Gyakorló feladatok a Közönséges differenciálegyenletek kurzushoz

Vas Gabriella

2014. február

A feladatgyűjtemény a TÁMOP-4.2.4.A/2-11/1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Bevezető példák

1. Példa. Egy laboratóriumi tenyészetben a baktériumok számának növekedési sebessége egyenesen arányos a baktériumok számával. A populáció kezdeti mérete egy óra alatt megkétszereződött. Hányszorosára nő $3,5$ óra alatt?

2. Példa. Newton hűlési törvénye: kis méretű test hőmérsékletének változása minden időpillanatban egyenesen arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével. Egy kicsi vasgolyót beleteszünk az éppen forrásban lévő vízbe, majd felmelegedése után kivesszük a $20°C$ hőmérsékletű szobába. 1 perc alatt $30°C$-ot hűlt le. Mennyi idő múlva hűl le újabb $30°C$-ot? (Megoldás: ≈ 2 perc)

3. Példa. Gyilkosság történt egy motelban. A rendőrök kiérkezésekor a holttest hőmérséklete $27°C$, 1 órával később $25°C$. A motelban a légkondicionálót $20°C$-ra állították. Mikor történt a gyilkosság?

4. Állítás. Motorcsónak sebessége állóvízben 20 km/h. Teljes sebességgel halad, majd a motor leáll, és ezután 40 sec alatt a csónak sebessége 8 km/h-ra csökken. A víz ellenállása (és így a csónak lassulása) egyenesen arányos a csónak sebességével. Mekkora a sebesség 2 perccel a motor kikapcsolása után? ($1,28$ km/h)

5. Példa. Tegyük fel, hogy $y' = ay - H$, $y(0) = y_0$ egy halpopulációt modellez, ahol $a > 0$, $H > 0$ és $0 < y_0 < H/a$. Határozzuk meg azt a t^* időpontot, amikor a populáció kipusztul.

6. Példa. Radioaktív bomlás esetén a bomlás sebessége minden időpillanatban egyenesen arányos a még bomlatlan atomok számával. Egy régész olyan kagylót talál, ami az élő kagyló $C - 14$ izotóp tartalmához képest körülbelül 60 %-nyi $C - 14$ izotópot tartalmaz. Hány éves lehet a lelet?

7. Példa. Rajzoljuk fel az iránymezőt!

$$\begin{array}{lll} y' = 5 - y; & y' = y^2 - 1; & y' = \cos t; \\ y' = \cos y; & y' = -\frac{x}{y}; & y' - 2y = 3e^t; \\ y' = y\left(y^2 - 5y + 6\right); & y' = \frac{y}{x}; & y' = \frac{2y}{x}. \end{array}$$

Integrálható típusú differenciálegyenletek

8. Példa. Oldjuk meg az $y' = f(x)$ differenciálegyenletet, ahol

$$\begin{array}{lll} f(x) = \frac{1}{x+a},\ a \in \mathbb{R}; & f(x) = \frac{1}{2+3x^2}; & f(x) = \frac{1}{2-3x^2}; \\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}; & f(x) = \frac{1}{\cos x}; & f(x) = \frac{1+x}{1-x}; \\ f(x) = \frac{x^2}{1+x}; & f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+3)}. & \end{array}$$

Cél: az alapvető integrálási technikák ismétlése. Mindegyik esetben határozzuk meg azt a maximális $I_{(x_0,y_0)}$ intrevallumot, amelyen az $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-problémának létezik megoldása!

