Háromszögek fedése két körrel

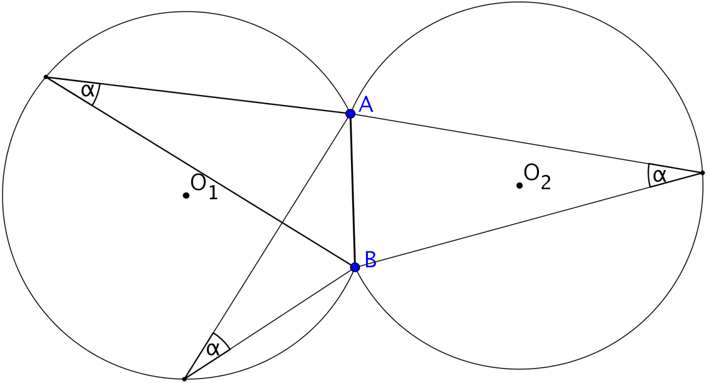
Vígh Viktor

SZTE Bolyai Intézet, Geometria Tanszék

2010. április 24.

Motiváció

Jól ismert a kerületi szögek tétele, vagy más megfogalmazásban a látókörív tétel.



Motiváció

A tételből a következő állítás adódik:

Motiváció

A tételből a következő állítás adódik:

Definíció

Jelöljük azon háromszögek halamzát, amelyeknek egységnyi oldalukkal szemben γ szög van H_γ-val,

$$H_\gamma = \{ABC\triangle \mid c = 1 \text{ és } C\angle = \gamma\}.$$

Motiváció

A tételből a következő állítás adódik:

Definíció

Jelöljük azon háromszögek halamzát, amelyeknek egységnyi oldalukkal szemben γ szög van H_γ-val,

$$H_\gamma = \{ABC\triangle \mid c = 1 \text{ és } C\angle = \gamma\}.$$

Állítás

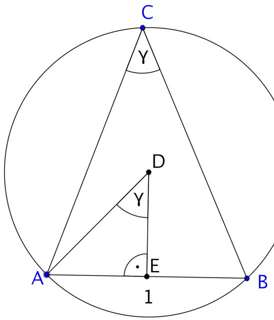
Minden $H \in H_\gamma$ háromszög lefedhető egy $1/(2\sin\gamma)$ sugarú körrel.

Motiváció

Állítás

Minden $H \in H_\gamma$ háromszög lefedhető egy $1/(2\sin\gamma)$ sugarú körrel.

Magyarázat:

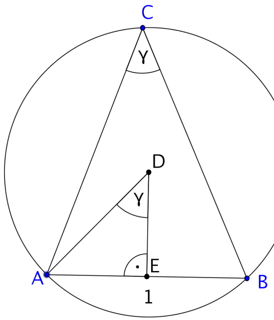


Motiváció

Állítás

Minden $H \in H_\gamma$ háromszög lefedhető egy $1/(2\sin\gamma)$ sugarú körrel.

Magyarázat:



Definíció $\Longrightarrow$ $\sin\gamma = \frac{AE}{AD} = \frac{1/2}{R}$

Problémafelvetés

Kérdés

Mit mondhatunk akkor, ha nem egy, hanem két kört használunk? Pontosabban: határozzuk meg azt a legkisebb R_γ sugarat, amire teljesül, hogy kettő R_γ sugarú körrel minden H_γ-beli háromszög lefedhető!

Problémafelvetés

Kérdés

Mit mondhatunk akkor, ha nem egy, hanem két kört használunk? Pontosabban: határozzuk meg azt a legkisebb R_γ sugarat, amire teljesül, hogy kettő R_γ sugarú körrel minden H_γ-beli háromszög lefedhető!

Kérdés

Speciálisan: igazoljuk, hogy két $1/2$ sugarú körrel minden olyan háromszög lefedhető, amelynek egyik oldala egységnyi, és ezzel az oldallal szemben 45°-os szög van! (Arany Dániel Matematikaverseny, 1999.)

Értsük meg a problémát

Háromszögek egy családjának **minden** elemét akarjuk lefedni **minimális** sugarú körpárral. Értelmes a kérdés? Mindig lefedhető a család minden eleme két körrel? Van minimális?

Értsük meg a problémát

Háromszögek egy családjának **minden** elemét akarjuk lefedni **minimális** sugarú körpárral. Értelmes a kérdés? Mindig lefedhető a család minden eleme két körrel? Van minimális?

Világos, hogy

$$R_\gamma \leq \frac{1}{2\sin\gamma}.$$

Másrészt

$$R_\gamma \geq \frac{1}{4}.$$

A minimális sugár létezése ezek alapján legalábbis „hihető”.

