Közönséges differenciálegyenletek

2. házi feladat

Beadási határidő: 2011. okt. 13.

1. Az alábbi kezdetiérték-problémákhoz adjuk meg a megoldás $I_{(t_0,x_0)}$ maximális létezési intervallumát! Igazoljuk az állítást! (Nem feltétlenül kell kiszámolni a megoldást. Órai tételekre lehet hivatkozni, de az pontos hivatkozás legyen.)

(a): $x' = x^3,\ x(0) = 0,$

(b): $x' = x^3,\ x(0) = 1,$

(c): $x' = -x^3,\ x(0) = 1,$

(d): $x' = (x-1)(x+3),\ x(0) = -1,$

(d): $x' = (x-1)(x+3),\ x(0) = 2.$

2. Legyen f az alábbi módon definiálva:

$$f(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0 \\ 2t, & \text{ha } t > 0,\ x \le 0 \\ 2t - 4x/t, & \text{ha } t > 0,\ 0 < x < t^2 \\ -2t, & \text{ha } t > 0,\ x \ge t^2 \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy f folytonos, de nem lokálisan Lipschitz folytonos. Igazoljuk, hogy az $x' = f(t,x),\ x(0) = 0$ kezdetiérték-problémára a Picard-iterációval kapott (φ_m) sorozat nem konvergens, és nincs olyan konvergens részsorozata, amely egy megoldáshoz konvergál.

3. Igazoljuk, hogy a $xy' = y\ln y,\ y(0) = 1$ kezdetiérték-problémának végtelen sok megoldása van a számegyenesen!

4. Találjuk meg az adott jelenséget modellező egyenletet! Több is lehet. A paraméterek pozitívak.

(a) Forró vízbe merített hőmérő által mutatott hőmérséklet. Newton törvénye szerint a hőmérséklet-változás egyenesen arányos a hőmérő és környezete hőmérsékletének különbségével.

(b) Ejtőernyős süllyedési sebessége. A légellenállás arányos a sebesség négyzetével. (A pozitív irány lefelé mutat.)

(c) Esőcsepp térfogatváltozásának sebessége, ha az a felületével arányos sebességgel párolog.

(d) Egy beteg gyógyszert vett be. Az egyenlet leírja a vérben lévő gyógyszermennyiséget a t időben. A vérben lévő gyógyszermennyiség fogyásának sebessége arányos a vérben lévő gyógyszermennyiséggel.

(e) Ugyanaz mint (d), de intravénásan állandó sebességgel gyógyszer áramlik a vérbe.

(1) $y' = -ky + cy^2$	(6) $y' = -ky - c$	(11) $y' = ky^{1/3} + c$
(2) $y' = -ky - cy^2$	(7) $y' = -ky$	(12) $y' = ky^{2/3} + c$
(3) $y' = ky + cy^2$	(8) $y' = k - cy^2$	(13) $y' = -ky^{2/3}$
(4) $y' = -k(y - c)$	(9) $y' = k + cy^2$	(14) $y' = ky^{2/3}$
(5) $y' = ky - cy^2$	(10) $y' = -ky + c$	(15) $y' = -ky^{2/3} + c$