9. Példa. Oldjuk meg a következő szétválasztható típusú, elsőrendű lineáris, homogén típusú valamint Bernoulli-féle egyenleteket!

$$\begin{array}{ll}
y' - y^2 - 3y + 4 = 0; & x^2(y^2+1) + 2(x-1)yy' = 0,\ y(-2) = 1; \\
xy' = y\ln y,\ y(2) = e^6; & y' + 3y = 2e^{-3x}; \\
xy'\cos y + \sin y = 0; & xy' - (1+x)y = x^2 - x^3; \\
xy\mathrm{d}y - (1-y^2)\,\mathrm{d}x = 0; & (1-x^2)y' + xy = 1,\ y(0) = 1; \\
y' = -1 - \frac{y}{x}; & xy\mathrm{d}y + \sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x = 0,\ y(0) = 3e,\ |x| < 1; \\
y' = \frac{2xy\ln y}{x^2-1}; & (2x+y)\,\mathrm{d}x + (y+x)\,\mathrm{d}y = 0,\ y(1) = 1; \\
3xy' = 3y + 2y^2; & y' - 2y = e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x; \\
\left(xe^{\frac{y}{x}} + y\right)\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y; & y' - 2y = e^{3x}\cos x - e^{3x}\sin x; \\
y' = \frac{e^{t-y}}{e^t+1},\ y(0) = 1; & \left(y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y + y\cos\frac{x}{y}\mathrm{d}x = 0; \\
y' - xy = -xy^3 & y' + \frac{y}{x} = y^2\ln x, \quad y(1) = \frac{1}{2}; \\
y' + y\tan x = \sin 2x; & y'\cos x + y\sin x - \cos^2 x = 0; \\
y' - 2y = x^2 + 2e^x\sin x; & y' + \frac{y}{x} + e^x = 0,\ y(1) = 0; \\
y' = 5y + e^{-2x}y^{-2;} & y' + \frac{4y}{x} = x^3y^2,\ y(2) = -1; \\
xy' - (y + xy^3(1+\ln x)) = 0; & y' + y = y^2(\cos x - \sin x).
\end{array}$$

Megoldások létezése, egyértelműsége, numerikus közelítése

10. Példa. Lipschitz-folytonosak-e a következő függvények a megadott halmazon? A választ indokoljuk.

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \sqrt[3]{x}, && I = (-1,1);\\
&f(x) = \sin x, && I = (-1,1);\\
&f(x) = x^n \ n \text{ páratlan egész}, && I = (-1,1);\\
&f(x) = x^n \ n \text{ páratlan egész}, && I = \mathbb{R};\\
&f(x) = \tfrac{1}{1-x}, && I = \left[0, \tfrac{1}{2}\right];\\
&f(x) = \tfrac{1}{1-x}, && I = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right);\\
&f(x,y) = \tfrac{xy}{1+x^2+y^2}, && x^2+y^2 \le 4;
\end{aligned}
$$

11. Példa. Igazoljuk, hogy a $2(y-1)y' = 3x^2 + 4x + 2$, $y(-2) = 1$ kezdetiérték-problémának több megoldása van a $[-2,\infty)$ intervallumon!

12. Példa. Picard-iteráció segítségével adjuk meg az

$$
\begin{aligned}
&x' = 1 - x, && x(0) = 1;\\
&y' = 2y, && y(0) = 1;\\
&y' = y - x, && y(0) = 2
\end{aligned}
$$

kezdetiérték-problémák megoldását. Az egyenletek analitikus megoldásával ellenőrizhetjük az eredményt ($y \equiv 1$, $y = e^{2x}$, $y = 1 + x + e^x$).

13. Példa. Az Euler-módszer célja az

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

kezdetiérték-probléma megoldásának numerikus közelítése. Legyen $\Delta t > 0$ rögzített és legyen $t_k = t_{k-1} + \Delta t$ minden $n \geq 1$ esetén. A módszer $x(t_k)$-t (a kezdetiérték-probléma megoldásának t_k időpillanatban felvett értékét) $x_k \in \mathbb{R}$-rel közelíti, ahol x_k definíciója a következő:

$$x_k = x_{k-1} + f(t_k, x_k)\,\Delta t, \quad k \geq 1.$$

Keressünk olyan példát, amikor a módszer $\Delta t = 0,5$ lépésközzel monoton növekvő (x_k) sorozatot ad, miközben a valódi megoldás periodikus.