Értsük meg a problémát

Háromszögek egy családjának **minden** elemét akarjuk lefedni **minimális** sugarú körpárral. Értelmes a kérdés? Mindig lefedhető a család minden eleme két körrel? Van minimális?
Világos, hogy

$$R_\gamma \leq \frac{1}{2\sin\gamma}.$$

Másrészt

$$R_\gamma \geq \frac{1}{4}.$$

A minimális sugár létezése ezek alapján legalábbis „hihető”.
R_γ meghatározásához két dolgot kell ellenőriznünk:

- valóban **minden** elemet le lehet fedni ekkora sugarú körökkel,
- legalább egy háromszöghöz **kellenek** is ekkora körök.

A megoldás vázlata

A megoldás során négy különböző esetet célszerű tárgyalni:

(1) $\gamma < 45^\circ$,

(2) $45^\circ \leq \gamma < 60^\circ$,

(3) $60^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$,

(4) $90^\circ < \gamma$.

A megoldás vázlata

A megoldás során négy különböző esetet célszerű tárgyalni:

(1) $\gamma < 45^\circ$,

(2) $45^\circ \leq \gamma < 60^\circ$,

(3) $60^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$,

(4) $90^\circ < \gamma$.

Jegyezzük újra meg, hogy a teljes megoldáshoz az eddig elmondottak szerint összesen 8 lépést kell ellenőriznünk.

A megoldás vázlata

A megoldás során négy különböző esetet célszerű tárgyalni:

(1) $\gamma < 45^\circ$,

(2) $45^\circ \leq \gamma < 60^\circ$,

(3) $60^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$,

(4) $90^\circ < \gamma$.

Jegyezzük újra meg, hogy a teljes megoldáshoz az eddig elmondottak szerint összesen 8 lépést kell ellenőriznünk. Előrebocsájtjuk, hogy mindig a γ szárszögű egyenlőszárú háromszög lesz az, amivel alsó becslést adunk R_γ-ra.

Észrevétel

A skatulya-elv miatt van olyan kör, ami a háromszög legalább két csúcsát lefedi. Ebből a következő hasznos állítás adódik.

Állítás (A legrövidebb oldal korlát)

Ha egy háromszöget két egyforma sugarú körrel lefedünk, akkor a körök átmérője legalább akkora, mint a háromszög (egyik) legrövidebb oldala.

Észrevétel

A skatulya-elv miatt van olyan kör, ami a háromszög legalább két csúcsát lefedi. Ebből a következő hasznos állítás adódik.

Állítás (A legrövidebb oldal korlát)

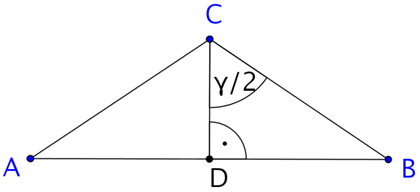
Ha egy háromszöget két egyforma sugarú körrel lefedünk, akkor a körök átmérője legalább akkora, mint a háromszög (egyik) legrövidebb oldala.

Ezt az állítást H_γ egy speciális elemére alkalmazva alsó korlátot kapunk R_γ-ra.

Először megoldjuk a (4)-es alesetet, vagyis ha $\gamma > 90^\circ$. Ehhez számítsuk ki először a γ szárszögű egyenlőszárú háromszög szárának hosszát.

A tompaszögű eset ($\gamma > 90°$)

Először megoldjuk a (4)-es alesetet, vagyis ha $\gamma > 90°$. Ehhez számítsuk ki először a γ szárszögű egyenlőszárú háromszög szárának hosszát.



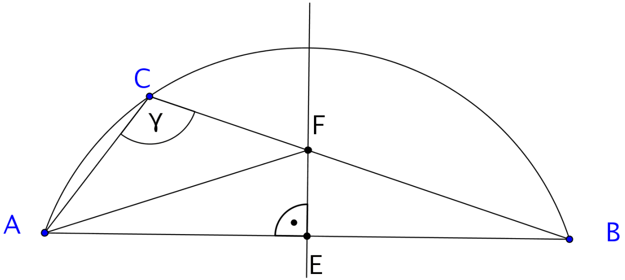
Az ábráról leolvasható, hogy $BC = \frac{1}{2\sin\frac{\gamma}{2}}$. Innen adódik a legrövidebb oldal korlát miatt, hogy $R_\gamma \geq \frac{1}{4\sin\frac{\gamma}{2}}$.

