosan akkor perspektív pontra nézve, ha egyenesre nézve is az!*

7.1. Beadható feladatok

7.6. feladat. *Mondjuk ki pontosan majd bizonyítsuk Meneláosz tételét!*

7.7. feladat. *Mondjuk ki Pascal és Brianchon tételeit! Vizsgáljuk meg milyen esetek lehetségesek az Euklideszi síkon!*

8. gyakorlat (2012. március 26.), 1.ZH

8.1. feladat. *Adott az* ℓ *egyenes egyik partján két pont* A *és* B*, valamint egy* a *hosszúságú szakasz. Keressünk az* ℓ *egyenesen olyan* a *hosszúságú* XY *szakaszt, hogy az* $AXYB$ *töröttvonal hossza minimális legyen.*

8.2. feladat. *Szerkesszünk kört, ami érint egy adott* k *kört és egy adott* e *egyenest, valamint áthalad egy adott* P *ponton. Hány megoldás lehet legfeljebb? (A szerkesztést nem kell elvégezni, de szükséges annak helyességét igazolni.)*

8.3. feladat. *Egy konvex négyszög oldalai rendre a körüljárás szerint* a, b, c *és* d*, területe* T*. Igazoljuk, hogy*

$$ac + bd \geq 2T!$$

8.4. feladat. *Legyenek az* $A_1A_2A_3A_4$*,* $B_1B_2B_3B_4$ *és* $C_1C_2C_3C_4$ *négyszögek paralelogrammák, valamint jelölje* S_i *az* $A_iB_iC_i\triangle$ *háromszög súlypontját. Mutassuk meg, hogy* $S_1S_2S_3S_4$ *négyszög is paralelogramma!*

8.5. feladat. *Egy háromszög beírt körének sugara* r*, körülírt körének sugara* R*, a két kör középpontjának távolsága* d*. Igazoljuk, hogy*

$$d^2 = R^2 - 2rR!$$

8.6. feladat. *Az* $ABC\triangle$ *hegyesszögű, nem szabályos háromszögben rendre* α, β *és* γ *jelöli a szögeket a szokásos módon. Mutassuk meg, hogy a háromszög Euler-egyenese pontosan akkor párhuzamos az* AB *oldallal, ha* $\tan\alpha \cdot \tan\beta = 3$!

9. gyakorlat (2012. április 2.), Feuerbach tétel, Erdős-Mordell egyenlőtlenség

- ZH megbeszélése, korábbról elmaradt feladatok megoldása
- Feuerbach-tétel bizonyítása (kiselőadás)
- Erdős-Mordell egyenlőtlenség (kiselőadás)

9.1. Beadható feladatok

9.1. feladat. *Az $ABC\triangle$ háromszög c oldala egységnyi, vele szemben fekvő szöge $\gamma = 45°$. Mutassuk meg, hogy $ABC\triangle$ lefedhető kettő darab, egységnyi átmérőjű körrel!*

9.2. feladat. *Jelöljük a klasszikus Euklideszi síkon az $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszög A_i-vel szemközti oldalegyenesét a_i-vel. Legyen B_1 az a_1 tetszőleges pontja, majd $B_2 = A_5B_1 \cap a_4$; $B_3 = A_3B_2 \cap a_2$; $B_4 = A_1B_3 \cap a_5$; $B_5 = A_4B_4 \cap a_3$ és $B_6 = A_2B_5 \cap a_1$. Mutassuk meg, hogy B_1 és B_6 egybeesnek. (Minden pontról feltesszük, hogy létezik. Használjuk a Desargues-tételt!)*

10. gyakorlat (2012. április 16.), Háromszögre vonatkozó egyenlőtlenségek

10.1. feladat. *Mutassuk meg, hogy* $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq 3/2$*!*

10.2. feladat. *Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6!$$

10.3. feladat. *Igazoljuk, hogy egy háromszög* a, b, c *oldalaira*

(a) $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0!$

(b) $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq abc!$

10.1. Beadható feladatok

10.4. feladat. *Mutassuk meg, hogy ha* P *az* $ABC\triangle$ *belső pontja, akkor a* $PAB\angle$*,* $PBC\angle$ *és* $PCA\angle$ *szögek közül legalább az egyik nem nagyobb* $30°$*-nál!*

10.5. feladat. *Igazoljuk, hogy egy háromszög* a, b, c *oldalaira*

$$\frac{27}{8} \leq \frac{(a+b+c)^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} < 4 \quad !$$

(Mindkét egyenlőtlenség külön-külön 2 pontot ér.)