Lineáris rendszerek

Adjuk meg $x' = Ax$ általános megoldását és vázoljuk az egyenletrendszer fázisképét, ha

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -64 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

14. Példa. További kétdimenziós példák. Adjuk meg $x' = Ax$ általános megoldását és vázoljuk az egyenletrendszer fázisképét, ha

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. Példa. Rajzoljuk fel az $x' = Ax$ ($A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$) egyenletrendszer lehetséges fázisképeit, ha a 0 sajátértéke A-nak. (Vegyük észre, hogy vagy létezik egy sajátegyenes, ami csak egyensúlyi helyzetekből áll, vagy a sík minden pontja egyensúlyi helyzet.)

16. Példa. A k paraméter milyen választása mellett lesz $(0,0)^{\mathrm{tr}}$ forrás?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ k & -4 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a & -k \\ k & 2 \end{pmatrix}.$$

17. Példa. Egészítsük ki a 14. feladatban szereplő rendszereket az

$$x_3' = x_3$$

egyenlettel. Milyen a fáziskép?

18. Példa. Adjuk meg $x' = Ax$ általános megoldását és vázoljuk az egyenletrendszer fázisképét, ha

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Példa. További példák. Adjuk meg az $x' = Ax$ rendszer általános megoldását, ha

$$(a): \ A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \ (b): \ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(c): \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ (d): \ A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(e): \ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ (f): \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Segítség: a (b) példában a sajátértékek: 1 (kétszeres sajátérték) és 5.

20. Példa. Oldjuk meg a konstansvariációs formulával:

$$x' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x' = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

21. Példa. Oldjuk meg Laplace-transzformáció segítségével:

$y\text{"} + y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

$y'' + 2y' + 2y = e^{-2t} \sin(4t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2;$

$y'' + 4y' + 4y = e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

$y''' - y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1;$

$y''' + y'' + 4y' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1;$

$y^{(4)} + 3y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y"(0) = 0, \quad y'''(0) = 0;$

$x' = -7x + y + 5, y' = -2x - 5y - 37t, \ x(0) = 0, \ y(0) = 0;$

$x' = 3x + 5y, \ y' = -5x + 3y, \ x(0) = 1, \ y(0) = 0;$

$x'' + 3x' + 2x + y' + y = 0, \ x' + 2x + y' - y = 0, \ x(0) = 1, \ x'(0) = -1, \ y(0) = 0.$

22. Példa. Oldjuk meg konstansvariációs módszerrel:

$$y" - 3y' + 2y = \sin t; \quad y" - y = 2e^t - t^2;$$

$$y" - 2y' + y = 6te^t; \quad y" + 6y' + 9y = 2e^{-3t};$$

$$y" + 4y = 2\tan(2t); \quad y" + y = 4te^t;$$

$$y" + y = 2t\sin t; \quad y" + 6y' + 9y = 2te^{-3t};$$

23. Példa. Oldjuk meg konstansvariációs módszerrel:

$$y" + 3y' + 2y = 0, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1;$$

$$y" + 4y = \cos 2t, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$$

A b és c paraméterek milyen választása mellett lesz az $y" + by' + cy = 0$ egyenletnek nemtriviális periodikus megoldása? Adjuk meg a periódust.

24. Példa. Az alábbi függvények közül melyik lehet $y" + by' + cy = 0$ alakú egyenlet megoldása?

$$te^t, \ t^2 - t, \ \cos 2t + 3\sin 2t, \ \cos 2t + 2\sin 3t, \ e^t + 4, \ 3t - 9$$

Első integrálok, Ljapunov-függvények

25. Példa. Az $U(x,y) = \ln(xy)$ függvény segítségével állapítsuk meg, hogy mely görbéken haladnak az első síknegyedben a megoldások:
$x' = xy$, $y' = -y^2$.
Stabil-e az $(1,0)$ egyensúlyi helyzet?