A tompaszögű eset ($\gamma > 90^\circ$)

Másrészt két $\frac{1}{4\sin\frac{\gamma}{2}}$ sugarú körrel valóban bármelyik H_γ-beli háromszög lefedhető.

A tompaszögű eset ($\gamma > 90°$)

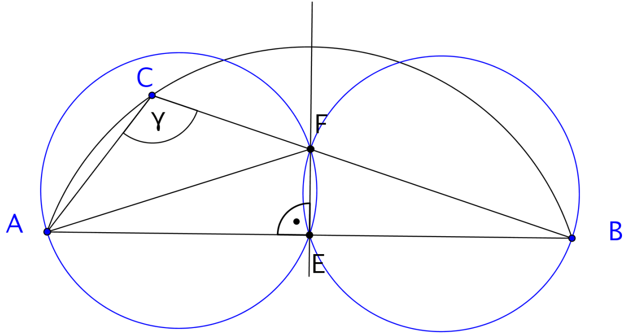
Másrészt két $\frac{1}{4\sin\frac{\gamma}{2}}$ sugarú körrel valóban bármelyik H_γ-beli háromszög lefedhető. Ehhez tekintsük a következő ábrát:



Itt $AFB\angle \geq \gamma$ és így $BF \leq \frac{1}{2\sin\frac{\gamma}{2}}$.

A tompaszögű eset ($\gamma > 90^\circ$)

Így az AF és BF szakaszok fölé rajzolt Thalész-körök sugara legfeljebb $\frac{1}{4\sin\frac{\gamma}{2}}$, és ketten együtt lefedik a háromszöget.



Az eddigiekből következik, hogy $\gamma > 90^\circ$ esetén $R_\gamma = \frac{1}{4\sin\frac{\gamma}{2}}$.

Most megmutatjuk, hogy $\gamma \leq 90^\circ$ esetben elegendő nem tompaszögű háromszögekre szorítkozni. Ez hasznos lesz a további elemzés rövidítéséhez, mivel majd a magasságpontot használni fogjuk.

Hegyesszög kontra tompaszög

Most megmutatjuk, hogy $\gamma \leq 90^\circ$ esetben elegendő nem tompaszögű háromszögekre szorítkozni. Ez hasznos lesz a további elemzés rövidítéséhez, mivel majd a magasságpontot használni fogjuk.

Vegyük észre, hogy ha $\triangle_1 \subset \triangle_2$, akkor a $\triangle_2$-t fedő körök világos módon fedik $\triangle_1$-t is, másrészt $\triangle_2$ fedéséhez legalább akkor körök kellenek, mint $\triangle_1$-hez. Ezért ha $\triangle_1, \triangle_2 \in H_\gamma$, és $\triangle_1 \subset \triangle_2$, akkor R_γ meghatározása szempontjából $\triangle_1$ irreleváns, figyelmen kívül hagyható.

Hegyesszög kontra tompaszög

Állítás

Ha $\gamma < 90^\circ$ *és* $\triangle_1 \in H_\gamma$ *háromszög tompaszögű, akkor létezik* $\triangle_2 \in H_\gamma$ *hegyesszögű háromszög, hogy* $\triangle_1 \subset \triangle_2$.

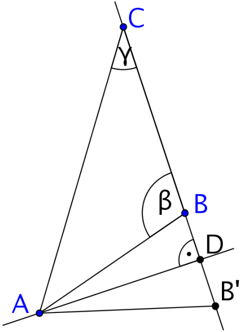
Hegyesszög kontra tompaszög

Állítás

Ha $\gamma < 90^\circ$ és $\triangle_1 \in H_\gamma$ háromszög tompaszögű, akkor létezik $\triangle_2 \in H_\gamma$ hegyesszögű háromszög, hogy $\triangle_1 \subset \triangle_2$.

Bizonyítás:

Legyen $\beta > 90^\circ$, az ábra szerint. Az $AB'C\triangle \in H_\gamma$, szögei γ, $180^\circ - \beta$ és $\beta - \gamma$. A tompaszög γ-val csökkent. Addig ismételjük, amíg hegyeszögű lesz.