11. gyakorlat (2012. április 23.), Terület

11.1. feladat (Brahmagupta-tétel). *Legyenek N húrnégyszög oldalai a, b, c és d, félkerülete s, területe T. Igazoljuk, hogy*

$$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

11.2. feladat. *Igazoljuk, hogy egy konvex négyszög oldalfelezőpontjai által meghatározott négyszög területe éppen fele az eredeti négyszögének!*

11.3. feladat. *Az $ABC\triangle$ szabályos háromszög területe 1, egy belső pontja P. A P-ből minden oldalra merőlegest állítunk, ezek talppontjai T_A, T_B és T_C. Mutassuk meg, hogy $T(AT_CP) + T(BT_AP) + T(CT_BP) = 1/2$.*

11.4. feladat. *Egy téglalapot hat négyzetre osztottunk. Határozzuk meg a legnagyobb négyzet területét, ha a legkisebbé 1. ((Nehéz, nem lesz számonkérve.))*

11.1. Beadható feladatok

11.5. feladat. *Vegyünk egy hegyesszögű ABC háromszöget, a szokásos jelölésekkel: a, b, c jelöli az oldalakat, α, β, γ a szögeket, r a beírt, R a körülírt, r_a, r_b és r_c a megfelelő hozzáírt körök sugarai. Jelölje továbbá m_a, m_b és m_c a magasságokat, T a területet és s a félkerületet. A beírt és körülírt körök középpontjának távolsága legyen d.*

Igazoljuk, hogy

a, $\frac{1}{r} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}$*!*

b, $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$*!*

c, $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$*!*

d, $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}$*!*

e, $\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$*!*

f, ha a háromszög nem derékszögű, akkor $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$*!*

[Kettő alfeladat ér egy pontot.]

12. gyakorlat (2012. május 7.), Terület, kerület, felszín, térfogat, egyebek

12.1. feladat (Steiner-képlet). *a, Egy L konvex sokszög kerülete K, területe T. Tekintsük azon pontok halmazát, amelyek L-től legfeljebb d távolságra vannak. Mennyi ennek a ponthalmaznak a területe?*

b, Egy P konvex, korlátos poliéder (politóp) élei a hozzájuk tartozó külső szögekkel $\{(e_i, \gamma_i)\}$ párok ($i = 1, \ldots, k$), felszíne A, térfogata V. Tekintsük azon pontok halmazát, amelyek legfeljebb d távolságra vannak P-től. Mekkora ennek a ponthalmaznak a térfogata?

12.2. feladat. *Egy* 100 *egység sugarú körben adott* 10250 *pont. Mutassuk meg, hogy van közöttük kettő, amelyek távolsága kisebb, mint* 2.

12.3. feladat. *Egy sávon két párhuzamos egyenes által határolt síkrészt értjük, szélességén az egyenesek távolságát. Egy egységnyi átmérőjű kört lefed néhány sáv. Mutassuk meg, hogy a sávok szélességeinek összege legalább egy.*

12.4. feladat. *Mutassuk meg, hogy az egységkörbe írt n-szögek közül a szabályosnak maximális a területe!*

12.5. feladat. *Írjunk félgömbbe maximális térfogatú téglatestet!*

13. gyakorlat (2012. május 14.), 2. ZH

Az órai feladatok bizonyítás nélkül felhasználhatóak, amennyiben pontosan kimondásra kerülnek. Munkaidő 80 perc, minden feladat 10 pontot ér.

13.1. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást!*

13.2. feladat. *Egy háromszög beírt körének sugara r, hozzáírt köreinek sugarai rendre r_a, r_b és r_c. Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = 1.$$

13.3. feladat. *Egy háromszög belső szögei α, β, γ. Mutassuk meg, hogy*

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \leq \frac{1}{8}.$$

13.4. feladat. *Egy K konvex ötszög minden oldalát belülről érint egy 5 egység sugarú kör, K kerülete 60. Az ötszög oldalait kifele 1 egységgel eltoljuk, így kapjuk a K' ötszöget. Igazoljuk, hogy $T(K') > 213$.*

13.5. feladat. *Egy sávon két párhuzamos egyenes által határolt síkrészt értjüük, szélességén az egyenesek távolságát. Egy egységnyi átmérőjű kört lefed néhány sáv. Mutassuk meg, hogy a sávok szélességeinek összege legalább egy.*

13.6. feladat. *Egy háromszög oldalai a, b, c. Mutassuk meg, hogy*

$$a^2(-a+b+c) + b^2(a-b+c) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

14. Egyéb kiadott példák

14.1. feladat. *Egy derékszögű háromszög befogói a és b, beírt körének sugara r. Mutassuk meg, hogy*

$$2+\sqrt{2} \leq \frac{2ab}{(a+b)r} < 4.$$

14.2. feladat. *Egy R sugarú kerek asztalon elhelyeztünk n darab r sugarú pénzérmét úgy, hogy minden érme egy teljes lapjával az asztalon fekszik. Az asztalra újabb érme már nem helyezhető el. Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right) \leq \sqrt{n} \leq \frac{R}{r}.$$

14.3. feladat. *A P, Q és R pontok úgy helyezkednek el az O középpontú*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

egyenletű ellipszoidon, hogy az OP, OQ, OR szakaszok páronként merőlegesek egymásra. Mutassuk meg, hogy a PQR sík és O távolsága nem függ P, Q, és R megválasztásától.

14.4. feladat. *Az $ABC_\triangle$ háromszög belsejében levő P pontra $PAB\angle = PBC\angle = PCA\angle = \varphi$. Mutassuk meg, hogy ha a háromszög szögei α , β és γ , akkor*

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}.$$