26. Példa. Döntsük el, hogy az $U_1(x,y) = x \ln y - x^2 y$ illetve az $U_2(x,y) = y^2/x^2 - 2\ln x$ függvények első integráljai-e az

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

rendszernek. A választ indokoljuk.

27. Példa. Keressünk Ljapunov-függvényt $V(x,y) = ax^2 + y^2$ vagy $V(x,y) = ax^2 + bxy + y^2$ alakban, és vizsgáljuk a $(0,0)$ egyensúlyi helyzet stabilitását:

$x' = -x - x^3$, $y' = -y$;

$x' = x + x^2$, $y' = -y$;

$x' = y$, $y' = -9x$;

$x' = -x^3 + x^3 y - x^5$, $y' = y + y^3 + x^4$;

$x' = -2x - xe^{xy}$, $y' = -y - ye^{xy}$.

28. Példa. Keressünk Ljapunov-függvényt $V(x,y) = ax^{2m} + y^{2n}$ alakban n és m pozitív egészekkel, és vizsgáljuk a $(0,0)$ egyensúlyi helyzet stabilitását:

$x' = -x^3 + y^3$, $y' = -x^3 - y^3$;

$x' = -2y^3$, $y' = 2x - y^3$.

29. Példa. Mutassuk meg, hogy az $x' = (x-y)^2(-x+y)$, $y' = (x-y)^2(-x-y)$ rendszer esetén az origó stabil, de nem aszimptotikusan stabil.

Fázisképek nemlináris rendszerekre

30. Példa. Versengő fajok. Az iránymező vizsgálatával rajzoljuk fel az

$$\begin{aligned} x' &= 2x\left(1-\frac{x}{2}\right)-xy \\ y' &= y\left(\frac{9}{4}-y^2\right)-x^2y \end{aligned}$$

rendszer fázisképét az első síknegyedben.

31. Példa. Adjuk meg a fázisképet a $\{(x,y):\ |x|<3\pi/2,\ |y|<4\}$ téglalapon:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -y-\sin x. \end{aligned}$$

32. Példa. Vázoljuk a fázisképet az egész síkon:

(a): $x'=-2x+y$, $y'=-y+x^2$.

(b): $x'=x+y^2$, $y'=x+y$.

33. Példa. Tekintsük az alábbi autonóm rendszert:

$$\begin{aligned} x' &= x+y-x^3 \\ y' &= -\frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Van-e az egyenletrendszernek periodikus megoldása? Vizsgáljuk a linearizált egyenlet és az iránymezőt. Az így kapott információt vessük össze azzal a (numerikus módszerekkel megfigyelhető) ténnyel, hogy a nagy abszolút értékű kezdeti feltételből induló megoldásokhoz tartozó pályák *befelé* tartva oszcillálnak $(0,0)$ körül.

34. Példa. Konstruáljunk egy olyan rendszert, ahol az $y=1$, $y=x-1$ egyenesek a nullklínák, és minden egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil.

35. Példa. Mutassuk meg, hogy az alábbi egyenletrendszerek Hamilton–rendszerek, adjuk meg a Hamilton–függvényt és vázoljuk a fázisképet!

$$\begin{aligned} x' &= x\cos(xy) \\ y' &= -y\cos(xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x-x^2 \end{aligned}$$

36. Példa. Az

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial x}\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial y}\end{aligned}$$

alakú rendszert, ahol G valós kétszer folytonosan differenciálható függvény, gradiens rendszernek hívjuk.
(a): Igazoljuk, hogy G nő a megoldások mentén: ha $t \mapsto (x(t), y(t))$ megoldás, akkor $t \mapsto G(x(t), y(t))$ monoton nemcsökkenő.
(b): Bizonyítsuk be, hogy ennek a rendszernek nincs centruma, spirális nyelője vagy spirális forrása! Tipp: linearizáljunk az egyensúlyi helyzetek körül.