Egy hasznos lemma

Állítás

Az $ABC\triangle$ hegyesszögű háromszögben a C csúcsnál levő γ szöggel szemben fekvő oldal egységnyi, M a magasságpont. Ekkor

$$CM = \frac{1}{\tan\gamma}.$$

Egy hasznos lemma

Állítás

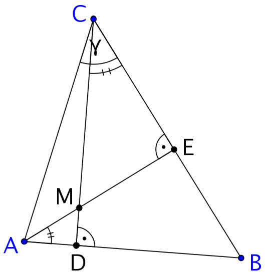
Az $ABC\triangle$ hegyesszögű háromszögben a C csúcsnál levő γ szöggel szemben fekvő oldal egységnyi, M a magasságpont. Ekkor

$$CM = \frac{1}{\tan\gamma}.$$

Bizonyítás:

$$\frac{CE}{CM} = \frac{AE}{1},$$

$$CM = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{\tan\gamma}.$$



„Kövér" háromszögek ($45° \leq \gamma < 60°$)

Rátérhetünk a (2)-es esetre, amikor $45° \leq \gamma < 60°$. (Ez az eset tartalmazza az Arany Dániel feladat megoldását.)

„Kövér" háromszögek ($45^\circ \leq \gamma < 60^\circ$)

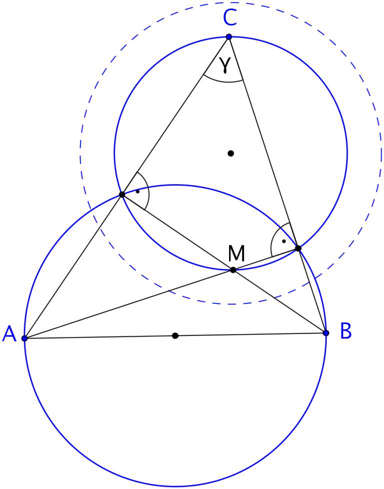
Rátérhetünk a (2)-es esetre, amikor $45^\circ \leq \gamma < 60^\circ$. (Ez az eset tartalmazza az Arany Dániel feladat megoldását.)
Először is jegyezzük meg, hogy γ szászögű egyenlőszárú háromszög legkisebb szöge γ, így a vele szemben fekvő egységnyi oldala a legrövidebb oldala. Ebből következik a legrövidebb oldal korlát miatt, hogy $R_\gamma \geq 1/2$.

Rátérhetünk a (2)-es esetre, amikor $45^\circ \leq \gamma < 60^\circ$. (Ez az eset tartalmazza az Arany Dániel feladat megoldását.)
Először is jegyezzük meg, hogy γ szászögű egyenlőszárú háromszög legkisebb szöge γ, így a vele szemben fekvő egységnyi oldala a legrövidebb oldala. Ebből következik a legrövidebb oldal korlát miatt, hogy $R_\gamma \geq 1/2$.
Vegyük észre, hogy $\tan 45^\circ = 1$, és így $\tan\gamma \geq 1$, ha $45^\circ \leq \gamma < 60^\circ$. Ezt beírva az előző lemmánkba nyerjük, hogy

$$CM = \frac{1}{\tan\gamma} < 1.$$

„Kövér” háromszögek ($45° \leq \gamma < 60°$)

Így az AB és CM szakaszok Thalész-körei lefednek tetszőleges H_γ-beli háromszöget, ha $45° \leq \gamma < 60°$.



„Kövér” háromszögek ($45^\circ \leq \gamma < 60^\circ$)

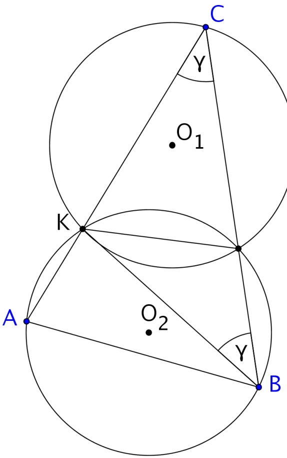
Az eddigiekből következik, hogy $R_\gamma = 1/2$ minden $45^\circ \leq \gamma < 60^\circ$ esetén! Vegyük továbbá azt is észre, hogy ezek a háromszögek nem fedhetők le „gazdaságosan” két egyforma sugarú körrel, a fedések mindig „lötyögnek”. Ennek szemléletes oka, hogy a vizsgált háromszögek „kövérek”.

„Kövér” háromszögek ($45^\circ \leq \gamma < 60^\circ$)

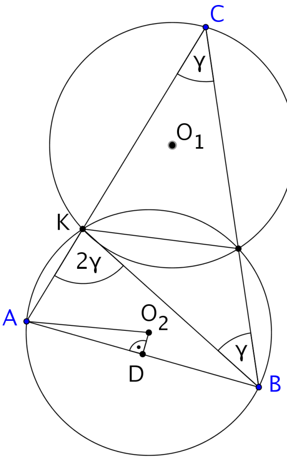
Az eddigiekből következik, hogy $R_\gamma = 1/2$ minden $45^\circ \leq \gamma < 60^\circ$ esetén! Vegyük továbbá azt is észre, hogy ezek a háromszögek nem fedhetők le „gazdaságosan” két egyforma sugarú körrel, a fedések mindig „lötyögnek”. Ennek szemléletes oka, hogy a vizsgált háromszögek „kövérek”.