Kitekintés funkcionál-differenciálegyenletekre

37. Példa. Tekintsük a következő, [1]-ben bevezetett közönséges differenciálegyenletet:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\mu I(t) + \beta k I(t)(1 - I(t)). \tag{0.1}$$

$I(t) \in [0, 1]$ jelöli a fertőzött egyedek arányát egy populáción belül. Az első tag a jobb oldalon azt mutatja, hogy a fertőzött egyedek μ rátával gyógyulnak ki a betegségből. A második tag reprezentálja az újonnan fertőzött egyedeket. Az új fertőzöttek száma arányos a betegség átviteli rátájával (β), azzal, hogy egyes egyedek hány másik emberrel vannak kapcsolatban (k), és azzal a valószínűséggel, hogy egy adott egyed egészséges-e ($1 - I(t)$). Itt μ, β, k pozitív konstansok.

Tételezzük fel, hogy a populáció tagjai csökkentik a többiekkel való találkozásaik számát, ha tudomást szereznek a betegség terjedéséről. Vezessük be a

$$h(I) = \begin{cases} 1, & I < p, \\ q, & I \geq p, \end{cases}$$

függvényt, ahol $0 < p, q < 1$. Tegyük fel, hogy $I < p$ esetén a kapcsolatok száma a

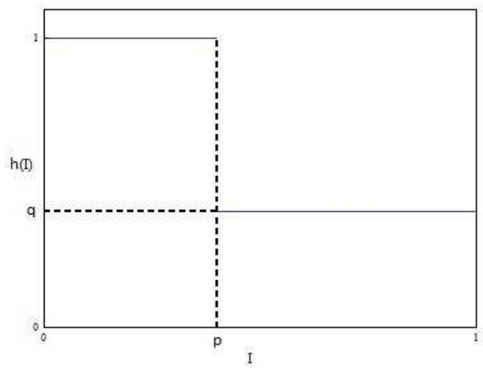

Fig.1. The graph of $h(I)$.

szokásos k, de ha $I \geq p$ (azaz ha a fertőzöttek aránya eléri a p küszöbértéket), akkor az egyedek a másokkal való találkozásaik gyakoriságát qk-ra csökkentik. Ha feltesszük, hogy ezen döntésüket τ késleltetéssel hozzák meg, akkor a következő egyenletre jutunk:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\mu I(t) + \beta k h(I(t - \tau)) I(t)(1 - I(t)). \tag{0.2}$$

Ez már egy funkcionál-differenciálegyenlet! Végül az egyszerűség kedvéért vezessük be az $\tilde{I}(t) = I(\mu^{-1}t)$ transzformációt. Ha felírjuk az $\tilde{I}(t)$-re vonatkozó egyenletet, és elhagyjuk a $\tilde{}$ jelölést, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -I(t) + R_0 h(I(t - \tau)) I(t)(1 - I(t)), \tag{0.3}$$

ahol $R_0 = \frac{\beta k}{\mu}$ az ún. reprodukciós szám. Ezt az egyenletet vizsgálta [2]-ben Liu, Röst és Vas.

Az egyenlet jobb oldala nem folytonos, ez technikai kellemetlenség, hiszen $I'(t)$ nem létezik minden t-re. Ezért azt mondjuk, hogy az $I : [-\tau, \infty) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény megoldás, ha kielégíti a következő integrálegyenletet minden $0 \leq t$ esetén:

$$I(t) = I(0) + \int_0^t I(s)\,[R_0 h(I(s-\tau))(1-I(s)) - 1]\,\mathrm{d}s.$$

Az könnyen látható, hogy ha $I\,(t-\tau) \neq p$, akkor az így definiált megoldás differenciálható t-ben, és kielégíti a (0.3) egyenletet a t időpillanatban.

Igazolható, hogy ha $I\,(t) \in [0,1]$ minden $t \in [-\tau, 0]$ esetén, akkor $I\,(t) \in [0,1]$ minden $t \geq 0$ esetén is, azaz a megoldások nem lépnek ki a $[0,1]$ intervallumból.