Térjünk rá (1)-es esetre, vagyis amikor $\gamma < 45^\circ$!

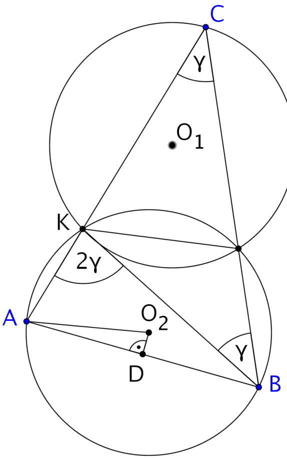
A $\gamma < 45°$ esetről



A $\gamma < 45°$ esetről



A $\gamma < 45^\circ$ esetről



$$AO_2D\angle = 2\gamma \implies AO_2 = \frac{1}{2\sin 2\gamma}$$

Ezekből látszik, hogy minden H_γ-beli háromszög lefedhető két $\frac{1}{2\sin 2\gamma}$ sugarú körrel.

A $\gamma < 45^\circ$ esetről

Ezekből látszik, hogy minden H_γ-beli háromszög lefedhető két $\frac{1}{2\sin 2\gamma}$ sugarú körrel.

Annak a precíz bizonyítása, hogy ekkora sugár kell is egy kicsit nehezebb. (Itt is az egyenlőszárú háromszögre érdemes végiggondolni, de megjegyezzük, hogy az előzőekből úgy tűnik, hogy minden hegyesszögű háromszöghöz legalább ekkora kell.)

Kapjuk, hogy $R_\gamma = \frac{1}{2\sin 2\gamma}$, ha $\gamma < 45^\circ$.

Az eredmény

A $60^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ eset megoldása kijön az eddigiekből és a sinus-tételből. Az alsó becsléshez használhatjuk a legrövidebb oldal korlátot az egyenlőszárú háromszögre.

Az eredmény

A $60^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ eset megoldása kijön az eddigiekből és a sinus-tételből. Az alsó becsléshez használhatjuk a legrövidebb oldal korlátot az egyenlőszárú háromszögre.
Összefoglalva:

$$R_\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2\sin 2\gamma} & \text{, ha } \gamma < 45^\circ \\ \frac{1}{2} & \text{, ha } 45^\circ \leq \gamma < 60^\circ \\ \frac{1}{4\sin\frac{\gamma}{2}} & \text{, ha } 60^\circ \leq \gamma \end{cases}$$

Hogyan tovább?

Oldjuk meg a nyitva hagyott kérdéseket, tegyük teljessé a megoldást!

Hogyan tovább?

Oldjuk meg a nyitva hagyott kérdéseket, tegyük teljessé a megoldást!

Nehezíthetünk a problémán úgy, hogy lényegében minden háromszögre külön tesszük fel a kérdést. Célszerű két szöggel jellemezni a háromszögeket, így felhasználhatjuk eddigi eredményeinket.

Hogyan tovább?

Oldjuk meg a nyitva hagyott kérdéseket, tegyük teljessé a megoldást!

Nehezíthetünk a problémán úgy, hogy lényegében minden háromszögre külön tesszük fel a kérdést. Célszerű két szöggel jellemezni a háromszögeket, így felhasználhatjuk eddigi eredményeinket.

Mi történik, ha nem feltétlen egyforma köröket használunk, és a sugarak összegét akarjuk a lehető legkisebbé tenni? (Nehéznek tűnik.)

Hogyan tovább?

Oldjuk meg a nyitva hagyott kérdéseket, tegyük teljessé a megoldást!

Nehezíthetünk a problémán úgy, hogy lényegében minden háromszögre külön tesszük fel a kérdést. Célszerű két szöggel jellemezni a háromszögeket, így felhasználhatjuk eddigi eredményeinket.

Mi történik, ha nem feltétlen egyforma köröket használunk, és a sugarak összegét akarjuk a lehető legkisebbé tenni? (Nehéznek tűnik.)

Az igazi nehézségek általában akkor kezdődnek, ha 3 alakzattal (körrel) fedünk, a területen még számtalan megoldatlan probléma van.

Köszönöm a megtisztelő figyelmet!

[1] http://www.math.u-szeged.hu/~vigvik/egytavasz2010.pdf