Oldjuk meg a következő problémákat:

(a) Azt mondjuk, hogy $I^* \in [0,1]$ egyensúlyi helyzet, ha az $I\,(t) \equiv I^*$ konstans függvény megoldása az egyenletnek. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$-I^* + R_0 h(I^*) I^*(1-I^*) = 0.$$

Határozzuk meg az egyenlet $[0,1]$-beli egyensúlyi helyzeteit az R_0, p, q paraméterek függvényében, pontosabban, ha

$$R_0 \leq 1, \quad 1 < R_0 < \frac{1}{1-p}, \quad \frac{1}{1-p} < R_0 < \frac{1}{q(1-p)}, \quad \text{illetve} \quad R_0 > \frac{1}{q(1-p)}.$$

Az

$$R_0 = \frac{1}{1-p} \quad \text{és} \quad R_0 = \frac{1}{q(1-p)}$$

esetekkel az egyszerűség kedvéért nem foglalkozunk.

(b) Az előző feladat alapján

$$\frac{1}{1-p} < R_0 < \frac{1}{q(1-p)} \tag{0.4}$$

esetén az egyenletnek nincs nemtriviális egyensúlyi helyzete. Mutassuk meg, hogy ekkor minden megoldás oszcillál p körül, azaz minden $I\,(t)$ megoldásra a $\{t \geq 0 : \; I\,(t) = p\}$ halmaz felülről nem korlátos. (Próbáljuk az állítást indirekt igazolni.)

(c) Konstruáljunk olyan $I\,(t)$ periodikus megoldást a (0.4) feltétel mellett, amelyre $I\,(t) \leq p$, ha $t \in [-\tau, 0]$ és $I\,(0) = p$! Szükségünk lesz a következő észrevételekre:

(i) Ha minden $t \in (T_0, T_1)$ esetén $I\,(t-\tau) < p$, akkor (T_0, T_1)-en az egyenlet a következő differenciálegyenletre redukálódik:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -I(t) + R_0 I(t)(1-I(t)),$$

és így a megoldását minden $t \in [T_0, T_1]$-re a

$$\frac{I\,(T_0)\,(R_0 - 1)}{I\,(T_0)\,R_0 + [(1 - I\,(T_0))R_0 - 1]e^{-(R_0-1)t}} \tag{0.5}$$

képlet adja. Hasonlóan, ha minden $t \in (T_0, T_1)$ esetén $I\,(t-\tau) \geq p$, akkor (T_0, T_1)-en az egyenlet a következő differenciálegyenletre redukálódik:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -I(t) + qR_0 I(t)(1 - I(t)),$$

és így a megoldását minden $t \in [T_0, T_1]$-re az alábbi képletek adják:

$$\begin{cases} \frac{I(T_0)(qR_0-1)}{I(T_0)qR_0+[(1-I(T_0))qR_0-1]e^{-(qR_0-1)t}}, & \text{ha } qR_0 \neq 1 \\ \frac{I(T_0)}{I(T_0)t+1}, & \text{ha } qR_0 = 1. \end{cases} \tag{0.6}$$

(ii) Az (i) pontból látszik, hogy ha valamely $T > 0$-val $I(T) = p$ és $I(t) \leq p$, minden $t \in [T - \tau, T]$ esetén, akkor $I(t)$ periodikus megoldás $T > 0$ periódussal.

Használjuk továbbá az (ii) eredményét! Mit tudunk mondani a periódusról mint τ függvényéről?

Irodalomjegyzék

[1] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, „Epidemic dynamics and endemic states in complex networks,” *Phys. Rev. E*, vol. 63, 066117, 2001.

[2] Liu, M., Röst, G., Vas, G., SIS model on homogeneous networks with threshold type delayed contact reduction, *Computers & Mathematics with Applications* **66** (2013) 9, 1534—1546.